

Отзыв научного руководителя  
на диссертацию Скворцовой Марии Александровны  
“Оценки решений систем дифференциальных уравнений  
нейтрального типа”,  
представленную на соискание ученой степени кандидата  
физико–математических наук по специальности 01.01.02 —  
Дифференциальные уравнения, динамические системы и  
оптимальное управление

Диссертационная работа М.А. Скворцовой посвящена изучению экспоненциальной устойчивости нулевого решения некоторых классов систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Теория устойчивости решений таких уравнений начала развиваться в середине прошлого столетия. Основы теории были заложены в работах А.А. Андропова, Р. Беллмана, А.М. Зверкина, Г.А. Каменского, Н.Н. Красовского, Н.Н. Меймана, А.Д. Мышкиса, Л.С. Понтрягина, Б.С. Разумихина, Я.З. Цыпкина, Н.Г. Чеботарева, С.Н. Шиманова, Л.Э. Эльсгольца и др. Большой интерес математиков к уравнениям с запаздывающим аргументом в те годы был связан с необходимостью решения прикладных задач, в которых важную роль играл эффект запаздывания. В последующие годы уравнения такого типа возникали во многих задачах теории автоматического регулирования и управления, автоматике и телемеханики, радиофизики, при моделировании процессов иммунологии, при изучении генных сетей, экономики и т. д. Поэтому в настоящее время имеется огромное число работ, посвященных исследованиям различных задач для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в частности, задач об устойчивости решений. Однако несмотря на бурное развитие теории устойчивости, существует масса нерешенных вопросов. Например, каким образом описать максимальную область притяжения решений нелинейных уравнений, как указать максимальную скорость стабилизации решений на бесконечности, какой алгоритм следует использовать при численных исследованиях устойчивости решений с гарантированной точностью и т. д. Особенно это касается неавтономных уравнений.

Перед диссертантом была поставлена задача провести исследования устойчивости нулевого решения для некоторых классов систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, которые относятся к системам нейтрального типа, с целью доказательства теорем о разрешимости “в целом”, описания множеств притяжения нулевого решения и получения оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание на бесконечности. Эта тема является актуальной и представляет интерес как с теоретической точки зрения, так и с прикладной.

С поставленной задачей М.А. Скворцова справилась, полученные ею результаты составили основу настоящей диссертации, состоящей из двух глав. Изложим вкратце их содержание.

В первой главе рассматриваются системы нелинейных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами в линейных членах

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t - \tau)) = Ay(t) + By(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t > 0, \quad (1)$$

где  $A, B, D$  — матрицы размера  $n \times n$ ,  $\tau > 0$  — параметр запаздывания,  $F(t, u, v)$  — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по  $u$  и оценке

$$\|F(t, u, v)\| \leq q_1 \|u\|^{1+\omega_1} + q_2 \|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_i, \omega_i \geq 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Предполагается, что матрицы  $A, B, D$  удовлетворяют условиям, при которых решения системы линейных уравнений экспоненциально устойчивы. Основные результаты главы: в зависимости от матрицы  $D$  доказано несколько теорем о разрешимости “в целом” начальной задачи для систем вида (1). В этих теоремах указаны множества допустимых начальных данных, при которых решения системы (1) существуют на всей полуоси и стремятся к нулю на бесконечности. При доказательстве теорем получены также оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание при  $t \rightarrow \infty$ . Из доказанных теорем непосредственно вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения рассматриваемых классов систем вида (1). В первой главе получено также обобщение результатов для систем нейтрального типа в случае переменного запаздывания:  $\tau = \tau(t)$ .

Во второй главе рассматриваются системы нелинейных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t - \tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad (3)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  — непрерывные  $T$ -периодические матрицы,  $F(t, u, v)$  — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по  $u$  и оценке (2). Предполагается, что матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $D$  удовлетворяют условиям, при которых решения системы линейных уравнений экспоненциально устойчивы. Полученные результаты являются аналогами соответствующих утверждений из первой главы. В частности, в зависимости от матрицы  $D$  доказаны теоремы о разрешимости “в целом” начальной задачи для систем вида (3). В этих теоремах указаны множества допустимых начальных данных, при которых решения системы (3) существуют на всей полуоси и получены оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание при  $t \rightarrow \infty$ . Существенное отличие от полученных ранее оценок состоит в том, что вместо линейных функций в показателях экспонент здесь фигурируют некоторые интегралы. Из доказанных теорем вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения рассматриваемых классов систем вида (3).

Следует отметить, что описание областей притяжения и вычисление различных констант в оценках решений (показатели в экспонентах, предэкспоненциальные множители) в первой главе диссертации сведено к построению решения матричного уравнения Ляпунова, а во второй — к построению решения краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова. В силу того, что обе эти задачи являются хорошо обусловленными, то полученные автором результаты могут быть использованы при численном исследовании экспоненциальной устойчивости. Отметим также, что оценки решений, полученные в диссертации, являются аналогами оценок Крейна для решений автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Диссертационная работа выполнена на хорошем научном уровне. Автором получен ряд новых результатов, имеющих важное значение в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Результаты диссертации обоснованы полными доказательствами, своевре-

менно опубликованы, неоднократно докладывались на научных конференциях и семинарах. По теме диссертации имеется 15 публикаций, из которых 4 статьи в журналах из списка ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

На мой взгляд, представленная диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, и ее автор Скворцова Мария Александровна несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., профессор



Г.В. Демиденко

Подпись *Г.В. Демиденко*  
удостоверяю *Г.В.*  
Зав. орготделом Н.З. Киндалева  
ИМ СО РАН  
'07' 04 20 14 г.