На правах рукописи

Черемных Елена Николаевна

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ О СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ ТРЕХ ВЯЗКИХ ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук (ИВМ СО РАН).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Андреев Виктор Константинович,
ИВМ СО РАН, зав. отделом дифференциальных уравнений в механике

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Белов Юрий Яковлевич,
ИМФИ СФУ, зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений

доктор физико-математических наук, профессор
Фалалеев Михаил Валентинович,
ИМЭИ ИГУ, зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений

Ведущая организация: **Институт механики имени Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН**
(г. Уфа)

Защита состоится 21 мая 2015 г. в 13:30 на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте www.idstu.irk.ru ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 20 апреля 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н. Т. В. Груздева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена исследованию систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающих нестационарное однонаправленное и двумерное движение трех вязких несмешивающихся теплопроводных жидкостей в плоском слое.

Актуальность проблемы. Среди постановок начально-краевых задач для уравнений газовой динамики, Эйлера, Навье–Стокса, Обербека–Буссинеска, пограничного слоя Прандтля особое место занимают задачи, описывающие движения жидких сред с поверхностями раздела (внутренние волны, совместные движения систем типа вода – нефть, пленочные течения). К ним же относятся и движения, порождаемые термокапиллярным эффектом, когда поверхностное натяжение зависит от температуры, что является важным для процессов в условиях близких к невесомости. Исследование подобного рода задач связано с большими математическими трудностями: высокий порядок, нелинейность уравнений с частными производными и граничных условий на поверхностях раздела, неизвестность областей определения решений. В связи с этим является актуальной задача качественного исследования уравнений подмоделей, содержащих меньшее число независимых переменных. В частности, точные решения всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Эти решения часто используют в качестве "тестовых задач" для проверки корректности и оценки точности различных асимптотических, приближенных и численных методов, а также имеют чрезвычайно важное значение при изучении устойчивости течений.

В связи с развитием современных технологий появились новые задачи, когда необходимо учитывать термокапиллярный эффект и в земных условиях. Например, при лазерном отжиге полупроводников или при лазерной обработке материалов с плавлением, которая применяется для легирования поверхностного слоя металла. Возникающие здесь вопросы термокапиллярной устойчивости интенсивно исследуются в работах А. А. Бугаева, В. А. Лукошкина, В. А. Урпина, Д. Г. Яковлева (1988), В. К. Андреева (2000) и др.

Из вышесказанного следует, что оценка эффекта Марангони (влияние термокапиллярных сил) в той или иной выбранной модели является актуальной задачей.

Математическая модель трехслойных движений используется при анализе течений и волн в жидких и сыпучих средах (С. Е. Холодова, С. И. Перегудин, 2009). Отметим, что задача об однонаправленном движении двух вязких жидкостей изучена в работах В. К. Андреева (2008, 2009), а задача о термокапиллярном движении капли одной жидкости в другой жидкости, занимающей все пространство, исследовалось в работах И. В. Денисовой (2003, 2005). В этих работах получены априорные оценки решений.

В диссертации исследуются сопряженные начально-краевые задачи для уравнений параболического типа, описывающие нестационарное однонаправленное и двумерное движение трех вязких несмешивающихся теплопроводных жидкостей в плоском слое.

Цель диссертационной работы заключается в исследовании решений начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающих термокапиллярное движение трех вязких теплопроводных жидкостей в плоском канале, построении точных решений этих задач, выводе априорных оценок, а также численном решении поставленных задач.

Объектом исследования являются сопряженные начально-краевые задачи для уравнений параболического типа, описывающие нестационарное движение трех вязких теплопроводных жидкостей в плоском канале.

Методы исследования. В данной работе для нахождения точных решений использованы метод преобразования Лапласа, метод априорных оценок, а также методы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что численные результаты здесь носят, в основном, вспомогательный иллюстративный характер.

Научная новизна. В диссертации впервые исследованы линейные сопряженные начально-краевые задачи для уравнений параболического типа, описывающие нестационарное однонаправленное и двумерное движение трех вязких несмешивающихся теплопроводных жидкостей в плоском слое. Доказаны теоремы о сходимости нестационарных решений к стационарным режимам. На основе доказанного неравенства Фридрихса для области, состоящей из трех отрезков, для решений установлены неулучшаемые оценки скорости сходимости. В изображениях по Лапласу для всех задач получены аналитические выражения для нестационарных решений.

Теоретическая и практическая значимость. Разработанная методика априорных оценок для сопряженных начально-краевых задач для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа может быть использована и для изучения движений жидкостей со многими поверхностями раздела, и в другой геометрии, в частности цилиндрической. Полученные результаты имеют также и практическую значимость ввиду их приложений в природных (слои в океанах и атмосфере) и технологических (изготовление пленок, нанесение покрытий и т. д.) процессах.

Результаты диссертации получены в рамках проектов РФФИ № 08-01-00762, № 11-01-00283, № 14-01-00067 и интеграционных проектов СО РАН № 38, № 65, № 116.

Обоснованность и достоверность полученных результатов обеспечивается использованием классических математических моделей механики сплошных сред и математических методов их исследования, строгими доказательствами теорем, а также согласованием аналитических решений и данных численных расчетов.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с паспортом специальности 01.01.02 “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление” в диссертации рассмотрены начально-краевые задачи, получены априорные оценки и доказаны теоремы о сходимости нестационарных решений к стационарным режимам. Поэтому полученные результаты соответствуют пунктам 2 (начально-краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений) и 3 (Качественная теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений).

