

на правах рукописи

Лутошкин Игорь Викторович

**Динамические модели экономических систем
и методы их анализа**

Специальность 1.2.2.

Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ульяновск – 2024

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Современные информационные системы развиваются в сторону решения интеллектуальных задач, традиционно решаемых человеком. Ядром таких систем могут стать математические модели, содержащие блок управления и позволяющие рационально выбирать управляющие воздействия на допустимом множестве. Таким образом, стимулируется разработка новых оптимизационных моделей и методов их применения. Для решения конечномерных оптимизационных задач существует широкий спектр эффективных методов. Однако, если в оптимизационной задаче присутствует фактор времени, то задача существенно усложняется, и требуются специализированные методы. Так в рамках теории оптимального управления (ОУ) развивается моделирование оптимизационных динамических систем.

Основы современной теории ОУ заложены в основном в 1940-60 гг. классическими работами Р. Беллмана, Л.С. Понтрягина и их учеников, когда актуальные проблемы того времени стимулировали развитие нового аппарата моделирования. В первую очередь это были инженерно-технические задачи (управление летательными аппаратами, автоматическое управление, космическая навигация и т.д.). Именно в это время были предложены принцип динамического программирования Беллмана, принцип максимума Понтрягина, достаточные условия оптимальности Кротова.

В 70-е годы 20-го века область приложения теории ОУ вышла за рамки инженерно-технических задач и нашла применение в рамках экономических и социально-экологических проблем. Так на основе аппарата теории ОУ были построены динамические макроэкономические модели (однопродуктовая модель, двухсекторная модель): Р.М. Солоу, Л.В. Канторович, И.Г. Поспелов, Д. Касс, Дж.И. Штиглиц, Л.А. Бекларян, М. Интрилигатор, В.А. Колемаев., В.Ф. Кротов и др. Позднее появились микроэкономические модели (модели фирм, управление рекламными расходами, кредитная стратегия и т.д.): М. Нерлов, К. Дж. Эрроу, М. Л. Видаль, Х. Б. Вольф, М. Блок, В. А. Дыхта, О. Н. Самсолюк, Х. Джян, Л. Липин и др.

При управлении экономическими процессами часто возникает ситуация, при которой реакция системы на внешнее воздействие, изменение свойств системы происходят с запаздыванием во времени: Р. Аллен, А.Г. Гранберг, В.П. Максимов, П.М. Симонов, Дж.-П. Обин, У. Брандт-Поллман и др. Анализ таких процессов возможен на основе математических моделей, учиты-

вающих эффект запаздывания, с последующим применением соответствующих методов.

Потребность в распространении подхода, основанного на применении интеллектуальных информационных систем в управлении экономическими процессами, стимулирует создание новых оптимизационных моделей и методов их анализа.

Степень научной разработанности темы исследования. Современное состояние проблемы численного решения задач ОУ, а также нелинейных и сингулярных (линейных или нелинейных) дифференциальных и интегральных уравнений характеризуется многообразием и сложностью подходов, часто ориентированных на достаточно узкий класс задач (А. В. Аргучинцев, В. А. Срочко, Д. А. Бенсон, А. В. Рао, Ж. Т. Хантингтон, Т. П. Торвальдсен, Ф. Бирал, Е. Бертолаци, П. Босетти, Б. А. Конвэй и др.).

Первым типом методов решения задач ОУ является метод конечно-разностных аппроксимаций (отражен в монографиях Э. Полака, Д. Табака и Б. Куо), когда дифференциальная система заменяется конечно-разностной, ограничения задачи переходят в ограничения на значения сеточных функций, интегралы заменяются соответствующими суммами. К полученной конечномерной задаче НП можно применять соответствующие численные методы НП. К достоинствам подхода стоит отнести универсальность его применения практически к любым задачам ОУ. Недостатки подхода также очевидны: метод приводит, как правило, к задачам большой размерности и сложной структуры; в нем плохо учитывается специфика задач ОУ, именно, динамическая связь дискретизированных фазовых переменных; происходит резкое усложнение задачи с увеличением интервала, на котором решается задача ОУ. Также с уменьшением шага дискретизации растет накапливаемая ошибка, порождаемая соответствующей дискретной схемой.

Второй тип методов базируется на методах, основанных на условиях экстремума, главным образом принципа максимума Л. С. Понтрягина. Эти методы достаточно полно изложены в монографии Н. Н. Моисеева. Они сводят исходную экстремальную задачу к нелинейной краевой задаче относительно фазовых и сопряженных переменных с условием максимума, позволяющим выразить параметры управления через эти переменные. Среди численных методов, принадлежащих данному классу, стоит выделить мето-

ды: сведение задачи ОУ к задаче отыскания корней трансцендентной функции, методы переноса граничных условий, метод Крылова-Черноузько. Данные методы относительно просты для программирования и позволяют использовать стандартных программ. Однако задача получения параметров управления через фазовые и сопряженные переменные в нетривиальных случаях очень сложна. Следующим недостатком данных методов является то, что полученное решение чаще всего является только претендентом на оптимальное. Если на оптимальной траектории встречаются участки с особым управлением, то методы, основанные на принципе максимума Л. С. Понтрягина, становятся неработоспособны в окрестности оптимального решения. Для задач ОУ с промежуточными фазовыми ограничениями необходимые условия формулируются настолько сложно (А. Д. Иоффе, Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко), что применение методов данного класса становится практически невозможным. Также отметим синтетический подход Ю. Г. Евтушенко, сочетающий априорную разностную дискретизацию исходной задачи как в первом классе методов, но на основе схем высокого порядка Рунге-Кутты, и вычисление производных функционалов задачи ОУ с дискретным временем с использованием сопряженных переменных (для каждого функционала своей).

Третий тип методов решения объединяет методы, в которых минимизация функционала исходной задачи выполняется градиентными методами в некотором функциональном пространстве на основе вычисления соответствующих градиентов минимизируемого функционала и функционалов, определяющих ограничения задачи. Градиенты функционалов вычисляются с помощью сопряженных переменных, причем для каждого функционала решается своя сопряженная задача Коши. Этот класс прямых методов (не использующих на итерациях условий экстремума) представлен в монографиях Р. П. Федоренко и Ф. П. Васильева. Метод параметризации, разрабатываемый в диссертации, наиболее близок к методам этого типа. Отдельно можно выделить метод второго порядка, основанный на второй вариации траектории (О. И. Дривотин).

Наиболее развитыми численными методами данного типа являются варианты метода проекции градиента (метод условного градиента, метод минимальной поправки, алгоритм восстановленного градиента и др.) и метод последовательной линеаризации. К основному недостатку метода проекции градиента стоит отнести: построение проекции фиксированного управле-

ния на ограничивающее множество зачастую является задачей по сложности равносильной исходной. Недостатки метода последовательной линеаризации: сложность построения области, которой должно принадлежать линейное приращение управления; сложность определения величины приращения. Кроме того, трудность этих методов заключается в сложности достаточно точной аппроксимации функциональных производных при численной реализации.

Развиваются активно методы, в которых применяется параметризация функций, входящих в постановку задачи ОУ. Для линейных задач ОУ рассматривается параметризация управления и переход к специальным задачам линейного программирования (Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Н. М. Дмитрук). Для билинейных задач ОУ предлагается параметризация управления кусочно-постоянными функциями (А. В. Аргучинцев, В. А. Срочко), таким образом, исходная задача ОУ сводится к конечномерной задаче квадратичного программирования. Кроме того, в ряде работ (Е. В. Аксенюшкина, В. А. Срочко, А. В. Фоминых, В. В. Карелин, Л. Н. Полякова, А. В. Чернов, О. Н. Корсун, А. В. Стуловский, А. Посвиата) применяется параметризация управляющего воздействия на основе линейной комбинации некоторого базиса функций с последующим анализом специфицированной задачи (типа задач). Для выбранной параметризации и специфицированной задачи предлагаются прямые алгоритмы решения.

Активно разрабатывается класс прямых методов решения задач ОУ, основанных на сведении исходной проблемы к задаче НП за счет представления фазовых переменных в виде полиномиальных сплайнов, управляющих переменных в виде сеточной функции (Дж. Т., Беттс, Д. А. Бенсон, А. В. Рао, Ж. Т. Хантингтон, Т. П. Торвальдсен, Дж. Элнагар, М. Раззаджи, П. Дж. Энрайт, Б. А. Конвэй). В данном классе много работ посвящено прямым ортогональным коллокационным методам гауссовских квадратур (Д. Гарг, М. А. Паттерсон, В. В. Хагер, Д. А. Бенсон, А. В. Рао, Ж. Т. Хантингтон, Т. П. Торвальдсен, К. Гонг, И. М. Росс, В. Канг, Ф. Фахру, С. Л. Дарбу, Дж. Элнагар, М. Раззаджи, М. Каземи, С. Камесваран, Л. Т. Биглер). Во всех этих работах предполагается непрерывность управляющих переменных, аппроксимирующие полиномы строятся в форме Лагранжа или Чебышёва. Различие определяется выбором точек квадратурной формулы, так можно выделить подходы Лежандра-Гаусса (Д. А. Бенсон, А. В. Рао, Ж. Т. Хантингтон,

Т. П. Торвальдсен), Лежандра-Гаусса-Радау (Д. Гарг, М. А. Паттерсон, В. В. Хагер, С. Л. Дарбу, С. Камесваран, Л. Т. Биглер, Ф. Лю), Лежандра-Гаусса-Лобатто (Дж. Элнагар, М. Раззаджи, М. Каземи, А. Л. Херман, Б. А. Конвэй).

На основе коллакационных методов реализованы программные модули (У. М. Агамави, А. В. Рао), в которых для решения получаемых задач НП используются соответствующие методы первого и второго порядка. При этом стоит отметить, что вычисление соответствующих производных выполняется на основе конечной разности первого порядка, а полученная задача может иметь достаточно большую размерность (У. М. Агамави, А. В. Рао, М. А. Паттерсон, Ф. Топпуто, С. Джанг). Последнее вынуждает исследователей применять алгоритмы, не требующие вычисления производных, например, генетические алгоритмы (Б. А. Конвэй). В работе А. В. Чернова при параметризации управления экспоненциально-квадратичными сплайнами для оптимизации полученной задачи НП используется метод Хука-Дживса. Можно сделать вывод, что при параметризации функций, входящих в исходную задачу ОУ, эффективное применение оптимизационных методов первого и второго порядка весьма затруднительно. Это объясняется тем, что получаемые задачи НП опосредованно задают зависимость целевой и ограничивающих функций от переменных (параметров), следовательно, вычисление производных (первого и второго порядка) становится сложным в нелинейных задачах ОУ.

В диссертации для численного анализа динамических экономических моделей используется и развивается относительно новый класс аналитико-численных методов ОУ, основанный на априорном представлении искомого управления в кусочно-аналитическом параметризованном виде на временных интервалах с переменными узлами и введении сопряжённых дифференциальных уравнений, упрощающих вычисления производных основного (оптимизируемого) функционала и функционалов, определяющих условия оптимизации. Идея данного класса методов параметризации была предложена и реализована в работах В. К. Горбунова (1978 г., 1979 г.). Достоинством подхода является разделение дискретизации задач Коши в исходной проблеме ОУ и решение задачи НП.