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях, семинарах:

– Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2010);

– Научная конференция “Герценовские чтения – 2011: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования” (С.-Петербург, 2011);

– VII Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Молодежь и наука” (Красноярск, 2011);

– IV Всероссийская конференция “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения” (Бийск, 2011);

– VIII Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Молодежь и наука” (Красноярск, 2012);

– Пятнадцатая международная научная конференция “Современный групповой анализ” (Турция, 2012);

– Научная конференция “Герценовские чтения — 2013: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования” (С.-Петербург, 2013);

– Открытая конференция молодых ученых ИВМ СО РАН по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2013);

– 8th International topical team workshop “Two–phase systems for ground and space applications” (Germany, 2013);

– Всероссийская конференция “Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение” (Новосибирск, 2014);

– 7th Conference of the International Marangoni Association (Vienna, 2014);

– XXXI Сибирский теплофизический семинар (Новосибирск, 2014);

– Семинар Института вычислительного моделирования СО РАН “Математическое моделирование в механике” под руководством профессора В. К. Андреева (Красноярск, 2011–2014);

– Семинар Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета “Обратные задачи” под руководством профессора Ю. Я. Белова, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений (Красноярск, 2014).

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано 13 работ, в том числе 5 статей в ведущих реферируемых научных журналах, рекомендованных ВАК [1–5], остальные работы опубликованы в сборниках трудов и тезисов научных конференций, в том числе международных и всероссийских.

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично и не нарушают авторских прав других лиц. В работе [5] В. К. Андрееву принадлежит постановка задачи; априорные оценки авторами получены совместно.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, который содержит 67 наименований. Общий объем диссертации 103 страницы, включая 16 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности работы, приведен обзор литературы по теме исследования, описана структура диссертации и изложены ее основные результаты. Приведена математическая формулировка начально-краевой задачи о движении трех несмешивающихся несжимаемых вязких теплопроводных жидкостей в плоских слоях.

В качестве математической модели в диссертации используются уравнения двумерных движений вязкой теплопроводной жидкости

$(j = 1, 2, 3)$

$$
\begin{gathered}
u_{jt} + u_j u_{jx} + v_j u_{jy} + \frac{1}{\rho_j} p_{jx} = \nu_j (u_{jxx} + u_{jyy}), \\
v_{jt} + u_j v_{jx} + v_j v_{jy} + \frac{1}{\rho_j} p_{jy} = \nu_j (v_{jxx} + v_{jyy}), \\
u_{jx} + v_{jy} = 0, \\
\Theta_{jt} + u_j \Theta_{jx} + v_j \Theta_{jy} = \chi_j (\Theta_{jxx} + \Theta_{jyy}),
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $u(x, y, t), v(x, y, t)$ — компоненты вектора скорости, $p(x, y, t)$ — давление, $\Theta(x, y, t)$ — температура, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность жидкости. Величины ρ, ν, χ предполагаются постоянными.

Пусть $y = l_n(x, t), n = 1, 2$ — функции, описывающие положение границ раздела, тогда на них должны быть выполнены следующие соотношения (Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. Современные математические модели конвекции, 2008):

$$
\begin{gathered}
u_1(x, l_1(x, t)) = u_2(x, l_1(x, t)), \ v_1(x, l_1(x, t)) = v_2(x, l_1(x, t)), \\
u_2(x, l_2(x, t)) = u_3(x, l_2(x, t)), \ v_2(x, l_2(x, t)) = v_3(x, l_2(x, t))
\end{gathered} \tag{2}
$$

равенства скоростей;

$$
l_{1t} + u_1(x, l_1) l_{1x} = v_1(x, l_1), \ l_{2t} + u_2(x, l_2) l_{2x} = v_2(x, l_2) \tag{3}
$$

кинематические условия;

$$
\Theta_1(x, l_1(x, t)) = \Theta_2(x, l_1(x, t)), \ \ \Theta_2(x, l_2(x, t)) = \Theta_3(x, l_2(x, t)) \tag{4}
$$

равенства температур;

$$
\begin{gathered}
k_1 \frac{\partial \Theta_1(x, l_1(x, t))}{\partial n_1} = k_2 \frac{\partial \Theta_2(x, l_1(x, t))}{\partial n_1}, \\
k_2 \frac{\partial \Theta_2(x, l_2(x, t))}{\partial n_2} = k_3 \frac{\partial \Theta_3(x, l_2(x, t))}{\partial n_2}
\end{gathered} \tag{5}
$$

равенства потоков тепла, где $k_j > 0$ — постоянные коэффициенты теплопроводности, $\mathbf{n}_n = (-l_{nx}, 1)(1 + l_{nx}^2)^{-1/2}$ — нормали к линиям $y = l_n(x, t)$;

$$
(p_1 - p_2)\mathbf{n}_1 + [2\rho_2 \nu_2 D(\mathbf{u}_2) - 2\rho_1 \nu_1 D(\mathbf{u}_1)]\mathbf{n}_1 = 2\sigma_1(\Theta_1) K_1 \mathbf{n}_1 + \nabla_{11} \sigma_1 \tag{6}
$$

динамическое условие при $y = l_1(x, t)$;

$$
(p_2 - p_3)\mathbf{n_2} + [2\rho_3 \nu_3 D(\mathbf{u}_3) - 2\rho_2 \nu_2 D(\mathbf{u}_2)]\mathbf{n_2} = 2\sigma_2(\Theta_2) K_2 \mathbf{n}_2 + \nabla_{11} \sigma_2 \tag{7}
$$

динамическое условие при $y = l_2(x,t)$.

В (6), (7) D — тензор скоростей деформаций, а в правых частях $\nabla_{11} = \nabla - (\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{n}$ обозначает поверхностный градиент, величины $K_n = l_{nxx}(1 + l_{nx}^2)^{-3/2}$ — средние кривизны поверхностей раздела $y = l_n(x)$, $\sigma_1(\Theta_1), \sigma_2(\Theta_2)$ — коэффициенты поверхностных натяжений, зависящие от температуры. Для большинства реальных жидких сред зависимость $\sigma_n(\Theta_n)$ хорошо аппроксимируется линейной:

$$\sigma_n(\Theta_n) = \sigma_n^0 - æ_n\Theta_n, \;\; n = 1, 2, \tag{8}$$

где $æ_n > 0$ — температурные коэффициенты поверхностного натяжения линий $y = l_n(x,t)$. Они предполагаются постоянными и определяются экспериментальными методами.

На твердых неподвижных стенках S_1, S_2 заданы условия прилипания и для температуры

$$\begin{gathered} \mathbf{u}_1 \,|_{S_1} = 0, \;\; \mathbf{u}_3 \,|_{S_2} = 0, \\ \boldsymbol{\Theta}_1 \,|_{S_1} = \Theta_{10}(x,t), \;\; \boldsymbol{\Theta}_3 \,|_{S_2} = \Theta_{30}(x,t). \end{gathered} \tag{9}$$

Для полной постановки задачи к соотношениям (1)–(9) следует добавить начальные условия

$$\begin{gathered} l_n(x,0) = l_{n0}(x), \\ \mathbf{u}_j(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_{0j}(\mathbf{x}), \;\; \operatorname{div}\mathbf{u}_{0j} = 0, \;\; \mathbf{x} \in \Omega_j, \\ \Theta_j(\mathbf{x},0) = \Theta_{0j}(\mathbf{x}), \;\; \mathbf{x} \in \Omega_j. \end{gathered} \tag{10}$$

Первая глава является вспомогательной. В пунктах 1.1, 1.2 даны известные определения и теоремы о преобразовании Лапласа, описан один из численных методов его обращения, используемый в диссертации. В пункте 1.3 доказано неравенство Фридрихса на случай области, состоящей из трех конечных отрезков. С помощью вариационного принципа определена наименьшая постоянная в правой части этого неравенства, что позволило получить неулучшаемые априорные оценки решений рассматриваемых во 2 и 3 главах задач.

Во **второй главе** изучена начально-краевая задача, возникающая при совместном однонаправленном движении трех вязких жидкостей под действием термокапиллярных сил и перепада давления. Жидкости ограничены твердыми неподвижными стенками $y = 0, y = l_3$ и контактируют по плоским поверхностям раздела $y = l_1, y = l_2$, на которых поверхностное натяжение линейно зависит от температуры: $\sigma_n = \sigma_n^0 - æ_n\Theta_n$, $n = 1, 2$, $\sigma_n^0, æ_n > 0$ — постоянные. Движение возникает под действием градиента давления и термокапиллярных сил из состояния покоя. Однонаправленное совместное движение этой системы описывается решением следующей начально-краевой задачи: ($\mathbf{u}_j = (u_j(y,t),0,0)$ — вектор скоростей, $p_j = \rho_j f_j(t)x + \alpha_j(t)$ — давления, $\Theta_j = -A_j x + T_j(y,t)$ — температуры с произвольными функциями f_j, α_j и постоянными $A_j, j = 1,2,3$)

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy} - f_j(t), \tag{11}$$

$$T_{jt} = \chi_j T_{jyy} + A_j u_j, \tag{12}$$

$$u_j(y,0) = 0, \;\; T_j(y,0) = 0, \tag{13}$$

$$u_1(0,t) = 0, \;\; u_3(l_3,t) = 0, \tag{14}$$

$$T_1(0,t) = 0, \;\; T_3(l_3,t) = 0, \tag{15}$$

$$u_1(l_1,t) = u_2(l_1,t), \;\; u_2(l_2,t) = u_3(l_2,t), \tag{16}$$

$$T_1(l_1,t) = T_2(l_1,t), \;\; T_2(l_2,t) = T_3(l_2,t), \tag{17}$$

$$k_1 T_{1y}(l_1,t) = k_2 T_{2y}(l_1,t), \;\; k_2 T_{2y}(l_2,t) = k_3 T_{3y}(l_2,t), \tag{18}$$

$$\mu_2 u_{2y}(l_1,t) - \mu_1 u_{1y}(l_1,t) = -A\text{æ}_1, \;\; \mu_3 u_{3y}(l_2,t) - \mu_2 u_{2y}(l_2,t) = -A\text{æ}_2. \tag{19}$$

В уравнении (12) и граничном условии (19) $A \equiv A_1 = A_2 = A_3$ (это следствие равенства температур при $y = l_1$ и $y = l_2$, см. условие (17)). Условия для нормальных напряжений сводятся к равенству давлений в жидкостях, причем $\rho_1 f_1(t) = \rho_2 f_2(t) = \rho_3 f_3(t)$, а кинематические условия при $y = l_1, y = l_2$ выполняются тождественно.

Видно, что уравнения (11)–(19) образуют две последовательно решаемые задачи для функций u_j и T_j. Поскольку задача (11)–(19) является линейной, то влияние перепада давления и термокапиллярных сил происходит независимо друг от друга. Поэтому сначала рассматривается задача об определении поля скоростей и возмущений температур при внезапно возникшем перепаде давления в одном из слоев ($\text{æ}_1 = \text{æ}_2 = 0$). В этом случае граничные условия (19) будут однородными:

$$\mu_2 u_{2y}(l_1,t) - \mu_1 u_{1y}(l_1,t) = 0, \quad \mu_3 u_{3y}(l_2,t) - \mu_2 u_{2y}(l_2,t) = 0. \tag{20}$$