Повышение сложности математических моделей реальных объектов и процессов неизбежно приводит исследователей к проблеме, назы-

ваемой некорректностью вычислительных задач. Так при численном решении задач ОУ существенные трудности вызывают задачи с особым ОУ (В. Г. Антоник, В. А. Срочко, Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Г. Келли, Р. Копп, Г. Мойер, Р. П., Федоренко), задачи с промежуточными фазовыми ограничениями (О. И. Костюкова, Е. А. Костина, С. В. Прищепова, А. И. Тятюшкин). Задачи с промежуточными фазовыми ограничениями зачастую возникают при моделировании процессов стабилизации, демпфирования (О. И. Костюкова, С. В. Прищепова), экономических процессов (С. А. Ашманов, А. М. Тер-Крикоров, М. В. Дж. Блок), задачи с особым управлением в ракетодинамике, космической навигации, электротехнике (Г. Келли, Р. Копп, Г. Мойер). Уравнения, содержащие малый параметр при старшей производной (сингулярно возмущенные уравнения) проявляются во многих задачах моделирования процессов в аэродинамике, баллистике, химической кинетике, молекулярной и ядерной физике (Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер, В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов).

Таким образом, нерегулярные задачи математического моделирования становятся типичным явлением и их усложнение требует постоянного развития соответствующей теории и численных методов.

Можно выделить тренд на развитие систем принятия решений в управлении экономическими системами, что влечет создание новых оптимизационных моделей, учитывающих динамику экономических факторов. При управлении организационно-техническими системами предприятия перманентно совершенствуют свои методы и методологию управления с учетом уменьшения издержек, прогнозирования рисков внешней среды, собственных возможностей. Среди многообразия различных методов организации управленческой деятельности выделяются принципы “точно в срок”, “под заданную себестоимость”, “с учетом рисков” (В. В. Клочков, В. А. Вдовенков, В. И. Баклашов, Д. Н. Казанская, П. О. Скобелев). Информатизация деятельности на предприятии вынужденно требует формализации самих принципов управления (Ю. В. Власов, А. А. Чурсин, В. В. Клочков, В. А. Вдовенков, Д. В. Ковков, Н. А. Окатьев, Р. В. Шамин, В. И. Баклашов, Д. Н. Казанская, П. О. Скобелев), для этого разрабатываются экономико-математические модели на основе использования адекватного математического инструментария. В диссертации предлагается формализация принципов управления “точно в срок”, “под заданную себестоимость”, “с учетом рисков” и их интеграция в виде

математической модели управления.

Одной из первых динамических моделей, учитывающих инвестиции, является модель Солоу-Свана. В модели предполагается, что инвестиции все свое влияние оказывают на выпуск продукции в тот же временной такт, когда они были введены. Следующим шагом в развитии инвестиционных моделей стала модель двухсекторной экономики (М. Интрилигатор). Развитие инвестиционных моделей на основе модели Солоу-Свана получило в работах авторов: А. А. Красовский, А. М. Тарасьев, М. Эсфандиари, Дж. Фаббри, М. Якопетта, Л. А. Гардашова, Б. Ж. Гуиримов. Модели с запаздыванием в освоении инвестиций развивались авторами: Ю. П. Иванилов, А. В. Лотов, А. В. Прасолов, П. М. Симонов, А. Б. Поманский, Г. Ю. Трофимов. В диссертации развивается макроэкономическая модель двухсекторной экономики: рассматривается точечное запаздывание как в управлении, так и в динамике фондов. Также развивается инвестиционная модель с распределенным влиянием инвестиций.

Моделирование рекламных воздействий с распределенным запаздыванием началось с дискретных статистических моделей (С. В. Дж. Гренжер). Эффект запаздывания в рекламе с непрерывно распределенным воздействием позднее был смоделирован в работе А. Бенсоуссана, А. Бультеза, П. Наерта, данная модель была модифицирована У. Пауэлсом. Здесь делается предположение, что эффект от рекламного воздействия длится от момента его произведения до текущего момента времени. Однако, для товаров кратковременного пользования нет необходимости рассматривать длительные интервалы воздействия факторов на спрос. Текущая отдача от рекламного воздействия, произведенного достаточно давно, носит скорее случайный характер. Ещё один важный момент состоит в том, что в моделях А. Бенсоуссана, А. Бультеза, П. Наерта, У. Пауэлса не учитывается влияние на спрос факторов нерекламного характера. При анализе динамических оптимизационных моделей, посвященных воздействию рекламы, нужно отметить модель рекламы М. Нерлова, К. Дж. Эрроу. В развитии этой модели были выделены такие нерекламные факторы как цена товара (Ж. М. Эрикссон, Ж. И. Фрачтер, Л. Ламбертини), его качество (П. Д. Джованни), узнаваемость бренда (А. Буратто, Ж. Закур). Второй классической моделью, учитывающей рекламные воздействия, является модель М. Л. Видаля, Х. Б. Вольфа. В этой модели, а также ее расшире-

ниях (К. Р. Дил, Р. Мукандан, В. Б. Элснер) учитывают долю охваченного рынка, делают предположение об ограниченности рынка. Ещё один подход в моделировании рекламы основывается на принятии во внимание влияние других участников рынка, на основе чего строятся кооперативные и антагонистические оптимизационные модели. Дж. Е. Кимбелл трансформировал идею Ланчестера о соотношении между противостоящими силами в виде модели анализа рекламных воздействий на конкурентном рынке. Можно выделить ряд авторов (Дж. Хан, С. П. Сети, С. С. Сью, С. С. П. Ям, Дж. Ванг, Ю. Ли, В. Джанг, С. Жанг, П. Е. Эзимаду, С. Ферштман, Т. Ванг, К. Ванг, А. Ву, Л. Янг и др.), развивающих модель Кимбелла. В диссертации представлены результаты развития моделей управления рекламными расходами: предложены динамические модели с распределенным эффектом от рекламных воздействий, эффекта накопленной репутации.

Математическое моделирование развития массовых заболеваний привело к созданию моделей, которые применяются для прогнозирования развития эпидемий и пандемий. Первый тип моделей, используемых для анализа распространения эпидемий, связан с использованием статистических методов (Д. Бенвенуто, М. Джованетти, Л. Вассало, Ф. Броуер, С. Кастилло-Чавес, Б. Хайес, С. И. Сиеттос, Л. Руссо). Следующий тип моделей характеризуется наличием «континуальных» связей в виде системы дифференциальных либо интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (модели класса SIS, SIR, SIIR, SEIR, SVIR), можно отметить ряд авторов (Ф. Броуер, С. Кастилло-Чавес, Х. В. Хифкот, В. М. Гетц, Р. Солтер, О. Мюллерклейн, С. И. Сиеттос, Л. Руссо и др.). Третий тип моделей предполагает наличие целевых показателей и способы их достижения (модели управления). В качестве целевых критериев могут выступать: минимизация числа заболевших; минимизация смертности, вызванной заболеванием; минимизация рецессии экономики; оценка готовности системы здравоохранения к решению проблем, вызванных пандемией; многофакторная оценка управленческих решений. Математическое моделирование детерминированных управляемых эпидемий рассматривалось рядом авторов (Е. А. Андреева, Н. А. Семькина, И. Д. Колесин, Е. Житкова, М. С. Гомес, Ф. А. Рубио, Е. И. Мондрагон, Ж. Люббен, Ж. Гонсалес-Парра, Б. Сервантес, С. Кастилло-Чавес). Отметим, что данные модели являются медико-биологическими, в них слабо отражаются социальные показатели, которые существенно влияют на поведение населения в условиях пандемии.

В диссертации предлагается новый класс моделей управления социально-экономическими системами в условиях массового заболевания: наряду с традиционной компартиментализацией социума в модель включаются экономические и социальные факторы (доход/прибыль экономической системы, затраты на строительство/переоборудование больничных мест, влияние информационного воздействия).

Объект и предмет диссертационного исследования. Объектом исследования являются численные методы решения задач ОУ с запаздыванием, ориентированные на динамические оптимизационные модели экономических процессов. Предмет исследования – метод параметризации для решения задач ОУ с учетом точечного и распределенного запаздываний; динамические модели экономических систем; алгоритмы, программное обеспечение, позволяющие находить оптимальное управление в задачах инвестирования производства, построения рекламных стратегий, управления экономической системой в условиях массового заболевания, формализации принципов менеджмента.

Цель и задачи диссертационного исследования. Целью исследования является разработка численного метода решения задач ОУ, позволяющего на основе единого подхода решать оптимизационные задачи, содержащие дифференциальные, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения с точечным запаздыванием; разработка нового класса оптимизационных моделей в управлении производственными, организационно-техническими, экономическими динамическими системами, учитывающими запаздывание в управляющих и фазовых переменных.

Исходя из поставленной цели, формулируются следующие задачи:

1. разработка метода параметризации для задач ОУ, содержащих дифференциальные связи с точечным запаздыванием;
2. разработка метода параметризации для задач ОУ, содержащих интегро-дифференциальные связи;
3. обоснование сходимости метода параметризации по количеству параметров в параметризованной функции управления;
4. разработка модели, формализующей принципы менеджмента “точно в срок”, “под заданную себестоимость”, “с учетом рисков” в виде задачи ОУ;
5. разработка инвестиционной модели с точечным запаздыванием при освоении инвестиций;
6. разработка инвестиционной модели с распределенным запаздыванием

при освоении инвестиций;

7. разработка моделей построения рекламных стратегий с учетом запаздывания отдачи от рекламных воздействий;

8. разработка модели управления экономической системой в условиях массового заболевания;

9. разработка концепции построения программных средств, реализующих метод параметризации;

10. проведение вычислительных экспериментов для определения эффективности метода параметризации;

11. проведение вычислительных экспериментов для верификации предлагаемых моделей.

Методологическую основу диссертационного исследования составили методология математического моделирования, теория оптимального управления, численные методы решения дифференциальных, интегродифференциальных, интегральных уравнений, динамических оптимизационных задач, методы конечномерного программирования, статистические методы, методы программирования.

Теоретической базой для проведения диссертационного исследования послужили научные работы, посвященные: численным методам решения задач ОУ; оптимизационным динамическим моделям с учетом эффекта запаздывания; динамическим моделям инвестирования, рекламных воздействий, управления массовым заболеванием. В процессе работы были изучены концепции и теоретические подходы к решению выдвигаемых проблем ведущих специалистов в данных областях.

Эмпирическую базу составили: статистические данные с сайта Федеральной службы государственной статистики; статистические данные с сайта Федеральной службы государственной статистики по Ульяновской области; отчеты ПАО «Мегафон»; статистические данные, представленные компанией Яндекс; правовая документация с портала «Гарант.ру»; статистические данные с сайта Министерства здравоохранения Российской Федерации; статистические данные с сайта ПАО «ОАК»; результаты научных исследований, представленные в работах российских и зарубежных ученых.

Научная новизна исследования заключается в разработке нового численного метода решения задач ОУ с запаздыванием, что позволяет на основе единого подхода решать различные задачи ОУ, в которых

динамика описывается дифференциальными уравнениями, интегро-дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями с точечным запаздыванием. Также разработан новый класс моделей, позволяющий учитывать запаздывание в оптимизационных моделях в управлении производственными, организационно-техническими, экономическими динамическими системами: управление инвестициями, построение рекламной стратегии, формализация принципов менеджмента, управление экономической системой в условиях массового заболевания.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод параметризации, позволяющий находить численное решение задач ОУ, содержащих дифференциальные связи с точечным запаздыванием.