В **пункте 2.2** найдено точное стационарное решение задач (11)–(18), (20)

$$u_1^0(y) = N\left[\bar{l}_1^2\xi^2 + \bar{l}_1 g\xi\right], \;\; 0 < \xi = y/l_1 < 1,$$

$$u_2^0(y) = N\left[\bar{\mu}_1\bar{l}_1^2\xi^2 + \bar{\mu}_1\bar{l}_1 g\xi + (1-\bar{\mu}_1)(\bar{l}_1^2 + \bar{l}_1 g)\right], \;\; 1 < \xi < \bar{l}_2/\bar{l}_1, \tag{21}$$

$$u_3^0(y) = N\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\left[\bar{l}_1^2\xi^2 + g(\bar{l}_1\xi - 1) - 1\right], \;\; \bar{l}_2/\bar{l}_1 < \xi < 1/\bar{l}_1,$$

$$T_1^0(y) = -\tilde{A}\left[\frac{\bar{l}_1^2\xi^4}{12} + \frac{\bar{l}_1 g\xi^3}{6} - g_1\xi\right],\ \ 0 < \xi < 1,$$

$$T_2^0(y) = -\tilde{A}\left[\frac{\bar{\chi}_1\bar{l}_1\xi^2}{2}\Big(\frac{\bar{\mu}_1\bar{l}_1\xi^2}{6} + \frac{\bar{\mu}_1 g\xi}{3} + (1-\bar{\mu}_1)(\bar{l}_1 + g)\Big) - \xi\Big(\bar{k}_1 g_1 - \right. \tag{22}$$
$$\left. -\frac{\bar{l}_1}{6}g_2\Big) - g_1(1-\bar{k}_1) - \frac{\bar{l}_1}{12}(2g_2 - g_3)\right],\ \ 1 < \xi < \bar{l}_2/\bar{l}_1,$$

$$T_3^0(y) = -\tilde{A}\left[\frac{\bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\xi^2}{2}\Big(\frac{\bar{l}_1^2\xi^2}{6} + g\Big(\frac{\bar{l}_1\xi}{3} - 1\Big) - 1\Big) - \frac{1}{6\bar{l}_1}\Big(\frac{1}{\bar{l}_1} - \xi\Big)\Big(\bar{\chi}_1\bar{k}_2\bar{l}_2 d_1 - \right.$$
$$\left. -\bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\bar{l}_2 d_2 - 6\bar{l}_1\bar{k}_1 g_1 + \bar{l}_1^2 g_2\Big) + \frac{\bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2}{12\bar{l}_1^2}(5+4g)\right],\ \ \bar{l}_2/\bar{l}_1 < \xi < 1/\bar{l}_1.$$

В (21), (22) $\bar{l}_n = l_n/l_3$, $\bar{\mu}_n = \mu_n/\mu_{n+1}$, $\bar{k}_n = k_n/k_{n+1}$, $\bar{\chi}_n = \chi_1/\chi_{n+1}$, $N = \rho_1 f_1^0 l_3^2/2\mu_1$, $\tilde{A} = Af_1^0 l_1^2 l_3^2/2\chi_1\nu_1, n = 1, 2$, а величины $g, g_1, g_2, g_3, d_1, d_2$ вычисляются с их помощью по известным формулам.

В **пункте 2.3** получены априорные оценки для $u_j(y,t)$ и $T_j(y,t)$ и на их основе доказаны теоремы.

Теорема 1. *Решение задачи* (11), (13), (14), (16), (20) *при выполнении условия*

$$\int\limits_0^\infty |f_1^0 - f_1(t)|e^{\delta t}\,dt < \infty \tag{23}$$

и $t \to \infty$ *выходит на стационарный режим* (21), *причем справедливы оценки скорости сходимости*

$$|u_j^0(y) - u_j(y,t)| \leqslant D_j e^{-\frac{\delta t}{2}}, \tag{24}$$

равномерные в промежутках $[0, l_1], [l_1, l_2], [l_2, l_3]$.

Положительные постоянные δ, D_j зависят от физических и геометрических свойств слоев, их вид приведен в диссертации.

Теорема 2. *Решение задачи* (12), (13), (15), (17), (18) *при выполнении условия* (23) *и* $t \to \infty$ *выходит на стационарный режим* (22), *причем справедливы оценки скорости сходимости*

$$|T_j^0(y) - T_j(y,t)| \leqslant H_j(E_1(t))^{1/4}, \tag{25}$$

равномерные в промежутках $[0, l_1], [l_1, l_2], [l_2, l_3]$.

Вид постоянных H_j, также как и функция $E_1(t)$, приводятся в диссертации, причем $E_1(t) \sim e^{-2\delta_2 t}$, $\delta_2 > 0$ при $t \gg 1$. Более того, вместо (23) достаточно потребовать, чтобы $|f_1^0 - f_1(t)| \leqslant \alpha(t+\gamma)^{-k}, k > 1, \alpha > 0, \gamma > 0$ — постоянные.

Полученные оценки (25) вместе с результатами теоремы 1 можно интерпретировать как устойчивость стационарного течения (21), (22) относительно однонаправленных нестационарных возмущений.

Для получения более точной информации о поведении скоростей и возмущений температур в **пункте 2.3** применяется преобразование Лапласа, в результате чего приходим к краевым задачам для изображений $U(y,p)$ функций $u(y,t)$ и изображений $\hat{T}(y,p)$ функций $T(y,t)$. Эти задачи решаются в аналитической форме.

Если существует $\lim\limits_{t\to\infty} f_1(t) = f_1^0 = \mathrm{const}$, то доказывается, что $\lim\limits_{p\to 0} pU_j(y,p) = u_j^0(y)$, $\lim\limits_{p\to 0} p\hat{T}_j(y,p) = T_j^0(y)$, где $u_j^0(y)$, $T_j^0(y)$ — решения стационарных задач (21), (22).

Оригиналы функций скорости и возмущения температур восстанавливаются по формуле обращения преобразования Лапласа. Обратное преобразование Лапласа в явном виде выполнить не удается, поэтому применяется численное обращение преобразования Лапласа при помощи квадратурной формулы наивысшей степени точности. Результаты подтверждают выход решения рассматриваемой задачи на стационарный режим (21), (22).

Далее рассмотрен случай, когда источником движения является только термокапиллярный эффект: в уравнении (11) $f_j(t) = 0$,

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy}, \tag{26}$$

а уравнение (12) и условия (13)–(19) остаются без изменения.