2. Метод параметризации, позволяющий находить численное решение задач ОУ, содержащих интегро-дифференциальные связи.

3. Обоснование сходимости метода параметризации по функционалу задачи ОУ, учитывающей запаздывание. Доказывается сходимость при сгущении узлов искомого сплайна (параметризованного управления).

4. Класс математических моделей управления организационно-техническими системами, основанными на принципах менеджмента “точно в срок”, “под заданную себестоимость”, “с учетом рисков”.

5. Класс математических моделей управления производственными инвестициями с учетом эффекта точечного запаздывания в освоении инвестиций, распределенного запаздывания в освоении инвестиций.

6. Класс математических моделей построения рекламных стратегий с учетом запаздывания отдачи от рекламных воздействий.

7. Класс моделей управления экономической системой в условиях массового заболевания с учетом социальных и экономических показателей.

8. Концепция построения программных средств для реализации метода параметризации, ориентированного на решение задач ОУ, учитывающих запаздывание в дифференциальных уравнениях.

9. Вычислительный эксперимент, выявляющий практическую эффективность метода параметризации, а также верификацию предлагаемых моделей.

Теоретическая значимость работы обусловлена разработкой нового численного метода, позволяющего на основании единого подхода решать эффективно задачи ОУ, содержащие: дифференциальные уравне-

ния; интегро-дифференциальные уравнения; параметры, требующие оптимизации. Разработан новый класс моделей, позволяющих учитывать запаздывающий эффект в управлении производственными, организационно-техническими, экономическими динамическими системами: инвестиционные модели, модели построения рекламных стратегий, модели управления экономикой в условиях массового заболевания, модели формализации принципов менеджмента.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанный метод параметризации может применяться для решения различных задач ОУ, возникающих при моделировании процессов, требующих оптимизации. Разработанные модели позволяют находить оптимальное управление для экономической системы в задачах инвестирования, построения рекламной стратегии, управления экономикой в условиях массового заболевания. При разработке высокоинтеллектуальных систем управления предприятием (фирмой, организацией) предлагаемые модели могут стать ядром, обеспечивающим выработку решения для управляющего органа с учетом соответствующих принципов менеджмента.

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность выводов и результатов исследования обеспечена научной методологией исследования, предполагающей доказательность теоретических выводов и их верификацию по наблюдениям/измерениям характеристик моделируемого объекта, корректным использованием численных методов, методов программирования, апробацией выводов диссертации.

Внедрение результатов. Результаты разработки метода параметризации использовались в грантах РФФИ: № 01-01-00731 «Вариационные методы регуляризации и решения вырожденных уравнений и неравенств» (2001-2003 гг.); № 07-01-90000 Вьет/а «Разработка качественной теории и методов приближенного решения дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ)» (2007-2008 гг.).

Результаты работы по созданию модели управления инвестициями, модели формализации принципов управления производственным предприятием, модели рекламных воздействий использовались в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ № 2.1816.2017/4.6 по теме «Исследование и разработка интегрированной автоматизированной системы управления производственно-технологическим планированием авиастроительного предприятия на базе цифровых техно-

логий» (2017-2019 гг.).

В рамках гранта РФФ № 24-28-00542 «Разработка информационно-аналитического инструмента моделирования и оптимизации управления социально-экономическими системами в условиях массового заболевания» (2024-2025 гг.) используется модель управления социально-экономическими системами в условиях массового заболевания.

Результаты исследования используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»: в рамках дисциплин «Реклама на рынке ИКТ», «Математические модели рекламных воздействий».

Апробация результатов исследования. Апробация основных положений диссертационной работы проведена на Байкальском международном школе-семинаре «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск, 1998, 2001), Computational Science - ICCS 2003 (Санкт-Петербург, 2003), Numerical treatment of differential equations (Halle (Saale), Germany, 2006), 3d International Conference Computational methods in applied mathematics: CMAM-3 (Minsk, Belarus, 2007), 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (Zurich, Switzerland, 2007), Международной научной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (Саранск, 2009, 2016), Международной научной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов» (Ульяновск, 2009), «Проблемы анализа и моделирования региональных социально-экономических процессов» (Казань, 2011), Международной научно-практической конференции «Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании» (Тверь, 2015, 2016), на Международном молодежном симпозиуме по управлению, экономике и финансам (Казань, 2016), на VI Всероссийской научной конференции с международным участием «Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы» (Ульяновск, 2016), семинаре «Workshop on Computer Modelling in Decision Making» (Саратов, 2017, 2018, 2022), XVI научно-практической конференции с международным участием, «Цифровая экономика промышленности и сферы услуг: состояние и тенденции развития» (Санкт-Петербург, 2018), Международной конференции «Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении» (Севастополь, 2018, 2020), Международной научно-практической конференции ICIT-2019 «Информационно-

коммуникационные технологии в науке и производстве” (Саратов, 2019), VII научно-практической конференции “Цифровые технологии в экономике и промышленности” (ЭКОПРОМ-2019) (Санкт-Петербург, 2019), VI научно-практической конференции с зарубежным участием “Цифровая экономика и Индустрия 4.0: форсайт Россия” (INDUSTRY-2020) (Санкт-Петербург, 2020), Всероссийском научно-практическом семинаре “Математическое и компьютерное моделирование и бизнес-анализ в условиях цифровизации экономики” (Нижний Новгород, 2022, 2023, 2024), Научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых “Научные исследования и разработки молодых ученых” (Ульяновск, 2023, 2024), VIII Международной школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 2024).

Личный вклад. Все основные результаты, представленные в диссертации, установлены автором самостоятельно. Разработан численный метод решения задач ОУ (метод параметризации) для задач содержащих дифференциальные связи с точечным запаздыванием и распределенным запаздыванием. Доказана теорема о сходимости метода параметризации совместно с В. К. Горбуновым. Предлагаемые оптимизационные модели экономической динамики разработаны автором либо полностью самостоятельно, либо под его руководством. Так обобщенная модель управления предприятием с учетом определенных принципов менеджмента была разработана автором самостоятельно, её частные случаи: модель модификации производственного плана совместно с М. Н. Ярдаевой, модель управления потребностью в режущем материале самостоятельно, обобщенная модель выбора оснастки самостоятельно, её частный случай для дискретного производства совместно с А. А. Блюменштейном. Модели управления инвестициями: модель двухсекторной экономики с постоянным лагом запаздывания предложена автором, модель оптимальной инвестиционной стратегии с распределенным лагом совместно с Н. Р. Ямалтдиновой. Модель частоты рекламного воздействия разработана самостоятельно. Динамические модели управления рекламными затратами были разработаны совместно с Н. Р. Ямалтдиновой. Разработка моделей управления экономической системой в условиях массового заболевания была проведена совместно с М. С. Рыбиной.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении раскрывается актуальность темы исследования, сформулированы объект и предмет исследования, поставлены цели и задачи, положения, выносимые на защиту, дана научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, приведены сведения об апробации результатов и публикациях.

Первая глава исследования содержит оригинальные модели, посвященные описанию некоторых проблем экономической динамики.

В параграфе 1.1 предложена математическая модель формализации управления предприятием с учетом принципов “точно в срок”, “под заданную себестоимость”, “с учетом рисков” и их интеграция.

В рамках модели процесс производства блага разбивается на конечное число этапов; результат каждого этапа количественно измерим и достигается за фиксированный временной интервал. Значение результата определяется количественным набором ресурсов и производственных факторов и описывается соответствующей производственной функцией. Делается предположение о зависимости от времени результата этапов, наборов ресурсов и производственных факторов. Устанавливая горизонт планирования и другие дополнительные условия, в модели можно описать определенные принципы управления предприятием. С точки зрения математических условий, модель представляет собой задачу ОУ.

Так принцип управления “точно в срок” сводится к решению динамической системы с точечным запаздыванием, в рамках которой требуется формирование расписания задействования ресурсов и факторов для каждого этапа. Целью информационной системы (ИС) предприятия является автоматизированное обеспечение, ресурсов оптимальным образом. В случае внеплановых изменений, вызванных внешним воздействием, в ИС происходит уточнение решения в задаче ОУ.

Принцип “под заданную себестоимость” описывается за счет введения кумулятивных издержек на производство продукции за период планирования, формулируется требование обеспечения себестоимости продукции не выше заданной. Ставится задача поиска необходимых ресурсов и факторов с условием выполнения плановых показателей и обеспечения заданной себестоимости. Получаемая задача ОУ позволяет строить оптимальное плановое распределение ресурсов и факторов.

Для описания принципа “с учетом рисков” вводятся случайные величини-

ны, оказывающие негативные влияния на получение результата на этапах: потери ресурсов; потери факторов; организационно-технологические потери. Вводится зависимость случайных величин от значений факторов, ресурсов, а также времени. Для оценки рисков определяется функция потерь (функция штрафов), которая вычисляет суммарные потери компании при выходе за фиксированные допустимые нормы. Поиск оптимального набора ресурсов и факторов, обеспечивающих плановые показатели с учетом порогового значения функции потерь, представляет собой задачу ОУ с запаздыванием.

Обеспечение интегрального принципа управления “точно в срок, под заданную себестоимость, с учётом рисков” представляет собой объединение трех рассматриваемых моделей в одну: при заданном периоде планирования, заданной себестоимости, фиксированном итоговом выпуске и заданных нормах потерь найти набор ресурсов и факторов, удовлетворяющих всем введенным ограничениям. Если такие наборы ресурсов и факторов неединственны, то любой такой набор рассматривается в качестве решения интегрального принципа. Выбор оптимального набора интегрального принципа обеспечивается за счет введения дополнительного критерия.

В подразделах 1.1.2, 1.1.3, 1.1.4 приведены частные случаи модели управления некоторыми процессами на производственном предприятии с учетом принципов управления. Так в 1.1.2 предлагается модель модификации производственного плана, в рамках модели описаны принципы “точно в срок”, “с учётом рисков”. В 1.1.3 предлагается модель управления потребностью в режущем инструменте, в рамках модели описаны принципы “точно в срок”, “под заданную себестоимость”. В 1.1.4 дана обобщенная модель выбора оснастки, приведена формализация принципов “точно в срок”, “с учётом рисков”, “под заданную себестоимость”.

В параграфе 1.2 описаны модели управления инвестициями. **В подразделе 1.2.2** представлена модифицированная модель двухсекторной экономики: отдача от инвестиций в производственные фонды и соответствующее управленческое решение происходят с постоянной задержкой. Динамика фондов представляется:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha u(t - \tau_1)x_1(t - \tau_1) - \mu_1 x_1(t), \\ \dot{x}_2 = \alpha(1 - u(t - \tau_2))x_1(t - \tau_2) - \mu_2 x_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Различие в лагах запаздывания τ_1 , τ_2 объясняется различной организационной технологией в секторах. Начальное состояние задается известными

функциями $x_1^0(t)$, $x_2^0(t)$, $u^0(t)$ при $t \leq t_0$. Управление u обозначает долю фондов первого сектора, направляемую на воспроизводство:

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Критерием качества является максимизация суммарного потребления благ на интервале планирования $[t_0; T]$:

$$\int_{t_0}^T x_2(t) dt \rightarrow \max. \quad (3)$$

Формулируется задача оптимального распределения выпускающих фондов для достижения максимального суммарного выпуска потребительских благ в виде задачи ОУ с точечным запаздыванием: максимизация (3) при условиях (1), (2), $x_1(t) = x_1^0(t)$, $x_2(t) = x_2^0(t)$, $u(t) = u^0(t)$ при $t \leq t_0$.