В **пункте 2.5** найдено точное стационарное решение

$$\begin{gathered}
u_1^0(y) = \frac{\nu_1}{l_1} a_1 \xi, \;\; 0 < \xi = y/l_1 < 1, \\
u_2^0(y) = \frac{\nu_1}{l_1}\left(\frac{a_2 \bar{l}_2}{\bar{l}_2 - \bar{l}_1}\,(\xi - 1) + a_1\right), \;\; 1 < \xi < \bar{l}_2/\bar{l}_1, \\
u_3^0(y) = \frac{\nu_1 a_3}{l_1}(\xi - \frac{1}{\bar{l}_1}), \;\; \bar{l}_2/\bar{l}_1 < \xi < 1/\bar{l}_1,
\end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered}
T_1^0(y) = \tilde{A}\left[-\frac{a_1}{6}\left((\xi-1)^3 + 3\,(\xi-1)^2 - 2\right) + \frac{b_3}{b_2}\xi\right], \;\; 0 < \xi < 1, \\
T_2^0(y) = \tilde{A}\left[-\frac{\bar{\chi}_1}{6}\left(a_2\tilde{\xi}^3 + 3a_1\tilde{\xi}^2\right) + \frac{b_3}{b_2}\left(\bar{k}_1\tilde{\xi} + 1\right) + \frac{a_1}{3}\right], \;\; 1 < \xi < \bar{l}_2/\bar{l}_1,
\end{gathered} \tag{28}$$

$$T_3^0(y) = \tilde{A}\Bigg[-\frac{\bar{\chi}_2 a_3}{6}\left(\xi^3 - \frac{3\xi^2}{\bar{l}_1}\right) + \left(\frac{\bar{k}_1\bar{k}_2 b_3}{b_2} + \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1}\left(\frac{\bar{\chi}_2 a_3}{\bar{l}_1}\left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1\right) - \bar{\chi}_1\bar{k}_2 \times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1}\right)\right)\right)\xi - \frac{\bar{k}_1\bar{k}_2 b_3}{b_2\bar{l}_1} - \frac{1}{\bar{l}_1^{\,2}}\left(\frac{\bar{\chi}_2\bar{l}_2 a_3}{\bar{l}_1}\left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1\right) - \bar{\chi}_1\bar{k}_2\bar{l}_2\left(a_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1}\right) + \frac{\bar{\chi}_2 a_3}{3\bar{l}_1}\right)\Bigg], \ \ \bar{l}_2/\bar{l}_1 < \xi < 1/\bar{l}_1.$$

В (27), (28) $\tilde{A} = \dfrac{Al_1\nu_1}{\chi_1}$, $\tilde{\xi} = \dfrac{\bar{l}_2}{\bar{l}_2 - \bar{l}_1}(\xi - 1)$, $\bar{l}_n = \dfrac{l_n}{l_3}$, $\bar{\mu}_n = \dfrac{\mu_n}{\mu_{n+1}}$, $\bar{k}_n = \dfrac{k_n}{k_{n+1}}$, $\bar{\chi}_n = \dfrac{\chi_1}{\chi_{n+1}}$, $M_n = \dfrac{A æ_n l_1^2}{\nu_1\mu_2}$, $n = 1, 2$, M_1 и M_2 — числа Марангони, а величины $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ находятся по известным формулам.

Для получения априорных оценок в **пункте 2.6** вводятся новые функции, которые задают отклонение от стационарного решения

$$w_j(y,t) = u_j^0(y) - u_j(y,t) \quad \text{и} \quad N_j(y,t) = T_j^0(y) - T_j(y,t).$$

Тем самым начальные данные (13) становятся ненулевыми и граничные условия (19) выполнены для любых $t > 0$; при $t = 0$ их правые части равны $Aæ_1$ и $Aæ_2$ соответственно. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 3. *Решение задачи* (26), (13), (14), (16), (19) *выходит на стационарный режим* (27) *при* $t \to \infty$, *причем справедливы оценки скорости сходимости*

$$|u_j^0(y) - u_j(y,t)| \leqslant K_j e^{-\frac{\delta t}{2}}, \tag{29}$$

равномерные в промежутках $[0, l_1], [l_1, l_2], [l_2, l_3]$.

Теорема 4. *Решение задачи* (12), (13), (15), (17), (18) *выходит на стационарный режим* (28) *при* $t \to \infty$, *причем справедливы оценки скорости сходимости*

$$|T_j^0(y) - T_j(y,t)| \leqslant L_j(E_1(t))^{1/4}, \tag{30}$$

равномерные в промежутках $[0, l_1], [l_1, l_2], [l_2, l_3]$.

Постоянные $K_j > 0$, $L_j > 0$, также как и функция $E_1(t)$, приведены в диссертации и зависят от геометрических и физических свойств жидкостей, причем $E_1(t) \sim e^{-2\delta_2 t}$, $\delta_2 > 0$ при $t \gg 1$.

Применение преобразования Лапласа в **пункте 2.7** позволяет определить вид изображений для функций $u_j(y,t), T_j(y,t)$. Доказано, что $\lim\limits_{t\to\infty} u_j(y,t) = u_j^0$, $\lim\limits_{t\to\infty} T_j(y,t) = T_j^0$, т. е. с ростом времени скорость и возмущение температур в слоях выходят на стационарный режим (27), (28).

В **пункте 2.8** рассмотрено комбинированное движение: движение под действием градиента давления и термокапиллярных сил. Для получения решения достаточно суммировать полученные выражения для скоростей и возмущений температур в пунктах 2.2, 2.5 — в случае стационарного течения и в пунктах 2.4, 2.7 — для нестационарного. После обезразмеривания в выражениях возникнут параметр $N = f_1^0 l_1 l_3^2 / 2\nu_1^2$, который отвечает за влияние перепада давления, параметры a_1, a_2, a_3 — за влияние термокапиллярных сил. Поэтому в случае $|N| \ll |a_j|$, когда преобладают термокапиллярные силы, имеем почти линейный профиль скоростей — течение Куэтта (см. рис. 2). При $|N| \gg |a_j|$ главными становятся градиенты давления в слоях и профили близки к параболическим — течение Пуазейля.