В подразделе 1.2.3 представлена инвестиционная модель производственной компании. Пусть $y(t)$ – доход фирмы в момент времени t ; $I(t)$ – реальные инвестиции в t ; $v(t)$ – кумулятивный инвестиционный эффект к моменту t ; $w(t)$ – совокупный эффект от факторов, отличных от реальных инвестиций в t .

Для оценки неинвестиционных факторов используются значения дохода в прошлые моменты времени:

$$v(t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G(\tau) I(t - \tau) d\tau; \quad w(t) = g(y(t - \tau_3)); \quad y(t) = f(v(t), w(t)). \quad (4)$$

Функция $G(\tau)$ определяет распределенный характер временной отдачи от инвестиций в стационарных условиях развития фирмы. Кумулятивный эффект от инвестиций наблюдается на множестве $[\tau_1; \tau_2]$ (теоретически τ_2 может быть равно $+\infty$, но на практике это значение ограничено). К функции $G(\tau)$ выдвигаются требования: $G(\tau) \geq 0, \forall \tau \in [0; +\infty)$; $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} G(\tau) = 0$; $\exists \tau^* : G(\tau)$ возрастает при $\tau \in [0; \tau^*)$, $G(\tau)$ убывает при $\tau \in (\tau^*; +\infty)$.

Функции $f(v, w)$, является аналогом производственной функции, следовательно: функция $f(v, w) \geq 0, \forall v, w$; функция $f(v, w)$ возрастает по переменной v ; если инвестиции идут на восполнение или расширение фондов без изменения технологии, то функция $f(v, w)$ вогнута по v .

Функция $g(y)$ представляет собой оценку влияния факторов, отличных от реальных инвестиций. Параметр τ_3 является постоянным лагом.

Ограничения на функцию инвестиций записываются в виде:

$$0 \leq I(t) \leq \hat{I}(t), \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Здесь $\hat{I}(t)$ – детерминированная функция, описывающая стратегию по формированию инвестиционного бюджета.

Совокупная прибыль на плановом периоде определяется функционалом:

$$J(I(\cdot)) \equiv \Pi(T) = \int_{t_0}^T (y(t) - I(t) - c(y(t), t)) dt. \quad (6)$$

Формулируется задача ОУ с эффектом последствия: максимизировать функционал (6) со связями на фазовые переменные (4) и ограничениями на управление (5). Также в подразделе 1.2.2 формулируется другой вид ограничений на инвестиции и приводятся условия, позволяющие поставить задачу определения инвестиционной стратегии с учетом принципов управления “точно в срок” и “под заданную себестоимость”.

В параграфе 1.3 строятся модели управления рекламными затратами. В подразделе 1.3.1 приведена модель управления одноканальной рекламой, в подразделе 1.3.2 – многоканальной рекламой.

Пусть $y(t)$ – доход фирмы в момент времени $t \in [t_0; T]$; r – количество медиаканалов, услугами которых фирма может воспользоваться. Обозначим $u_i(t)$ как величину рекламных вложений в i -й медиаканал, $i = 1, 2, \dots, r$. Набор величин $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t) \in \mathbb{R}_+^r)$ представляет собой управленческое решение фирмы.

Введем функцию кумулятивного рекламного воздействия $v(t)$ и функцию кумулятивного воздействия предыдущих продаж $w(t)$, которые определены $t \in [t_0; T]$. Определены соотношения:

$$w(t) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} G_y(\tau) y(t - \tau) d\tau. \quad (7)$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} \int_{\tau_{11}}^{\tau_{12}} G_1(\tau) g_1(u_1(t - \tau), u_2(t - \tau), \dots, u_r(t - \tau)) d\tau \\ \int_{\tau_{21}}^{\tau_{22}} G_2(\tau) g_2(u_1(t - \tau), u_2(t - \tau), \dots, u_r(t - \tau)) d\tau \\ \dots \\ \int_{\tau_{r1}}^{\tau_{r2}} G_r(\tau) g_r(u_1(t - \tau), u_2(t - \tau), \dots, u_r(t - \tau)) d\tau \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь $G_1(\tau), G_2(\tau), \dots, G_r(\tau), G_y(\tau)$ – функции, определяющие весовой характер воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих

продаж, соответственно; $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r)$ – функция, отображающая совокупный эффект на аудиторию i -го медиаканала от вложений в рекламу, $i = 1, 2, \dots, r$; τ – лаг запаздывания реакции потребителей на рекламные и нерекламные воздействия; $[\tau_{i1}; \tau_{i2}]$ – интервал лагов запаздывания, на протяжении которого накапливается рекламное воздействие от использования i -го медиаканала, $i = 1, 2, \dots, r$; $[\tau_1; \tau_2]$ – интервал лагов запаздывания, на котором накапливается воздействие от предыдущих продаж.

Предполагается, что известны начальные условия по рекламе $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_r(t))$ и выручке $\tilde{y}(t)$ до начала планируемого периода: $\tilde{u}_i(t)$ – кусочно непрерывная функция, $i = 1, 2, \dots, r$, $\tilde{y}(t)$ – непрерывная при $t < 0$, и $u_i(t) = \tilde{u}_i(t)$, $y(t) = \tilde{y}(t)$ при $t < 0$.

Значение выручки в момент времени t определяется соотношением:

$$y(t) = f(v(t), w(t)). \quad (9)$$

Свойства функций модели:

1) Функция $f(v, w)$ выручки монотонно возрастает и вогнута по v и w .

2) Функции $G_i(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, r$: $G_i(\tau) \geq 0, \tau \in [0; +\infty)$; $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_i(\tau) = 0$; $G'_i(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau_{u_i}^*)$; $G'_i(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_{u_i}^*; +\infty)$. Здесь $\tau_{u_i}^*$ – точка максимальной отдачи на медиаканале i .

3) Функция $G_y(\tau)$: $G_y(\tau) \geq 0, \tau \in [0; +\infty)$; $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_y(\tau) = 0$; $G'_y(\tau) \geq 0, \tau \in [0; \tau^*)$; $G'_y(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau^*; +\infty)$. Здесь τ^* – точка максимальной отдачи от эффекта бренда.

4) Функции $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r)$ непрерывны по всем аргументам и $g_i(u_1, u_2, \dots, u_r) \geq 0$ для любых u_1, u_2, \dots, u_r ($i = 1, 2, \dots, r$). В некоторой окрестности нулевых рекламных затрат $O_{\varepsilon_1} = \{u \in \mathbb{R}_+^r : \|u\| < \varepsilon_1\}$ отдача от рекламы не дает эффекта: $g_i(u) = 0, u \in O_{\varepsilon_1}$. Существует $O_{\varepsilon_2} = \{u \in \mathbb{R}_+^r : \|u\| < \varepsilon_2\}$, что для любых $u^1, u^2 \in O_{\varepsilon_2}$: $u^1 < u^2$ следует $g_i(u^1) \leq g_i(u^2)$. При дальнейшем увеличении рекламы может произойти уменьшение отдачи.

Пусть суммарный поток рекламного бюджета ограничен функцией $B(t)$, тогда множество рекламных программ U :

$$U_B(t) = \left\{ u(t) \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r u_i(t) \leq B(t), u_i(t) \geq 0, i = 1, 2, \dots, r \right\},$$

$$U = \{u(\cdot) : u(t) \in U_B(t), t \in [0; T]\}. \quad (10)$$

Прибыль Π за период $[0; T]$ определяется:

$$J(u(\cdot)) \equiv \Pi(T) = \int_0^T \left(y(t) - c(y(t), t) - \sum_{i=1}^r u_i(t) \right) dt. \quad (11)$$

Максимизация (11) при условиях (8), (7), (9), (10) – задача ОУ.

В параграфе 1.4 дана постановка модели управления экономической системой в условиях массового заболевания. Введём разбиение населения (N , чел.) на компартменты: P – число соблюдающих ограничительные меры; S – число не соблюдающих ограничительные меры; E – число заразившихся; I – число заболевших; Q – число госпитализированных; R – число выздоровевших; D – число умерших.

Социально-экономические показатели: Y – валовый выпуск (руб.); Π – прибыль экономического субъекта (руб.); K – стоимость основных фондов экономического субъекта (руб.); L – объём результативного труда (чел.); Z – количество койко-мест для размещения заболевших (ед.).

Управляющие воздействия органов власти: u_1 – вложения в переоборудование существующих койко-мест (руб.); u_2 – вложения в строительство новых больниц (руб.); u_3 – вложения в информационную кампанию по борьбе с заболеванием (руб.). Ограничения по управлению ($1 \leq i \leq 3$):

$$u_i(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^T u_i(t) dt \leq B_i; \quad u_i(t) \text{ – кусочно-непрерывные функции.}$$

Моменты принятия решений: τ_1 – момент времени введения ограничительных мер; τ_2 – момент времени снятия ограничений. Эффект от введения/снятия ограничительных мер приводит к разрыву фазовых траекторий: $S(\tau_1+) = (1 - a)S(\tau_1-)$, $P(\tau_1+) = P(\tau_1-) + aS(\tau_1-)$; $S(\tau_2+) = S(\tau_2-) + bP(\tau_2-)$, $P(\tau_2+) = (1 - b)P(\tau_2-)$.

Динамика фазовых переменных:

$$\frac{dS}{dt} = k_{PS}P(t) + k_{RS}R(t - \tau) - \left(k_{SE} \left(\frac{I(t)}{N(t)} \right) + k_{SP}(U_3(t)) - \rho \right) S(t), \quad (12)$$

$$\frac{dP}{dt} = k_{SP}(U_3(t))S(t) - k_{PS}P(t), \quad (13)$$

$$\frac{dE}{dt} = k_{SE} \left(\frac{I(t)}{N(t)} \right) S(t) - k_{EI}E(t), \quad (14)$$

$$\frac{dI}{dt} = k_{EI}E(t) - (k_{IQ} + k_{IR} + k_{ID})I(t), \quad (15)$$

$$\frac{dQ}{dt} = k_{IQ}I(t) - (k_{QD} + k_{QR})Q(t), \quad (16)$$

$$\frac{dR}{dt} = k_{IR}I(t) + k_{QR}Q(t) - k_{RS}R(t - \tau). \quad (17)$$

$$\frac{dD}{dt} = k_{QD}Q(t) + k_{ID}I(t). \quad (18)$$

$$\frac{dZ}{dt} = g(u_2(t - \tilde{\tau})) - \mu Z(t) + ku_1(t), \quad (19)$$

где ρ – естественный прирост населения в долях от общей численности населения; τ – время, в течение которого сохраняется иммунитет у выздоровевших; $k_{SP}, k_{SE}, k_{RS}, k_{PS}, k_{SE}, k_{SP}, k_{SI}, k_{IQ}, k_{IR}, k_{ID}, k_{QD}, k_{QR}$ – интенсивности перехода лиц между компартментами; $g(u_2)$ – функция преобразования инвестиций в строительство больниц (новых койко-мест); $\tilde{\tau}$ – лаг запаздывания в освоении инвестиций; μ – амортизация больничных фондов; k – параметр переоборудования существующих койко-мест.

Алгебраические связи ($t_0 \leq t \leq T$): $N(t) = P(t) + S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ – сумма компартментов; $L(t) = s_1P(t) + s_2S(t) + s_3E(t) + s_4R(t)$ – результативный труд, s_1, s_2, s_3, s_4 – коэффициенты результативности труда компартментов; $Y(t) = F(K(t), L(t))$, F – производственная функция; $Q(t) \leq Z(t)$ – обеспеченность койко-местами.

Рассматривается социальный критерий качества $\int_{t_0}^T E(t)dt$ и экономический $\int_{t_0}^T (Y(t) - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)) dt$. Управляющий орган социально-экономической системы, выбирая критерий (максимизируя экономический или минимизируя социальный), инициирует решение соответствующей задачи ОУ.

Вторая глава посвящена математическому анализу некоторых моделей, представленных в первой главе диссертации. В параграфе 2.1 анализируются модели управления инвестициями. Подраздел 2.1.1 посвящен выявлению структуры оптимального управления в модели (1), (2), (3) при $\tau_1 = \tau_2 = 0$ и фиксированных начальных условиях. В 2.1.2 анализируется структура оптимального управления и обосновывается существование решения в модели максимизации (6) при условиях (5), (4).

Теорема 1. Пусть $f(v, w)$ непрерывна по переменным v, w и монотонно не убывает по переменной v , $g(y)$ непрерывна по переменной y . Тогда выполняется одна из следующих альтернатив:

1. Существует $\{I^*(t), t_0 \leq t \leq T\} : (5)$, решение уравнений (4) $\{v^*(t), w^*(t), \Pi^*(t), t_0 \leq t \leq T\} : J(I^*(\cdot)) \geq J(I(\cdot))$ для любой $I(\cdot) : (5)$.

2. Существует последовательность инвестиционных функций $\{I^s(t), t_0 \leq t \leq T\} : (5)$ и значение $\bar{J} : J(I^s(\cdot)) \rightarrow \bar{J}, s \rightarrow \infty, J(I(\cdot)) \leq \bar{J}$ для любой $I(\cdot) : (5)$.

Теорема 2. Пусть $\{I^*(t), v^*(t), w^*(t), \Pi^*(t)\}$ является оптимальным процессом в задаче максимизации (6) при условиях (5), (4), тогда существуют функции $H_I(t), p_1(t), p_2(t) :$

$$H_I = p_1(s)\bar{G}(0) - 1 + \int_s^T p_1(t) \frac{\partial \bar{G}(t-s)}{\partial t} dt, \quad \bar{G}(\tau) = \begin{cases} G(\tau), & \tau_1 \leq \tau < \tau_2, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(t) = p_2(t + \tau_3) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial v} \Big|_{y=f(v, w), v=v(t+\tau_3), w=w(t+\tau_3)} \theta(T - t - \tau_3) \\ \quad - \int_t^T \frac{\partial f(v, w)}{\partial v} \left(\frac{\partial c(y, s)}{\partial y} - 1 \right) \Big|_{y=f(v, w), v=v(s), w=w(s)} ds; \\ p_2(t) = p_2(t + \tau_3) \frac{\partial g(y)}{\partial y} \frac{f(v, w)}{\partial w} \Big|_{y=f(v, w), v=v(t+\tau_3), w=w(t+\tau_3)} \theta(T - t - \tau_3) \\ \quad - \int_t^T \frac{\partial f(v, w)}{\partial w} \left(\frac{\partial c(y, s)}{\partial y} - 1 \right) \Big|_{y=f(v, w), v=v(s), w=w(s)} ds; \end{array} \right.$$

и структура оптимального управления реальными инвестициями имеет следующую форму:

$$I^*(t) = \begin{cases} \hat{I}(t), & H_I(t) > 0, \\ 0, & H_I(t) < 0, \\ \bar{I}, & H_I(t) = 0, \quad 0 \leq \bar{I} \leq \hat{I}(t). \end{cases}$$

В параграфе 2.2 обосновывается существование решения и структура оптимального управления в модели управления рекламными расходами: максимизация (11) при условиях (8), (7), (9), (10).

Теорема 4. Пусть функция $G_y(\tau) \in C([\tau_1; \tau_2])$, функция $f(v, w)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменной w для всех w , функция $f(v, w), v \equiv (v_1, v_2, \dots, v_r)$, монотонно не убывает по всем $v_i, i = 1, 2, \dots, r$. Тогда имеет место одна из следующих альтернатив:

1. Существует допустимая управляющая вектор-функция $u^*(\cdot) \in U$, соответствующие данному управлению функции $v(t), w(t) : (8), (7)$ и значение функционала $J(u^*(\cdot)) : J(u^*(\cdot)) \geq J(u(\cdot))$ для любой $u(\cdot) \in U$.

2. Существует последовательность допустимых управляющих вектор-функций $u^s(\cdot) \in U$ и такое число $\bar{J} : J(u^s(\cdot)) \rightarrow \bar{J}$ при $s \rightarrow \infty$, что $J(u(\cdot)) \leq \bar{J}$ для любого $u(\cdot) \in U$.

Введем $\bar{G}_i(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, r$, $\bar{G}_y(\tau)$:

$$\bar{G}_i(\tau) = \begin{cases} G_i(\tau), & \tau_{i1} \leq \tau \leq \tau_{i2}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \bar{G}_y(\tau) = \begin{cases} G_y(\tau), & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 5. Пусть $\{u^*(t), v^*(t), w^*(t)\}$ – оптимальный процесс в задаче (11) при условиях (8), (7), (9), (10), тогда найдутся такие функции $h_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $p_j(s)$ ($j = 1, 2, \dots, r + 1$):

$$h_i(s) = p_i(s)\bar{G}_i(0) + \int_s^T p_i(t) \frac{\partial \bar{G}_i(t-s)}{\partial t} dt,$$

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial f(v^*(s), w^*(s))}{\partial v_i} \left(p_{r+1}(s)\bar{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T p_{r+1}(t) \frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} \right),$$

$$\frac{dp_{r+1}}{ds} = -\frac{\partial f(v^*(s), w^*(s))}{\partial w} \left(p_{r+1}(s)\bar{G}_y(0) + 1 - \mu + \int_s^T p_{r+1}(t) \frac{\partial \bar{G}_y(t-s)}{\partial t} \right)$$

с конечными условиями $p_i(T) = 0$, $i = 1, 2, \dots, r + 1$, что оптимальное распределение рекламных расходов при всех $s \in [0; T]$ будет являться решением задачи:

$$u^*(s) = \arg \max_{u \in U_B} \sum_{i=1}^r (g_i(u)h_i(s) - u_i).$$

В параграфе 2.3 анализируется выбор критерия качества в модели управления экономической системой в условиях массового заболевания. Рассматривается вывод VSL-критерия, в котором учитывается одновременно как социальный критерий, так и экономический. Это происходит на основании понятия «ценность статистической жизни». Другим вариантом одновременного учета социального и экономического критериев рассматривается свертка соответствующих критериев.

Третья глава посвящена методу параметризации.

В параграфе 3.1 рассматривается задача ОУ со связями в виде ОДУ:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x^0; \quad (20)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (21)$$

$$g_l(x(T)) \leq 0, \quad l = 1, \dots, m; \quad (22)$$

$$J = g_0(x(T)) \rightarrow \min. \quad (23)$$

Фазовая переменная $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, управление $u(t) \in \mathfrak{R}^r$ при $t_0 \leq t \leq T$. Функции $f_i(x, u)$, $1 \leq i \leq n$, и $g_l(z)$, $1 \leq l \leq m$, $z \in \mathfrak{R}^n$, будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми по всем переменным. Время T может быть свободным, задача (20)-(23) считается разрешимой в классе кусочно-непрерывных или непрерывных функций $u(t)$.

Введем разбиение промежутка $[t_0, T]$:

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N \equiv T. \quad (24)$$

Закрепим структуру управления:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leq t < t_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mu = 1, \dots, r, \quad (25)$$

где $v_\mu^k \in R^d$. При подстановке управления (25) в (20) получается решение $z(t)$, зависящее от параметров управления $w^k = (t_k, v^k)$.

Введем функции от управляющих параметров $\{w^k\} : \varphi_l(w^1, \dots, w^N) = g_l(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N))$, $l = 0, 1, \dots, m$. В терминах этих функций задача (20)-(23) принимает форму задачи НП:

$$\begin{aligned} & \varphi_0(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min \quad \text{при ограничениях} \\ & \varphi_l(w^1, \dots, w^N) \leq 0, \quad 1 \leq l \leq m, \\ & W = \{w^k : w_0^{k-1} \leq w_0^k, u^k(t; v^k) \in U, w_{0,0}^{k-1} \leq t \leq w_{0,0}^k, \\ & \quad k = 1, \dots, N; w_{0,0}^0 = t_0, w_{0,0}^N \equiv T \leq T^*\}. \end{aligned} \quad (26)$$

В задаче (26) связь между переменными обусловлена условием (20). Определим функцию Гамильтона-Понтрягина $H(p, x, u) = \sum_{i=1}^n p_i f_i(x, u)$, введем сопряженную вектор-функцию $p^l(t) = (p_1^l(t), \dots, p_n^l(t))$:

$$\begin{cases} \dot{p}^l = - \left. \frac{\partial H(p^l(t), x, u(t))}{\partial x} \right|_{x=x(t)}, & t_0 \leq t \leq T, \\ p^l(T) = \left. \frac{\partial g_l(z)}{\partial z} \right|_{z=x(T)}, & l = 0, 1, \dots, m. \end{cases}$$

Теорема 6. Пусть функции $f, g_l, l = 0, 1, \dots, m$, входящие в постановку задачи (20)-(23), непрерывно дифференцируемы по фазовым и управляющим переменным, тогда для первых производных функций φ_l по параметрам управления верны формулы:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= H(p^l(t_k), x(t_k), u^k(t_k, v^k)) - H(p^l(t_k), x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})); \\ \frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} &= H(p^l(T), x(T), u(T)); \\ \frac{\partial \varphi_l(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(p^l(t), x(t), u^k(t; v^k))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(t; v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} dt.\end{aligned}$$

В теореме 7 диссертации приведены формулы вычисления производных второго порядка функций φ_l .

В параграфе 3.2 рассматривается задача ОУ с точечным запаздыванием:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h), u(t)); \quad (27)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (28)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0; \quad (29)$$

$$J = g(x(T)) \rightarrow \min. \quad (30)$$

Фазовая переменная $x(t) \in \mathbb{R}^n$, управление $u(t) \in \mathbb{R}^r$ при $t_0 \leq t \leq T$, $f: \mathbb{R}^{1+2n+r} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Функция $\psi(t)$ – описывающая поведение x до момента t_0 . Скалярная величина $h > 0$, определяет точечное запаздывание системы. Решение задачи (27)-(30) может быть найдено в классе кусочно-непрерывных управляющих функций.

Пусть управление (28) параметризовано в виде (24), (25), тогда решение $z(t)$ задачи (27), (29) принимает зависимость от $w^k = (t_k, v^k)$. Введем функцию $\varphi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N))$. Исходная задача (27)-(30) редуцируется к задаче НП:

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min_W \quad (31)$$

Множество W определено в (26), а формальная функция $\varphi(\cdot)$ определена через систему дифференциальных уравнений (27), (29).