Глава 3 посвящена исследованию одного частично инвариантного решения ранга два и дефекта три уравнения вязкой теплопроводной жидкости, построенного на четырехмерной подалгебре Ли $< \partial_x, t\partial_u + \partial_x$, $\partial_p, \partial_\Theta >$, допускаемой системой уравнений двумерных движений вязкой теплопроводной жидкости. Оно интерпретируется как двумерное движение трех несмешивающихся жидкостей в плоском канале, ограниченном твердыми неподвижными стенками, на которых известно распределение температур. Решение представимо формулами

$$\begin{gathered} u_j = x w_j(y,t), \quad v_j = v_j(y,t), \quad \frac{1}{\rho_j} p_j = d_j(y,t) - \frac{f_j(t)}{2} x^2, \\ \Theta_j = a_j(y,t) x^2 + b_j(y,t), \quad d_{jy} = \nu_j v_{jyy} - v_{jt} - v v_{jy}. \end{gathered} \tag{31}$$

Функции $w_j(y,t), f_j(t), a_j(y,t), b_j(y,t)$ определяются из решения начально-краевых задач, а функции $d_j(y,t)$ восстанавливаются квадратурой из последнего уравнения (31) с точностью до функций времени.

Начально-краевая задача для функций $w_j(y,t), a_j(y,t), f_j(t)$ является неклассической (часть граничных условий содержит интегралы по областям), нелинейной и обратной, так как функции $f_j(t)$ являются искомыми. Искомыми являются также и поверхности раздела $y = l_n(x,t)$, $n = 1,2$. При переходе к безразмерным переменным, в уравнениях Навье-Стокса при нелинейных слагаемых и в кинематических условиях при линейных членах, содержащих скорости, получим сомножитель — число Марангони $M = æ_1 a^0 l_1^{03} (\mu_1 \nu_1)^{-1}$, $l_1^0 = \mathrm{const} > 0$ — среднее значение толщины первого слоя жидкости при $t = 0$, $a^0 = \max\limits_{t \geqslant 0} |a_{30}(t) - a_{10}(t)| > 0$ или $a^0 = \max\limits_j \max\limits_y |a_{0j}(y)| > 0$, $a_{j0}(t)$ — значения функции $a_j(y,t)$ на твердых стенках: $a_1(0,t) = a_{10}(t)$, $a_3(l_3,t) = a_{30}(t)$, $a_{0j}(y)$ — значения функции $a_j(y,t)$ в начальный момент времени. Динамические условия после проектирования на нормали $\boldsymbol{n}_{1,2}$ и перехода к безразмерным параметрам будут в правых частях содержать числа Вебера $We_n = \sigma_n^0 (a^0 l_1^{02} æ_1)^{-1}, n = 1,2$. При предположениях, что температурные коэффициенты поверхностного натяжения сравнимы по величине $æ_1 \sim æ_2$ и $M \ll 1$ (это выполнено в тонких слоях либо при очень больших вязкостях), а также $We_n \gg 1$, задача заменяется линейной, а поверхности раздела являются плоскими.

Выпишем полностью полученную линейную задачу в размерном виде, учитывая, что из уравнения сохранения массы

$$v_1(y,t) = -\int\limits_0^y w_1(y,t)\,dy, \quad v_2(y,t) = -\int\limits_{l_1}^y w_2(y,t)\,dy, \tag{32}$$

$$v_3(y,t) = -\int\limits_{l_2}^y w_3(y,t)\,dy.$$

Она имеет вид

$$w_{jt} = \nu_j w_{jyy} + f_j(t), \quad j = 1,2,3, \tag{33}$$

$$w_j(y,0) = 0, \tag{34}$$

$$w_1(0,t) = 0, \;\; w_3(l_3,t) = 0, \tag{35}$$

$$w_1(l_1,t) = w_2(l_1,t), \;\; w_2(l_2,t) = w_3(l_2,t), \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 w_{2y}(l_1,t) - \mu_1 w_{1y}(l_1,t) = -2æ_1 a_1(l_1,t), \\ \mu_3 w_{3y}(l_2,t) - \mu_2 w_{2y}(l_2,t) = -2æ_2 a_2(l_2,t), \end{aligned} \tag{37}$$

$$\int\limits_0^{l_1} w_1(y,t)\,dy = 0, \;\; \int\limits_{l_1}^{l_2} w_2(y,t)\,dy = 0, \;\; \int\limits_{l_2}^{l_3} w_3(y,t)\,dy = 0, \tag{38}$$

где $0 < y < l_1$ для $j = 1$, $l_1 < y < l_2$ для $j = 2$ и $l_2 < y < l_3$ для $j = 3$. Первые два равенства (38) означают, что $v_1(l_1,t) = v_2(l_1,t) = 0$, а последнее есть условие прилипания: $v_3(l_3,t) = 0$.

Задача для функций $a_j(y,t)$ такова:

$$a_{jt} = \chi_j a_{jyy}, \tag{39}$$

$$a_j(y,0) = a_{0j}(y), \tag{40}$$

$$a_1(0,t) = a_{10}(t), \;\; a_3(l_3,t) = a_{30}(t), \tag{41}$$

$$a_1(l_1,t) = a_2(l_1,t), \;\; a_2(l_2,t) = a_3(l_2,t), \tag{42}$$

$$k_1 a_{1y}(l_1,t) = k_2 a_{2y}(l_1,t), \;\; k_2 a_{2y}(l_2,t) = k_3 a_{3y}(l_2,t). \tag{43}$$

В **пункте 3.2** получены априорные оценки решений $a_j(y,t), w_j(y,t)$ поставленных задач и доказаны следующие теоремы.