Введем функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$H(t, p, x, \xi, u) = \langle p, f(t, x, \xi, u) \rangle$$

и сопряженную систему на $t_0 \leq t \leq T$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H(p(t), x, \xi, u(t))}{\partial x} \Big|_{x=x(t), \xi=x(t-h)} \\ - \frac{\partial H(p(t+h), x, \xi, u(t+h))}{\partial \xi} I(t \in [t_0; T-h]) \Big|_{x=x(t+h), \xi=x(t)} \end{array} \right.$$

с конечным условием $p(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x(T)}$.

Теорема 9. Пусть функции f, g , входящие в постановку задачи (27)-(30), непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных целевого функционала задачи (31) по параметрам верны формулы:

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} = H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^k(t_k, v^k)) - H(t_k, p(t_k), x(t_k), x(t_k - h), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}));$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} = H(T, p(T), x(T), x(T - h), u^N(T, v^N));$$

$$\frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, p(\tau), x(\tau), x(\tau - h), u(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} d\tau.$$

В параграфе 3.3 рассматривается задача ОУ с распределенным запаздыванием:

$$J = g(x(T)) \rightarrow \min \quad (32)$$

при ограничениях:

$$\dot{x}(t) = \psi \left(t, x(t), u(t), \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds \right), \quad x(t_0) = x^0; \quad (33)$$

$$u(t) \in U, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (34)$$

Предполагается, что фазовая переменная $x \in R^n$, управление $u \in R^r$, множество U замкнуто в R^r . Функции $\psi : R^{1+n+r+m} \rightarrow R^n$, $f : R^{2+n+r} \rightarrow R^m$ и $g : R^n \rightarrow R$ непрерывны и непрерывно-дифференцируемы по всем переменным в некоторых областях соответствующих пространств. Предполагается, что задача (32)-(34) разрешима в классе кусочно непрерывных функций $u(t)$.

При подстановке управления (24), (25) в (33) получается траектория $z(t)$, зависящая от параметров управления $w^k = (t_k, v^k)$. Введем функцию $\varphi(w^1, \dots, w^N) = g(z(T; w^1, \dots, w^{N-1}, v^N))$. В этом случае задача (32)-(34) формально принимает форму задачи НП:

$$\varphi(w^1, \dots, w^N) \rightarrow \min_W \quad (35)$$

Множество W определено в задаче (26). Функция $\varphi(\cdot)$ определяется через систему интегро-дифференциальных уравнений (33).

Обозначим $q(t) = \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds$. Введем функцию Понтрягина

$$H(t, x, q, u, p_x, p_q) = \langle p_x(t), \psi(t, x, u, q) \rangle + \langle p_q(t), f(t, t, x, u) \rangle + \int_t^T \langle p_q(s), h(s, t, x, u) \rangle ds$$

и сопряжённую систему:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x(t) &= - \left[\frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} \right]^T p_x(t) - \\ &\left[\frac{\partial f(t, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(t) - \int_t^T \left[\frac{\partial h(s, t, x(t), u(t))}{\partial x} \right]^T p_q(s) ds; \\ \dot{p}_q(t) &= - \left[\frac{\partial \psi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \right]^T p_x(t) \end{aligned}$$

с конечным условием $p_x(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}$, $p_q(T) = 0$.

Теорема 10. Пусть функции f , g , ψ , входящие в постановку задачи (32)-(33), непрерывно дифференцируемы по всем переменным. Тогда для вычисления первых производных целевого функционала задачи (35) верны формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial t_k} &= H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k - 0), p_x(t_k), p_q(t_k)) - \\ &H(t_k, x(t_k), q(t_k), u(t_k + 0), p_x(t_k), p_q(t_k)); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial T} &= H(T, x(T), q(T), u(T), p_x(T), p_q(T)); \\ \frac{\partial \varphi(w^1, \dots, w^N)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(\tau, x(\tau), q(\tau), u(\tau), p_x(\tau), p_q(\tau))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u_\mu^k(\tau, v^k)}{\partial v_{\mu, \alpha}^k} d\tau. \end{aligned}$$

В параграфе 3.4 исследуется сходимость метода параметризации, доказывается теорема о сходимости по количеству параметров в параметризованной функции управления.

Четвертая глава посвящена разработанному программному комплексу, реализующему метод параметризации.

В параграфе 4.1 описаны функции пользователя программного комплекса: идентификация задачи ОУ (ввод параметров модели, ввод уравнений модели); настройка алгоритма оптимизации (параметризация управляющих воздействий, формирование сценария решения задачи НП); настройка параметров численного решения задач Коши, вызванных методом параметризации; настройка формата отчета о ходе решения задачи методом параметризации. В подразделе 4.1.2 описаны параметры используемые в программном комплексе: параметры математической модели; параметры сценария решения задачи НП, порожденной методом параметризации; параметры численного решения Коши. В подразделе 4.1.3 дано описание общей архитектуры программного комплекса: приведена структура модулей комплекса; представлены функции, входящие в модули.

В параграфе 4.2 приведено описание вычислительных алгоритмов решения задачи НП, порождаемой методом параметризации. В рамках комплекса реализованы: метод проекции градиента на множество специальной структуры; модифицированный метод штрафных функций; методы решения задач на безусловный экстремум. В подразделе 4.2.2 описана общая схема идентификации параметров модели, которые определяются на основе известного решения соответствующей динамической системы. Предложенная схема эквивалентна решению задачи ОУ с параметрами, требующими оптимизации. Приведен пример идентификации некоторых параметров модели управления экономической системой в условиях массового заболевания.

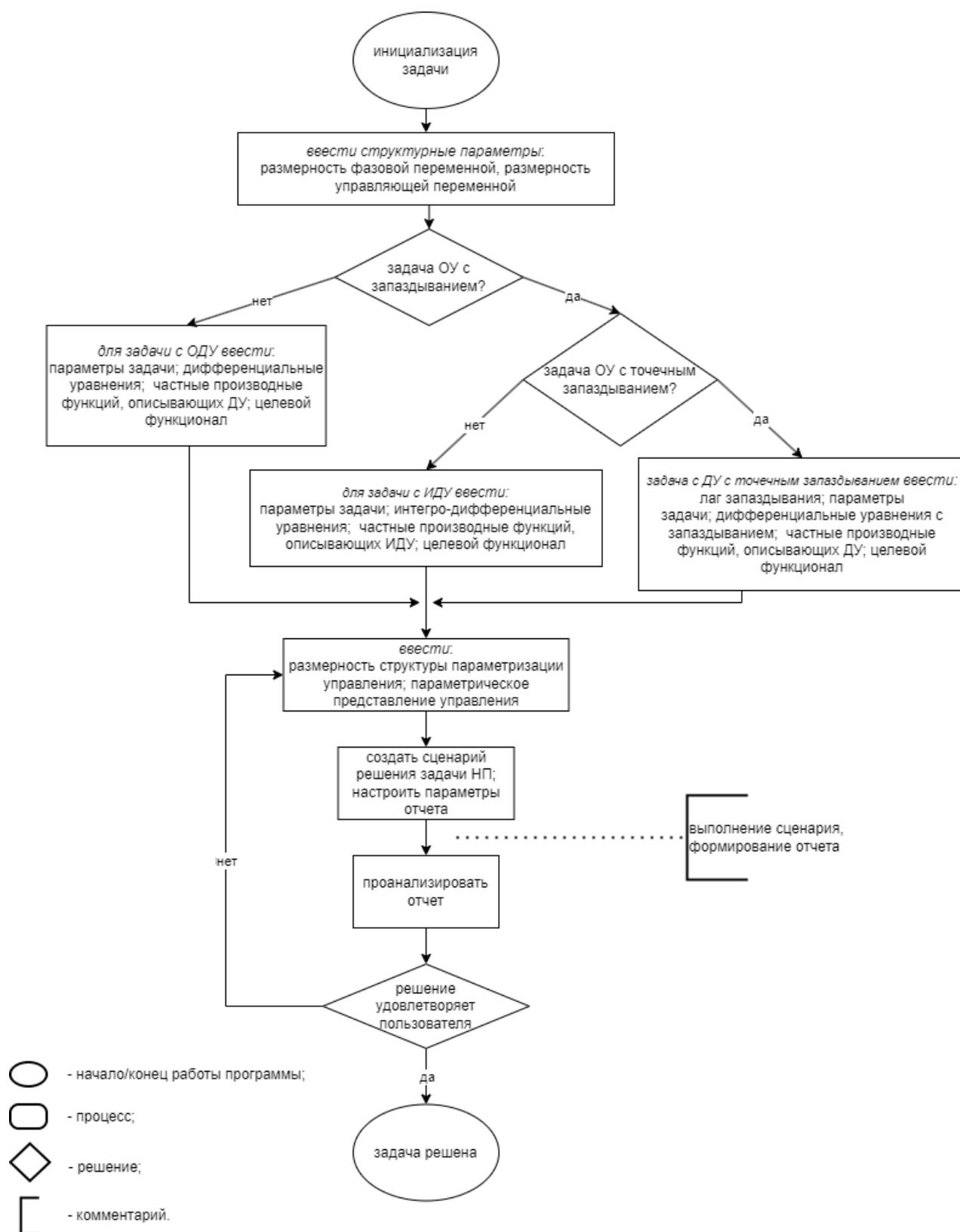


Рис. Общий алгоритм действий пользователя при решении задачи ОУ

В пятой главе с помощью метода параметризации проведен численный анализ ряда моделей: двухсекторной экономики, инвестиционной страте-

гии фирмы, управления рекламными затратами, управления экономической системой в условиях массового заболевания, управления движения самолетом. В параграфе 5.1 для модели двухсекторной экономики (1), (2), (3) рассмотрены дополнительные условия: ограничения по уровню фондов, ограничения по монотонности развития фондов. Также рассматривается модификация модели двухсекторной экономики: точечное запаздывание в инвестициях, динамике развития фондов. С учетом вводимых условий проводится численный анализ оптимального управления инвестициями. Оценка параметров модели (коэффициент фондотдачи α и коэффициенты амортизации μ_1, μ_2) проводилась на основе статистических данных по макроэкономическим показателям РФ, представленных на официальном сайте Федеральной службы государственной статистики. Вычислительный эксперимент проводился методом параметризации при различных значениях параметров модели, сделаны выводы об оптимальном управлении.

В параграфе 5.2 рассматривается модель оптимальной инвестиционной стратегии фирмы (4), (5), (6). Оценка параметров модели проведена на основе данных ПАО “ОАК”, представленных на официальном сайте компании. На этапе оценки параметров выявлена длительность влияния инвестиций, произведенных в определенный момент времени: наибольшее влияние приходится на интервал от года до 2,5 лет. В свою очередь, совокупное влияние неинвестиционных факторов имеет запаздывание в полгода. Производственная функция $f(v, w)$, введенная в (4), рассматривается в линейном виде. Функция распределения влияние инвестиций в виде $G(\tau) = \exp(a\tau^2 + b\tau + c)$. Для полученной модели приведены результаты вычислительных экспериментов, выполненные применением принципа максимума Понтрягина для задачи ОУ с интегро-дифференциальными связями. Полученное оптимальное решение определяет релейное управление инвестициями в рамках выделенного инвестиционного бюджета.