Теорема 5. *Решение задачи* (39)–(43) *при* $t \to \infty$ *стремится к нулевому, если сходятся интегралы*

$$\int\limits_0^\infty e^{\delta\tau}|a_{k0}(\tau)|\,d\tau, \quad \int\limits_0^\infty e^{\delta\tau}|a'_{k0}(\tau)|\,d\tau, \quad k=1,3, \tag{44}$$

причем справедливы оценки скорости сходимости

$$|a_1(y,t)| \leqslant \left(\frac{8A(t)F(t)}{\rho_1 c_1 k_1}\right)^{1/4} + h_1(t)e^{-\delta t},$$

$$|a_2(y,t)| \leqslant (8A(t)F(t))^{1/4}\left((\rho_2 c_2 k_2)^{-1/2} + (\rho_1 c_1 k_1)^{-1/2}\right)^{1/2}, \tag{45}$$

$$|a_3(y,t)| \leqslant \left(\frac{8A(t)F(t)}{\rho_3 c_3 k_3}\right)^{1/4} + h_3(t)e^{-\delta t},$$

равномерные в промежутках $[0,l_1],[l_1,l_2],[l_2,l_3]$.

Здесь $\int\limits_0^\infty |h_j(\tau)|\,d\tau < \infty$, функция $F(t)$ ограничена постоянной, а функция $A(t) \sim e^{-2\delta t}, \delta =\text{const}> 0,\ t \gg 1$.

Теорема 6. *Решение задачи* (33)–(38) *при* $t \to \infty$ *стремится к нулевому, если сходятся интегралы* (44) *и*

$$\int\limits_0^\infty e^{\delta\tau}|a''_{k0}(\tau)|\,d\tau, \quad k=1,3, \tag{46}$$

причем справедливы оценки скорости сходимости

$$|w_j(y,t)| \leqslant P_j(E(t))^{1/4}, \tag{47}$$

равномерные в промежутках $[0,l_1],[l_1,l_2],[l_2,l_3]$.

Для функций $f_j(t)$ при условии сходимости интегралов (44), (46) получены следующие оценки:

$$|f_1(t)| \leqslant \left(\frac{12}{5l_1\rho_1}E_1(t)\right)^{1/2} + \frac{6\nu_1}{l_1^2}P_1(E(t))^{1/4},$$

$$|f_2(t)| \leqslant \left(\frac{12}{5(l_2-l_1)\rho_2}E_1(t)\right)^{1/2} + \frac{6\nu_2}{(l_2-l_1)^2}(P_1+P_3)(E(t))^{1/4}, \tag{48}$$

$$|f_3(t)| \leqslant \left(\frac{12}{5(l_3-l_2)\rho_3}E_1(t)\right)^{1/2} + \frac{6\nu_3}{(l_3-l_2)^2}P_3(E(t))^{1/4}.$$

В оценках (47), (48) функции $E(t) \sim e^{-\delta_3 t}, E_1(t) \sim e^{-\delta_4 t}$, $\delta_3, \delta_4 > 0$, $t \gg 1$, а постоянные P_j приведены в диссертации.

В **пункте 3.3** найдено стационарное точное решение для задачи (39)–(43) (a_{10}^0, a_{30}^0 — постоянные значения $a_1^0(0)$ и $a_3^0(l_3)$, всюду далее $a_{10}^0 \neq 0$)

$$\begin{gathered} a_1^0(y) = a_{10}^0 \left[\bar{l}_1 Q \xi + 1\right], \ \ 0 < \xi = y/l_1 < 1, \\ a_2^0(y) = a_{10}^0 \left[\bar{l}_1 Q ((\xi - 1)\bar{k}_1 + 1) + 1\right], \ \ 1 < \xi < 1/\bar{l}_1, \\ a_3^0(y) = a_{10}^0 \left[\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{l}_1 Q (\xi - \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1}) + \frac{a_{30}^0}{a_{10}^0}\right], \ \ 1/\bar{l}_1 < \xi < \bar{l}_2/\bar{l}_1, \end{gathered} \tag{49}$$

и для задачи (33)–(38)

$$\begin{gathered} w_1^0(y) = \frac{l_1 æ_2 a_2^0(l_2)}{\mu_2} \frac{\bar{l}_1(\bar{l}_1 - 1)}{m_1} \left(2\xi - 3\xi^2\right) \left[\frac{æ_1 a_1^0(l_1)}{æ_2 a_2^0(l_2)} - \frac{m_5}{m_4}(\bar{l}_1 - 1)\right], \\ 0 < \xi = y/l_1 < 1, \\ w_2^0(y) = -\frac{l_1 æ_2 a_2^0(l_2)}{\mu_2} \left[\frac{3\bar{l}_1 m_5}{m_4}(\xi - 1)^2 + \frac{\bar{l}_1(\bar{l}_1 - 1)}{m_1}(1 + 4\bar{\mu}_1(\xi - 1)) \times \right. \\ \left. \times \Big(\frac{æ_1 a_1^0(l_1)}{æ_2 a_2^0(l_2)} - \frac{m_5(\bar{l}_1 - 1)}{m_4}\Big) + \frac{2æ_1 a_1^0(l_1)}{æ_2 a_2^0(l_2)}(\xi - 1)\right], \ \ 1 < \xi < 1/\bar{l}_1, \\ w_3^0(y) = \frac{2\bar{\mu}_2 l_1 æ_2 a_2^0(l_2)}{\mu_2} \Big(\xi - \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1}\Big) \left[-\frac{3 m_6 \bar{l}_1}{4(\bar{l}_2 - 1)} (\xi + \frac{\bar{l}_2 - 2}{\bar{l}_1}) + \frac{m_2 m_5 (\bar{l}_1 - 1)}{m_1 m_4} - \right. \\ \left. - \frac{æ_1 a_1^0(l_1) \bar{l}_1^2}{m_1 æ_2 a_2^0(l_2)} - 1\right], \ \ 1/\bar{l}_1 < \xi < \bar{l}_2/\bar{l}_1, \end{gathered} \tag{50}$$

$$\begin{gathered} f_1^0 = \frac{6\nu_1 æ_2 a_2^0(l_2)}{l_2 \mu_2} \frac{(\bar{l}_1 - 1)}{m_1} \left(\frac{æ_1 a_1^0(l_1)}{æ_2 a_2^0(l_2)} - \frac{m_5}{m_4}(\bar{l}_1 - 1)\right), \\ f_2^0 = \frac{6\nu_2 æ_2 a_2^0(l_2) m_5}{l_2 \mu_2 m_4}, \ \ f_3^0 = \frac{3\nu_3 æ_2 a_2^0(l_2)}{l_2 \mu_3 (\bar{l}_2 - 1)} m_6, \end{gathered} \tag{51}$$