В параграфе 5.3 приведены вычислительные эксперименты с моделью управления рекламными затратами (7), (8), (9), (10), (11). В подразделе 5.3.1 рассматривается модель управления рекламой в компании по предоставлению услуг связи. На основе ежеквартальных статистических данных о рекламных затратах и продажах компании ОАО “Мегафон” были оценены параметры модели (7), (8), (9), (10), (11) для случая одноканальной рекламы. Было получено: после проведения рекламного мероприятия отдача в продажи длится в течение полугода; эффект от нерекламных факторов

имеет запаздывающий эффект от квартала до полугода. Функция выручки $f(v, w)$ (9) рассматривалась в линейном виде. Соответственно, функции G_u, G_y в виде: $G_u(\tau) = g_u \exp(b_u \tau)$, $G_y(\tau) = g_y \exp(b_y \tau)$. Поиск оптимального решения выполнялся с помощью принципа максимума Понтрягина для задачи ОУ с интегро-дифференциальными связями. Полученное оптимальное решение имеет релейный характер.

В подразделе 5.3.2 рассматривается модель управления рекламой в компании по производству и продаже одежды. Для оценки параметров модели (7), (8), (9), (10), (11) использовались ежемесячные статистические данные некоторой компании, занимающейся производством классической одежды. Было получено: запаздывающий эффект от произведенной рекламы длится до двух месяцев, а от нерекламных факторов от одного месяца до трех. Функция выручки $f(v, w)$ рассматривается в двух видах: линейный и мультипликативный. Для линейного вида $G_u(\tau) = \exp(a_u \tau^2 + b_u \tau)$, $G_y(\tau) = \exp(a_y \tau^2 + b_y \tau)$; для мультипликативного $G_u(\tau) = \exp(a_u \tau^2 + b_u \tau + c_u)$, $G_y(\tau) = \exp(b_y \tau + c_y)$. Полученные задачи ОУ решались модифицированным методом локальных вариаций и методом параметризации. Оптимальное решение в обоих случаях имеет релейный характер. При сравнительном анализе модифицированного метода локальных вариаций и метода параметризации выявлено: при увеличении точности расчетов (уменьшении шага дискретизации) метод параметризации быстрее находит приемлемое решение.

В параграфе 5.4 На основе модели управления экономической системой (12)-(19) в условиях массового заболевания приведены результаты экспериментов для двух субъектов макроэкономики: экономика РФ, экономика Ульяновской области. В подразделе 5.4.1 описана методология оценки параметров модели (12)-(19) и сделаны оценки этих параметров для РФ и Ульяновской области на основе статистических данных, относящихся к пандемии COVID-19. Все данные были взяты из открытых источников в сети Интернет. В подразделе 5.4.2 на основе полученной динамической модели дана оценка управленческим решениям, реализованным в период пандемии в РФ и Ульяновской области в 2020 г. В подразделе 5.4.3 при различных значениях параметров представлены оптимальные решения для задачи управления системой (12)-(19) с социальным $\int_{t_0}^T E(t)dt$ и экономи-

ческим $\int_{t_0}^T (Y(t) - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)) dt$ критериями. В подразделе 5.4.4 рассмотрены варианты одновременного учета социального и экономического критериев. Вводя некоторые предположения о поведении экономической системы рассматривается VSL-критерий $J_{VSL}(u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2)$, который включает в себя оценку “ценности статистической жизни”, что позволяет выразить социальную компоненту в денежном эквиваленте. При таком критерии экономический и социальный аспект измеряются естественным образом в сопоставимой форме. Второй подход основан на свертке социального и экономического критериев путем сведения подынтегральных величин к безразмерным с последующим введением веса каждой компоненты. В рамках подраздела 5.4.4 проведен анализ оптимальных решений, полученных методом параметризации при различных весах в критерии свертки $J_{CONV}(u_1, u_2, u_3, \tau_1, \tau_2)$. Сопоставлены оптимальные решения при VSL-критерии и критерии свертки.

В Заключение сформулированы основные выводы по результатам исследования в соответствии с поставленной целью и задачам по ее достижению.

Основные положения диссертации отражены в следующих опубликованных работах автора:

Публикации в журналах ВАК РФ, Scopus, Web of Science

1. *Горбунов, В. К.* Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Известия РАН. Сер. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 67-84. (ВАК - K1, RSCI, Scopus - Q3, WoS)
2. *Лутошкин, И. В.* Моделирование отдачи от частоты рекламных воздействий / И. В. Лутошкин // Прикладная эконометрика. – 2010. – Т. 19, № 3. – С. 101–111. (ВАК - K1, RSCI, Scopus - Q3)
3. *Лутошкин, И. В.* Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации / И. В. Лутошкин // Известия Иркутского государственного университета. Сер. “Математика”. – 2011. – Т. 4. № 1. – С. 44-56. (ВАК - K1, RSCI, Scopus - Q2, WoS)
4. *Лутошкин, И. В.* Применение метода параметризации для дифференциально-алгебраических систем с точечным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Девиен // Автоматизация процессов управления. – 2013. – Т. 4. № 1. – С. 21-25. (ВАК - K2)

5. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями / И. В. Лутошкин, И. Е. Дергунов // Журнал Средневолжского математического общества. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 110-119. (ВАК - К2, Scopus)
6. *Лутошкин, И. В.* Разработка инструментария оценки деятельности предприятия в условиях цифрового производства / И. В. Лутошкин, С. В. Липатова, М. Н. Ярдаева // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. – 2018. – Т. 11, № 6. – С. 9–21. – <https://doi.org/10.18721/JE.11601> (ВАК - К1)
7. *Лутошкин, И. В.* Сравнение продаж продукции различных видов в зависимости от рекламных воздействий / И. В. Лутошкин, Е. В. Мартыненко // Известия высших учебных заведений. Серия: экономика, финансы и управление производством. – 2015. – Т. 3, № 25. – С. 113-121. (ВАК - К2)
8. *Лутошкин, И. В.* Анализ влияния цифровых технологий на развитие национальной экономики / И. В. Лутошкин, А. А. Парамонова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Экономические науки. – 2019. – Т. 12, № 4. – С. 20–31. – <https://doi.org/10.18721/JE.12402> (ВАК - К1)
9. *Лутошкин, И. В.* Optimal solution in the model of control over an economic system in the condition of a mass disease / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. – 2023. – Т. 23. вып. 2. – С. 264-273. – <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-264-273>, EDN: VTQTSM (ВАК - К1, RSCI, Scopus - Q3, WoS)
10. *Лутошкин, И. В.* Моделирование управления экономикой региона в условиях массовых заболеваний / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // Экономика региона. – 2023. – Т. 19, № 2. – С. 299-313. – <https://doi.org/10.17059/ekon.reg.2023-2-1> (ВАК - К1, Scopus - Q2, WoS)
11. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации для моделирования управляемых систем с точечным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Тонких // Автоматизация процессов управления. – 2010. – № 4 (22). – С. 21-25. (ВАК - К2)
12. *Лутошкин, И. В.* Математическое моделирование функций сбыта / И. В. Лутошкин, А. Н. Чекмарева // Известия высших учебных заведений. Серия: экономика, финансы и управление производством. – 2016. – Т. 1, № 27. – С. 82-90. (ВАК - К2)
13. *Лутошкин, И. В.* Принцип максимума в задаче управления реклам-

- ными расходами с распределенным запаздыванием / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Журнал Средневолжского математического общества – 2015. – Т. 17, № 4. – С. 96-104. (ВАК - K2, Scopus)
14. *Лутошкин, И. В.* Существование решения задачи управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Известия Иркутского государственного университета. Сер. "Математика". – 2016. – Т. 18. – С. 48-59. (ВАК - K1, RSCI, Scopus - Q2, WoS)
15. *Лутошкин, И. В.* Математическая модель управления многоканальной рекламой с эффектом распределенной отдачи / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование" (Вестник ЮУрГУ ММП). – 2019. – Т. 12, № 4. – С. 52–66. – <https://doi.org/10.14529/mmp190404> (ВАК - K1, Scopus - Q3, WoS)
16. *Лутошкин, И. В.* Модель межцехового планирования с учетом производственных ограничений на примере авиастроительного предприятия / И. В. Лутошкин, М. Н. Ярдаева // Известия Самарского научного центра РАН – 2016. – Т. 18. № 4-3. – С. 505-509. (ВАК - K1)
17. *Полянсков, Ю. В.* Автоматизация процесса прогнозирования трудоёмкости проектирования и изготовления станочных приспособлений для механообработки самолетных деталей / Ю. В. Полянсков, И. В. Лутошкин, А. А. Блюменштейн // Известия Самарского научного центра РАН – 2016. – Т. 18. № 4-3. – С. 525-528. (ВАК - K1)
18. An integrated model as a tool for implementing an enterprise management method / S. V. Lipatova, M. N. Yardeeva, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Polyanskov // Journal of Physics: Conference Series 1333 (2019) 072015 – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1333/7/072015> (ВАК - K3, Scopus - Q4, WoS)
19. Digital enterprise comprehensive evaluation / Yu. V. Polyanskov, M. N. Yardeeva, S. V. Lipatova, I. V. Lutoshkin // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 971 (2020) 032097 – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/971/3/032097> (ВАК - K3, Scopus, WoS)
20. *Gorbunov, V.* The parameterization method in singular differential-algebraic equations / V. Gorbunov, I. Lutoshkin // Computational Science (ICCS 2003) / eds. P. Slot [et al.]. – LNCS 2658. – Springer, 2003. – pp. 483-491. (ВАК - K1, Scopus - Q2, WoS)

21. *Gorbunov, V.* The parameterization method in optimal control problems and differential-algebraic equations / V. Gorbunov, I. Lutoshkin // Journal of computational and applied mathematics. – Elsevier, 2006. – V. 185, Iss. 2. – pp. 377–390. (BAK - K1, Scopus - Q2, WoS)
22. *Gorbunov, V. K.* A parametrization method for the numerical solution of singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Y. V. Martynenko // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – № 59. – pp. 639–655. (BAK - K1, Scopus - Q2, WoS)
23. *Lutoshkin, I. V.* Model of control over cutting tool demand in a machining shop / I. Lutoshkin, A. Madanov, Y. Polyanskov // MATEC Web of Conferences / International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2018) – 2018. – V. 224. № 01083. – pp. 1-5. – <https://doi.org/10.1051/mateconf/201822401083> (BAK - K3, Scopus, WoS)
24. *Lutoshkin, I. V.* The dynamic model of advertising costs with continuously distributed lags / I. V. Lutoshkin, N. R. Yamaltdinova // CEUR-WS. – 2018 – V. 2018. – pp. 103-112. (BAK - K3, Scopus, WoS)
25. *Lutoshkin, I. V.* The dynamic model of advertising costs / I. V. Lutoshkin, N. R. Yamaltdinova // Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research. – 2018. – V. 52. № 1. – pp. 201-213. (BAK - K1, Scopus - Q3, WoS)
26. *Lutoshkin, I. V.* Dynamic model of real investment with lags. / I. V. Lutoshkin, N. R. Yamaltdinova // Journal of Physics: Conference Series. 1353 012128, – 2019. – pp. 1-7. – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012128> (BAK - K3, Scopus, WoS)
27. The Mathematical Model for Describing the Principles of Enterprise Management «Just in Time, Design to Cost, Risks Management» / I. Lutoshkin, S. Lipatova, Y. Polyanskov [et al] // Recent Research in Control Engineering and Decision Making. ICIT 2019. Studies in Systems, Decision and Control. – 2019. – V. 199. – Springer, Cham. – pp. 682–695. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-12072-6_55 (BAK - K1, Scopus, WoS)
28. Model of production schedule modification assessment for digital production management systems / Y. Polyanskov, I. Lutoshkin, M. Yardaeva, S. Lipatova // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 497 (2019) 012082 IOP Publishing. – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/497/1/012082> (BAK - K3, Scopus, WoS)
29. *Polyanskov Y. V.* The model of choice of machine retaining devices for

technological preparation of production / Y. V. Polyanskov, I. V. Lutoshkin, A. A. Blyumenshteyn / Journal of Physics: Conference Series. International Scientific Conference "Conference on Applied Physics, Information Technologies and Engineering - APITECH-2019". – 2019. – 33063. – <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/3/033063> (ВАК - КЗ, Scopus, WoS)

Монографии

30. *Лутошкин И. В.* Система управления процессами цифрового производства высокотехнологичных изделий на базе комплексной модели оценки деятельности предприятия: монография / Ю. В. Полянсков, И. В. Лутошкин, С. В. Липатова [и др.]. – Ульяновск : УлГУ, 2021. – 259 с. – ISBN 978-5-88866-848-1 – 30 п. л. (в т.ч. авт. – 4,29 п. л.)

31. *Лутошкин И. В.* Новая экономическая реальность: задачи и решения : монография / под редакцией Е. М. Белого. – Ульяновск : УлГУ, 2022. – 236 с. – ISBN 978-5-88866-909-9 – 14 п. л. (в т.ч. авт. – 0,69 п. л.)

32. *Лутошкин И. В.* Динамические модели экономических систем и методы их анализа : монография / И. В. Лутошкин. – Ульяновск : УлГУ, 2024. – 188 с.

Свидетельства о регистрации программ

33. Липатова С. В., Лутошкин И. В., Ярдаева М. Н. Программа формирования структуры комплексной модели для оценки деятельности предприятия. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018662087. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка № 2018619515 от 10.09.2018.

34. Липатова С. В., Лутошкин И. В., Ярдаева М. Н. Программа формирования структуры КРІ предприятия и ведения базы их значений. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018662135. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка № 2018619513 от 10.09.2018.

35. Липатова С. В., Мартыненко Ю. В., Ярдаева М. Н., Лутошкин И. В., Чувашлова М. В. Программа построения когнитивной карты взаимосвязей между внутренними факторами деятельности предприятия и факторами внешней среды. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2019662689. Дата рег.: 01.10.2019. Заявка № 2019661505 от 18.09.2019.

36. Лутошкин И. В., Чекмарев А. Г. Программа численного решения задач оптимального управления методом параметризации управления. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023681809. Дата рег.: 18.10.2023. Заявка № 2023680653 от 10.10.2023.

37. Ямалтдинова Н. Р., Лутошкин И. В. Численные методы решения задач оптимизации рекламных затрат в динамических моделях рекламных затрат с распределенным запаздыванием. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2018662134. Дата рег.: 27.09.2018. Заявка № 2018619515 от 10.09.2018.

Публикации в журналах и сборниках конференций

38. *Бородастова, И. В.* Метод параметризации в задачах с разрывными фазовыми траекториями / И. В. Бородастова, И. В. Лутошкин // Труды четвертой международной научно-технической конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2001. – С. 34–35.

39. *Горбунов, В. К.* Метод параметризации в вырожденных задачах оптимального управления / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Труды XII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Байкал, 24 июня - 1 июля 2001 г. – Иркутск: Из-во ИСЭМ СО РАН. – 2001.

40. *Горбунов, В. К.* Решение дифференциально-конечных систем методом параметризации / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Сборник трудов Международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения” (26-31 мая 2002 г.) – Самара: СГАСА, 2002. – С. 86-92.

41. *Горбунов, В. К.* Метод параметризации для решения неявных дифференциальных уравнений / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин, Ю. В. Мартыненко // Обратные и некорректные задачи прикладной математики: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Байкал, 2-8 июля 2005 года. Том. 3, Иркутск: Из-во ИСЭМ СО РАН. – 2005. – С. 100-105.

42. *Лутошкин, И. В.* Применение метода параметризации в вырожденных вариационных задачах / И. В. Лутошкин // Обзорение прикладной и промышленной математики. – 2001. – Т.8. Вып. 2. – С. 636.

43. *Лутошкин, И. В.* Построение производственных функций с использованием рекламы / И. В. Лутошкин // Труды 4-й всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования». – Ульяновск. – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2013. – С. 160-162.

44. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации для оптимизационных задач с переменным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Девиен // Проблемы анализа и моделирования региональных социально-экономических процессов. Материалы докладов II Всероссийской научно-практической конференции Казань, 21-22 апреля 2011 г. – Казань: КГФЭИ, 2011. – С. 209–212.
45. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации в моделях с интегро-дифференциальными связями / И. В. Лутошкин, И. Е. Дергунов // Труды седьмой международной научной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». – Ульяновск : Ульяновский государственный университет, 2009. – С. 168–169.
46. *Лутошкин, И. В.* Формализация некоторых подходов в управлении бюджетной организацией / И. В. Лутошкин, И. Н. Ковалев // В сборнике: Научные исследования и разработки молодых ученых. Материалы научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта. [под редакцией доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Голованова]. 2023. – С. 412-417.
47. *Лутошкин, И. В.* Запаздывание рекламных воздействий в торговых компаниях / И. В. Лутошкин, Е. В. Мартыненко, О. А. Мкртычян // Проблемы анализа и моделирования региональных социально-экономических процессов. Материалы докладов II Всероссийской научно-практической конференции Казань, 21-22 апреля 2011 г. – Казань: КГФЭИ, 2011. – С. 212–216.
48. *Лутошкин, И. В.* Анализ влияния информационно-коммуникационных технологий на макроэкономические показатели России / И. В. Лутошкин, А. А. Парамонова, // ЦИФРОВАЯ ЭКОНОМИКА И ИНДУСТРИЯ 4.0: ТЕНДЕНЦИИ 2025. Сборник трудов научно-практической конференции с международным участием. Под редакцией А. В. Бабкина. 2019 (INDUSTRY-2019, Санкт-Петербург, 03–05 апреля 2019 г.) – Издательство: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого"(Санкт-Петербург). – 2019. – С. 115-120. – <https://doi.org/10.18720/IEP/2019.1/14>
49. *Лутошкин, И. В.* Анализ влияния внешних факторов на деятельность АО "АВИАСТАР-СП" / Лутошкин И. В., Пирогова А. С. // В сборнике: Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы

формирования. Труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2017. – С. 19-20.

50. *Лутошкин, И. В.* Проблема оценки параметров математической модели влияния пандемии на экономику. / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // Сборник тезисов докладов конгресса молодых ученых. Электронное издание. – СПб: Университет ИТМО, 2021 – URL: <https://kmu.itmo.ru/digests/article/7045>

51. *Лутошкин, И. В.* Временное дезагрегирование статистических значений экономических показателей / И. В. Лутошкин, М. С. Рыбина // В сборнике: Математическое и компьютерное моделирование и бизнес-анализ в условиях цифровизации экономики. Сборник научных статей по итогам II Всероссийского научно-практического семинара. Нижний Новгород. – 2022. – С. 103-109.

52. *Лутошкин, И. В.* Многокритериальная оптимизация в задаче оптимального управления экономическим субъектом в условиях массового заболевания / М. С. Рыбина, И. В. Лутошкин // В сборнике: Научные исследования и разработки молодых ученых. Материалы научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта. [под редакцией доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Голованова]. 2023. – С. 468-474.

53. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации для анализа моделей экономической динамики с запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Тонких // Информационно-математические технологии в экономике, технике и образовании. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. – Вып. 5. – С. 106–112.

54. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации в моделях с постоянным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Тонких // Труды седьмой международной научной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2009. – С. 170–171.

55. *Лутошкин, И. В.* Метод параметризации в задачах управления с интегро-дифференциальными связями / И. В. Лутошкин, А. Х. Хасанова // Труды пятой международной научно-практической конференции с международным участием «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов». (16-18 июня 2003 г., г. Ульяновск). – Ульяновск: Ульяновский государственный университет,

2003. – С. 119-121.

56. *Лутошкин, И. В.* Разработка инструмента моделирования для задач экономической динамики / А. Г. Чекмарев, И. В. Лутошкин // В сборнике: Научные исследования и разработки молодых ученых. Материалы научно-практической конференции аспирантов и молодых ученых, посвященной Дню аспиранта. [под редакцией доктора физико-математических наук, профессора В. Н. Голованова], 2023. – С. 482-486.

57. *Лутошкин, И. В.* Модель оптимизации рекламных расходов с учетом распределенного запаздывания / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Математика, статика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании. Математика и статика: сб. тр. IV Междунар. науч.-практ. конф. (2 июня 2015, г. Тверь). – Тверь: Тверс. государственный университет, 2015. – С. 84-89.

58. *Лутошкин, И. В.* Динамическая модель распределения рекламного бюджета между несколькими медиаканалами / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования, новые вызовы: сб. трудов шестой всерос. науч. конф. – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2016. – С. 38-40.

59. *Лутошкин, И. В.* Численный анализ динамической модели рекламных расходов / И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: материалы VII всерос. науч. конф. имени Е.В. Воскресенского (12-15 июля 2016, г. Саранск). – Саранск: СВМО, 2016. – С. 61-62.

60. *Лутошкин, И. В.* Инновационные инструменты управления рекламной кампанией фирмы / Лутошкин И. В., Ямалтдинова Н. Р. // В сборнике: Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования. Труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. – Ульяновск: Ульяновский государственный университет, 2017. – С. 20-21.

61. *Лутошкин, И. В.* Модель управления деятельностью промышленного предприятия в условиях цифрового производства / Лутошкин И. В., Ялдаева М. Н., Липатова С. В. // В сборнике: Цифровая экономика промышленности и сферы услуг: состояние и тенденции развития. Труды XVI научно-практической конференции с международным участием (ЭКОПРОМ-2018). Под редакцией А. В. Бабкина. – Спб: ФГАОУ ВО

"Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого 2018. – С. 190-194. – <https://doi.org/10.18720/IEP/2018.5/19>

62. *Gorbunov, V. K.* The parameterization method for numerical solution of singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Martynenko // International Conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics Moscow, June 19-25, 2006. – Sect. №4 – pp. 64-65.

63. *Gorbunov, V. K.* The variational spline method for singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Martynenko // 3-d International Conference Computational methods in applied mathematics: CMAM-3, June 25 - 30, 2007, Minsk, Belarus.

64. *Gorbunov, V. K.* Variational splines for numerical solution of singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Yu. V. Martynenko // 6-th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, 16-20 July 2007, Zurich, Switzerland, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics.

65. *Lutoshkin, I. V.* The parameterization method for numerical solution of singular differential equations / I. V. Lutoshkin, V. K. Gorbunov // The seminar NUMDIFF-11 "Numerical treatment of differential equations". Halle (Saale), Germany, Martin-Luther-University Halle-Wittenberg, September 4-8, 2006. – pp. 42.