где $\bar{l}_1 = l_1/l_2$, $\bar{l}_2 = l_3/l_2$, $\bar{k}_1 = k_1/k_2$, $\bar{k}_2 = k_2/k_3$, $\bar{\mu}_1 = \mu_1/\mu_2$, $\bar{\mu}_2 = \mu_2/\mu_3$, $Q = (a_{30}^0/a_{10}^0 - 1)/g$, а постоянные $g, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ вычисляются по известным формулам.

Доказано, что решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим $a_j^0(y), w_j^0(y)$ и $f_j^0 = \mathrm{const}$ при условии сходимости последнего интеграла из (44), (46) и интеграла

$$\int\limits_0^\infty e^{\delta\tau}|a_{k0}^0 - a_{k0}(\tau)|\,d\tau, \quad k = 1, 3. \tag{52}$$

Более того, вместо сходимости последнего интеграла из (44), (46) и интеграла (52) достаточно потребовать, чтобы $|a_{k0}^0 - a_{k0}(t)| \leqslant \alpha(t+\gamma)^{-k}$, $k > 1, \alpha > 0, \gamma > 0$ — постоянные. В изображениях по Лапласу получено точное решение нестационарной задачи в **пункте 3.4**. Его качественный и численный анализ хорошо подтверждает стремление при $t \to \infty$ решения к стационарному.

Заключение содержит основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Доказано неравенство Фридрихса на случай области, состоящей из трех конечных отрезков, и определена наименьшая постоянная в правой части этого неравенства.

2. Для начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающей однонаправленное движение трех вязких теплопроводных жидкостей в плоском канале, найдено точное стационарное решение. В изображениях по Лапласу получено точное решение нестационарной задачи. Доказаны теоремы о сходимости нестационарного решения к стационарному с ростом времени, и получены экспоненциальные оценки скорости сходимости.

3. Впервые исследована обратная начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа, описывающая двумерное ползущее движение трех вязких теплопроводных жидкостей в плоском канале. Найдено точное стационарное решение. Решение нестационарной задачи получено в явном виде в изображениях по Лапласу. Доказаны теоремы о сходимости нестационарного решения к стационарному с ростом времени, и получены экспоненциальные оценки скорости сходимости.

Автор выражает благодарность научному руководителю д.ф.-м.н., профессору В. К. Андрееву за постановку задачи, помощь и ценные советы при работе над диссертацией.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня ВАК Министерства образования и науки РФ

1. Лемешкова (Черемных) Е.Н. Прямая и обратная задача о совместном движении трех вязких жидкостей в плоских слоях // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2011. № 4(3). С. 363–370.
2. Лемешкова (Черемных) Е.Н. Стационарное течение трех жидкостей в плоском слое под действием термокапиллярных сил и перепада давления // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. 2012. № 5(1). С. 91–96.
3. Lemeshkova E. N. Combined motion of three viscous heat-conducting liquids in a flat layer // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 6:2 (2013), P. 211–219.
4. Лемешкова (Черемных) Е.Н. О совместном движении трех вязких неизотермических жидкостей в плоском слое // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 2. С. 55–61.
5. Андреев В.К., Лемешкова (Черемных) Е.Н. Эволюция термокапиллярного движения трех жидкостей в плоском слое // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, Вып. 4. С. 485–492.

Другие работы по теме диссертации

6. Лемешкова (Черемных) Е.Н. Решение начально-краевой задачи о совместном движении трех вязких жидкостей в плоских слоях // XI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск, 2010. С. 32.
7. Лемешкова (Черемных) Е.Н. О неравенстве Фридрихса для области, состоящей из трех отрезков // Герценовские чтения — 2011: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции, 11–16 апреля 2011 г., С.-Петербург. СПб.: ООО “ПаркКом”, 2011. С. 80–84.
8. Лемешкова (Черемных) Е.Н. Однонаправленное движение трех вязких жидкостей в плоских слоях // Тезисы докладов Четвертой всероссийской конференции с участием зарубежных ученых “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения”, 5–10 июля 2011 г., Бийск, 2011. С. 59.
9. Лемешкова (Черемных) Е.Н. Эволюция совместного движения трех вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое // Герценовские

чтения — 2013: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования: материалы научной конференции, 15–20 апреля 2013 г., С.-Петербург. СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2013. С. 90–93.

10. Лемешкова (Черемных) Е.Н. Комбинированное движение трех вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое // Материалы Открытой конференции молодых ученых ИВМ СО РАН по математическому моделированию и информационным технологиям. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2013. С. 80–85.
11. Черемных Е.Н. Двумерное движение жидкости в плоском слое // Тезисы Всероссийской конференции "Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение". Новосибирск, 2014. С. 144–145.
12. Черемных Е.Н. Свойства решений уравнений двумерных термокапиллярных движений в плоском канале. Красноярск, 2014. 27 с. (Препринт / ИВМ СО РАН; № 14-1).
13. Черемных Е.Н. Двумерное движение несмешивающихся жидкостей в плоском канале // Тезисы XXXI Сибирского теплофизического семинара. Новосибирск, 2014. С. 52.

Научно-организационный отдел
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН)
664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134

Подписано к печати 19.03.2015. Поз. 1
Формат 60×84 1/16, объем 1,2 п.л.
Тираж 150 экз. Заказ 2.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН