ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Шеметова Валентина Владимировна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КЛАССА ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1.2 — дифференциальные уравнения и
математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Демиденко Геннадий Владимирович

НОВОСИБИРСК
2025

Оглавление

Введение

Актуальность исследования.

Данная работа посвящена исследованию корректности смешанных краевых задач для одного класса уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени. Разработка теории краевых задач для таких уравнений и систем началась во второй половине прошлого столетия. Первоначальный интерес к уравнениям такого вида возник после работ по системе Навье-Стокса (см. Озеен [62], Лере [60], Лере и Шаудер [61]). Однако, бурное развитие данная тематика получила после появления работ С.Л. Соболева по исследованию колебаний вращающейся жидкости (см. [40]). В литературе за такими уравнениями закрепилось название «уравнения соболевского типа».

Уравнения соболевского типа представляют собой важный класс математических моделей, описывающих широкий спектр физических процессов, таких как фильтрация жидкости в пористой среде, волны в стратифицированной жидкости, колебания тонких пластин и оболочек, процессы в плазме и др.

В настоящее время имеется большое число теоретических и прикладных работ, посвященных изучению уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. Решение ряда задач для конкретных уравнений и систем содержится в работах С.А. Гальперна [13, 14]; С.М. Белоносова и К.А. Черноуса [3]; С.А. Габова [10], и А.Г. Свешникова [11], П.А. Крутицкого [12]; А.Г. Свешникова, М.О. Корпусова, А.Б. Альшина и Ю.Д. Плетнера [26,39]; Н.Д. Копачевского [30]; С.Г. Крейна, Нго Зуй Кана, И.М. Хазана и Чан Тху Ха [28, 29, 34]; В.Е. Фёдорова [45]; О.А. Ладыженской [31]; В.Ф. Чистякова и А.А. Щегловой [48], а также зарубежных учёных, включая R.E. Showalter [68] и R.W. Carroll [54], T.W. Ting [71], N. Polat и E. Piskin [64], C.G. Rossby [66]. Обширную библиографию работ, посвященных изучению уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, например, см. в монографиях [23,39,69,70]. Особое внимание уделяется доказательству существования, единственности и регулярности обобщённых решений в соответствующих функциональных пространствах, получению априорных оценок, изучению качественных свойств решений.

В монографии [23] впервые была предложена классификация линейных уравнений вида

$$L(D_t, D_x)u \equiv L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t,x), \qquad (0.1)$$

где $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор. Были определены классы: уравнения соболевского типа, псевдопараболические и псевдогиперболические уравнения. И для них изучены классы начально-краевых задач.

Следует отметить, что на современном этапе научных исследований подавляющее большинство работ в этой области посвящено изучению первых двух указанных классов, а именно уравнениям соболевского типа и псевдопараболическим уравнениям.

В данной работе речь пойдет о смешанных краевых задачах для псевдогиперболических уравнений. Согласно классификации [23], уравнение (0.1) называется *псевдогиперболическим*, если оператор $L(D_t, D_x)$ удовлетворяет условиям: символ $L(i\eta, i\xi)$ однороден относительно вектора $\alpha = (\alpha_0, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, здесь $1/\alpha_0 \in \mathbb{N}$ и $1/\alpha_i \in \mathbb{N}$, то есть

$$L(c^{\alpha_0} i\eta, c^{\alpha} i\xi) = cL(i\eta, i\xi), \quad c > 0;$$

оператор при старшей производной по времени $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический, то есть $L_0(i\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \xi = 0$; и уравнение

$$(i\eta)^l + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{L_{l-k}(i\xi)}{L_0(i\xi)}(i\eta)^k = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \neq 0,$$

имеет только вещественные корни относительно η. Если все корни различные, то такие уравнения называют *строго псевдогиперболическими.*

Актуальность изучения уравнений псевдогиперболического типа определяется необходимостью решения различных прикладных задач. Псевдогиперболические уравнения играют важную роль в моделировании различных физических и механических процессов. Они находят широкое применение в таких областях, как теория упругости (например, уравнение Власова), гидродинамика (модифицированное уравнение Кортевега-де-Фриза, обобщенное уравнение Буссинеска), теория волноводов (уравнение Рэлея-Бишопа) и др. Однако, несмотря на их значимость, построение теории краевых задач для псевдогиперболических уравнений пока только начинается.

Вопросы существования, единственности и разрушения решений нелинейных уравнений типа Буссинеска исследовались, например, в работах [56, 73]. В [67] предложены подходы к асимптотической аппроксимации решений данного класса уравнений. Разработке аналитических методов построения точных и солитонных решений посвящены труды [7, 63]. Краевые задачи для обобщенного уравнения Буссинеска в прямоугольных областях анализировались в [24, 72]. Помимо этого, существование и единственность локального обобщенного решения для начально-краевой задачи нелинейного псевдогиперболического уравнения с затуханием в трехмерной ограниченной области исследованы в [55].

К изучению уравнения Власова

$$(\varepsilon\mathbb{I} - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x > 0, \quad t > 0, \qquad (0.2)$$

сводится система дифференциальных уравнений, которая описывает крутильные колебания стержня (см., например, [8, 9, 15, 41, 46, 47]). Также подобное уравнение возникает при конструировании волноводов [51, 65].

В работах [5, 22, 23, 52, 58, 59] были сформулированы условия разрешимости задачи Коши для линейных псевдогиперболических уравнений и систем с постоянными коэффициентами. В [42, 43] рассмотрена задача Коши для некоторых одномерных нелинейных псевдогиперболических уравнений. В работах [17–19] впервые были получены энергетические оценки для певдогиперболических операторов с переменными коэффициентами.

В настоящее время для некоторых классов уравнений, не разрешённых относительно старшей производной (например, уравнений соболевского типа и псевдопараболических уравнений), теория краевых задач получила значительное развитие (см., например, [23, 39, 57, 70]). Однако, для псевдогиперболических уравнений теория краевых задач остается до сих пор малоизученной. Рассмотрены только частные постановки, например, в работах [6, 20, 35, 36, 53].

В настоящей работе мы рассмотрим достаточно широкий класс краевых задач в четверти пространства при выполнении условия типа Лопатинского.

Это определяет новизну и актуальность настоящего исследования, направленного на построение теории краевых задач для этого класса уравнений. Отметим, что при выполнений условий типа Лопатинского построены теории краевых задач для параболических и гиперболических систем и уравнений (см., например, работы: М.С. Агранович и М.И. Вишик [2], О. Крайс [27], Р. Сакамото [37, 38], Ж. Шазарен и А. Пириу [50]). Использование этого условия позволяет получать интегральные оценки при анализе корректности смешанных задач.

В настоящей работе изучаются смешанные краевые задачи в четверти пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{++} = \{t > 0, x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \in \mathbb{R}_+\}$ для дифференциальных уравнений вида

$$\big(\varepsilon\mathbb{I} - L_0(D_x)\big)D_t^2 u + [L_0(D_x)]^2 u + \sum_{|\beta|\le 3} b_\beta D_x^\beta u = f(t,x),$$

с краевыми условиями при $x_n = 0$

$$\begin{aligned}(b_{11}u + b_{12}D_{x_n}u + b_{13}D^2_{x_n}u)\big|_{x_n=0} = 0,\\ (b_{21}u + b_{22}D_{x_n}u + b_{23}D^2_{x_n}u)\big|_{x_n=0} = 0,\end{aligned}$$

и начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad D_t u\big|_{t=0} = 0,$$

где $b_\beta \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \ge 0$ и $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, $j = 1,2,3$. $L_0(D_x) = L_0(D_{x'},0) + aD^2_{x_n}$ — однородный эллиптический оператор второго порядка с постоянными положительными коэффициентами, $a > 0$, при этом справедлива оценка

$$-r_2|\xi|^2 \le L_0(i\xi) \le -r_1|\xi|^2,$$

здесь $r_2 \ge r_1 > 0$.

Основные **задачи** исследования:

1. Сформулировать условия, при которых имеет место однозначная разрешимость смешанных краевых задач в анизотропном весовом соболевском пространстве с экспоненциальным весом $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$.

2. Построить решения смешанных краевых задач для класса псевдогиперболических уравнений в весовом соболевском пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$.

3. Получить оценки решений смешанных краевых задач.

Научная новизна работы заключается в том, что получены первые результаты о разрешимости широкого класса смешанных задач в четверти пространства для псевдогиперболических уравнений четвертого порядка.

В данной работе для достижения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования**: для построения решения использовался аналитический метод, основанный на преобразовании Фурье-Лапласа, применялся подход, указанный в монографии [23], при получении оценок решений использовался подход Лере [32], а также методы современного функционального анализа, а именно теорема Пэли-Винера, анизотропные соболевские пространства [4, 21, 44].

Введем ряд вспомогательных определений, которые будут необходимы для формулировки и доказательства основных результатов, представленных в последующих разделах работы.

Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ — область и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $r_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$.

Определение 1 *Функция $u(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W_2^{l,\mathbf{r}}(G)$, $l \in \mathbb{N}$, если существуют обобщённые производные $D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u(t, x)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, в области G при*

$$\frac{\alpha_0}{l} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{r_i} \leq 1,$$

и $D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u(t, x) \in L_2(G)$. Норма в $W_2^{l,\mathbf{r}}(G)$ имеет вид

$$\left\| u(t, x), W_2^{l,\mathbf{r}}(G) \right\| = \sum_{\alpha_0/l + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i/r_i \leq 1} \left\| D_t^{\alpha_0} D_x^{\alpha} u(t, x), L_2(G) \right\|.$$

Определение 2 *Функция $u(t, x)$ принадлежит соболевскому пространству $W_{2,\gamma}^{l,\mathbf{r}}(G)$ с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$, если функция $e^{-\gamma t} u(t, x)$ принадлежит пространству $W_2^{l,\mathbf{r}}(G)$. Норма в $W_{2,\gamma}^{l,\mathbf{r}}(G)$ имеет вид*

$$\left\| u(t, x), W_{2,\gamma}^{l,\mathbf{r}}(G) \right\| = \left\| e^{-\gamma t} u(t, x), W_2^{l,\mathbf{r}}(G) \right\|.$$

Если $l=0$, норма в соболевском пространстве $W^{0,\mathbf{r}}_{2,\gamma}(G)$ имеет вид

$$\big\|u(t,x), W^{0,\mathbf{r}}_{2,\gamma}(G)\big\| = \sum_{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i/r_i\le 1} \big\|D^{\alpha}_x u(t,x), L_2(G)\big\|.$$

В пространстве $W^{l,0}_{2,\gamma}(G)$, $l\in\mathbb{N}$, норма задается следующим образом

$$\big\|u(t,x), W^{l,0}_{2,\gamma}(G)\big\| = \sum_{\alpha_0\le l} \big\|D^{\alpha_0}_t u(t,x), L_2(G)\big\|.$$

Определим линейное нормированное пространство $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)$, $\mathbb{C}^+_\gamma = \{\tau\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\tau>\gamma\}$. Будем говорить, что функция $w(\tau,x)$ для почти всех $x\in\mathbb{R}^n_+$ принадлежит пространству $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)$, если

а) для почти всех $x\in\mathbb{R}^n_+$ функция $w(\tau,x)$ — аналитическая в $\mathbb{C}^+_\gamma$;

б) $\sup\limits_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|w(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta<\infty.$

Введем в данном пространстве норму

$$\sup_{\sigma>\gamma}\left(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|w(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим множество функций $w(\tau,x',x_n)$, принадлежащих пространству $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)$, для которых справедливо

$$\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|i\eta+\sigma|^{2\alpha_0}|\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta<\infty,\quad \alpha_0\le l,$$

$$\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(1+|\xi'|^2)^r|\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta<\infty,$$

$$\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|D^r_{x_n}\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta<\infty,\quad l,r\in\mathbb{N},$$

где $\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)$ — частичное преобразование Фурье по x' функции $w(i\eta+\sigma,x',x_n)$. Введём на нём норму

$$\sup_{\sigma>\gamma}\Bigg[\sum_{k=0}^{l}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|i\eta+\sigma|^{2k}|\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta\Bigg)^{1/2}$$

$$+\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}(1+|\xi'|^2)^r|\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta\Bigg)^{1/2}$$

$$+\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|D^r_{x_n}\hat{w}(i\eta+\sigma,\xi',x_n)|^2\,d\xi'\,dx_n\,d\eta\Bigg)^{1/2}\Bigg],\quad l\in\mathbb{N}.$$

Полученное линейное нормированное пространство будем обозначать символом $\widetilde{W}_2^{l,\mathbf{r}}(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)$.

Обобщенная теорема Пэли–Винера *Интегральный оператор Лапласа* $\mathfrak{L}_{t\to\tau}$ *отображает пространство функций* $W^{l,\mathbf{r}}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ *таких, что*

$$D^k_t u|_{t=0}=0,\quad k=0,\cdots,l-1,$$

на $\widetilde{W}_2^{l,\mathbf{r}}(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)$ *взаимно однозначно и взаимно непрерывно.*
Основные свойства указанных пространств см., например, в [4,21,23,44].

Цель работы — изучение корректности класса смешанных краевых задач для псевдогиперболических уравнений четвертого порядка в четверти пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{++}$.

Вначале приведем некоторые результаты о задаче Коши для псевдогиперболического уравнения

$$\big(\varepsilon\mathbb{I}-L_0(D_x)\big)D^2_t u+[L_0(D_x)]^2u+\sum_{|\beta|\le 3}b_\beta D^\beta_x u=f(t,x),$$

$$t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad \varepsilon\ge 0,\quad b_\beta\in\mathbb{C},$$

с начальными условиями

$$u\big|_{t=0}= 0, \quad D_t u\big|_{t=0}= 0.$$

Сформулируем результаты, вытекающие из работ [22, 23].

Теорема 0.1 *Пусть $\varepsilon > 0$, $\gamma_0 > 0$ и $f(t,x) \in W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ и $f(t,x)|_{t=0} = 0$, $\gamma > \gamma_0$, тогда существует единственное решение задачи Коши $u(t,x)$, принадлежащее соболевскому пространству с экспоненциальным весом $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ и $D_t^2 D_x^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, при этом выполнена оценка*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+) + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\| \\ \le c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\|,$$

где $c(\gamma_0)$ не зависит от $f(t,x)$.

Теорема 0.2 *Пусть $\varepsilon = 0$, $n > 4$, $\gamma_0 > 0$, $f(t,x) \in W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $\gamma > \gamma_0$, $f(t,x)|_{t=0} = 0$ и $f(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; L_1(\mathbb{R}^n_+))$, тогда существует единственное решение задачи Коши $u(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ и $D_t^2 D_x^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, при этом выполнена оценка*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\| \\ \le c(\gamma_0)\left(\|f(t,x), W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\|\right),$$

где $c(\gamma_0)$ не зависит от $f(t,x)$.

Теорема 0.3 *Пусть $\varepsilon = 0$, $n = 2,3,4$, $\gamma_0 > 0$, $f(t,x) \in W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $\gamma > \gamma_0$, $f(t,x)|_{t=0} = 0$ и $(1 + |x|^{|\alpha|})f(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+; L_1(\mathbb{R}^n_+))$,*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(t,x)dx = 0,$$

где $|\alpha| = 0$ *при* $n = 3, 4$, $|\alpha| = 1$ *при* $n = 2$. *Тогда существует единственное решение задачи Коши* $u(t, x)$ *из пространства* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *и* $D^2_t D^2_x u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, *и справедлива оценка*

$$\|u(t, x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\| + \sum_{i=1}^{n} \|D^2_t D^2_{x_i} u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\|$$

$$\leq c(\gamma_0) \left(\|f(t, x), W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)\| + \|\|(1 + |x|^{|\alpha|}) f(t, x), L_1(\mathbb{R}^n)\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+)\| \right),$$

где $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t, x)$.

Остановимся более подробно на содержании диссертации. Диссертация состоит из трёх глав.

Первая глава посвящена исследованию смешанных краевых задач для одномерного псевдогиперболического уравнения (0.2), характеризующегося наличием обратимого оператора при старшей производной по времени, и состоит из семи параграфов. Напомним, что данное уравнение возникает при моделировании крутильных колебаний упругого стержня. Начально-краевая задача, которая рассмотрена в этой главе, имеет вид

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon \mathbb{I} - D^2_x) D^2_t u + D^4_x u - a^2 D^2_x u = f(t, x), \quad x > 0, \quad t > 0, \\
&(b_{11} u + b_{12} D_x u + b_{13} D^2_x u + b_{14} D^3_x u)\big|_{x=0} = 0, \\
&(b_{21} u + b_{22} D_x u + b_{23} D^2_x u + b_{24} D^3_x u)\big|_{x=0} = 0, \\
&u\big|_{t=0} = 0, \quad D_t u\big|_{t=0} = 0,
\end{aligned} \tag{0.3}$$

где $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b_{jk} \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, $k = 1, \ldots, 4$.

Предполагается, что рассматриваемая задача удовлетворяет условию Лопатинского.

Для формулировки данного условия выпишем вспомогательную краевую задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+ = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\tau > \gamma\}$, $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned}
&\tau^2(\varepsilon - D_x^2)v + D_x^4 v - a^2 D_x^2 v = 0, \quad x > 0,\\
&(b_{11}v + b_{12}D_x v + b_{13}D_x^2 v + b_{14}D_x^3 v)\big|_{x=0} = \psi_1,\\
&(b_{21}v + b_{22}D_x v + b_{23}D_x^2 v + b_{24}D_x^3 v)\big|_{x=0} = \psi_2,\\
&v \in W_2^4(\mathbb{R}_+).
\end{aligned} \tag{0.4}$$

Определение 3 *Смешанная задача* (0.3) *удовлетворяет условию Лопатинского, если краевая задача* (0.4) *однозначно разрешима при любых* ψ_1, ψ_2.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
A_1 &= b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \quad A_2 = b_{11}b_{23} - b_{13}b_{21},\\
A_3 &= b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}, \quad A_4 = b_{11}b_{24} - b_{14}b_{21},\\
A_5 &= b_{12}b_{24} - b_{14}b_{22}, \quad A_6 = b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23}.
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем называть смешанные краевые задачи (0.3) *регулярными*, если выполняется одно из условий:

1) $|b_{14}| + |b_{24}| \neq 0$ и $A_4 - A_5 + A_6 \neq 0$;

2) $|b_{14}| + |b_{24}| = 0$ и при этом коэффициенты A_1, A_2, A_3 одновременно не обращаются в нуль и не все равны друг другу.

В противном случае задачи (0.3) будем называть *нерегулярными*.

Цель данной главы состоит в том, чтобы рассмотреть классы смешанных краевых задач и доказать их однозначную разрешимость в соболевском пространстве с экспоненциальным весом $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, получить оценки решений.

Первый параграф включает в себя описание построения решения вспомогательной задачи, а именно — начально-краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, которое получается применением преобразования Лапласа по переменной t к задаче (0.3).

Второй параграф включает в себя анализ поведения корней характеристического многочлена, соответствующего рассматриваемой вспомогательной задаче. В данном параграфе сформулированы и доказаны леммы, которые в дальнейшем служат основой для доказательства основных теорем данной главы.

Третий параграф посвящен оценке частного решения рассматриваемой задачи в общем виде.

Четвертый параграф содержит теорему существования и единственности решения для регулярной краевой задачи.

Пятый и шестой параграфы содержат теоремы существования и единственности решения для нерегулярной рассматриваемой задачи. Для каждой из представленных теорем приведен пример, демонстрирующий точность полученных результатов.

В седьмом параграфе представлены результаты, связанные с моделированием крутильных колебаний упругого стержня. В рамках данного раздела сформулированы и доказаны теоремы о существовании и единственности решения краевой задачи для жесткого и шарнирного закрепления стержня.

Сформулируем результаты первой главы.

Теорема 1.1 *Пусть краевая задача (0.3) является регулярной, тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любой $f(t,x) \in W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, $f(t,x)\big|_{t=0} = 0$, регулярная краевая задача (0.3) однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ таких, что $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, и для решения $u(t,x)$ выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| + \|D_t^2 D_x^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| \\ \leq c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ не зависит от функции $f(t,x)$.

Теорема 1.2 *Пусть краевая задача (0.3) является нерегулярной и*

$$A_4 - A_5 + A_6 = 0, A_2 - A_3 + A_6 \neq 0, \text{ либо}$$

$$A_4 = A_5 \neq 0, A_6 = 0, A_2 = A_3,$$

тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любой

$$f(t,x) \in W^{2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}), \quad \gamma > \gamma_0, \quad f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

краевая задача (0.3) однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, таких, что $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, и для решения $u(t,x)$ выполнена оценка:

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| \leq c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ не зависит от функции $f(t,x)$.

Теорема 1.3 *Пусть выполнено условие Лопатинского для краевой задачи (0.3) и $A_4 - A_5 + A_6 = 0$, $A_2 - A_3 + A_6 = 0$, $A_6 \neq 0$, тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любой $f(t,x) \in W^{3,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$,*

$$f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = D_t^2 f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

краевая задача (0.3) однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, таких, что $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, и для решения $u(t,x)$ справедлива оценка:

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| \leq c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{3,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ не зависит от функции $f(t,x)$.

В седьмом параграфе полученные результаты иллюстрируются на примере краевых задач для уравнения Власова (0.2), описывающего крутильные колебания упругого стержня.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию начально-краевой задачи в четверти пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{++}$

$$\begin{gathered}\big(\varepsilon\mathbb{I} - L_0(D_x)\big)D_t^2 u + [L_0(D_x)]^2 u + \sum_{|\beta|\le 3} b_\beta D_x^\beta u = f(t,x),\\ \big(b_{11}u + b_{12}D_{x_n}u + b_{13}D_{x_n}^2 u\big)\big|_{x_n=0} = 0,\\ \big(b_{21}u + b_{22}D_{x_n}u + b_{23}D_{x_n}^2 u\big)\big|_{x_n=0} = 0,\\ u\big|_{t=0} = 0, \quad D_t u\big|_{t=0} = 0,\end{gathered} \tag{0.5}$$

где $b_\beta \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \ge 0$ и $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, $j = 1,2,3$, $L_0(D_x) = L_0(D_{x'},0) + aD_{x_n}^2$ — однородный эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, $a > 0$, при этом справедлива оценка

$$-r_2|\xi|^2 \le L_0(i\xi) \le -r_1|\xi|^2,$$

здесь $r_2 \ge r_1 > 0$. Будет предполагаться, что краевая задача (0.5) удовлетворяет условию Лопатинского. Как и в первой главе определим следующие коэффициенты. Пусть

$$A_1 = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \quad A_2 = b_{11}b_{23} - b_{13}b_{21}, \quad A_3 = b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}.$$

Будем называть смешанные краевые задачи (0.5) *регулярными*, если выполняются условия $A_1 = A_3 = 0$, $A_2 \ne 0$. Постановка задачи приводится в первом параграфе.

Цель данной главы состоит в том, чтобы рассмотреть регулярные смешанные краевые задачи и доказать их однозначную разрешимость в соболевском пространстве с экспоненциальным весом $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, получить оценки решений.

Второй параграф посвящен изучению свойств корней характеристического уравнения. На основе полученных оценок формируется аналитический аппарат, используемый для доказательства основных утверждений главы.

Третий параграф посвящен формулировке условия Лопатинского.

В параграфе четыре рассматривается вспомогательная краевая задача, для уравнения в случае, когда $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$ на полупрямой $x_n > 0$, с параметрами $\tau \in \mathbb{C}^+_\gamma$, $\gamma > 0$, и $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Эта задача является результатом применения оператора Лапласа по t и преобразования Фурье по x' к исходной задаче, а именно

$$\begin{aligned}
&L(\tau, i\xi', D_{x_n})v = \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), \quad x_n > 0,\\
&(b_{11}v + b_{12}D_{x_n}v + b_{13}D^2_{x_n}v)\big|_{x_n=0} = 0,\\
&(b_{21}v + b_{22}D_{x_n}v + b_{23}D^2_{x_n}v)\big|_{x_n=0} = 0,\\
&v \in W^4_2(\mathbb{R}_+),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(\tau, i\xi', D_{x_n}) = D^4_{x_n} - \big(\tau^2 - 2L_0(i\xi', 0)\big)D^2_{x_n}&\\
+ \big(\varepsilon\tau^2 - L_0(i\xi', 0)\tau^2 + [L_0(i\xi', 0)]^2\big).&
\end{aligned}$$

Основным результатом параграфа является вывод явных формул для решений краевой задачи.

В пятом параграфе сформулированы леммы, содержащие оценки компонент решений, которые отвечают за характер поведения функции в четверти пространства.

В шестом параграфе рассматривается класс регулярных смешанных краевых задач при $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$. Разрешимость устанавливается посредством следующей схемы: (1) получено эквивалентное представление частного решения в интегральной форме; (2) доказана ключевая лемма, содержащая оценки решений; (3) на основе полученных оценок доказана теорема о существовании и единственности решения выделенного класса регулярных смешанных краевых задач.

Теорема 2.1 *Пусть* $\varepsilon > 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$, $A_1 = A_3 = 0$, $A_2 \neq 0$. *Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (0.5) *однозначно разрешима в пространстве функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D^2_t D^2_{x_i} u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \ldots, n$, *для любой* $f(t,x',x_n) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, *такой, что* $f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$. *Для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D^2_t D^2_{x_i} u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$

$$\le c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Сформулированный результат в теореме 2.1 справедлив также для более общей краевой задачи, при $b_\beta \neq 0$, $|\beta| \le 3$. Этот результат доказан в седьмом параграфе.

В восьмом параграфе рассматривается регулярная смешанная краевая задача для псевдогиперболического уравнения (0.5) при $\varepsilon = 0$ и $b_\beta = 0$ при $|\beta| \le 3$. В этом параграфе доказаны теоремы.

Теорема 2.3 *Пусть* $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$, $A_2 \neq 0$, $A_1 = A_3 = 0$ *и* $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (0.5) *однозначно разрешима в пространстве функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D^2_t D^2_{x_i} u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \ldots, n$, *для любой* $f(t,x',x_n) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ *такой, что* $f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$, $f(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1}))$. *Для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D^2_t D^2_{x_i} u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$\le c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Теорема 2.4 *Пусть* $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$, $A_2 \ne 0$, $A_1 = A_3 = 0$ *и* $n = 2, 3, 4$. *Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (0.5) *однозначно разрешима в пространстве функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \ldots, n$, *для любой* $f(t,x',x_n) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, *такой, что* $f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$, $(1 + |x'|^{|\alpha|}) f(t,x',x_n) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1}))$, *при этом*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} x'^{\alpha} f(t,x',x) dx' = 0,$$

где $|\alpha| = 0$ *при* $n = 3, 4$, $|\alpha| = 1$ *при* $n = 2$. *Для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$

$$\le c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$

$$+\| \|(1 + |x'|^{|\alpha|}) f(t,x',x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Отметим, что класс регулярных смешанных краевых задач (0.5) характеризуется тем, что к правой части уравнения предъявляются те же требования гладкости, что и в задаче Коши.

Третья глава посвящена изучению смешанных краевых задач для псевдогиперболических уравнений, которые не удовлетворяют условию регулярности, будем называть такие задачи *нерегулярными*.

Основная цель главы состоит в том, чтобы изучить нерегулярные классы смешанных краевых задач и доказать их однозначную разрешимость в соболевском пространстве с экспоненциальным весом $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, получить оценки решений.

В первом параграфе рассматриваются нерегулярные смешанные краевые задачи (0.5), не удовлетворяющие условиям теоремы 2.1. Для таких задач построены интегральные формы решений и получены оценки решений. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1 *Пусть* $\varepsilon > 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \leq 3$ *и* A_i, $i = 1, 2, 3$, *не удовлетворяют условиям из теоремы 2.1, при этом не все* A_i *одинаковые. Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (0.5) *однозначно разрешима в классе функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D^2_t D^2_{x_i} u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \ldots, n$, *для любой* $f(t, x', x_n)$ *из соболевского пространства функций* $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ *такой, что* $f(t, x', x_n)|_{t=0} = D_t f(t, x', x_n)|_{t=0} = 0$. *Для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D^2_t D^2_{x_i} u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| \\ \leq c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

В этом параграфе построен пример, показывающий, что при ослаблении условий гладкости, наложенных на правую часть, согласно теореме 3.1, рассматриваемая смешанная краевая задача (0.5) не будет иметь решения в пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$. Этот результат имеет важное значение, поскольку показывает, что для однозначной разрешимости смешанных краевых задач требования на данные задачи могут быть более жесткими, чем при рассмотрении задач Коши.

Сформулированный результат в теореме 3.1 справедлив также для более общей краевой задачи, а именно при $b_\beta \neq 0$, $|\beta| \leq 3$. Этот результат доказан во втором параграфе.

В третьем параграфе проводится анализ нерегулярных смешанных краевых задач для псевдогиперболического уравнения (0.5) при $\varepsilon = 0$ и $b_\beta = 0$ при $|\beta| \leq 3$. Для достижения цели используется интегральная форма представления решения, которая была получена в первом параграфе этой главы и получены оценки решения. Результатами данного параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 3.3 *Пусть,* $n > 4$, $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \leq 3$ *и* A_i, $i = 1,2,3$, *не удовлетворяют условиям из теоремы 2.3, при этом не все* A_i *одинаковые. Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (0.5) *однозначно разрешима в классе функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ *таких, что* $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1,\dots,n$, *для любой* $f(t,x',x_n)$ *из соболевского пространства функций* $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ *такой, что* $f(t,x',x_n)|_{t=0} = D_t f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$ *и* $f(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1}))$. *Для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$\leq c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Теорема 3.4 *Пусть* $n = 2,3,4$, $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \leq 3$ *и* A_i, $i = 1,2,3$, *не удовлетворяют условиям из теоремы 2.4, при этом не все* A_i *одинаковые. Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (0.5) *однозначно разрешима в пространстве функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1,\dots,n$, *для любой* $f(t,x',x_n)$ *из соболевского пространства функций* $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, *такой, что* $f(t,x',x_n)|_{t=0} = D_t f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$, *и при этом*

$$(1 + |x'|^{|\alpha|}) f(t,x',x_n) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1})), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} x'^{\alpha} f(t,x',x) dx' = 0,$$

где $|\alpha| = 0$ *при* $n = 3, 4$, $|\alpha| = 1$ *при* $n = 2$. *Для решения* $u(t, x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$

$$\leq c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$

$$+\|\|(1+|x'|^{|\alpha|})f(t,x',x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t, x)$.

Представление работы. Результаты, вошедшие в диссертационную работу, были представлены и обсуждались на семинарах ИМ СО РАН и НГУ: «Избранные вопросы математического анализа» (руководитель: д.ф.-м.н., проф. Г. В. Демиденко) и «Дифференциальные и разностные уравнения» (руководители: д.ф.-м.н., проф. Г. В. Демиденко, д.ф.-м.н. И. И. Матвеева). Результаты исследования были представлены на следующих научных конференциях: International Conference on Computational Modeling and Applied Mathematics «Differential Equations and Applications» (Далянь, Китай, 2–4 августа 2024); VIII Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 24–28 июня 2024); Российско-Китайская конференция «Дифференциальные и разностные уравнения» (Новосибирск, 2–6 ноября 2023); Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения-2023» (Могилев, Беларусь, 23–27 мая 2023); Международная научная студенческая конференция (Новосибирск, 17–26 апреля 2023); Конференция «Женщины в математике» (Новосибирск, 6 июня 2022).

По теме диссертации в изданиях, индексируемых в базах данных РИНЦ, WoS или Scopus, опубликовано 9 печатных работ, в том числе 4 статьи [74–77] в журналах, рекомендованных ВАК, 5 тезисов докладов [78–82] в трудах международных и всероссийских конференций.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В совместной работе [77] теоремы 1, 2, 3, 4 доказаны автором диссертации, соавтором Л.Н. Бондарь доказаны теоремы $1'$, $2'$. Теоремы $1'$, $2'$ в тексте диссертации не упоминаются и не используются.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Г.В. Демиденко за постановку задачи и за помощь в работе, а также к.ф.-м.н. Л.Н. Бондарь за ценные советы и полезные дискуссии, д.ф.-м.н. И.И. Матвеевой и к.ф.-м.н. М.А. Скворцовой за внимание к работе.

Глава 1.

Одномерное псевдогиперболическое уравнение

В рамках настоящей главы рассматриваются смешанные краевые задачи для псевдогиперболического уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon\mathbb{I}-D_x^2)D_t^2u + D_x^4u - a^2D_x^2u = f(t,x), \quad x>0, \quad t>0,\\
&\quad(b_{11}u + b_{12}D_xu + b_{13}D_x^2u + b_{14}D_x^3u)\big|_{x=0} = 0,\\
&\quad(b_{21}u + b_{22}D_xu + b_{23}D_x^2u + b_{24}D_x^3u)\big|_{x=0} = 0,\\
&\quad u\big|_{t=0} = 0, \quad D_tu\big|_{t=0} = 0,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b_{jk} \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, $k = 1, \ldots, 4$. Предполагается, что рассматриваемая задача удовлетворяет условию Лопатинского.

Отметим, что к исследуемому виду сводится уравнение

$$(a_0\mathbb{I} - a_1D_x^2)D_{\tilde{t}}^2\tilde{u} + a_2D_x^4\tilde{u} - a_3D_x^2\tilde{u} = h(\tilde{t}, x),$$

где коэффициенты $a_j > 0$, $j = 0, \ldots, 3$. Действительно, разделив обе части уравнения на $a_1 \neq 0$, получим:

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\mathbb{I} - D_x^2\right)D_{\tilde{t}}^2\tilde{u} + \frac{a_2}{a_1}D_x^4\tilde{u} - \frac{a_3}{a_1}D_x^2\tilde{u} = \frac{1}{a_1}h(\tilde{t}, x),$$

так как $a_2/a_1 \neq 0$, приходим к виду:

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\mathbb{I} - D_x^2\right)\frac{a_1}{a_2}D_{\tilde{t}}^2\tilde{u} + D_x^4\tilde{u} - \frac{a_3}{a_2}D_x^2\tilde{u} = \frac{1}{a_2}h(\tilde{t}, x).$$

Используя соотношения $\tilde{t} = \sqrt{a_2/a_1}t$, $\varepsilon = a_0/a_1$, $a = \sqrt{a_3/a_2}$ и полагая $f(t,x) = h(\tilde{t}, x)/a_2$, получаем уравнение из краевой задачи (1.1). Поэтому дальнейшие результаты о краевых задачах (1.1) можно сформулировать для краевых задач для этого уравнения.

Для формулировки условия Лопатинского выпишем вспомогательную краевую задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+ = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\tau > \gamma\}$, $\gamma > 0$:

$$\begin{aligned}
&\tau^2(\varepsilon - D_x^2)v + D_x^4 v - a^2 D_x^2 v = 0, \quad x > 0,\\
&(b_{11}v + b_{12}D_x v + b_{13}D_x^2 v + b_{14}D_x^3 v)\big|_{x=0} = \psi_1,\\
&(b_{21}v + b_{22}D_x v + b_{23}D_x^2 v + b_{24}D_x^3 v)\big|_{x=0} = \psi_2,\\
&v \in W_2^4(\mathbb{R}_+).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Определение 4 *Смешанная задача* (1.1) *удовлетворяет условию Лопатинского, если краевая задача* (1.2) *однозначно разрешима при любых* ψ_1, ψ_2.

Для дальнейшего изучения задачи введем обозначение для граничных операторов

$$b_j(D_x) = \sum_{k=1}^{4} b_{jk} D_x^{k-1}, \quad j = 1,\, 2. \tag{1.3}$$

Характеристическое уравнение для дифференциального оператора из задачи (1.1) после преобразования Лапласа по t можно записать в виде

$$L(\tau, \lambda) = \lambda^4 - (a^2 + \tau^2)\lambda^2 + \varepsilon\tau^2 = 0, \quad \tau \in \mathbb{C}_\gamma^+, \quad \gamma > 0. \tag{1.4}$$

Покажем, что оно не имеет чисто мнимых корней. Для этого предположим обратное, что уравнение (1.4) имеет мнимый корень. Из этого следует, что при некотором значении $\mathrm{Re}\tau = \sigma > \gamma_0 > 0$, корень $\lambda = ih$, причем $h \neq 0$ $(h \in \mathbb{R})$, подставляя в уравнение, приходим к

$$h^4 + \big(a^2 + (\gamma + i\eta)^2\big)h^2 + \varepsilon(\gamma + i\eta)^2 = 0,$$

$$h^4 + h^2(a^2 + \gamma^2 + 2i\gamma\eta - \eta^2) + \gamma^2 + 2i\gamma\eta - \eta^2 = 0.$$

В таком случае мнимая часть полученного выражения должна быть равна нулю, то есть

$$2\gamma\eta\big(h^2+1\big)=0,$$

в связи с тем, что

$$\gamma\neq 0,\quad \eta\neq 0,\quad \text{тогда}\quad h^2+1=0,$$

следовательно h является комплексным числом, что приводит к противоречию. Принимая во внимание изложенное, λ не является мнимым числом. Тем временем, два корня λ_1^-, λ_2^- характеристического уравнения (1.4) лежат в левой полуплоскости и два корня λ_1^+, λ_2^+ расположены в правой.

Без потери общности, можно положить $\varepsilon=1$.

Представим характеристические многочлены граничных операторов $b_j(D_x)$ из (1.3) в виде:

$$b_j(\lambda)=q_j(\tau,\lambda)(\lambda-\lambda_1^-)(\lambda-\lambda_2^-)+\beta_j(\tau,\lambda),\quad j=1,2,$$

где $\beta_j(\tau,\lambda)=\beta_{j,1}(\tau)+\beta_{j,2}(\tau)\lambda$, $j=1,2$. Введём матрицу Лопатинского:

$$B=\begin{pmatrix}\beta_{1,1}(\tau) & \beta_{1,2}(\tau)\\ \beta_{2,1}(\tau) & \beta_{2,2}(\tau)\end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$\begin{aligned}&A_1=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21},\quad A_2=b_{11}b_{23}-b_{13}b_{21},\\ &A_3=b_{12}b_{23}-b_{13}b_{22},\quad A_4=b_{11}b_{24}-b_{14}b_{21},\\ &A_5=b_{12}b_{24}-b_{14}b_{22},\quad A_6=b_{13}b_{24}-b_{14}b_{23},\end{aligned}\tag{1.5}$$

где b_{jk}, $j=1,2$, $k=1,\ldots,4$, являются коэффициентами рассматриваемых граничных операторов.

В дальнейшем будем называть смешанные краевые задачи (1.1) *регулярными*, если выполняется одно из условий:

1) $|b_{14}| + |b_{24}| \neq 0$ и $A_4 - A_5 + A_6 \neq 0$;

2) $|b_{14}| + |b_{24}| = 0$ и при этом коэффициенты A_1, A_2, A_3 одновременно не обращаются в нуль и не все равны друг другу.

В противном случае задачи (1.1) будем называть *нерегулярными.*

Пример 1.1. Рассмотрим краевые условия

$$u\big|_{x=0} = 0, \quad D_x u\big|_{x=0} = 0.$$

Очевидно, что $b_{14} = 0$ и $b_{24} = 0$, $A_1 = 1$ и $A_i = 0$, $i = 2, \ldots, 6$, т.е. справедливо второе условие, следовательно краевая задача (1.1) регулярная.

Пример 1.2. Рассмотрим краевые условия:

$$(\mathbb{I} + D_x^2)u\big|_{x=0} = 0, \quad D_x^3 u\big|_{x=0} = 0.$$

Ясно, что $b_{14} = 0$ и $b_{24} = 1$, $A_4 = A_6 = 1$ и $A_i = 0$, $i = 2, \ldots, 3$, $A_5 = 0$, т.е. $A_4 - A_5 + A_6 = 2$, тогда справедливо первое условие, таким образом краевая задача (1.1) регулярная.

Пример 1.3. Рассмотрим краевые условия

$$(\mathbb{I} + D_x)u\big|_{x=0} = 0, \quad D_x^3 u\big|_{x=0} = 0.$$

Ясно, что $b_{14} = 0$ и $b_{24} = 1$, $A_4 = A_5 = 1$ и $A_i = 0$, $i = 2, \ldots, 3$, $A_6 = 0$, т.е. $A_4 - A_5 + A_6 = 0$, тогда краевая задача (1.1) нерегулярная.

Пример 1.4. Рассмотрим краевые условия

$$(\mathbb{I} + D_x)u\big|_{x=0} = 0, \quad (D_x^2 - \mathbb{I})u\big|_{x=0} = 0.$$

Ясно, что $b_{14} = 0$ и $b_{24} = 0$, $A_3 = A_2 = A_1 = 1$, тогда краевая задача (1.1) нерегулярная.

1.1 Построение решения вспомогательной краевой задачи

Начнем изучение поставленной задачи с рассмотрения вспомогательной краевой задачи на полупрямой $x > 0$ с параметром $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma > 0$, для обыкновенного дифференциального уравнения, возникающего при применении оператора Лапласа к задаче (1.1) по переменной t:

$$\begin{gathered} D_x^4 v - a^2 D_x^2 v - \tau^2 D_x^2 v + \tau^2 v = \tilde{f}(\tau, x), \quad x > 0, \\ \begin{aligned} & b_1(D_x) v|_{x=0} = 0, \\ & b_2(D_x) v|_{x=0} = 0, \\ & v \in W_2^4(\mathbb{R}_+), \end{aligned} \end{gathered} \tag{1.6}$$

здесь $\tilde{f}(\tau, x)$ — преобразование Лапласа функции $f(t, x)$ по переменной t. В силу условия Лопатинского задача (1.6) имеет единственное решение в соболевском пространстве $W_2^4(\mathbb{R}_+)$ при $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma > \gamma_0$. Выпишем формулы решения для задачи (1.6). Будем искать решение краевой задачи (1.6) в виде

$$v(\tau, x) = v_0(\tau, x) + v_1(\tau, x), \tag{1.7}$$

где $v_0(\tau, x) \in W_2^4(\mathbb{R}_+)$ решение уравнения

$$L(\tau, D_x) v_0 = \tilde{f}(\tau, x), \quad x > 0, \tag{1.8}$$

$$L(\tau, D_x) = D_x^4 - (a^2 + \tau^2) D_x^2 + \tau^2 \mathbb{I},$$

и $v_1(\tau, x) \in W_2^4(\mathbb{R}_+)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} & L(\tau, D_x) v_1 = 0, \quad x > 0, \\ & b_1(D_x) v_1|_{x=0} = -b_1(D_x) v_0|_{x=0} = \psi_1(\tau), \\ & b_2(D_x) v_1|_{x=0} = -b_2(D_x) v_0|_{x=0} = \psi_2(\tau). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Решение уравнения (1.8) можно записать следующим образом

$$v_0(\tau,x)=\int\limits_0^x J_-(\tau,x-s)\tilde f(\tau,s)\,ds+\int\limits_x^\infty J_+(\tau,x-s)\tilde f(\tau,s)\,ds, \tag{1.10}$$

$$J_-(\tau,x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_-}\frac{e^{x\lambda}}{L(\tau,\lambda)}\,d\lambda,\quad J_+(\tau,x)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{e^{x\lambda}}{L(\tau,\lambda)}\,d\lambda,$$

здесь Γ_- является контуром в комплексной плоскости, охватывающий корни уравнения, лежащие в левой полуплоскости λ_1^-, λ_2^-, Γ_+ — контур, охватывающий корни уравнения, лежащие в правой полуплоскости λ_1^+, λ_2^+ (см. [23]). Выпишем развернутую форму для решения задачи (1.8)

$$v_0(\tau,x)=\int\limits_0^x\frac{e^{-\lambda_1^+(x-s)}\tilde f(\tau,s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds-\int\limits_0^x\frac{e^{-\lambda_2^+(x-s)}\tilde f(\tau,s)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds$$

$$+\int\limits_x^{+\infty}\frac{e^{\lambda_1^+(x-s)}\tilde f(\tau,s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds-\int\limits_x^{+\infty}\frac{e^{\lambda_2^+(x-s)}\tilde f(\tau,s)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds.$$

Перейдем к интегральным формулам решения краевой задачи (1.9). Пусть b^{kj} являются элементами обратной матрицы Лопатинского B^{-1}. Согласно [23], решение краевой задачи (1.9) можно записать как

$$v_1(\tau,x)=\psi_1(\tau)J_1(\tau,x)+\psi_2(\tau)J_2(\tau,x), \tag{1.11}$$

$$J_j(\tau,x)=\frac{e^{-\lambda_1^+x}(b^{1j}\lambda_2^++b^{2j})}{\lambda_2^+-\lambda_1^+}+\frac{e^{-\lambda_2^+x}(b^{1j}\lambda_1^++b^{2j})}{\lambda_1^+-\lambda_2^+},\quad j=1,2.$$

Из (1.9) и (1.10), функции $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$ можно представить в виде

$$\psi_j(\tau)=\int\limits_0^\infty\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{b_j(\lambda)e^{-s\lambda}}{L(\tau,\lambda)}\,d\lambda\tilde f(\tau,s)\,ds,\quad j=1,2.$$

Применяя теорему о вычетах [49], будем иметь

$$\psi_j(\tau) = \frac{b_j(\lambda_1^+)\int\limits_0^\infty \tilde{f}(\tau,s)e^{-\lambda_1^+ s}\,ds}{2\lambda_1^+((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)} + \frac{b_j(\lambda_2^+)\int\limits_0^\infty \tilde{f}(\tau,s)e^{-\lambda_2^+ s}\,ds}{2\lambda_2^+((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)}, \quad j=1,2.$$

Учитывая вид функций $J_j(\tau,x)$ и $\psi_j(\tau)$, перепишем $v_1(\tau,x)$ из (1.11)

$$v_1(\tau,x) = v_{1,1}(\tau,x) + v_{1,2}(\tau,x) + v_{1,3}(\tau,x) + v_{1,4}(\tau,x), \tag{1.12}$$

$$v_{1,1}(\tau,x) = \int\limits_0^\infty \tilde{f}(\tau,s)e^{-\lambda_1^+ s}\,ds\, e^{-\lambda_1^+ x}\frac{b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})}{2\lambda_1^+((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)},$$

$$v_{1,2}(\tau,x) = \int\limits_0^\infty \tilde{f}(\tau,s)e^{-\lambda_1^+ s}\,ds\, e^{-\lambda_2^+ x}\frac{b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})}{2\lambda_1^+((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)},$$

$$v_{1,3}(\tau,x) = \int\limits_0^\infty \tilde{f}(\tau,s)e^{-\lambda_2^+ s}\,ds\, e^{-\lambda_1^+ x}\frac{b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})}{2\lambda_2^+((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)},$$

$$v_{1,4}(\tau,x) = \int\limits_0^\infty \tilde{f}(\tau,s)e^{-\lambda_2^+ s}\,ds\, e^{-\lambda_2^+ x}\frac{b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})}{2\lambda_2^+((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)}.$$

Далее перейдем к оцениванию функции $v(\tau,x) = v_0(\tau,x)+v_1(\tau,x)$, для этого рассмотрим $v_0(\tau,x)$ и $v_1(\tau,x)$ из (1.10) и (1.12) соответственно.

1.2 Вспомогательные утверждения

Лемма 1.1 *Существует $\gamma_0>0$ такое, что при $\tau\in\mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma>\gamma_0$, для корней характеристического уравнения (1.4) имеют место:*

$$\lambda_j^+(\tau) = -\lambda_j^-(\tau), \quad j=1,2,$$

$$\lambda_1^+(\tau)\lambda_2^+(\tau)=\tau, \quad (\lambda_1^+(\tau))^2+(\lambda_2^+(\tau))^2=\tau^2+a^2,$$
$$\frac{|\tau|}{2}\le|\lambda_1^+(\tau)|\le 2|\tau|, \quad \frac{1}{2}\le|\lambda_2^+(\tau)|\le 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим характеристическое уравнение для дифференциального оператора $L(\tau, D_x) = D_x^4 - (a^2+\tau^2)D_x^2 + \tau^2\mathbb{I}$

$$L(\tau,\lambda) = \lambda^4 - (a^2+\tau^2)\lambda^2 + \tau^2 = 0. \tag{1.13}$$

Корни уравнения

$$\mu^2 - (a^2+\tau^2)\mu + \tau^2 = 0,$$

можно записать следующим образом

$$\mu_1 = \frac{a^2+\tau^2}{2}(1+\sqrt{1-z}), \quad \mu_2 = \frac{a^2+\tau^2}{2}(1-\sqrt{1-z}), \quad z = \frac{4\tau^2}{(a^2+\tau^2)^2}.$$

В этом случае при $\mathrm{Re}\tau = \sigma > \gamma$ такой, что $|z| < 1$, будет справедливо асимптотическое разложение

$$\mu_1 = \tau^2 - 1 + O\left(\frac{1}{|\tau^2|}\right) = \tau^2 + O\left(1\right), \quad \mathrm{Re}\tau \to \infty,$$

$$\mu_2 = 1 - \frac{a^2}{\tau^2} + \frac{\tau^4}{(a^2+\tau^2)^3} + O\left(\frac{1}{|\tau^2|}\right), \ \mathrm{Re}\tau \to \infty. \tag{1.14}$$

Корни характеристического уравнения (1.13) имеют вид

$$\lambda_1^+ = \sqrt{\mu_1}, \quad \lambda_1^- = -\sqrt{\mu_1}, \quad \lambda_2^+ = \sqrt{\mu_2}, \quad \lambda_2^- = -\sqrt{\mu_2}.$$

Имея явное представление корней характеристического уравнения, получаем требуемые равенства. Найдется $\gamma_0 > 0$, такое что будут справедливы оценки

$$\frac{|\tau|}{2} \le |\lambda_1^+(\tau)| \le 2|\tau|, \quad \frac{1}{2} \le |\lambda_2^+(\tau)| \le 2. \qquad \square$$

Лемма 1.2 *Существуют константы $c_1, c_2 > 0$, что при $\sigma > \gamma > 0$, $\eta \in \mathbb{R}$, $\tau = \sigma + i\eta$, справедливы оценки*

$$\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau)|\lambda_1^+(\tau)| \ge c_1\sigma|\tau|, \quad \mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau)|\lambda_2^+(\tau)| \ge c_2\sigma,$$

где $\lambda_j^+(\tau)$, $j = 1, 2,$ — *корни уравнения* (1.4), $\mathrm{Re}\lambda_j^+(\tau) > 0$, $j = 1, 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Символ оператора $L(\tau, D_x)$ можно представить в виде: $L(\tau, i\xi) = (1 + \xi^2)\tau^2 + \xi^4 + a^2\xi^2$, тогда

$$
\begin{aligned}
|L(\tau, i\xi)| &= |(1+\xi^2)(\sigma^2 - \eta^2 + 2i\gamma\eta) + \xi^4 + a^2\xi^2| \cdot \frac{|\sigma - i\eta|}{|\sigma - i\eta|} \\
&\geq \frac{\sigma((1+\xi^2)(\sigma^2+\eta^2) + \xi^4 + a^2\xi^2)}{\sqrt{\sigma^2+\eta^2}} \geq c\frac{\sigma(1+\xi^2)(\sigma^2+\eta^2+\frac{\xi^4+a^2\xi^2}{1+\xi^2})}{\sqrt{\gamma^2+\eta^2}} \\
&\geq c\sigma(1+\xi^2)\sqrt{\sigma^2+\eta^2+\frac{\xi^4+a^2\xi^2}{1+\xi^2}} \geq c\sigma(1+\xi^2)\big(|\tau|+|\xi|\big), \quad (1.15)
\end{aligned}
$$

при этом

$$
|L(\tau, i\xi)| = |i\xi - \lambda_1^+(\tau,)| \cdot |i\xi - \lambda_1^-(\tau,)| \cdot |i\xi - \lambda_2^+(\tau,)| \cdot |i\xi - \lambda_2^-(\tau,)|.
$$

Проведем оценку для $\lambda_1^+(\tau)$. Положим $\xi = \mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau)$, тогда

$$
\begin{aligned}
|L(\tau, i\xi)| = |\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau)| \cdot |i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)| \cdot \\
\cdot |i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^+(\tau)| \cdot |i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)|. \quad (1.16)
\end{aligned}
$$

Подробнее рассмотрим множителе в (1.16)

$$
|i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)| = \sqrt{(\mathrm{Re}\lambda_1^-(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \mathrm{Im}\lambda_1^-(\tau))^2}
$$

$$
\leq \sqrt{(2\mathrm{Re}\lambda_1^-(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \mathrm{Im}\lambda_1^-(\tau))^2}
$$

$$
= \sqrt{(\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau) - \mathrm{Re}\lambda_1^-(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \mathrm{Im}\lambda_1^-(\tau))^2}
$$

$$
= |\lambda_1^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)| = 2|\lambda_1^+(\tau)|.
$$

Следовательно,

$$
|i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^+(\tau)| \cdot |i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)|
$$

$$= \sqrt{(\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2}$$
$$\cdot \sqrt{(\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) + \mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2}.$$

Раскрывая скобки, приходим к

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau))^4 + 2(\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau))^2\big[(\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2\big] \\
+ \big[(\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2 - (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2\big]^2 \\
= \big[(\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2\big]^2 - 4(\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2(\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2,
\end{aligned}$$

возвращаясь к подкоренному выражению, отсюда следует

$$\begin{aligned}
\sqrt{\big[(\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2\big]^2 - 4(\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2(\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2} \\
\le \sqrt{\big[(\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2\big]^2} \\
\le \big|(\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2\big| + \big|(\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2\big| = \big|\lambda_2^+(\tau))\big|^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2 \\
\le C + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2 \le c\big(1 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2\big),
\end{aligned}$$

тогда оценка (1.16) имеет вид

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^+(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)| \\
\le 2c|\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau)||\lambda_1^+(\tau)|\big(1 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2\big).
\end{aligned} \tag{1.17}$$

С учетом (1.15), заменив ξ на $\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau)$, приходим к выражению

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^+(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)| \\
\ge c^*\sigma(1 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2)\big(|\tau| + |\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau)|\big) \\
\ge c^*\sigma(1 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2)|\tau|,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

тогда из (1.17) и (1.18) получаем

$$2c|\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau)||\lambda_1^+(\tau)|\big(1 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2\big) \ge c^*\sigma(1 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2)|\tau|,$$

таким образом, приходим к $|\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau)||\lambda_1^+(\tau,)| \geq c^*\sigma|\tau|$.

Перейдем к оценке для $\lambda_2^+(\tau)$. Для этого положим $\xi = \mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau)$, тогда

$$|L(\tau, i\xi)| = |\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau)| \cdot |i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)| \cdot \\ \cdot |i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_1^+(\tau)| \cdot |i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)|. \quad (1.19)$$

Подробнее рассмотрим множители в (1.19)

$$\begin{aligned} |i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)| &= \sqrt{(\mathrm{Re}\lambda_2^-(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \mathrm{Im}\lambda_2^-(\tau))^2} \\ &\leq \sqrt{(2\mathrm{Re}\lambda_2^-(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \mathrm{Im}\lambda_2^-(\tau))^2} \\ &= \sqrt{(\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau) - \mathrm{Re}\lambda_2^-(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \mathrm{Im}\lambda_2^-(\tau))^2} \\ &= |\lambda_2^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)| = 2|\lambda_2^+(\tau)|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_1^+(\tau)| \cdot |i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)| \\ \sqrt{(\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2} \\ = \cdot\sqrt{(\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) + \mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2}.$$

Осуществив преобразования подкоренных выражений, получим

$$(\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau))^4 + 2(\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau))^2\big[(\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2\big] \\ + \big[(\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2 - (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2\big]^2 = \big[(\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2 \\ + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2\big]^2 - 4(\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2(\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2.$$

Вернувшись к подкоренным выражениям, приходим к

$$\sqrt{\big[(\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2\big]^2 - 4(\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2(\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2}$$

$$\leq \sqrt{\big[(\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2\big]^2}$$

$$\leq \left|(\mathrm{Re}\lambda_1^+(\tau))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+(\tau))^2\right| + \left|(\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2\right| = \left|\lambda_1^+(\tau))\right|^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2,$$

тогда оценка (1.19) имеет вид

$$|\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_1^+(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)| \\ \leq 2|\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau)||\lambda_2^+(\tau)|\big(\left|\lambda_1^+(\tau)\right|^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2\big). \quad (1.20)$$

Возвращаясь к (1.15) и заменяя ξ на $\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau)$, получим

$$|\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_1^+(\tau)||i\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)| \\ \geq c^*\sigma(1 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2)\big(|\tau| + |\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau)|\big), \quad (1.21)$$

тогда из (1.20) и (1.21) имеем

$$|\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau)||\lambda_2^+(\tau)| \geq c^*\sigma \frac{(1 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2)\big(|\tau| + |\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau)|\big)}{|\lambda_1^+(\tau)|^2 + (\mathrm{Im}\lambda_2^+(\tau))^2}.$$

Следовательно, $|\mathrm{Re}\lambda_2^+(\tau)||\lambda_2^+(\tau)| \geq c^*\sigma$. $\square$

Лемма 1.3 *Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma > \gamma_0$, имеют место оценки:*

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|J_-(\tau, x)\right| dx \leq c|\tau|^{-2}, \quad \int\limits_0^{+\infty} \left|J_+(\tau, -x)\right| dx \leq c|\tau|^{-2},$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|D_x^k J_-(\tau, x)\right| dx \leq c|\tau|^{k-3}, \quad \int\limits_0^{+\infty} \left|D_x^k J_+(\tau, -x)\right| dx \leq c|\tau|^{k-3}, \quad k = 1, \ldots, 4.$$

где c — положительная постоянная.

Доказательство. Начнем с рассмотрения $J_-(\tau, x)$. Выпишем этот интеграл в явном виде. Применяя теорему о вычетах [49], имеем

$$J_-(\tau, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_-} \frac{e^{x\lambda}}{L(\tau, \lambda)} d\lambda$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1^+ x}}{(\lambda_1^- - \lambda_1^+)(\lambda_1^- - \lambda_2^-)(\lambda_1^- - \lambda_2^+)} + \frac{e^{-\lambda_2^+ x}}{(\lambda_2^- - \lambda_2^+)(\lambda_2^- - \lambda_1^-)(\lambda_2^- - \lambda_1^+)}.$$

Принимая во внимание оценки из леммы 1.2 и вид корней, выпишем неравенство для вышеуказанного выражения

$$\int\limits_0^{+\infty} |J_-(\tau,x)|dx \leq \int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-\lambda_1^+ x}}{(\lambda_1^- - \lambda_1^+)(\lambda_1^- - \lambda_2^-)(\lambda_1^- - \lambda_2^+)} \right| dx$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-\lambda_2^+ x}}{(\lambda_2^- - \lambda_2^+)(\lambda_2^- - \lambda_1^-)(\lambda_2^- - \lambda_1^+)} \right| dx \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\mathrm{Re}\lambda_1^+ x} dx}{2|\lambda_1^+|^3 \left| 1 - \frac{|\lambda_2^+|^2}{|\lambda_1^+|^2} \right|}$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\mathrm{Re}\lambda_2^+ x} dx}{2|\lambda_2^+||\lambda_1^+|^2 \left| 1 - \frac{|\lambda_2^+|^2}{|\lambda_1^+|^2} \right|} = \frac{1}{2\mathrm{Re}\lambda_1^+ |\lambda_1^+|^3 \left| 1 - \frac{|\lambda_2^+|^2}{|\lambda_1^+|^2} \right|}$$

$$+ \frac{1}{2\mathrm{Re}\lambda_2^+ |\lambda_2^+||\lambda_1^+|^2 \left| 1 - \frac{|\lambda_2^+|^2}{|\lambda_1^+|^2} \right|} \leq c(\gamma_0)|\tau|^{-2}.$$

Теперь перейдем к $D_x^k J_-(\tau,x)$, в развернутом виде это можно представить как

$$\frac{(\lambda_1^+)^k e^{-\lambda_1^+ x}}{(\lambda_1^- - \lambda_1^+)(\lambda_1^- - \lambda_2^-)(\lambda_1^- - \lambda_2^+)} + \frac{(\lambda_2^+)^k e^{-\lambda_2^+ x}}{(\lambda_2^- - \lambda_2^+)(\lambda_2^- - \lambda_1^-)(\lambda_2^- - \lambda_1^+)}.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_0^{+\infty} |D_x^k J_-(\tau,x)|dx \leq \int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{(\lambda_1^+)^k e^{-\lambda_1^+ x}}{(\lambda_1^- - \lambda_1^+)(\lambda_1^- - \lambda_2^-)(\lambda_1^- - \lambda_2^+)} \right| dx$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \left| \frac{(\lambda_2^+)^k e^{-\lambda_2^+ x}}{(\lambda_2^- - \lambda_2^+)(\lambda_2^- - \lambda_1^-)(\lambda_2^- - \lambda_1^+)} \right| dx \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{|\lambda_1^+|^{k-3} e^{-\mathrm{Re}\lambda_1^+ x} dx}{2 \left| 1 - \frac{|\lambda_2^+|^2}{|\lambda_1^+|^2} \right|}$$

$$+\int\limits_0^{+\infty}\frac{|\lambda_2^+|^{k-1}e^{-\mathrm{Re}\lambda_2^+x}dx}{2|\lambda_1^+|^2\left|1-\frac{|\lambda_2^+|^2}{|\lambda_1^+|^2}\right|}=\frac{|\lambda_1^+|^{k-3}}{2\mathrm{Re}\lambda_1^+\left|1-\frac{|\lambda_2^+|^2}{|\lambda_1^+|^2}\right|}$$

$$+\frac{|\lambda_2^+|^{k-1}}{2\mathrm{Re}\lambda_2^+|\lambda_1^+|^2\left|1-\frac{|\lambda_2^+|^2}{|\lambda_1^+|^2}\right|}\leq c(\gamma_0)|\tau|^{k-1},\quad k=1,\dots,4.$$

Для получения указанных в лемме оценок на $J_-(\tau,x)$ и $D_x^kJ_-(\tau,x)$, необходимо провести аналогичные рассуждения. □

Лемма 1.4 *Существует $\gamma_0>0$ такое, что при $\tau\in\mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma>\gamma_0$, имеют место оценки:*

$$\|v_0(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\leq c|\tau|^{-2}\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|,$$
$$\|D_x^kv_0(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\leq c|\tau|^{k-3}\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|,\quad k=1,\dots,4,$$

с положительной константой c.

Доказательство. Используя функцию Хевисайда $\theta(x)$, получаем

$$\left\|\int\limits_0^x J_-(\tau,x-s)\tilde f(\tau,s)ds+\int\limits_x^{+\infty}J_+(\tau,x-s)\tilde f(\tau,s)ds,L_2(\mathbb{R}_+)\right\|$$

$$=\left\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}J_-(\tau,x-s)\theta(x-s)\tilde f(\tau,s)ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}J_+(\tau,x-s)\theta(-x+s)\tilde f(\tau,s)ds,L_2(\mathbb{R})\right\|$$

$$=\big\|\,[J_-(\tau,x)\theta(x)+J_+(\tau,x)\theta(-x)]*\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R})\big\|,$$

где $*$ — оператор свертки. Используя неравенства Юнга и Минковского [4] и принимая во внимание результат леммы 1.3, приходим к

$$\left[\int_0^{+\infty}|J_-(\tau,x)|dx+\int_{-\infty}^0|J_+(\tau,x)|dx\right]\big\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R})\big\|\le\frac{c_0}{|\tau|}\big\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R})\big\|.$$

Теперь проведем подобные рассуждения для $D_x^k v_0(\tau,x)$, где $k=1,\dots,4$. Применяя функцию Хевисайда $\theta(x)$, получаем

$$\left\|\int_0^x D_x^k J_-(\tau,x-s)\tilde f(\tau,s)ds+\int_x^{+\infty}D_x^k J_+(\tau,x-s)\tilde f(\tau,s)ds,L_2(\mathbb{R}_+)\right\|$$

$$=\left\|\int_{-\infty}^{+\infty}D_x^k J_-(\tau,x-s)\theta(x-s)\tilde f(\tau,s)ds\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{+\infty}D_x^k J_+(\tau,x-s)\theta(-x+s)\tilde f(\tau,s)ds,L_2(\mathbb{R})\right\|.$$

С учетом неравенств Юнга и Минковского и оценок из леммы 1.3, имеем

$$\left[\int_0^{+\infty}|D_x^k J_-(\tau,x)|dx+\int_{-\infty}^0|D_x^k J_+(\tau,x)|dx\right]\big\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R})\big\|$$

$$\le c_0|\tau|^{k-3}\big\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R})\big\|.$$

Таким образом, получена требуемая оценка. $\square$

1.3 Анализ структуры частного решения

Оценим $v_1(\tau,x)$ из (1.12) в норме $W_2^4(\mathbb{R}_+)$, где $\tau\in\mathbb{C}_\gamma^+$ является параметром, $\gamma>\gamma_0$. Для этого проанализируем каждое слагаемое в формуле (1.12) по отдельности. Сначала необходимо явно записать выражение

$$b_1(\lambda_j^+)(b^{11}\lambda_k^++b^{21})+b_2(\lambda_j^+)(b^{12}\lambda_k^++b^{22}),\quad j,\ k=1,2.$$

Найдем b^{kj} — элементы обратной матрицы к B. С учетом леммы 1.1, матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} - \tau b_{13} + \tau(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)b_{14} & b_{12} - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)b_{13} + \zeta(\tau)b_{14} \\ b_{21} - \tau b_{23} + \tau(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)b_{24} & b_{22} - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)b_{23} + \zeta(\tau)b_{24} \end{pmatrix},$$

где $\zeta(\tau) = a^2 + \tau + \tau^2$. Далее запишем B^{-1} следующим образом

$$\frac{1}{\det B} \times \begin{pmatrix} b_{22} - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)b_{23} + \zeta(\tau)b_{24} & -b_{12} + (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)b_{13} - \zeta(\tau)b_{14} \\ -b_{21} + \tau b_{23} - \tau(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)b_{24} & b_{11} - \tau b_{13} + \tau(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)b_{14} \end{pmatrix}.$$

В силу введенных обозначений (1.5) имеем

$$\det B = (A_4+A_6)\tau^2 - A_5\lambda_1^+\tau + (A_3+A_4)\tau - A_5\lambda_2^+\tau - A_2(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) + A_4a^2 + A_1. \tag{1.22}$$

Таким образом для $j, k = 1, 2$, приходим к

$$\begin{aligned} &b_1(\lambda_j^+)(b^{11}\lambda_k^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_j^+)(b^{12}\lambda_k^+ + b^{22}) \\ &= \frac{\lambda_j^+ + \lambda_k^+}{\det B} \cdot \Big(A_1 - A_2(\lambda_k^+ - \lambda_j^+) - A_3\lambda_k^+\lambda_j^+ + A_4\left((\lambda_k^+)^2 + (\lambda_j^+)^2 - \lambda_k^+\lambda_j^+\right) \\ &\qquad + A_5\lambda_k^+\lambda_j^+(\lambda_k^+ - \lambda_j^+) + A_6(\lambda_k^+)^2(\lambda_j^+)^2\Big). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Для первого слагаемого из (1.12) имеем

$$\begin{aligned} \|D_x^k v_{1,1}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq \left| \int_0^\infty \tilde{f}(\tau, s)e^{-\lambda_1^+ s}\, ds \right| \frac{c|\lambda_1^+|^{k-3}}{\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}\left|1 - \frac{|\lambda_2^+|}{|\lambda_1^+|}\right|^2} \\ \times \frac{|b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая леммы 1.1 и 1.2, из (1.24) получим оценки

$$\|D_x^k v_{1,1}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{k-3}\|\tilde{f}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \\ \times \frac{|b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|}, \quad k=0,\dots,4. \tag{1.25}$$

Проделав аналогичные рассуждения для каждого члена из формулы (1.12), получаем оценки

$$\|D_x^k v_{1,2}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{-3}\|\tilde{f}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \\ \times \frac{|b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})|}{2|\lambda_1^+|}, \quad k=0,\dots,4. \tag{1.26}$$

$$\|D_x^k v_{1,3}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{k-3}\|\tilde{f}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \\ \times \frac{|b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})|}{2|\lambda_2^+|}, \quad k=0,\dots,4, \tag{1.27}$$

$$\|D_x^k v_{1,4}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{-2}\|\tilde{f}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \\ \times \frac{|b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|}, \quad k=0,\dots,4. \tag{1.28}$$

1.4 Краевые задачи с требованиями к правой части, аналогичными задаче Коши

Лемма 1.5 *Пусть краевая задача (1.1) является регулярной, тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любой $f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, $f(t,x)\big|_{t=0} = 0$, имеют место оценки:*

$$\begin{aligned} &\|D_x^k v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{-1}\|\tilde{f}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|, \quad k=0,1, \\ &\|D_x^k v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{k-3}\|\tilde{f}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|, \quad k=2,3,4. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с оценки определителя Лопатинского из (1.22). С учетом леммы 1.1, запишем $(\det B)^{-1}$ в виде

$$\frac{(A_4+A_6)\tau^2+A_4(a^2+\tau)+A_3\tau+A_1+(\lambda_1^+ +\lambda_2^+)(A_2+A_5\tau)}{\big((A_4+A_6)\tau^2+A_4(a^2+\tau)+A_3\tau+A_1\big)^2-(\tau^2+a^2+2\tau)(A_2+A_5\tau)^2}.$$

Приводя подобные, будем иметь

$$\frac{1}{\det B}=\frac{(A_4+A_6)\tau^2+A_5\lambda_1^+\tau+(A_3+A_4+A_5\lambda_2^+)\tau+A_2\lambda_1^+}{\big((A_4+A_6)^2-A_5^2\big)\tau^4+A_7\tau^3+A_8\tau^2+2A_9\tau+A_{10}}$$
$$+\frac{A_2\lambda_2^+ +A_1+A_4a^2}{\big((A_4+A_6)^2-A_5^2\big)\tau^4+A_7\tau^3+A_8\tau^2+2A_9\tau+A_{10}}, \quad (1.30)$$

здесь

$$A_7=2\left((A_4+A_6)(A_3+A_4)-A_5(A_5+A_2)\right),$$
$$A_8=(A_3+A_4)^2+2(A_4+A_6)(A_1+a^2A_4)+(4-a^2)A_5^2-(2A_5+A_2)^2,$$
$$A_9=(A_3+A_4)(A_1+a^2A_4)-A_2(A_2+A_5a^2),$$
$$A_{10}=(A_1+a^2A_4)^2-A_2^2a^2. \quad (1.31)$$

Поскольку случай $A_4-A_5+A_6=0$ был подробно исследован в работах [6, 20], ограничимся рассмотрением случая $A_4-A_5+A_6\neq 0$. Учитывая, что $A_5\neq -A_4-A_6$, получаем $(A_4+A_6)^2-A_5^2\neq 0$, тогда найдется $\gamma_0>0$, что при $\tau\in\mathbb{C}_\gamma$, $\gamma>\gamma_0$,

$$|\det B|\geq c|\tau|^2, \quad (A_4+A_6)^2-A_5^2\neq 0. \quad (1.32)$$

Теперь оценим выражения из (1.23), принимая во внимание оценку (1.32):

$$\frac{|b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ +b^{21})+b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ +b^{22})|}{|\lambda_1^+ +\lambda_2^+|}=$$
$$\left|1-2\frac{(A_3+A_4)\tau-A_5\lambda_2^+\tau-A_2\lambda_1^+}{\det B}\right|\leq c,$$

$$\frac{|b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|}$$
$$\leq \frac{|(A_4 + A_6)\tau^2 + A_5\tau\lambda_1^+ - (A_3 + A_4 + A_5\lambda_2^+)\tau - A_2\lambda_1^+|}{|\det B|}$$
$$+ \frac{|A_1 + A_2\lambda_2^+ + a^2 A_4|}{|\det B|} \leq c_2, \qquad (1.33)$$

$$\frac{|b_1(\lambda_j^+)(b^{11}\lambda_j^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_j^+)(b^{12}\lambda_j^+ + b^{22})|}{2|\lambda_j^+|}$$
$$= \frac{|A_1 + (A_4 - A_3)(\lambda_j^+)^2 + A_6(\lambda_j^+)^4|}{|\det B|} \leq c_3\frac{|\lambda_j^+|^4}{|\tau|^2}, \quad j = 1, 2,\ A_6 \neq 0, \quad (1.34)$$

$$\frac{|b_1(\lambda_j^+)(b^{11}\lambda_j^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_j^+)(b^{12}\lambda_j^+ + b^{22})|}{2|\lambda_j^+|} \leq c\frac{|\lambda_j^+|^2}{|\tau|^2}, \quad j = 1, 2,\ A_6 = 0.$$

Тогда в силу (1.12) из (1.25), (1.26), (1.27) и (1.28) получим требуемые оценки (1.29). □

Теорема 1.1 *Пусть выполнено условие Лопатинского для регулярной краевой задачи* (1.1), *тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что для любой* $f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$, $f(t,x)\big|_{t=0} = 0$, *регулярная краевая задача* (1.1) *однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства* $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$, *и для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| + \|D_t^2 D_x^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)\|$$
$$\leq c(\gamma_0)\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2)\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от функции* $f(t,x)$.

Доказательство. Используя леммы 1.3 и 1.5, приходим к тому, что функция $v(\tau,x)$ вида (1.7) является решением краевой задачи (1.6) и принадлежит пространству $W_2^4(\mathbb{R}_+)$, более того, для него выполняются оценки:

$$\|D_x^k v(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c_1|\tau|^{-1}\|\tilde f(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|, \quad k=0,1,2,$$
$$\|D_x^3 v(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c_1\|\tilde f(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|,$$
$$\|D_x^4 v(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| + \|\tau^2 D_x^2 v(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c_2\|\tau\tilde f(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|.$$

Поскольку константы c_1 и c_2 не зависят от τ и $\tilde f(\tau,x)$, при $\gamma>\gamma_0$ имеют место оценки:

$$\|v(\tau,x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\| \le c\|\tilde f(\tau,x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\|,$$
$$\|\tau^2 v(\tau,x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\| + \|\tau^2 D_x^2 v(\tau,x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\|$$
$$+\|D_x^4 v(\tau,x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+) \le c\|\tau\tilde f(\tau,x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\|.$$

Для применения обобщённой теоремы Пэли–Винера (см., например, [21]), нужно показать аналитичность функции $v(\tau,x)=v_0(\tau,x)+v_1(\tau,x)$ ($v_0(\tau,x)$ из (1.10), $v_1(\tau,x)$ из (1.12)) в $\mathbb{C}_\gamma^+$ при почти всех $x>0$. В связи с тем, что $f(t,x)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2), \gamma>\gamma_0$, функция $\tilde f(\tau,x)$ аналитична в $\mathbb{C}_\gamma^+$ при почти всех $x>0$. Учитывая явный вид $v_0(\tau,x)$ из (1.10), приходим к тому, что $v_0(\tau,x)$ аналитична в $\mathbb{C}_\gamma^+$ при почти всех $x>0$. Аналитичность $v_1(\tau,x)$ из (1.12) в $\mathbb{C}_\gamma^+$ при почти всех $x>0$ вытекает из условия Лопатинского и аналитичности $\tilde f(\tau,x)$ в $\mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma>\gamma_0$, при почти всех $x>0$.

Из проведённых рассуждений и обобщённой теоремы Пэли–Винера следует, что обратное преобразование Лапласа функции $v(\tau,x)$

$$u(t,x)=\mathfrak{L}^{-1}_{\tau\to t}(v(\tau,x)),$$

принадлежит соболевскому пространству $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, и $D_t^2 D_x^2 u(t,x)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma>\gamma_0$. При этом $u(t,x)$ является решением задачи (1.1) и для неё имеет место оценка

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \le c(\gamma_0)\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2)\|.$$

В силу условия Лопатинского решение определяется единственным образом. $\square$

В качестве конкретного примера рассмотрим начально-краевую задачу для псевдогиперболического уравнения:

$$(\mathbb{I} - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad t > 0,\, x > 0,$$
$$D_x u|_{x=0} = 0, \quad D_x^3 u|_{x=0} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0.$$

Матрица Лопатинского имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\tau & \tau^2 + \tau + a^2 \end{pmatrix}.$$

Её определитель имеет оценку $|\det B| \geq c|\tau^2| \neq 0$ при $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma > \gamma_0$. Из (1.5) $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_6 = 0$, $A_5 = 1$ и поэтому $A_4 - A_5 + A_6 = 1 \neq 0$. Следовательно, по теореме 1.1 существует $\gamma_0 > 0$, что для любой

$$f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2), \quad \gamma > \gamma_0, \quad f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

рассматриваемая задача однозначно разрешима в классе функций из $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$ таких, что $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$.

1.5 Краевые задачи с дополнительными требованиями к гладкости на правую часть

Лемма 1.6 *Пусть выполнено условие Лопатинского для краевой задачи* (1.1) *и* $A_4 - A_5 + A_6 = 0$, $A_2 - A_3 + A_6 \neq 0$, *тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что для любой*

$$f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,0}(\mathbb{R}_{++}^2), \quad \gamma > \gamma_0, \quad f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

имеют место оценки:

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^k v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c\|\tilde f(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|, \quad k=0,\dots,3,\\
&\|D_x^4 v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| + |\tau|^2\|D_x^2 v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|,\\
&\qquad\qquad \le c|\tau|^2\|\tilde f(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|.
\end{aligned}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что $A_4-A_5+A_6=0$, выражение из (1.23) при $j=1$, $k=2$ примет вид

$$
\frac{b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})}{\lambda_1^+ + \lambda_2^+}
$$

$$
= \frac{\left(A_5\tau^2 + A_5\lambda_2^+\tau + A_2\lambda_1^+ + A_4a^2 + A_1\right) - \left((A_3+A_4)\tau + A_5\lambda_1^+\tau + A_2\lambda_2^+\right)}{\det B}
$$

$$
= \frac{\left(A_5\tau^2 + A_5\lambda_2^+\tau + A_2\lambda_1^+ + A_4a^2 + A_1\right)^2 - \left((A_3+A_4)\tau + A_5\lambda_1^+\tau + A_2\lambda_2^+\right)^2}{A_7\tau^3 + A_8\tau^2 + 2A_9\tau + A_{10}}
$$

$$
= \frac{A_{11}\lambda_1^+\tau^2 + A_{12}\tau^2 + 2A_{13}\lambda_2^+\tau + A_{14}}{A_7\tau^3 + A_8\tau^2 + 2A_9\tau + A_{10}}, \tag{1.35}
$$

где A_7 – A_{10} из (1.31) и

$$
\begin{aligned}
&A_{11} = -A_7 + 2(A_5)^2\left((\lambda_2^+)^2 - 1\right),\\
&A_{12} = \left(2(\lambda_2^+)^2 - a^2\right)A_5^2 + \left(A_2^2 - (A_3+A_4)^2\right) + 2A_5(A_4a^2 + A_1),\\
&A_{13} = \left(A_5 + \frac{A_2}{(\lambda_2^+)^2}\right)(A_4a^2 + A_1) - A_2(A_3+A_4),\\
&A_{14} = A_2^2(a^2 - 2(\lambda_2^+)^2) + (A_4a^2 + A_1)^2.
\end{aligned} \tag{1.36}
$$

По условию леммы $A_2-A_3-A_4+A_5\ne 0$, $A_4+A_6=A_5$, тогда $A_7\ne 0$ при $A_5\ne 0$, и в этом случае, оценивая выражение (1.35), приходим к

$$
\frac{\left|b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})\right|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|} \le c. \tag{1.37}
$$

Если $A_5=0$, тогда $A_7=0$, $A_{11}=0$ и $A_8=-A_{12}=(A_3+A_4)^2-A_2^2$. По условию $A_2-A_3-A_4\ne 0$. Следовательно, $A_8\ne 0$ при $A_2+A_3+A_4\ne 0$, в результате имеем оценку (1.37). При $A_5 = 0$, $A_2 + A_3 + A_4 = 0$ из (1.23), $j = 1$, $k = 2$, получим

$$\frac{b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})}{\lambda_1^+ + \lambda_2^+}$$
$$= -\frac{A_2(\lambda_1^+ + \tau) + A_4 a^2 + A_1 - A_2\lambda_2^+}{A_2(\lambda_1^+ + \tau) - A_4 a^2 - A_1 + A_2\lambda_2^+}.$$

Следовательно, и в этом случае выполнена оценка (1.37).

В силу условий леммы из (1.30) найдется $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma > \gamma_0$, $|\det B| \geq c|\tau|$, выполняется

$$\frac{|b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|}$$
$$\leq \frac{|A_5\tau^2 + A_5\tau\lambda_1^+ - (A_3 + A_4 + A_5\lambda_2^+)\tau - A_2\lambda_1^+|}{|\det B|}$$
$$+ \frac{|A_1 + A_2\lambda_2^+ + a^2 A_4|}{|\det B|} \leq c_2|\tau|, \quad A_5 \neq 0,$$

$$\frac{|b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|}$$
$$\leq \frac{|(A_3 + A_4)\tau + A_2\lambda_1^+|}{|\det B|} + \frac{|A_1 + A_2\lambda_2^+ + a^2 A_4|}{|\det B|} \leq c_2, \quad A_5 = 0.$$

$$\frac{|b_1(\lambda_j^+)(b^{11}\lambda_j^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_j^+)(b^{12}\lambda_j^+ + b^{22})|}{2|\lambda_j^+|}$$
$$= \frac{|A_1 + (A_4 - A_3)(\lambda_j^+)^2 + A_6(\lambda_j^+)^4|}{|\det B|} \leq c_3\frac{|\lambda_j^+|^4}{|\tau|}, \quad j = 1, 2.$$

Покажем, что из условий леммы $A_4 - A_5 + A_6 = 0$, $A_2 - A_3 + A_6 \neq 0$ следует, что $A_6 \neq 0$. Доказательство проведем от противного. Положим, что условия леммы выполнены, при этом $A_6 = 0$. В силу обозначений (1.5) имеем $b_{13}b_{24} = b_{23}b_{14}$. Рассмотрим возможные варианты: $|b_{13}| + |b_{23}| = 0$

и $|b_{13}|+|b_{23}|\neq 0$. Если $|b_{13}|+|b_{23}|=0$, тогда $A_2=A_3=0$, противоречие, поскольку по условию $A_2-A_3\neq 0$.

Предположим, что $|b_{13}|+|b_{23}|\neq 0$, для определенности $b_{13}\neq 0$, тогда $b_{24}=b_{23}b_{14}/b_{13}$ и $b_{14}\neq 0$, иначе $|b_{14}|+|b_{24}|=0$. Учитывая $A_4=A_5$, $b_{24}=b_{23}b_{14}/b_{13}$, пользуясь обозначениями (1.5), имеем $b_{14}(A_2-A_3)=0$. Поскольку $b_{14}\neq 0$, имеем $A_2-A_3=0$, что приводит к противоречию. Следовательно, наше предположение неверно, и $A_6\neq 0$.

Следовательно из (1.25), (1.26), (1.27) и (1.28) при $k=0,\ldots,4$

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^k v_{1,1}(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\leq c|\tau|^{k-3}\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|,\\
&\|D_x^k v_{1,2}(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\leq c\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|,\\
&\|D_x^k v_{1,3}(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\leq c|\tau|^{k-4}\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\\
&\|D_x^k v_{1,4}(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\leq c|\tau|^{-2}\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|,\quad A_5=0,\\
&\|D_x^k v_{1,4}(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\leq c|\tau|^{-1}\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|,\quad A_5\neq 0.
\end{aligned}
$$

С учетом (1.12), получаем требуемые оценки. □

Лемма 1.7 *Пусть выполнено условие Лопатинского для краевой задачи* (1.1) *и* $A_4=A_5\neq 0$, $A_6=0$, $A_2=A_3$, *тогда существует* $\gamma_0>0$ *такое, что для любой*

$$
f(t,x)\in W_{2,\gamma}^{-2,0}(\mathbb{R}^2_{++}),\quad \gamma>\gamma_0,\quad f(t,x)\big|_{t=0}=D_tf(t,x)\big|_{t=0}=0,
$$

справедливы оценки:

$$
\begin{aligned}
&\|D_x^k v_1(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\leq c\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|,\quad k=0,1,2,\\
&\|D_x^k v_1(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|\leq c|\tau|^{k-2}\|\tilde f(\tau,x),L_2(\mathbb{R}_+)\|,\quad k=3,4.
\end{aligned}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая условия леммы, имеем

$$
A_7=2\left((A_4+A_6)(A_3+A_4)-A_5(A_5+A_2)\right)=0,
$$

перепишем выражение из (1.35) в эквивалентной форме:

$$\frac{b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})}{\lambda_1^+ + \lambda_2^+}$$

$$= \frac{A_{11}\lambda_1^+\tau^2 + A_{12}\tau^2 + 2A_{13}\lambda_2^+\tau + A_{14}}{A_8\tau^2 + 2A_9\tau + A_{10}},$$

где A_8–A_{10} из (1.31), A_{11}–A_{14} определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= -A_7 + 2(A_5)^2\left((\lambda_2^+)^2 - 1\right),\\
A_{12} &= \left(2(\lambda_2^+)^2 - a^2\right)A_5^2 + \left(A_2^2 - (A_3 + A_4)^2\right) + 2A_5(A_4a^2 + A_1),\\
A_{13} &= \left(A_5 + \frac{A_2}{(\lambda_2^+)^2}\right)(A_4a^2 + A_1) - A_2(A_3 + A_4),\\
A_{14} &= A_2^2(a^2 - 2(\lambda_2^+)^2) + (A_4a^2 + A_1)^2.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Следовательно, приходим к

$$\frac{|b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|} \le c|\tau|.$$

С учетом (1.33), (1.34), и в силу условий данной леммы, понятно, что $|\det B| \ge c$, $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, при $\gamma > \gamma_0$. Следовательно,

$$\frac{|b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|} \le c_2|\tau|^2,$$

$$\frac{|b_1(\lambda_j^+)(b^{11}\lambda_j^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_j^+)(b^{12}\lambda_j^+ + b^{22})|}{2|\lambda_j^+|} \le c_3|\lambda_j^+|^4, \quad j = 1, 2.$$

Принимая во внимание (1.25), (1.26), (1.27) и (1.28), при $k = 0, \ldots, 4$ будем иметь

$$\|D_x^k v_{1,1}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{k-2}\|\tilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|,$$

$$\|D_x^k v_{1,2}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{-1}\|\tilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|,$$

$$\|D_x^k v_{1,3}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{k-3}\|\tilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|,$$

$$\|D_x^k v_{1,4}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c\|\tilde{f}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|.$$

Учитывая (1.12), придем к требуемым оценкам. $\square$

Теорема 1.2 *Пусть выполнено условие Лопатинского для нерегулярной краевой задачи* (1.1) *и*

$A_4 - A_5 + A_6 = 0, A_2 - A_3 + A_6 \neq 0,$ *либо* $A_4 = A_5 \neq 0, A_6 = 0, A_2 = A_3,$

тогда существует $\gamma_0 > 0$ *такое, что для любой*

$$f(t,x) \in W^{2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}), \quad \gamma > \gamma_0, \quad f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

краевая задача (1.1) *однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, *и для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| \le c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от функции* $f(t,x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.1, только вместо леммы 1.5 нужно использовать леммы 1.6 и 1.7. Остальные рассуждения остаются неизменными. $\square$

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned}
(\mathbb{I} - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0,\\
(\mathbb{I} + D_x)u|_{x=0} = 0,\\
D_x^3 u|_{x=0} = 0,\\
u|_{t=0} = D_t u|_{t=0} = 0.
\end{aligned}$$

здесь $b_1(D_x) = \mathbb{I} + D_x$, $b_2(D_x) = D_x^3$, матрица Лопатинского имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\tau & \tau^2 + \tau + a^2 \end{pmatrix},$$

и $\det B = \tau^2 + \tau + a^2 - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\tau$. В силу того, что

$$\left|\frac{1}{\tau^2 + \tau + a^2 - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\tau}\right| = \left|\frac{\tau^2 + \tau + a^2 + (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\tau}{(\tau^2 + \tau + a^2)^2 - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)^2\tau^2}\right|$$

$$= \frac{|\tau^2 + \tau + a^2 + (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\tau|}{|(1 + a^2)\tau^2 + 2a^2\tau + a^4|} \le c_1,$$

имеем $|\det B| \ge c$, более того, выполнено условие Лопатинского. Учитывая обозначения (1.5), имеем $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, $A_4 = A_5 = 1$, $A_6 = 0$. В этом случае выполняются условия теоремы 1.2, согласно которой для разрешимости краевой задачи в пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$, от функции $f(t,x)$ требуется, чтобы она принадлежала пространству $W_{2,\gamma}^{2,0}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$, а также $f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = 0$.

Приведем еще пример. Рассмотрим псевдогиперболическое уравнение

$$(\mathbb{I} - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad t > 0,\ x > 0,$$

с начальными и краевыми условиями

$$\begin{aligned} &(\mathbb{I} - D_x^2)u|_{x=0} = 0, \\ &D_x^3 u|_{x=0} = 0, \\ &u|_{t=0} = D_t u|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $b_1(D_x) = I - D_x^2$, $b_2(D_x) = D_x^3$, матрица Лопатинского имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \tau & \lambda_1^+ + \lambda_2^+ \\ (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\tau & \tau^2 + \tau + a^2 \end{pmatrix}.$$

В данном случае

$$|\det B| = |a^2+\tau| = \sqrt{(a^2+\sigma)^2+\eta^2} \geq |\tau| \neq 0, \quad \tau \in \mathbb{C}^+_\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Таким образом, условие Лопатинского для задачи справедливо. Из (1.5) получаем, что $A_1 = A_2 = A_3 = A_5 = 0$, $A_4 = 1$, $A_6 = -1$, $A_4 - A_5 + A_6 = 0$ и $A_2 - A_3 + A_6 = -1 \neq 0$, тем самым находимся в условиях теоремы 1.2. В силу указанной теоремы существует $\gamma_0 > 0$, что для любой

$$f(t,x) \in W^{2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}), \quad \gamma > \gamma_0, \quad f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

рассматриваемая задача однозначно разрешима в классе функций из $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, причем $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$.

Далее покажем, что требования на правую часть близки к необходимым. Другими словами, если потребовать от функции $f(t,x)$ меньше условий на существование производных по времени, то эта задача не будет иметь решение из соболевского пространства $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$.

Сначала запишем решение задачи в явном виде

$$v(\tau,x) = \int\limits_0^x \frac{e^{-\lambda_1^+(x-s)}\tilde{f}(\tau,s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds - \int\limits_0^x \frac{e^{-\lambda_2^+(x-s)}\tilde{f}(\tau,s)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds$$

$$+\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{\lambda_1^+(x-s)}\tilde{f}(\tau,s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds - \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{\lambda_2^+(x-s)}\tilde{f}(\tau,s)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds$$

$$+\frac{((\lambda_1^+\lambda_2^+)^2+\lambda_2^+\lambda_1^+-(\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)e^{-\lambda_1^+x}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_1^+s}\tilde{f}(\tau,s)ds}{2\lambda_1^+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)^2(\lambda_2^+\lambda_1^+ + (\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+\lambda_2^+)^2)}$$

$$-\frac{(\lambda_1^+)^2(1-(\lambda_1^+)^2)e^{-\lambda_2^+x}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_1^+s}\tilde{f}(\tau,s)ds}{\big((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2\big)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)(\lambda_2^+\lambda_1^+ + (\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+\lambda_2^+)^2)}$$

$$+\frac{(\lambda_2^+)^2(1-(\lambda_2^+)^2)e^{-\lambda_1^+ x}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,s)ds}{((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)(\lambda_2^+\lambda_1^+ +(\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+\lambda_2^+)^2)}$$
$$-\frac{((\lambda_1^+\lambda_2^+)^2+\lambda_2^+\lambda_1^+-(\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)e^{-\lambda_2^+ x}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,s)ds}{2\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)^2(\lambda_2^+\lambda_1^+ +(\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+\lambda_2^+)^2)}$$
$$= v_0(x,\tau)+v_{1,1}(\tau,x)+v_{1,2}(\tau,x)+v_{1,3}(\tau,x)+v_{1,4}(\tau,x).$$

Проведем доказательство от противного, предположим, что для любой функции $f(t,x)$ из пространства $W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma>\gamma_0>0$ и $f(t,x)\big|_{t=0}=0$ существует решение задачи. Пусть $f(t,x)=g(t)w(x)$, где

$$g(t)=\begin{cases}-2t^2+3t, & t\in[0,1],\\ e^{-t+1}, & t>1,\\ 0, & t<0,\end{cases}\qquad w(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^{2/3}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Выпишем преобразование Лапласа по переменной t для указанной функции в удобном виде

$$\tilde{f}(\tau,x)=\left[\frac{1}{\tau^2}+\frac{\tau(5e^{-\tau}-4)+4e^{-\tau}-4}{\tau^3(\tau+1)}\right]w(x)=[\widetilde{g}_1(\tau)+\widetilde{g}_2(\tau)]w(x).$$

По предположению

$$\|D_t^2u(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\leq c<\infty.$$

Обозначим через $v(\tau,x)$, где $\tau=\sigma+i\eta$, преобразование Лапласа функции $u(t,x)$ по переменной t. Функция $\tau^2v(x,\tau)\in L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R})$ имеет вид

$$\tau^2v(x,\tau)=\tau^2\big(v_0(x,\tau)+v_{1,1}(\tau,x)+v_{1,2}(\tau,x)+v_{1,3}(\tau,x)+v_{1,4}(\tau,x)\big)$$

и левая, и правая часть по предположению принадлежат пространству $L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R})$. Согласно оценкам, полученным в лемме 1.6, особое внимание следует уделить именно функции $v_{1,2}(\tau,x)$, поэтому запишем ее следующим образом

$$\tau^2 v_{1,2}(\tau,x) = \tau^2\big(v(x,\tau) - v_0(x,\tau) - v_{1,1}(\tau,x) - v_{1,3}(\tau,x) - v_{1,4}(\tau,x)\big)$$

$$\tau^2 v_{1,2}(\tau,x) = \frac{\tau^2(\lambda_1^+)^2(1-(\lambda_1^+)^2)e^{-\lambda_2^+ x}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,s)ds}{\big((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)(\lambda_2^+\lambda_1^+ + (\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+\lambda_2^+)^2)} \tag{1.39}$$

По предположению

$$\big\|\tau^2 v_{1,2}(\tau,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\big\| < \infty.$$

Подставим $\tilde{f}(\tau,x)$ в (1.39) с учетом леммы 1.1, 1.2 и вида $\widetilde{g}_1(\tau)$, имеем

$$\big\|\tau^2 v_{1,2}(\tau,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\big\|^2 \geq$$

$$\geq c\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{(\lambda_1^+)^2(1-(\lambda_1^+)^2)\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_1^+ s}w(s)ds}{\big((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2\big)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)(\tau+a^2)}\right|^2 d\eta$$

$$\geq c_*\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{\tau^4}{|\tau|^3(\tau+a^2)}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_1^+ s}w(s)ds\right|^2 d\eta$$

$$\geq C_*\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_1^+ s}w(s)ds\right|^2 d\eta.$$

Внутренний интеграл является сходящимся, следовательно

$$0 < r_1 \leq \sup_{\sigma>\gamma}\left|\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda_1^+ s}}{1+s^{2/3}}ds\right| \leq r_2, \quad \mathrm{Re}\lambda_1^+ > 0.$$

Продолжим цепочку неравенств, принимая во внимание ранее указанное неравенство:

$$C_* \sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_1^+ s} w(s) ds \Big|^2 d\eta \geq r_1 C_* \int\limits_{\mathbb{R}} d\eta.$$

таким образом имеем расходящийся интеграл, то есть противоречие. Следовательно, предположение неверно, поэтому от функции $f(t,x)$ нужно требовать дополнительную гладкость.

1.6 Класс краевых задач с повышенными требованиями к гладкости правой части

Лемма 1.8 *Пусть выполнено условие Лопатинского для краевой задачи* (1.1) *и* $A_6 \neq 0$, $A_4 - A_5 + A_6 = 0$, *и* $A_2 - A_3 + A_6 = 0$, *тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что при* $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma > \gamma_0$, *и для любой*

$$f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{3,0}(\mathbb{R}_{++}^2), \quad \gamma > \gamma_0,$$

$$f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = D_t^2 f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

имеют место оценки:

$$\|D_x^k v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c|\tau| \|\tilde{f}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|, \quad k = 0,\ldots,3,$$

$$\|D_x^4 v_1(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \leq c|\tau|^2 \|\tilde{f}(\tau,x), L_2(\mathbb{R}_+)\|.$$

Доказательство. Учитывая условия из леммы, имеем

$$A_7 = 2\left((A_4 + A_6)(A_3 + A_4) - A_5(A_5 + A_2)\right) = 0,$$

поэтому $|\det B| \geq c$, $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma > \gamma_0$, и выражение из (1.35) перепишем как

$$\frac{b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})}{\lambda_1^+ + \lambda_2^+}$$

$$= \frac{A_{11}\lambda_1^+\tau^2 + A_{12}\tau^2 + 2A_{13}\lambda_2^+\tau + A_{14}}{A_8\tau^2 + 2A_9\tau + A_{10}},$$

где A_8–A_{10} из (1.31), A_{11}–A_{14} из (1.38), тогда

$$\frac{|b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|} \le c, \quad A_5 = 0,$$

$$\frac{|b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|} \le c|\tau|, \quad A_5 \ne 0.$$

Следовательно,

$$\frac{|b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|} \le c_2|\tau|^2, \quad A_5 \ne 0,$$

$$\frac{|b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})|}{|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|} \le c_2|\tau|, \quad A_5 = 0,$$

$$\frac{|b_1(\lambda_j^+)(b^{11}\lambda_j^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_j^+)(b^{12}\lambda_j^+ + b^{22})|}{2|\lambda_j^+|} \le c_3|\lambda_j^+|^4, \quad j = 1, 2.$$

Принимая во внимание (1.25), (1.26), (1.27) и (1.28), при $k = 0, \ldots, 4$ будем иметь

$$\|D_x^k v_{1,1}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{k-3}\|\tilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|, \quad A_5 = 0,$$
$$\|D_x^k v_{1,1}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{k-2}\|\tilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|, \quad A_5 \ne 0,$$
$$\|D_x^k v_{1,2}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|\|\tilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|,$$
$$\|D_x^k v_{1,3}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{k-3}\|\tilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|,$$
$$\|D_x^k v_{1,4}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c|\tau|^{-1}\|\tilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|, \quad A_5 = 0,$$
$$\|D_x^k v_{1,4}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\| \le c\|\tilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{R}_+)\|, \quad A_5 \ne 0.$$

Учитывая (1.12), придем к требуемым оценкам. □

Теорема 1.3 *Пусть выполнено условие Лопатинского для нерегулярной краевой задачи* (1.1) *и* $A_4 - A_5 + A_6 = 0$, $A_2 - A_3 + A_6 = 0$, $A_6 \ne 0$, *тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что для любой* $f(t, x) \in W^{3,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$,

$\gamma > \gamma_0$,

$$f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = D_t^2 f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

краевая задача (1.1) *однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, таких, что $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, и для решения $u(t,x)$ справедлива оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| \le c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{3,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ не зависит от функции $f(t,x)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1.1, заменив в рассуждениях лемму 1.5 на лемму 1.8 и повторив соответствующие рассуждения, получаем требуемый результат. □

В качестве иллюстративного примера рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{gathered}
(\mathbb{I} - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0,\\
(\mathbb{I} - D_x^2)u|_{x=0} = 0,\\
(\mathbb{I} + D_x^3)u|_{x=0} = 0,\\
u|_{t=0} = D_t u|_{t=0} = 0,
\end{gathered}$$

здесь $a^2 \ne 1$ и $b_1(D_x) = \mathbb{I} - D_x^2$, $b_2(D_x) = \mathbb{I} + D_x^3$. Матрица Лопатинского имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1+\tau & \lambda_1^+ + \lambda_2^+ \\ 1 + (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\tau & \tau^2 + \tau + a^2 \end{pmatrix}.$$

Для оценки определителя указанной матрицы приходим к

$$\left|\frac{1}{\tau + a^2 - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}\right| = \left|\frac{\tau + a^2 + (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\tau + a^2)^2 - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)^2}\right|$$

$$= \frac{|\tau + a^2 + \lambda_1^+ + \lambda_2^+|}{|a^2 - 1||2\tau + a^2|} \le c_1,$$

следовательно,

$$|\det B| = |a^2 + \tau - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)| \geq c, \quad \tau \in \mathbb{C}_\gamma^+, \quad \gamma > 0.$$

Исходя из вышеперечисленного, условие Лопатинского для рассматриваемой задачи выполнено. Учитывая обозначения (1.5), получаем

$$A_1 = A_3 = A_5 = 0, \quad A_2 = A_4 = 1, \quad A_6 = -1,$$
$$A_4 - A_5 + A_6 = 0, \quad A_2 - A_3 + A_6 = 0.$$

По найденным коэффициентам можно сделать вывод, что рассматриваемая задача удовлетворяет условиям теоремы 1.3. В силу указанной теоремы существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любой

$$f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{3,0}(\mathbb{R}_{++}^2), \quad \gamma > \gamma_0,$$

$$f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = D_t^2 f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

задача однозначно разрешима в соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$ функций таких, что $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$.

Выпишем решение для указанной задачи

$$v(\tau,x) = \int\limits_0^x \frac{e^{-\lambda_1^+(x-s)}\tilde{f}(\tau,s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2\big)} ds - \int\limits_0^x \frac{e^{-\lambda_2^+(x-s)}\tilde{f}(\tau,s)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2\big)} ds$$

$$+ \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{\lambda_1^+(x-s)}\tilde{f}(\tau,s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2\big)} ds - \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{\lambda_2^+(x-s)}\tilde{f}(\tau,s)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2\big)} ds$$
$$+ \frac{(\lambda_1^+ + 1)(\lambda_1^+\lambda_2^+ + \lambda_1^+ - \lambda_2^+)e^{-\lambda_1^+ x} \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,s)ds}{2\lambda_1^+(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)^2(1 - \lambda_1^+)(\lambda_1^+\lambda_2^+ + \lambda_1^+ + \lambda_2^+)}$$
$$- \frac{(\lambda_1^+)^2(\lambda_1^+ + 1)e^{-\lambda_2^+ x} \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,s)ds}{(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\big((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2\big)(\lambda_2^+ - 1)(\lambda_1^+\lambda_2^+ + \lambda_2^+ + \lambda_1^+)}$$

$$+\frac{(\lambda_2^+)^2(\lambda_2^+ + 1)e^{-\lambda_1^+ x}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau, s)ds}{(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\big((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+ - 1)(\lambda_1^+\lambda_2^+ + \lambda_2^+ + \lambda_1^+)}$$

$$-\frac{(\lambda_2^+ + 1)(\lambda_1^+\lambda_2^+ - \lambda_1^+ + \lambda_2^+)e^{-\lambda_2^+ x}\int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau, s)ds}{2\lambda_2^+(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)^2(\lambda_2^+ - 1)(\lambda_1^+\lambda_2^+ + \lambda_2^+ + \lambda_1^+)}$$

$$= v_0(x, \tau) + v_{1,1}(\tau, x) + v_{1,2}(\tau, x) + v_{1,3}(\tau, x) + v_{1,4}(\tau, x).$$

Покажем, что если потребовать от функции $f(t, x)$ меньше условий гладкости, чем в теореме 1.3, то решение не будет принадлежать указанному классу.

Проведем доказательство от противного, предположим, что для любой функции $f(t, x)$ из пространства $W^{2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0 > 0$ и $f(t, x)\big|_{t=0} = D_t f(t, x)\big|_{t=0} = 0$ существует решение задачи. Пусть $f(t, x) = g(t)w(x)$, где

$$g(t) = \begin{cases} -3t^3 + 4t^2, & t \in [0, 1], \\ e^{-t+1}, & t > 1, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \qquad w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^{2/3}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Выпишем преобразование Лапласа для указанной функции в виде, который пригодится для дальнейших рассуждений, $\tau = \sigma + i\eta$,

$$\tilde{f}(\tau, x) = \left[\frac{(8 + 11\mathrm{e}^{-\tau})}{\tau^3} + \frac{\mathrm{e}^{-\tau}\,(17\tau + 18) - (18\tau + 18)}{\tau^5 + \tau^4}\right] w(x)$$

$$= [\widetilde{g}_1(\tau) + \widetilde{g}_2(\tau)]w(x).$$

По предположению

$$\|D_t^2 u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| \leq c < \infty.$$

Обозначим через $v(\tau,x)$, где $\tau=\sigma+i\eta$, преобразование Лапласа функции $u(t,x)$ по переменной t. Функция $\tau^2 v(x,\tau)\in L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R})$ имеет вид

$$\tau^2 v(x,\tau)=\tau^2\big(v_0(x,\tau)+v_{1,1}(\tau,x)+v_{1,2}(\tau,x)+v_{1,3}(\tau,x)+v_{1,4}(\tau,x)\big),$$

и левая, и правая часть по предположению принадлежат пространству $L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R})$. Согласно оценкам, полученным в лемме 1.8, особое внимание следует уделить именно функции $v_{1,2}(\tau,x)$, поэтому выпишем ее в развернутом виде

$$\tau^2 v_{1,2}(\tau,x)=\frac{\tau^2(\lambda_1^+)^2(\lambda_1^++1)e^{-\lambda_2^+x}\int\limits_0^\infty \tilde f(\tau,s)e^{-\lambda_1^+s}\,ds}{((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)(\lambda_2^+-1)(\lambda_1^+\lambda_2^++\lambda_1^++\lambda_2^+)}$$
$$=\tau^2\big(v(x,\tau)-v_0(x,\tau)-v_{1,1}(\tau,x)-v_{1,3}(\tau,x)-v_{1,4}(\tau,x)\big). \qquad (1.40)$$

По предположению $\big\|\tau^2 v_{1,2}(\tau,x),L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}_+)\big\|<\infty$. Подставим $\tilde f(\tau,x)$ в формулу (1.40), учитывая леммы 1.1, 1.2 и вид $\widetilde{g}_1(\tau)$, имеем

$$\big\|\tau^2 v_{1,2}(\tau,x),L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}_+)\big\|^2\geq$$

$$\geq c^*\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{(8+11e^{-\tau})(\lambda_2^++1)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1^+s}w(s)ds}{(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\big((\lambda_2^+)^2-1\big)(\lambda_1^+\lambda_2^++\lambda_1^++\lambda_2^+)}\right|^2 d\eta.$$

Принимая во внимание поведение корня λ_2^+, в том числе (1.14) и $w(s)$, получаем $\big\|\tau^2 v_{1,2}(\tau,x),L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}_+)\big\|^2\geq$

$$C\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\frac{|\tau|^2(8+11e^{-\tau})(\lambda_2^++1)}{|\tau|^2(1+\frac{|\lambda_2^+|}{|\lambda_1^+|})(\lambda_2^++1+\frac{|\lambda_2^+|}{|\lambda_1^+|})}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\lambda_1^+s}}{1+s^{2/3}}ds\right|^2 d\eta$$
$$\geq C^*\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}}|8+11e^{-\tau}|^2\left|\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\lambda_1^+s}}{1+s^{2/3}}ds\right|^2 d\eta.$$

Внутренний интеграл является сходящимся, следовательно,

$$0 < r_1 \leq \left| \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda_1^+ s}}{1+s^{2/3}} ds \right| \leq r_2.$$

Продолжим построение оценок, учитывая приведённую выше оценку, приходим к следующему выводу:

$$C^* \sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} |8+11e^{-\tau}|^2 \left| \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\lambda_1^+ s}}{1+s^{2/3}} ds \right|^2 d\eta \geq r_1 C^* \sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} |8+11e^{-\tau}|^2 d\eta.$$

Найдется такое $\gamma > \gamma_0 > 0$, что будет выполняться

$$0 < r_3 \leq \sup_{\sigma>\gamma} |8+11e^{-\tau}|^2 \leq r_4.$$

Следовательно,

$$r_1 C^* \sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} |8+11e^{-\tau}|^2 d\eta \geq r_3 r_1 C^* \int\limits_{\mathbb{R}} d\eta.$$

Таким образом, приходим к расходящемуся интегралу, что ведет к противоречию. Отсюда следует, наше предположение неверно. Данный пример демонстрирует, что если ослабить требование к гладкости функции $f(t,x)$, то рассматриваемая задача не будет иметь решение $u(t,x)$ из пространства $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^2_{++})$.

1.7 О некоторых приложениях полученных результатов

Уравнение, описывающее крутильные колебания упругого стержня [8,9,15], имеет вид

$$D_t^2 u - \nu^2 k_p^2\, D_t^2 D_x^2 u + \nu^2 k_p^2 c_2^2\, D_x^4 u - c_0^2 D_x^2 u = 0, \tag{1.41}$$

здесь u — перемещение стержня, k_p — полярный радиус вращения поперечного сечения, ν — коэффициент Пуассона, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения волн в бесконечной среде, μ — константа Ламе, ρ — плотность, c_0 — фазовая скорость распространения длинных волн, E — модуль Юнга. Пусть $a_1 = \nu^2 k_p^2$, $a_2 = \nu^2 k_p^2 c_2^2$, $a_3 = c_0^2$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с начальными и краевыми условиями, которые соответствуют жесткому закреплению стержня

$$\begin{gathered}(\mathbb{I} - a_1 D_x^2) D_t^2 u + a_2 D_x^4 u - a_3 D_x^2 u = 0, \quad t > 0, \quad x > 0,\\ u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x),\\ u|_{x=0} = 0, \quad D_x u|_{x=0} = 0,\\ a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0.\end{gathered} \tag{1.42}$$

Как отмечалось на стр. 24, псевдогиперболическое уравнение (1.42) сводится к уравнению (1.1) в этой главе.

Предположим, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ финитны в $\mathbb{R}_+$. Введем новую неизвестную функцию $u(t,x) = \tilde{u}(t,x) + \varphi_1(x) + t\varphi_2(x)$. Тогда начально-краевая задача для функции $\tilde{u}(t,x)$ примет вид:

$$\begin{gathered}(\mathbb{I} - a_1 D_x^2) D_t^2 \tilde{u} + a_2 D_x^4 \tilde{u} - a_3 D_x^2 \tilde{u} = f(t,x), \quad t > 0, \quad x > 0,\\ \tilde{u}|_{t=0} = 0, \quad D_t \tilde{u}|_{t=0} = 0,\\ \tilde{u}|_{x=0} = 0, \quad D_x \tilde{u}|_{x=0} = 0,\end{gathered} \tag{1.43}$$

где $f(t,x) = -(D_x^4 - a_3 D_x^2)(\varphi_1(x) + t\varphi_2(x))$. Согласно теореме 1.1, для существования и единственности решения задачи (1.43) в пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$ от правой части дифференциального уравнения требуется принадлежность пространству $W_{2,\gamma}^{1,0}(\mathbb{R}_{++}^2)$. На основе этого сформулируем результат о разрешимости задачи (1.42).

Теорема 1.4 *Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что для любых финитных $\varphi_1(x) \in W_2^4(\mathbb{R}_+)$ и $\varphi_2(x) \in W_2^4(\mathbb{R}_+)$ краевая задача (1.42) однозначно* *разрешима в классе функций из соболевского пространства* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ *таких, что* $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, *и для решения* $u(t,x)$ *выполняется оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| + \|D_t^2 D_x^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|$$

$$\leq c(\gamma_0)\big[\|\varphi_1(x), W_2^4(\mathbb{R}_+)\| + \|\varphi_2(x), W_2^4(\mathbb{R}_+)\|\big],$$

где константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от функций* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с начальными и краевыми условиями, которые соответствуют шарнирному закреплению стержня

$$\begin{gathered}
(\mathbb{I} - a_1 D_x^2) D_t^2 u + a_2 D_x^4 u - a_3 D_x^2 u = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \\
u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x), \\
u|_{x=0} = 0, \quad D_x^2 u|_{x=0} = 0, \\
a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0.
\end{gathered} \tag{1.44}$$

Как отмечалось на стр. 24, псевдогиперболическое уравнение (1.44) сводится к уравнению (1.1) в этой главе, сделав соответствующие замены приходим к

$$\begin{gathered}
(\varepsilon\mathbb{I} - D_x^2) D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \\
u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x), \\
u|_{x=0} = 0, \quad D_x^2 u|_{x=0} = 0, \\
a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0.
\end{gathered} \tag{1.45}$$

Предположим, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ финитны в $\mathbb{R}_+$. Введем новую неизвестную функцию $u(t,x) = \tilde{u}(t,x) + \varphi_1(x) + t\varphi_2(x)$. Тогда начально-краевая задача для функции $\tilde{u}(t,x)$ примет вид:

$$
\begin{gathered}
(\varepsilon\mathbb{I} - D_x^2)D_t^2\tilde{u} + D_x^4\tilde{u} - a^2D_x^2\tilde{u} = f(t,x), \quad t>0, \quad x>0,\\
\tilde{u}|_{t=0} = 0, \quad D_t\tilde{u}|_{t=0} = 0,\\
\tilde{u}|_{x=0} = 0, \quad D_x^2\tilde{u}|_{x=0} = 0,
\end{gathered}
\tag{1.46}
$$

где $f(t,x) = -(D_x^4 - a^2D_x^2)(\varphi_1(x) + t\varphi_2(x))$.

Вначале рассмотрим случай $\varepsilon = a^2$. Тогда решение (1.46) можно записать с помощью формул (1.7), (1.10), (1.11), перегруппировав, приходим к виду $u(t,x) = \mathfrak{L}^{-1}_{\tau\to t}(v(\tau,x))$:

$$
\begin{aligned}
v(\tau,\xi',x_n) = \frac{1}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}\int\limits_0^{x_n} e^{-\lambda_2^+(x_n-s)}\Bigg[\int\limits_0^s e^{-\lambda_1^+(s-p)}F(\tau,p)dp\\
+\int\limits_s^{+\infty} e^{\lambda_1^+(s-p)}F(\tau,p)dp - e^{-\lambda_1^+s}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+p}F(\tau,p)dp\Bigg]ds\\
+\frac{1}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}\int\limits_{x_n}^{+\infty} e^{\lambda_2^+(x_n-s)}\Bigg[\int\limits_0^s e^{-\lambda_1^+(s-p)}F(\tau,p)dp + \int\limits_s^{+\infty} e^{\lambda_1^+(s-p)}F(\tau,p)dp\\
-e^{-\lambda_1^+s}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+p}F(\tau,p)dp\Bigg]ds\\
-\frac{1}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}e^{-\lambda_2^+x_n}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+s}\Bigg[\int\limits_0^s e^{-\lambda_1^+(s-p)}F(\tau,p)dp + \int\limits_s^{+\infty} e^{\lambda_1^+(s-p)}F(\tau,p)dp\\
-e^{-\lambda_1^+s}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+p}F(\tau,p)dp\Bigg]ds,
\end{aligned}
$$

где $F(\tau,x) = -(D_x^4 - a^2D_x^2)(\varphi_1(x)/\tau + \varphi_2(x)/\tau^2)$. Согласно теореме 1.1, для существования и единственности решения задачи (1.46) в пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$ сформулируем результат о разрешимости задачи (1.44) при $\varepsilon = a^2$.

Теорема 1.5 *Существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что для любых финитных* $\varphi_1(x) \in W_2^4(\mathbb{R}_+)$ *и* $\varphi_2(x) \in W_2^3(\mathbb{R}_+)$ *краевая задача* (1.44) *однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства* $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$ *таких, что* $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$, *и для решения* $u(t,x)$ *выполняется оценка:*

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| + \|D_t^2 D_x^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)\|$$

$$\leq c(\gamma_0)\big[\|\varphi_1(x), W_2^4(\mathbb{R}_+)\| + \|\varphi_2(x), W_2^3(\mathbb{R}_+)\|\big],$$

где константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от функций* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$.

В случае $\varepsilon \neq a^2$, для получения такого же результата нужно повторить схему доказательства теоремы 1.1 и применить теорему фон Неймана [25].

Из этих теорем вытекает, что для разрешимости смешанной задачи (1.44), соответствующей шарнирному закреплению стержня, от начальных данных нужно требовать чуть меньше требований по сравнению с задачей (1.42), соответствующей жесткому закреплению стержня.

Следует отметить, что полученный результат дополняет исследования, представленные в работе [42].

Глава 2.

Смешанные краевые задачи для многомерного псевдогиперболического уравнения. Регулярный случай

2.1 Постановка смешанной краевой задачи

В этой главе мы будем рассматривать смешанные задачи в четверти пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{++}$ для дифференциального уравнения

$$\big(\varepsilon\mathbb{I} - L_0(D_x)\big)D_t^2 u + [L_0(D_x)]^2 u + \sum_{|\beta|\le 3} b_\beta D_x^\beta u = f(t,x), \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^n_+, \tag{2.1}$$

с условиями при $x_n = 0$

$$\begin{aligned} &(b_{11}u + b_{12}D_{x_n}u + b_{13}D_{x_n}^2 u)\big|_{x_n=0} = 0,\\ &(b_{21}u + b_{22}D_{x_n}u + b_{23}D_{x_n}^2 u)\big|_{x_n=0} = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

и начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad D_t u\big|_{t=0} = 0, \tag{2.3}$$

где $b_\beta \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \ge 0$ и $b_{ij}\in\mathbb{R}$, $i = 1,2$ и $j = 1,2,3$. Будем предполагать, что

$$L_0(D_x) = L_0(D_{x'},0) + aD_{x_n}^2,$$

где $L_0(D_x)$ — однородный эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, $a > 0$, и справедлива оценка

$$-r_2|\xi|^2 \le L_0(i\xi) \le -r_1|\xi|^2, \tag{2.4}$$

здесь $r_2 \ge r_1 > 0$.

В параграфе 2.3 мы определим условия Лопатинского для задачи (2.1), (2.2), (2.3), при которых будет изучаться ее корректность. Построение решения и изучение условий разрешимости смешанной задачи будет проводиться в анизотропном весовом соболевском пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > 0$, при этом будем предполагать, что существуют обобщенные производные $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \ldots, n$.

В параграфах 2.2–2.6 мы будем рассматривать уравнение (2.1) при $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$. Случай, когда $b_\beta \ne 0$, будет изучен в параграфе 2.7.

2.2 Поведение корней характеристического уравнения

Введём обозначение для дифференциального оператора из уравнения (2.1):

$$L(D_t, D_{x'}, D_{x_n}) = \big(\varepsilon\mathbb{I} - L_0(D_x)\big)D_t^2 + [L_0(D_x)]^2.$$

Характеристическое уравнение $L(\tau, i\xi', \lambda)$ для дифференциального оператора $L(\tau, i\xi', D_{x_n})$ можно записать в виде

$$L(\tau, i\xi', \lambda) = a^2\lambda^4 - a\big(\tau^2 - 2L_0(i\xi',0)\big)\lambda^2 + \big(\varepsilon\tau^2 - L_0(i\xi',0)\tau^2 + [L_0(i\xi',0)]^2\big) = 0. \quad (2.5)$$

Покажем, что это уравнение при $\varepsilon \ge 0$, $\tau = \sigma + i\eta$, $\sigma \ge 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ не имеет корней на мнимой оси. Предположим обратное. Пусть уравнение имеет мнимый корень, то есть при некотором значении $\mathrm{Re}\tau = \sigma > \gamma > 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\lambda = ih$ — корень ($h \in \mathbb{R}$). Подставляя в уравнение, получаем

$$a^2h^4 + a\big(\tau^2 - 2L_0(i\xi',0)\big)h^2 + \big(\varepsilon\tau^2 - L_0(i\xi',0)\tau^2 + [L_0(i\xi',0)]^2\big) = 0.$$

Обозначим $p = h^2 \ge 0$, тогда

$$a^2p^2 + a\big(\tau^2 - 2L_0(i\xi',0)\big)p + \big(\varepsilon\tau^2 - L_0(i\xi',0)\tau^2 + [L_0(i\xi',0)]^2\big) = 0.$$

Пусть $p_1 \ge 0$, $p_2 \ge 0$ — корни уравнения, тогда по теореме Виета

$$p_1 + p_2 = -a\big(\tau^2 - 2L_0(i\xi',0)\big) \ge 0,$$

т.е.

$$a\eta^2 - a\sigma^2 - 2ia\eta\sigma + 2aL_0(i\xi',0) \geq 0, \quad \sigma > 0, \quad \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Следовательно, при $\eta = 0$ имеем $-a\sigma^2 + 2aL_2^1(i\xi',0) \geq 0$, однако $\sigma > 0$ и $a > 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, что приводит к противоречию. Таким образом, λ не лежит на мнимой оси. Следовательно, при $\gamma > 0$ характеристическое уравнение (2.5) не имеет чисто мнимых корней. Тогда, очевидно, что при $\mathrm{Re}\tau = \sigma > 0$ число корней уравнения (2.5) в левой и правой полуплоскостях не зависит от (η, σ, ξ').

В дальнейшем без ограничения общности полагаем $a = 1$.

Предварительно следует рассмотреть ряд вспомогательных утверждений, касающихся свойств корней соответствующего характеристического уравнения (2.5). Данные леммы послужат основой для дальнейшего анализа и доказательства основных результатов.

Лемма 2.1 *При $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\mathrm{Re}\tau > \tilde{\gamma} > 0$ и $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ для корней характеристического уравнения (2.5) справедливо*

$$\lambda_j^+(\tau,\xi') = -\lambda_j^-(\tau,\xi'), \quad j = 1,2,$$

$$(\lambda_1^+)^2 + (\lambda_2^+)^2 = \tau^2 - 2L_0(i\xi',0),$$

$$(\lambda_1^+)^2(\lambda_2^+)^2 = \varepsilon\tau^2 - L_0(i\xi',0)\tau^2 + [L_0(i\xi',0)]^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим характеристическое уравнение (2.5). Обозначив $\mu = \lambda^2$, уравнение (2.5) принимает вид

$$\mu^2 - \big(\tau^2 - 2L_0(i\xi',0)\big)\mu + \big(\varepsilon\tau^2 - L_0(i\xi',0)\tau^2 + [L_0(i\xi',0)]^2\big) = 0,$$

корни его можно представить следующим образом

$$\mu_1 = -L_0(i\xi',0) + \frac{\tau^2}{2}(1 + \sqrt{1-z}), \quad \mu_2 = -L_0(i\xi',0) + \frac{\tau^2}{2}(1 - \sqrt{1-z}),$$

где $z = \frac{4\varepsilon}{\tau^2}$. Тогда при $\mathrm{Re}\tau = \sigma > \gamma$ такой, что $|z| < 1$ будет справедливо асимптотическое разложение

$$\mu_1 = -L_0(i\xi', 0) + \tau^2 - \varepsilon + O\left(|z|^2\right)$$
$$= -L_0(i\xi', 0) + \tau^2 + O\left(1\right), \quad |z| \to 0, \tag{2.6}$$

$$\mu_2 = -L_0(i\xi', 0) + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{\tau^2} + O\left(|z|^2\right), \; |z| \to 0. \tag{2.7}$$

Корни характеристического уравнения (2.5) имеют вид

$$\lambda_1^+ = \sqrt{\mu_1}, \quad \lambda_1^- = -\sqrt{\mu_1}, \quad \lambda_2^+ = \sqrt{\mu_2}, \quad \lambda_2^- = -\sqrt{\mu_2}. \qquad \square$$

Замечание 2.1 *В случае $\varepsilon = 0$ выражения для корней из леммы 2.1 упрощаются:*

$$\mu_1 = \tau^2 - L_0(i\xi', 0), \quad \mu_2 = -L_0(i\xi', 0).$$

На основании представленного выше анализа можно сделать вывод, что корни характеристического уравнения (2.5) обладают следующим свойством: два корня, обозначенные как λ_1^- и λ_2^-, располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости, а корни λ_1^+ и λ_2^+, находятся в правой полуплоскости соответственно.

В следующей лемме содержится очень важная оценка для символа дифференциального оператора $L(D_t, D_x)$.

Лемма 2.2 *При $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\mathrm{Re}\tau > \tilde{\gamma} > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ оценка символа псевдогиперболического оператора имеет вид*

$$|L(\tau, i\xi', i\xi_n)| \geq \frac{c\sigma}{|\tau|}(|\tau|^2 + |\xi'|^2 + |\xi_n|^2)(\varepsilon + \xi_n^2 + |\xi'|^2), \tag{2.8}$$

здесь константа $c > 0$ не зависит от (σ, η, ξ).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обратимся к рассмотрению символа дифференциального оператора $L(D_t, D_x) = L(D_t, D_{x'}, D_{x_n})$, который имеет вид

$$L(\tau, i\xi) = L(\tau, i\xi', i\xi_n) = \big(\varepsilon\mathbb{I} - L_0(i\xi)\big)\tau^2 + [L_0(i\xi)]^2,$$

здесь $\tau = i\eta + \sigma$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Для получения оценки рассматриваемого выражения выполним умножение и деление на выражение $\sigma - i\eta$, а именно

$$|L(\tau, i\xi)| = \left|\big(\varepsilon - L_0(i\xi)\big)\tau^2 + [L_0(i\xi)]^2\right| \cdot \frac{|\sigma - i\eta|}{|\sigma - i\eta|} \geq \frac{\mathrm{Re}\,[|L(\tau, i\xi)| \cdot |\sigma - i\eta|]}{|\sigma - i\eta|}$$

$$= \frac{\sigma}{|\tau|}\big(\varepsilon - L_0(i\xi)\big)\left(\sigma^2 + \eta^2 - \varepsilon - L_0(i\xi) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - L_0(i\xi)}\right).$$

Принимая во внимание (2.4) и учитывая, что $\tilde{\gamma} > 0$, заключаем, что требуемая оценка выполнена. $\square$

Лемма 2.3 *Существует* $\gamma_1 > 0$ *такое, что при* $\mathrm{Re}\tau = \sigma > \gamma_1$ *имеет место оценка*

$$|\mathrm{Re}\lambda_1^+||\lambda_1^+| \geq \frac{c\sigma}{|\tau|}\left(|\tau|^2 + |\xi'|^2\right), \tag{2.9}$$

где $c > 0$ *— константа, не зависящая от* τ *и* ξ'.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка на символ псевдогиперболического оператора была установлена в лемме 2.2. С другой стороны, $|L(\tau, i\xi', i\xi_n)|$ допускает следующее представление:

$$|L(\tau, i\xi', i\xi_n)| = |i\xi_n - \lambda_1^+| \cdot |i\xi_n - \lambda_1^-| \cdot |i\xi_n - \lambda_2^+| \cdot |i\xi_n - \lambda_2^-|. \tag{2.10}$$

Пусть $\xi_n = \mathrm{Im}\lambda_1^+$, тогда $|\mathrm{Re}\lambda_1^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_1^-||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^-|$. Поскольку $|i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_1^-| \leq |\mathrm{Im}\lambda_1^+| + |\lambda_1^-| \leq 2|\lambda_1^+|$ и

$$|i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^+| \cdot |i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^-| = |(\mathrm{Im}\lambda_1^+)^2 + (\lambda_1^+)^2| \leq |\lambda_2^+|^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+)^2,$$

тогда

$$|\mathrm{Re}\lambda_1^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_1^-||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^-| \\ \le 2|\mathrm{Re}\lambda_1^+||\lambda_1^+|\big(|\lambda_2^+|^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+)^2\big). \quad (2.11)$$

Учитывая (2.8), (2.10) и заменяя ξ_n на $\mathrm{Im}\lambda_1^+$, имеем

$$|\mathrm{Re}\lambda_1^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_1^-||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^+||i\mathrm{Im}\lambda_1^+ - \lambda_2^-| \\ \ge \frac{\sigma}{|\tau|}(\varepsilon + |\xi'|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_1^+|^2)(|\tau|^2 + |\xi'|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_1^+|^2). \quad (2.12)$$

Из (2.11) и (2.12) получаем

$$2|\mathrm{Re}\lambda_1^+||\lambda_1^+|\left(\left|\lambda_2^+\right|^2 + (\mathrm{Im}\lambda_1^+)^2\right) \\ \ge \frac{\sigma}{|\tau|}(\varepsilon + |\xi'|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_1^+|^2)(|\tau|^2 + |\xi'|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_1^+|^2), \quad (2.13)$$

тем самым приходим к требуемому неравенству (2.9). □

Лемма 2.4 *Существует $\gamma_2 > 0$ такое, что при $\mathrm{Re}\tau = \sigma > \gamma > \gamma_2$, справедливы оценки:*

$$\mathrm{Re}\lambda_1^+ \ge \sigma, \quad \mathrm{Re}\lambda_2^+ \ge \sqrt{|\xi'|^2 + \varepsilon}. \quad (2.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из доказательства леммы 2.1, для корней характеристического уравнения (2.5) справедливо представление $\lambda_1^+ = \sqrt{\mu_1}$, $\lambda_2^+ = \sqrt{\mu_2}$. Поэтому оценка (2.14) вытекает из асимптотических разложений (2.6) и (2.7). □

Замечание 2.2 *Если $\varepsilon = 0$, утверждения лемм 2.3, 2.2 и 2.4 сохраняют свою справедливость.*

Обозначим через $\gamma_0 = \max\{\tilde\gamma, \gamma_1, \gamma_2\}$.

2.3 Условие Лопатинского

Сформулируем условие Лопатинского для задачи (2.1)–(2.3). Для этого рассмотрим краевую задачу на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $\tau \in \mathbb{C}^+ = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\tau > 0\}$ и параметром $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\begin{aligned} &L(\tau, i\xi', D_{x_n})v = 0, \quad x_n > 0, \\ &b_1(D_{x_n})v\Big|_{x_n=0} = \psi_1, \\ &b_2(D_{x_n})v\Big|_{x_n=0} = \psi_2, \\ &v \in W_2^4(\mathbb{R}_+), \end{aligned} \tag{2.15}$$

где

$$L(\tau, i\xi', D_{x_n}) = D_{x_n}^4 - \big(\tau^2 - 2L_0(i\xi', 0)\big)D_{x_n}^2$$
$$+\big(\varepsilon\tau^2 - L_0(i\xi', 0)\tau^2 + [L_0(i\xi', 0)]^2\big),$$
$$b_1(D_{x_n}) = b_{11}\mathbb{I} + b_{12}D_{x_n} + b_{13}D_{x_n}^2,$$
$$b_2(D_{x_n}) = b_{21}\mathbb{I} + b_{22}D_{x_n} + b_{23}D_{x_n}^2.$$

Определение 5 *Пусть $\varepsilon > 0$. Смешанная задача (2.1)–(2.3) удовлетворяет условию Лопатинского, если краевая задача (2.15) при $\tau \in \mathbb{C}^+$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ однозначно разрешима при любых ψ_1, ψ_2.*

Определение 6 *Пусть $\varepsilon = 0$ Смешанная задача (2.1)–(2.3) удовлетворяет условию Лопатинского, если краевая задача (2.15) при $\tau \in \mathbb{C}^+$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ однозначно разрешима при любых ψ_1, ψ_2.*

Приведем алгебраическую формулировку условия Лопатинского. Для этого представим характеристические многочлены граничных операторов $b_j(D_{x_n})$ из (2.2) в виде:

$$b_j(\lambda) = q_j(\tau, \xi', \lambda)(\lambda - \lambda_1^-)(\lambda - \lambda_2^-) + \beta_j(\tau, \xi', \lambda), \quad j = 1, 2,$$

где $\beta_j(\tau,\xi',\lambda) = \beta_{j,1}(\tau,\xi') + \beta_{j,2}(\tau,\xi')\lambda$, $j = 1,2$. Введём матрицу Лопатинского:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1}(\tau,\xi') & \beta_{1,2}(\tau,\xi') \\ \beta_{2,1}(\tau,\xi') & \beta_{2,2}(\tau,\xi') \end{pmatrix},$$

развернутая форма записи которой, с учетом $\lambda_1^+ = -\lambda_1^-$ и $\lambda_2^+ = -\lambda_2^-$, имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} - b_{13}\lambda_1^+\lambda_2^+ & b_{12} - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)b_{13} \\ b_{21} - b_{23}\lambda_1^+\lambda_2^+ & b_{22} - (\lambda_1^+ + \lambda_2^+)b_{23} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Тогда условие Лопатинского эквивалентно невырожденности матрицы B (см., например [1,16,23,33]). Приведем примеры граничных операторов.

Прежде всего, введём обозначения

$$A_1 = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \quad A_2 = b_{11}b_{23} - b_{13}b_{21}, \quad A_3 = b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}.$$

В дальнейшем будем говорить, что смешанные краевые задачи (1.1) *регулярные*, если $A_1 = A_3 = 0$, $A_2 \neq 0$.

Пример 2.1. Рассмотрим краевые условия

$$u|_{x_n=0} = 0, \quad D_{x_n}u|_{x_n=0} = 0.$$

Очевидно, что $|\det B| = 1$. Данные краевые условия относятся к классу нерегулярных.

Пример 2.2. Рассмотрим краевые условия при $\varepsilon > 0$:

$$u|_{x_n=0} = 0, \quad D_{x_n}^2 u|_{x_n=0} = 0.$$

Здесь $|\det B| = |\lambda_1^+ + \lambda_2^+| \geq \sigma + \sqrt{\varepsilon + |\xi'|^2} \neq 0$, при $\sigma \geq 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Данные краевые условия относятся к классу регулярных.

Пример 2.3. Рассмотрим краевые условия

$$D_{x_n}u|_{x_n=0} = 0, \quad D_{x_n}^2 u|_{x_n=0} = 0.$$

Здесь $|\det B| = |\lambda_1^+ \lambda_2^+|$. Исходя из теоремы Виета имеем

$$|\lambda_1^+ \lambda_2^+| = \sqrt{\varepsilon\tau^2 - L_0(i\xi',0)\tau^2 + [L_0(i\xi',0)]^2}.$$

Поэтому $\det B$ равен нулю тогда и только тогда, когда

$$(\varepsilon - L_0(i\xi',0))(\sigma^2-\eta^2) + [L_0(i\xi',0)]^2 = 0 \text{ и } 2i\eta\sigma(\varepsilon - L_0(i\xi',0)) = 0. \quad (2.17)$$

Ясно, что при $\varepsilon > 0$ и $\sigma > 0$ выражения (2.17) не обращаются в нуль. Данные краевые условия относятся к классу нерегулярных.

Приведённые примеры демонстрируют, что множество краевых задач, удовлетворяющих условию Лопатинского, является непустым.

2.4 Построение решения вспомогательной краевой задачи

Для доказательства разрешимости смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3) рассмотрим вспомогательную краевую задачу на полупрямой $x_n > 0$ с параметрами $\tau \in \mathbb{C}_\gamma^+$, $\gamma > 0$, и $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ для обыкновенного дифференциального уравнения, которая получается после формального применения оператора Лапласа по t и преобразования Фурье по касательным переменным x' к задаче (2.1)–(2.3)

$$\begin{aligned} &L(\tau, i\xi', D_{x_n})v = \tilde{f}(\tau,\xi',x_n), \quad x_n > 0,\\ &b_1(D_{x_n})v|_{x_n=0} = 0,\\ &b_2(D_{x_n})v|_{x_n=0} = 0,\\ &v \in W_2^4(\mathbb{R}_+), \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$L(\tau, i\xi', D_{x_n}) = D_{x_n}^4 - \big(\tau^2 - 2L_0(i\xi',0)\big)D_{x_n}^2 + \big(\varepsilon\tau^2 - L_0(i\xi',0)\tau^2 + [L_0(i\xi',0)]^2\big).$$

В данном параграфе приведем явные формулы решений краевой задачи (2.18). Предположим, что правая часть уравнения $f(t,x)$ в (2.1) принадлежит пространству $C_0^\infty(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$.

В начале рассмотрим случай $\varepsilon > 0$. В силу условия Лопатинского краевая задача (2.18) однозначно разрешима при любых фиксированных (τ, ξ') и $\tilde{f}(\tau, \xi', x_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Выпишем формулы решения этой задачи, используя схему из [23].

Представим решение краевой задачи (2.18) в виде

$$v(\tau, \xi', x_n) = v_0(\tau, \xi', x_n) + v_1(\tau, \xi', x_n), \tag{2.19}$$

где $v_0(\tau, \xi', x_n)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &L(\tau, i\xi', x_n)v_0 = \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), \quad x_n > 0, \\ &v_0 \in W_2^4(\mathbb{R}_+), \end{aligned} \tag{2.20}$$

$v_1(\tau, x)$ представляет собой решение краевой задачи

$$\begin{aligned} &L(\tau, i\xi', x_n)v_1 = 0, \quad x_n > 0, \\ &b_1(D_{x_n})v_1|_{x_n=0} = -b_1(D_{x_n})v_0|_{x_n=0} = \psi_1(\tau, \xi'), \\ &b_2(D_{x_n})v_1|_{x_n=0} = -b_2(D_{x_n})v_0|_{x_n=0} = \psi_2(\tau, \xi'), \\ &v_1 \in W_2^4(\mathbb{R}_+). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Продолжив нулем правую часть уравнения (2.20) при $x_n < 0$ и сохранив прежнее обозначение $\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)$, решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.20) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} v_0(\tau, \xi', x_n) = &\int_0^{x_n} J_-(\tau, \xi', x_n - s)\tilde{f}(\tau, \xi', s)ds \\ &+ \int_{x_n}^{\infty} J_+(\tau, \xi', x_n - s)\tilde{f}(\tau, \xi', s)ds, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$J_-(\tau, \xi', x_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} \frac{e^{x_n\lambda}}{L(\tau, i\xi', x_n)}\, d\lambda,$$

$$J_+(\tau,\xi',x_n) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{e^{x_n\lambda}}{L(\tau,i\xi',x_n)}\,d\lambda,$$

где Γ_- — контур в комплексной плоскости, охватывающий корни λ_1^-, λ_2^- характеристического уравнения (2.5), лежащие в левой полуплоскости, Γ_+ — контур, охватывающий корни λ_1^+, λ_2^+ уравнения (2.5), лежащие в правой полуплоскости. Отметим, что эти контурные интегралы являются аналитическими по τ, $\mathrm{Re}\tau > \gamma_0 > 0$. Вычисляя их, получим развернутую запись формулы (2.22)

$$\begin{aligned} v_0(\tau,\xi',x_n) = \int\limits_0^{x_n}\frac{e^{-\lambda_1^+(x_n-s)}\tilde f(\tau,\xi',s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds - \int\limits_0^{x_n}\frac{e^{-\lambda_2^+(x_n-s)}\tilde f(\tau,\xi',x_n)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds \\ + \int\limits_{x_n}^{+\infty}\frac{e^{\lambda_1^+(x_n-s)}\tilde f(\tau,\xi',s)}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds - \int\limits_{x_n}^{+\infty}\frac{e^{\lambda_2^+(x_n-s)}\tilde f(\tau,\xi',s)}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}ds. \end{aligned}$$

Выпишем интегральные формулы решения краевой задачи (2.21). Обозначим через b^{kj} элементы обратной матрицы Лопатинского B^{-1}. Следуя [23], решение краевой задачи (2.21) можно записать как

$$v_1(\tau,\xi',x_n) = \psi_1(\tau,\xi')J_1(\tau,\xi',x_n) + \psi_2(\tau,\xi')J_2(\tau,\xi',x_n), \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned} J_j(\tau,\xi',x_n) &= \frac{e^{\lambda_1^- x_n}(-b^{1j}\lambda_2^- + b^{2j})}{\lambda_1^- - \lambda_2^-} + \frac{e^{\lambda_2^- x_n}(-b^{1j}\lambda_1^- + b^{2j})}{\lambda_2^- - \lambda_1^-} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1^+ x_n}(b^{1j}\lambda_2^+ + b^{2j})}{\lambda_2^+ - \lambda_1^+} + \frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}(b^{1j}\lambda_1^+ + b^{2j})}{\lambda_1^+ - \lambda_2^+}, \quad j=1,2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Из (2.21) и (2.23), функции $\psi_1(\tau,\xi')$, $\psi_2(\tau,\xi')$ можно представить в виде:

$$\psi_j(\tau,\xi') = \int\limits_0^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{b_j(\lambda)e^{-s\lambda}}{L(\tau,\xi',\lambda)}\,d\lambda\tilde f(\tau,\xi',s)\,ds, \quad j=1,2.$$

Применяя теорему о вычетах [49], приходим к

$$\psi_j(\tau,\xi') = \int\limits_0^\infty \tilde f(\tau,\xi',s)e^{-\lambda_1^+ s}\,ds \frac{b_j(\lambda_1^+)}{2\lambda_1^+((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)} + \int\limits_0^\infty \tilde f(\tau,\xi',s)e^{-\lambda_2^+ s}\,ds \frac{b_j(\lambda_2^+)}{2\lambda_2^+((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)}, \quad j=1,2. \tag{2.25}$$

Подставляя полученные выражения в (2.23), имеем

$$v_1(\tau,\xi',x_n) = v_{1,1}(\tau,\xi',x_n) + v_{1,2}(\tau,\xi',x_n) + v_{1,3}(\tau,\xi',x_n) + v_{1,4}(\tau,\xi',x_n), \tag{2.26}$$

при этом в развернутом виде слагаемые в (2.26) принимают вид

$$v_{1,1}(\tau,\xi',x_n) = \int\limits_0^\infty \tilde f(\tau,\xi',s)e^{-\lambda_1^+ s}ds \cdot e^{-\lambda_1^+ x_n}\frac{b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})}{2\lambda_1^+((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)},$$

$$v_{1,2}(\tau,\xi',x_n) = \int\limits_0^\infty \tilde f(\tau,\xi',s)e^{-\lambda_1^+ s}\,ds \cdot e^{-\lambda_2^+ x_n}\frac{b_1(\lambda_1^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_1^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})}{2\lambda_1^+((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)},$$

$$v_{1,3}(\tau,\xi',x_n) = \int\limits_0^\infty \tilde f(\tau,\xi',s)e^{-\lambda_2^+ s}\,ds \cdot e^{-\lambda_1^+ x_n}\frac{b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_2^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_2^+ + b^{22})}{2\lambda_2^+((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)},$$

$$v_{1,4}(\tau,\xi',x_n)=\int\limits_0^\infty \tilde f(\tau,\xi',s)e^{-\lambda_2^+ s}\,ds$$

$$\cdot\, e^{-\lambda_2^+ x_n}\frac{b_1(\lambda_2^+)(b^{11}\lambda_1^+ + b^{21}) + b_2(\lambda_2^+)(b^{12}\lambda_1^+ + b^{22})}{2\lambda_2^+((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)}.$$

Для доказательства разрешимости смешанной задачи (2.1)–(2.3) нужно оценить нормы функций $v_0(\tau,\xi',x_n)$, $v_1(\tau,\xi',x_n)$. Вначале приведем оценки для нормы $v_0(\tau,\xi',x_n)$.

2.5 Леммы об оценке функции $v_0(\tau,\xi',x_n)$

Лемма 2.5 *Пусть $\varepsilon>0$ и существует $\gamma_0>0$ такое, что при* $\mathrm{Re}\tau>\gamma_0$ *справедливы оценки:*

$$\|v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \||\xi'|^k v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\|D_{x_n}^k v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \||\tau| v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\le \frac{c}{\gamma_0}\||\tau|^{-1}\tilde f(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,\quad k=1,2,$$

$$\||\xi'|^3 v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \|D_{x_n}^3 v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\le \frac{c}{\gamma_0}\|\tilde f(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,$$

$$\||\xi'|^4 v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \|D_{x_n}^4 v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\||\xi'|^2 D_{x_n}^2 v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \||\tau|^2 v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\||\tau|^2 D_{x_n}^2 v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| \le \frac{c}{\gamma_0}\||\tau|\tilde f(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,$$

с константой $c>0$, которая не зависит от $f(t,x',x_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продолжим функцию $\tilde f(\tau,\xi',x_n)$ нулем при $x_n<0$, сохранив обозначение для продолженной функции. Используя функцию Хевисайда $\theta(x_n)$, функцию $v_0(\tau,\xi',x_n)$ из формулы (2.22) можно записать в виде

$$v_0(\tau,\xi',x_n)=\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(J_-(\tau,\xi',x_n-s)\theta(x_n-s)\tilde f(\tau,\xi',s)$$

$$+J_+(\tau,\xi',x_n-s)\theta(-x_n+s)\tilde f(\tau,\xi',s)\Big)\,ds$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}}G(\tau,\xi',x_n-s)\tilde f(\tau,\xi',s)\,ds.$$

Рассмотрим L_2–норму этой функции. С учетом формулы преобразования Фурье свертки и равенства Парсеваля получаем

$$\big\|v_0(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n)\big\|$$
$$=\Bigg\|\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-i\xi_nx_n}G(\tau,\xi',x_n)\,dx_n\hat f(\tau,\xi',\xi_n),L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n)\Bigg\|,$$

здесь $\hat f(\tau,\xi',\xi_n)$ — преобразование Фурье по x_n функции $\tilde f(\tau,\xi',x_n)$. Применяя теорему о вычетах [49], нетрудно получить формулу для интеграла. Проводя алгебраические преобразования, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-i\xi_nx_n}G(\tau,\xi',x_n)\,dx_n$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_1^+x_n-i\xi_nx_n}}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}dx_n-\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_2^+x_n-i\xi_nx_n}}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}dx_n$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{\lambda_1^+x_n-i\xi_nx_n}}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}dx_n-\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{\lambda_2^+x_n-i\xi_nx_n}}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}dx_n$$

$$=\frac{1}{\lambda_1+i\xi_n}\cdot\frac{1}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}-\frac{1}{\lambda_2+i\xi_n}\cdot\frac{1}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}$$

$$+\frac{1}{\lambda_1 - i\xi_n}\cdot\frac{1}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)} - \frac{1}{\lambda_2 - i\xi_n}\cdot\frac{1}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}$$
$$= \frac{1}{\big((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2\big)\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)} - \frac{1}{\big((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2\big)\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}$$
$$= \frac{1}{\big((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2\big)\big((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2\big)} = \frac{1}{L(\tau, i\xi', i\xi_n)}.$$

В силу оценки на символ псевдогиперболического оператора (2.8) из леммы 2.2 получаем

$$\frac{|\xi'|^k + |\xi_n|^k}{|L(\tau, i\xi', i\xi_n)|} \leq \frac{c}{\gamma_0}|\tau|^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \tag{2.27}$$

$$\frac{|\tau|}{|L(\tau, i\xi', i\xi_n)|} \leq \frac{c}{\gamma_0}, \quad \frac{|\tau|(|\xi'|^k + |\xi_n|^k)}{|L(\tau, i\xi', i\xi_n)|} \leq \frac{c}{\gamma_0}, \quad k = 1, 2, \tag{2.28}$$

$$\frac{|\xi'|^3 + |\xi_n|^3}{|L(\tau, i\xi', i\xi_n)|} \leq \frac{c}{\gamma_0}, \quad \frac{|\xi'|^4 + |\xi_n|^4}{|L(\tau, i\xi', i\xi_n)|} \leq \frac{c}{\gamma_0}|\tau|. \tag{2.29}$$

Из неравенств (2.27)–(2.29) получаем необходимые оценки. □

Пусть теперь $\varepsilon = 0$. Тогда при $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ формулы (2.22) и (2.26) являются аналитическими по τ, $\mathrm{Re}\tau > \gamma_0 > 0$.

Введем функцию $\chi^m(\xi')$ следующего вида

$$\chi^m(\xi') = \begin{cases} 1, & |\xi'| > 1/m, \\ 0, & |\xi'| < 1/m, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N},$$

и рассмотрим последовательность $\{v^m(\tau, \xi', x_n)\}$,

$$v^m(\tau, \xi', x_n) = \chi^m(\xi') v(\tau, \xi', x_n),$$

где $v(\tau, \xi', x_n)$ имеет вид (2.19). Далее оценим L_2-нормы последовательности $\{v^m(\tau, \xi', x_n)\}$.

Лемма 2.6 *Пусть* $\varepsilon = 0$, $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$ *и существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что при* $\mathrm{Re}\tau > \gamma_0$ *справедливы оценки:*

$$\||\xi'|^k v_0^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| + \|D_{x_n}^k v_0^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\sigma}\left\|\frac{\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{|\tau|}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\frac{c}{\sigma}\left\|\left\|\frac{\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{|\tau|}, L_1(\mathbb{R}^{n-1})\right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\right\|, \quad k = 0, 1,$$

$$\||\xi'|^k v_0^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| + \|D_{x_n}^k v_0^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\sigma}\||\tau|^{k-3}\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|, \quad k = 2, 3, 4,$$

$$\||\tau| v_0^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| \leq \frac{c}{\sigma}\left\|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\frac{c}{\sigma}\left\|\left\|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\right\|,$$

$$\||\tau|^2 v_0^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| \leq \frac{c}{\sigma}\left\||\tau|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\frac{c}{\sigma}\left\||\tau|\left\|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\right\|,$$

$$\||\xi'|^2|\tau|^2 v_0^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| + \||\tau|^2 D_{x_n}^2 v_0^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\||\xi'|^2 D_{x_n}^2 v_0^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| \leq \frac{c}{\sigma}\left\||\tau|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\right\|,$$

с константой $c > 0$, *которая не зависит от* $\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)$ *и* m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продолжим функцию $\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)$ нулем при $x_n < 0$, сохранив обозначение для продолженной функции. Применяя функцию Хевисайда $\theta(x_n)$, $v_0^m(\tau,\xi',x_n)$ из формулы (2.22) можно записать в виде

$$v_0^m(\tau,\xi',x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(J_-(\tau,\xi',x_n - s)\chi^m(\xi')\theta(x_n - s)\tilde{f}(\tau,\xi',s)$$

$$+J_+(\tau,\xi',x_n-s)\chi^m(\xi')\theta(-x_n+s)\tilde f(\tau,\xi',s)\Big)\,ds$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}} G(\tau,\xi',x_n-s)\chi^m(\xi')\tilde f(\tau,\xi',s)\,ds.$$

С учетом формулы преобразования Фурье свертки и равенства Парсеваля получаем

$$\left\|v_0^m(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$\le\left\|\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_n x_n}G(\tau,\xi',x_n)\chi^m(\xi')\,dx_n\hat f(\tau,\xi',\xi_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}^n)\right\|,$$

здесь $\hat f(\tau,\xi',\xi_n)$ — преобразование Фурье функции $\tilde f(\tau,\xi',x_n)$. Применяя теорему о вычетах [49] и вычисляя интегралы по переменной x_n, а затем осуществляя алгебраические преобразования, приходим к выражению

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi_n x_n}G(\tau,\xi',x_n)\chi^m(\xi')\,dx_n=\frac{\chi^m(\xi')}{L(\tau,i\xi',i\xi_n)}.$$

Заметим, что $\xi=(\xi',\xi_n)$, тогда

$$\|v_0^m(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{R}_+^n)\|=\left\|\left\|\frac{\hat f(\tau,\xi',\xi_n)}{L(\tau,i\xi',i\xi_n)},L_2(\{|\xi|>1\})\right\|,L_2(\mathbb{C}_\gamma^+)\right\|$$

$$+\left\|\left\|\frac{\chi^m(\xi')\hat f(\tau,\xi',\xi_n)}{L(\tau,i\xi',i\xi_n)},L_2(\{|\xi|<1\})\right\|,L_2(\mathbb{C}_\gamma^+)\right\|. \tag{2.30}$$

При условии, что $n>4$, на основании теоремы Римана-Лебега можно получить следующую оценку для $\|v_0^m(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{R}_+^n)\|$:

$$\frac{c}{\sigma^2}\left\|\hat f(\tau,\xi',\xi_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}^n)\right\|+\frac{c}{\sigma^2}\left\|\left\|\hat f(\tau,\xi',\xi_n),L_1(\mathbb{R}^n)\right\|,L_2(\mathbb{C}_\gamma^+)\right\|.$$

Проделав аналогичные рассуждения для $|\xi'|v_0^m(\tau,\xi',x_n)$, $D_{x_n}v_0^m(\tau,\xi',x_n)$, $|\tau|^k v_0^m(\tau,\xi',x_n)$, где $k=0,1$, а также принимая во внимание оценки

(2.27)–(2.29) и равенство Парсеваля, мы получаем требуемые оценки, содержащиеся в утверждении леммы. □

Лемма 2.7 *Пусть* $\varepsilon = 0$, $n = 2, 3, 4$ *и выполнено условие*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (x')^\alpha f(t, x', x_n) dx' = 0, \tag{2.31}$$

где $|\alpha| = 0$ *при* $n = 3, 4$, $|\alpha| = 1$ *при* $n = 2$. *Существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что при* $\mathrm{Re}\tau > \gamma_0$ *справедливы оценки:*

$$\||\xi'|^k v_0^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| + \|D_{x_n}^k v_0^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\sigma} \left\| \frac{\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{|\tau|}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\|$$

$$\frac{c}{\sigma} \left\| \left\| \frac{(1 + |x|^{|\alpha|}) \mathfrak{L}_{t\to\tau}(f(t, x', x_n))}{|\tau|}, L_1(\mathbb{R}^{n-1}) \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+) \right\|, \quad k = 0, 1,$$

$$\||\xi'|^k v_0^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| + \|D_{x_n}^k v_0^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\sigma} \||\tau|^{k-3} \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|, \quad k = 2, 3, 4,$$

$$\||\tau| v_0^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| \leq \frac{c}{\sigma} \left\| \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\|$$

$$+ \frac{c}{\sigma} \left\| \left\| (1 + |x|^{|\alpha|}) \mathfrak{L}_{t\to\tau}(f(t, x', x_n)), L_1(\mathbb{R}^{n-1}) \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+) \right\|,$$

$$\||\tau|^2 v_0^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| + \||\tau|^2 D_{x_n}^2 v_0^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+ \||\xi'|^2 D_{x_n}^2 v_0^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\sigma} \left\| |\tau| \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\|$$

$$+ \frac{c}{\sigma} \left\| |\tau| \left\| (1 + |x|^{|\alpha|}) \mathfrak{L}_{t\to\tau}(f(t, x', x_n)), L_1(\mathbb{R}_+^n) \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+) \right\|,$$

с константой $c > 0$, *которая не зависит от* $f(t, x)$ *и* m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данной леммы по большой части повторяет рассуждения леммы 2.6. Покажем лишь то, как влияют условия ортогональности при получении оценок. Для этого обратимся к выражению (2.30). В случае, если $n = 2, 3, 4$, второе слагаемое здесь не допускает оценки сверху с константой, не зависящей от m. Однако при выполнении условий ортогональности (2.31) преобразование Фурье функции $f(t, x)$ по x' при $n = 3, 4$ можно записать в виде

$$\tilde{f}(\tau, \xi', x_n) = \int\limits_0^1 \frac{\lambda}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\lambda y'\xi'}(-iy'\xi')\mathfrak{L}_{t\to\tau}(f(t, y', x_n))dy' \right) d\lambda,$$

где $\mathfrak{L}_{t\to\tau}(f(t, y', x_n))$ — преобразование Лапласа от $f(t, y', x_n)$ по переменной t. За счет сомножителя $(-iy'\xi')$ функция $|\xi|^{-2} f(\tau, \xi)$ будет суммируемой в окрестности $\xi = 0$. Следовательно, применяя равенство Парсеваля, имеем

$$\|v_0^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| \le \frac{c}{\sigma}(\|\tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| \\ + \|\|f(t, x', x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+)\|, \quad (2.32)$$

здесь константа c — положительная и не зависит от m и $f(t, x)$. Проделав вышеизложенные рассуждения для выражений из утверждения леммы, а также принимая во внимание оценку на символ псевдогиперболического оператора из леммы 2.2, получаем требуемые оценки при $n = 3, 4$.

Аналогичным образом с использованием условия (2.31) устанавливаются оценки при $n = 2$. $\square$

Лемма 2.8 *Пусть $\varepsilon = 0$ и выполняются условия лемм 2.6 при $n > 4$ или 2.7 при $n = 2, 3, 4$. Тогда при любых $q > 1$ имеют место сходимости*

$$\left\| |\xi'|^k [v_0^{m+q}(\tau, \xi', x_n) - v_0^m(\tau, \xi', x_n)], L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\|$$

$$+\left\|D^k_{x_n}[v_0^{m+q}(\tau,\xi',x_n)-v_0^m(\tau,\xi',x_n)],L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\right\|\to 0,\quad m\to\infty,$$

при $k=0,1,2,3,4$,

$$\left\||\tau'|^2[v_0^{m+q}(\tau,\xi',x_n)-v_0^m(\tau,\xi',x_n)],L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\right\|$$

$$+\left\||\tau'|^2|\xi'|^2[v_0^{m+q}(\tau,\xi',x_n)-v_0^m(\tau,\xi',x_n)],L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\right\|$$

$$+\left\||\tau'|^2D^2_{x_n}[v_0^{m+q}(\tau,\xi',x_n)-v_0^m(\tau,\xi',x_n)],L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\right\|\to 0,\quad m\to\infty,$$

Доказательство проводится точно также, как доказательства лемм 2.6, 2.7. □

2.6 Смешанные краевые задачи с обратимым оператором при старшей производной по времени

В настоящем разделе мы изучаем класс регулярных смешанных краевых задач в четверти пространства для псевдогиперболического уравнения (2.1), (2.2), (2.3).

Напомним, что смешанные краевые задачи (2.1)– (2.3) называются *регулярными*, если выполняются условия $A_1=A_3=0$, $A_2\neq 0$. Сформулируем теорему, которую будем доказывать в этом параграфе.

Теорема 2.1 *Пусть* $\varepsilon>0$, $b_\beta=0$, $|\beta|\le 3$, $A_1=A_3=0$, $A_2\neq 0$. *Тогда существует* $\gamma_0>0$ *такое, что задача* (2.1)–(2.3) *однозначно разрешима в пространстве функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma>\gamma_0$, *таких, что* $D^2_tD^2_{x_i}u(t,x)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i=1,\dots,n$, *для любой* $f(t,x',x_n)\in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, *такой, что* $f(t,x',x_n)|_{t=0}=0$. *Для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x),W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|+\sum_{i=1}^n\|D^2_tD^2_{x_i}u(t,x),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$

$$\le c(\gamma_0)\|f(t,x),W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Решение вспомогательной задачи (2.18) с помощью формул (2.22) и (2.26) можно записать в виде

$$v(\tau,\xi',x_n) = v_0(\tau,\xi',x_n) + v_1(\tau,\xi',x_n) = v_0(\tau,\xi',x_n)$$

$$- e^{-\lambda_1^+ x_n}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)} + e^{-\lambda_2^+ x_n}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)}. \quad (2.33)$$

Согласно лемме 2.5 оценки на нормы функции $v_0(\tau,\xi',x_n)$ уже есть. Теперь сфокусируемся на получении оценок для функции $v_1(\tau,\xi',x_n)$. Ключевым этапом для вывода оценок является эквивалентное представление для частного решения. Рассмотрим функцию $v_1(\tau,\xi',x_n)$:

$$v_1(\tau,\xi',x_n) = \left[\frac{1}{\lambda_1^+-\lambda_2^+} - \frac{1}{\lambda_2^+ + \lambda_1^+}\right]\frac{e^{-\lambda_1^+ x_n}}{4\lambda_1^+\lambda_2^+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+ \left[\frac{1}{\lambda_2^+-\lambda_1^+} - \frac{1}{\lambda_2^+ + \lambda_1^+}\right]\frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}}{4\lambda_1^+\lambda_2^+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds.$$

Добавляя и вычитая выражение

$$\frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}}{\lambda_1^+-\lambda_2^+}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{4\lambda_1^+\lambda_2^+},$$

сделаем перегруппировку слагаемых

$$\frac{e^{-\lambda_1^+ x_n}}{\lambda_1^+-\lambda_2^+}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{4\lambda_1^+\lambda_2^+} - \frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}}{\lambda_1^+-\lambda_2^+}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{4\lambda_1^+\lambda_2^+}$$

$$-\frac{e^{-\lambda_1^+ x_n}}{\lambda_1^+ + \lambda_2^+}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{4\lambda_1^+\lambda_2^+} - \frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}}{\lambda_1^+ + \lambda_2^+}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{4\lambda_1^+\lambda_2^+}$$

$$+\frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}}{\lambda_2^+-\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{4\lambda_1^+\lambda_2^+}-\frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}}{\lambda_2^+-\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{4\lambda_1^+\lambda_2^+}.$$

Тогда получим альтернативную форму записи для $v_1(\tau,\xi',x_n)$:

$$v_1(\tau,\xi',x_n)=-\Bigg[\frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}\int\limits_0^{x_n}e^{-(\lambda_1^+-\lambda_2^+)s}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dpds$$

$$+\frac{e^{\lambda_2^+ x_n}}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}\int\limits_{x_n}^{+\infty}e^{-(\lambda_1^++\lambda_2^+)s}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dpds\Bigg]$$

$$-\Bigg[\frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty}e^{-(\lambda_1^++\lambda_2^+)s}\int\limits_0^{s}e^{\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dpds$$

$$-\frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty}e^{-(\lambda_2^+-\lambda_1^+)s}\int\limits_s^{+\infty}e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dpds\Bigg]$$

$$=-v_1^1(\tau,\xi',x_n)-v_1^2(\tau,\xi',x_n). \tag{2.34}$$

Теперь перейдем к оценке частного решения $v_1(\tau,\xi',x_n)$.

Лемма 2.9 *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, тогда справедливы оценки:*

$$\|v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|+\||\xi'|^k v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\|D_{x_n}^k v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|+\||\tau|v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\le\frac{c}{\gamma_0}\||\tau|^{-1}\tilde{f}(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,\quad k=1,2,$$

$$\||\xi'|^3 v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|+\|D_{x_n}^3 v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\le\frac{c}{\gamma_0}\|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,$$

$$\||\xi'|^4 v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|+\|D_{x_n}^4 v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\||\xi'|^2 D^2_{x_n} v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\| + \||\tau|^2 v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\|$$

$$+\||\tau|^2 D^2_{x_n} v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\| \le \frac{c}{\gamma_0}\||\tau|\tilde f(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\|,$$

с константой $c>0$, *не зависящией от* $\tilde f(\tau,\xi',x_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перейдём к рассмотрению функций v_1^1 и v_1^2 независимо друг от друга. Начнем с первой. Используя функцию Хевисайда, $\theta(x_n)$ и операции свертки, получаем следующее представление

$$v_1^1 = \frac{1}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}\int\limits_0^{x_n} e^{-\lambda_2^+(x_n-s)}\left[e^{-\lambda_1^+ s}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde f(\tau,\xi',p)dp\right]ds$$

$$+\frac{1}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}\int\limits_{x_n}^{+\infty} e^{\lambda_2^+(x_n-s)}\left[e^{-\lambda_1^+ s}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde f(\tau,\xi',p)dp\right]ds$$

$$= \frac{e^{-\lambda_2^+ x_n}\theta(x_n)+e^{\lambda_2^+ x_n}\theta(-x_n)}{4\lambda_2^+\lambda_1^+} * \left[e^{-\lambda_1^+ x_n}\theta(x_n)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde f(\tau,\xi',p)dp\right].$$

Отметим, что знаком $*$ обозначена свертка по переменной x_n, то есть

$$g(t,x_n)*f(t,x_n) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(t,x_n-s)f(t,s)ds.$$

Теперь, применяя равенство Парсеваля, приходим к

$$\left\|v_1^1, L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n)\right\| = \left\|\frac{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde f(\tau,\xi',p)dp}{2\lambda_1^+((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_1^+ + i\xi_n)}, L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n)\right\|,$$

применяя лемму 2.4 и интегрируя по переменной ξ_n, имеем

$$\left\|v_1^1, L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n)\right\| = \left\|\frac{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde f(\tau,\xi',p)dp}{2\lambda_1^+(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_1^+}}, L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^{n-1})\right\|,$$

используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\left\| v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}^n) \right\| \leq \left\| \frac{\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\|.$$

Согласно лемме 2.3 оценка нормы $\left\| v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}^n) \right\|$ вытекает из неравенств

$$\frac{|\xi'|^k}{|2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|} \leq \frac{c}{\gamma_0} |\tau|^{-1}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$\frac{|\xi'|^3}{|2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|} \leq \frac{c}{\gamma_0}, \quad \frac{|\xi'|^4}{|2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|} \leq \frac{c}{\gamma_0} |\tau|,$$

$$\frac{|\xi'|^2 \tau^2}{|2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|} \leq \frac{c}{\gamma_0} |\tau|, \quad \frac{\tau^k}{|2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|} \leq \frac{c}{\gamma_0} |\tau|^{k-1}, \quad k = 1, 2.$$

Перейдем к рассмотрению производных по переменной x_n. Имеем

$$D_{x_n}^2 v_1^1 = -\frac{\lambda_2^+ e^{-\lambda_2^+ x_n}}{4\lambda_1^+} \int\limits_0^{x_n} e^{-(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)s} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p} \tilde{f}(\tau, \xi', p) dp ds$$

$$+ \frac{e^{-\lambda_1^+ x_n}}{2\lambda_1^+} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p} \tilde{f}(\tau, \xi', p) dp$$

$$- \frac{\lambda_2^+ e^{\lambda_2^+ x_n}}{4\lambda_1^+} \int\limits_{x_n}^{+\infty} e^{-(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)s} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p} \tilde{f}(\tau, \xi', p) dp ds.$$

Оценим полученное выражение в норме $L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)$, применяя неравенство Минковского, приходим к

$$\left\| D_{x_n}^2 v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}^n) \right\| \leq \left\| \frac{\lambda_2^+ \left[e^{-\lambda_2^+ x_n} \theta(x_n) + e^{\lambda_2^+ x_n} \theta(-x_n) \right]}{4\lambda_1^+} \right.$$

$$\left. * e^{-\lambda_1^+ x_n} \theta(x_n) \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p} \tilde{f}(\tau, \xi', p) dp, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}^n) \right\|$$

$$+\left\|\frac{e^{-\lambda_1^+ x_n}}{2\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dp, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|. \qquad (2.35)$$

В силу леммы 2.3 оценка первого слагаемого в выражении (2.35). вытекает из следующих неравенств

$$\frac{|\lambda_2^+||\xi'|^k}{|2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|^{-1}, \quad \frac{|\lambda_2^+||\tau|^k}{|2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|^{-1} \quad k=0,1,$$

$$\frac{|\lambda_2^+||\xi'|^2}{|2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|}\le\frac{c}{\gamma_0}, \quad \frac{|\lambda_2^+||\tau|^2}{|2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|.$$

Рассмотрим второе слагаемое в (2.35). Вычисляя интеграл по переменной x_n и используя неравенство Гёльдера, получаем следующий результат:

$$\left\|\frac{e^{-\lambda_1^+ x_n}}{2\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dp, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$\le\left\|\frac{\tilde{f}(\tau,\xi',s)}{2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|.$$

Принимая во внимание лемму 2.3, имеем

$$\frac{|\xi'|+|\tau|}{|2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+|}\le\frac{c}{\gamma_0}, \quad \frac{|\xi'|^2+|\tau|^2}{|2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|.$$

Далее рассмотрим

$$D_{x_n}^4 v_1^1=-\frac{(\lambda_2^+)^3e^{-\lambda_2^+ x_n}}{4\lambda_1^+}\int\limits_0^{x_n} e^{-(\lambda_1^+-\lambda_2^+)s}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dpds$$

$$-\frac{(\lambda_2^+)^3e^{\lambda_2^+ x_n}}{4\lambda_1^+}\int\limits_{x_n}^{+\infty} e^{-(\lambda_1^+ +\lambda_2^+)s}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dpds$$

$$+\frac{(\lambda_1^+)^2 e^{-\lambda_1^+ x_n}}{2\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dp+\frac{(\lambda_2^+)^2 e^{-\lambda_1^+ x_n}}{2\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p).$$

Оценим полученное выражение в норме $L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)$, проводя аналогичные рассуждения, приходим к неравенству

$$\left\|D_{x_n}^4 v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}^n)\right\| \le \left\|\frac{(\lambda_2^+)^3}{4\lambda_1^+}\left[e^{-\lambda_2^+ x_n}\theta(x_n)+e^{\lambda_2^+ x_n}\theta(-x_n)\right]\right.$$

$$\left.*\left[e^{-\lambda_1^+ x_n}\theta(x_n)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dp\right], L_2(\mathbb{R}^n)\right\|$$

$$+\left\|\frac{(\lambda_1^+)^2 e^{-\lambda_1^+ x_n}}{2\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dp, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\left\|\frac{(\lambda_2^+)^2 e^{-\lambda_1^+ x_n}}{2\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ p}\tilde{f}(\tau,\xi',p)dp, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|. \qquad (2.36)$$

В силу леммы 2.3 имеем

$$\frac{|\lambda_2^+|^3}{|2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|}\le\frac{c}{\gamma_0},\quad \frac{|\lambda_1^+|^2}{|2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|,\quad \frac{|\lambda_2^+|^2}{|2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|,$$

что позволяет получить оценку

$$\left\|D_{x_n}^4 v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}^n)\right\|\le\frac{c}{\gamma_0}\||\tau|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|.$$

В результате проведенных оценок для функции v_1^1 получим следующие неравества:

$$\|v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|+\||\xi'|^k v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|+\||\tau|v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\|D_{x_n}^k v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|\le\frac{c}{\gamma_0}\||\tau|^{-1}\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,\quad k=1,2,$$

$$\||\xi'|^3 v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|+\|D_{x_n}^3 v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\gamma_0}\|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,$$

$$\||\xi'|^4 v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|+\|D_{x_n}^4 v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\||\xi'|^2 D_{x_n}^2 v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|+\||\tau|^2 v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\||\tau|^2 D_{x_n}^2 v_1^1, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|\leq \frac{c}{\gamma_0}\||\tau|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|.$$

Перейдем к v_1^2. В силу применения функции Хевисайда, обозначаемой как $\theta(t)$, и операции свертки, для функции v_1^2 имеем

$$v_1^2=\frac{1}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}e^{-\lambda_2^+x_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\left(\left[e^{-\lambda_1^+s}\theta(s)+e^{\lambda_1^+s}\theta(-s)\right]*\tilde{f}(\tau,\xi',s)\theta(s)\right)ds.$$

Непосредственно интегрируя по переменной x_n, получаем

$$\left\|v_1^2, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|=\left\|\frac{\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\left(\left[e^{-\lambda_1^+s}\theta(s)+e^{\lambda_1^+s}\theta(-s)\right]\right.}{4\lambda_2^+\lambda_1^+\sqrt{\mathrm{Re}\lambda_2^+}}\right.$$

$$\left.\left.*\tilde{f}(\tau,\xi',s)\theta(s)\right)ds, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}^{n-1})\right\|.$$

Применяя неравенство Гёльдера, приходим к оценке

$$\left\|v_1^2, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|\leq$$

$$\left\|\frac{\left[e^{-\lambda_1^+x_n}\theta(x_n)+e^{\lambda_1^+x_n}\theta(-x_n)\right]*\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)\theta(x_n)}{4\lambda_2^+\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_2^+}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}^n)\right\|.$$

Тогда, используя равенство Парсеваля, имеем

$$\left\|v_1^2, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|\leq\left\|\frac{\hat{f}(\tau,\xi',\xi_n)}{2\lambda_2^+\mathrm{Re}\lambda_2^+((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2)}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}^n)\right\|,$$

где $\hat{f}(\tau,\xi',\xi_n)$ — преобразование Фурье по переменной x_n от функции $\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)$ по переменной x_n. В силу леммы 2.3 получаем

$$\frac{|\xi'|^k+|\xi_n|^k}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|^{-1},\quad \frac{|\tau|}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|^{-1},\quad k=0,1,2,$$

$$\frac{|\xi'|^3+|\xi_n|^3}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|}\le\frac{c}{\gamma_0},\quad \frac{|\xi'|^4+|\xi_n|^4}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|,\quad \frac{|\xi'|^2|\xi_n|^2}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|.$$

$$\frac{|\tau|^2}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|,\quad \frac{(|\xi'|^2+|\xi_n|^2)|\tau|^2}{|L(\tau,i\xi',i\xi_n)|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|.$$

Далее рассмотрим

$$D^k_{x_n}v_1^2=\frac{(-\lambda_2^+)^k}{4\lambda_2^+\lambda_1^+}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+(s+x_n)}\left(\left[e^{-\lambda_1^+s}\theta(s)+e^{\lambda_1^+s}\theta(-s)\right]*\tilde{f}(\tau,\xi',s)\theta(s)\right)ds.$$

По аналогии с оцениванием v_1^2, для выражения $D^k_{x_n}v_1^2$ устанавливается следующая оценка:

$$\left\|D^k_{x_n}v_1^2,L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\right\|\le\left\|\frac{(-\lambda_2^+)^{k-1}\hat{f}(\tau,\xi',\xi_n)}{2\mathrm{Re}\lambda_2^+((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2)},L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n)\right\|,$$

В силу лемм 2.3 и 2.4, получаем

$$\frac{|\lambda_2^+|^{k-1}}{|\mathrm{Re}\lambda_2^+||(\lambda_1^+)^2+\xi_n^2|}\le\frac{c}{|\tau|^2\gamma_0},\quad k=0,1,2,\quad \frac{|\lambda_2^+|^2}{|\mathrm{Re}\lambda_2^+||(\lambda_1^+)^2+\xi_n^2|}\le\frac{c}{|\tau|\gamma_0},$$

$$\frac{|\lambda_2^+|^3}{|\mathrm{Re}\lambda_2^+||(\lambda_1^+)^2+\xi_n^2|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|,\quad \frac{|\lambda_2^+||\tau|^2}{|\mathrm{Re}\lambda_2^+||(\lambda_1^+)^2+\xi_n^2|}\le\frac{c}{\gamma_0}|\tau|.$$

Из вышеуказанных неравенств получаем оценки для функции v_1^2, такие же, как и для функции v_1^1.

Следовательно, в силу (2.34) для функции $v_1(\tau,\xi',x_n)$ получены все оценки, указанные в утверждении рассматриваемой леммы. □

Доказательство теоремы 2.1.

Учитывая явный вид $v(\tau,\xi',x_n)$ из (2.33), заключаем, что $v(\tau,\xi',x_n)$ аналитична в $\mathbb{C}^+_\gamma$ при почти всех $(\xi',x_n)\in\mathbb{R}^n_+$. Таким образом, из лемм 2.5, 2.9 и обобщённой теоремы Пэли–Винера следует, что функция

$$u(t,x',x_n)=\mathfrak{L}^{-1}_{\tau\to t}F^{-1}(v(\tau,\xi',x_n))\in W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++}),$$

при этом $D^2_tD^2_{x_n}u(t,x',x_n)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $D^2_tD^2_{x'}u(t,x',x_n)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ при $\gamma>\gamma_0$, и является решением регулярной смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3). Из оценок установленных в леммах 2.5, 2.9 следует

$$\|u(t,x',x_n),W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|\le c(\gamma_0)\|f(t,x',x_n),W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|.$$

Единственность решения вытекает из условия Лопатинского и обобщенной теоремы Пэли–Винера. $\square$

2.7 Смешанные краевые задачи с обратимым оператором при старшей производной по времени и младшими членами

Настоящий раздел посвящен обобщению результатов, полученных выше для более общего уравнения при произвольных b_β, $|\beta|\le 3$.

Рассмотрим класс смешанных краевых задач в четверти пространства при $t>0$, $x\in\mathbb{R}^n_+$, $\varepsilon>0$, для дифференциального уравнения

$$\big(\varepsilon\mathbb{I}-L_0(D_x)\big)D^2_tu+[L_0(D_x)]^2u+\sum_{|\beta|\le 3}b_\beta D^\beta_xu=f(t,x), \tag{2.1}$$

с условиями при $x_n=0$

$$\begin{aligned}(b_{11}u+b_{12}D_{x_n}u+b_{13}D^2_{x_n}u)\big|_{x_n=0}=0,\\(b_{21}u+b_{22}D_{x_n}u+b_{23}D^2_{x_n}u)\big|_{x_n=0}=0,\end{aligned} \tag{2.2}$$

и начальными условиями

$$u\big|_{t=0}=0,\quad D_tu\big|_{t=0}=0, \tag{2.3}$$

где $b_\beta \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \geq 0$ и $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$. $L_0(D_x) = L_0(D_{x'}, 0) + aD^2_{x_n}$ — однородный эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, $a > 0$, и для него справедлива оценка

$$-r_2|\xi|^2 \leq L_0(i\xi) \leq -r_1|\xi|^2, \quad r_2 \geq r_1 > 0.$$

Теорема 2.2 *Пусть $\varepsilon > 0$, $A_1 = A_3 = 0$, $A_2 \neq 0$. Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что задача (2.1)–(2.3) однозначно разрешима в пространстве функций $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, таких, что $D^2_t D^2_{x_i} u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \dots, n$, для любой*

$$f(t, x', x_n) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++}), \quad f(t, x', x_n)|_{t=0} = 0.$$

Для решения $u(t, x)$ выполнена оценка:

$$\|u(t, x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D^2_t D^2_{x_i} u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$

$$\leq c(\gamma_0)\|f(t, x), W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ не зависит от $f(t, x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем уравнение (2.1) в следующей форме:

$$L(D_t, D_x)u - L_{\text{мл}}(D_x)u = f(t, x),$$

здесь

$$L(D_t, D_x) = \big(\varepsilon\mathbb{I} - L_0(D_x)\big)D^2_t + [L_0(D_x)]^2, \quad L_{\text{мл}}(D_x) = -\sum_{|\beta|\leq 3} b_\beta D^\beta_x.$$

При доказательстве теоремы 2.1 было построено решение краевой задачи для любой $f(t, x) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, и $f(t, x', x_n)|_{t=0} = 0$, то есть в операторном виде решение этой задачи можно переписать следующим образом

$$u(t,x) = \mathfrak{L}^{-1}_{\tau\to t}(F^{-1}[v(\tau,\xi',x_n)]) = Rf(t,x),$$

где $\mathfrak{L}^{-1}_{\tau\to t}\circ F^{-1}$ означает обратный оператор Фурье-Лапласа. В силу оценок из лемм 2.5 и 2.9 имеем

$$\|v_0(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\| + \||\xi'|^k v_0(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\|$$

$$+\|v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\| + \||\xi'|^k v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\|$$

$$+\|D^k_{x_n}v_0(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\| + \|D^k_{x_n}v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\|$$

$$\le \frac{c}{\gamma_0}\||\tau|^{-1}\tilde f(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\|, \quad k=1,2,$$

$$\||\xi'|^3 v_0(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\| + \|D^3_{x_n}v_0(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\|$$

$$+\||\xi'|^3 v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\| + \|D^3_{x_n}v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\|$$

$$\le \frac{c}{\gamma_0}\|\tilde f(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\|.$$

Отсюда получаем неравенства

$$\begin{aligned}\|u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \|D_x u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|&\\ + \|D^2_x u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| \le \frac{c^*}{\gamma_0^2}\|f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|,&\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\|D^3_x u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| \le \frac{c^{**}}{\gamma_0}\|f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|. \tag{2.38}$$

Решение регулярной смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3) будем искать в виде

$$u(t,x) = Rg(t,x), \quad g(t,x)\in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++}), \quad g|_{t=0}=0,$$

тогда неизвестная функция $g(t,x)$ будет определяться из уравнения

$$L(D_t,D_x)Rg(t,x) - L_{\text{МЛ}}(D_x)Rg(t,x) = f(t,x), \quad t>0, \quad x_n>0. \tag{2.39}$$

В силу того, что $L(D_t, D_x)R = \mathbb{I}$, то задача (2.39) редуцируется к решению операторного уравнения в пространстве $W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$

$$[\mathbb{I} - A]g(t,x) = f(t,x), \quad t > 0, \quad x_n > 0, \tag{2.40}$$

где $A = L_{\text{МЛ}}(D_x)R$. В силу оценок (2.37) и (2.38), а также определения оператора $L_{\text{МЛ}}$ для нормы оператора A справедливо неравенство

$$\|A\| \leq \frac{\hat{c}}{\gamma_0},$$

причем $\hat{c}$ не зависит от γ_0. Тогда найдется такое $\tilde{\gamma_0} \in \mathbb{R}_+$, что для всех $\gamma_0 > \tilde{\gamma_0}$ будет справедливо

$$\|A\| \leq q < 1.$$

Следовательно, применяя теорему фон Неймана [25] к уравнению (2.40), получаем единственное решение

$$g(t,x) = [\mathbb{I} - A]^{-1} f(t,x), \quad t > 0, \quad x_n > 0,$$

которое принадлежит классу $W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ и $g(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$, причем справедлива оценка

$$\|[\mathbb{I} - A]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - ||A||}.$$

Из всего вышеизложенного вытекает, что функция

$$u(t,x) = R[\mathbb{I} - A]^{-1} f(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++}),$$

является искомым решением регулярной смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3). Очевидно, решение определяется единственным образом. $\square$

2.8 Смешанные краевые задачи с однородным эллиптическим оператором при старшей производной по времени

Теорема 2.3 *Пусть* $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$, $A_1 = A_3 = 0$, $A_2 \ne 0$, *и* $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (2.1)–(2.3) *однозначно разрешима в пространстве* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, *таких, что* $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \ldots, n$ *при* $\gamma > \gamma_0$, *для любой*

$$f(t,x',x_n) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++}),\ f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0,\ f(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1})).$$

Для решения $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\begin{aligned}
&\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| \\
&\quad \le c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),
\end{aligned}$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Теорема 2.4 *Пусть* $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$, $A_2 \ne 0$, $A_1 = A_3 = 0$ *и* $n = 2, 3, 4$. *Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (2.1)–(2.3) *однозначно разрешима в пространстве функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \ldots, n$, *для любой* $f(t,x',x_n) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, *такой, что* $f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$, $(1 + |x'|^{|\alpha|}) f(t,x',x_n) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1}))$, *при этом*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} x'^{\alpha} f(t,x',x)\,dx' = 0,$$

где $|\alpha| = 0$ *при* $n = 3, 4$, $|\alpha| = 1$ *при* $n = 2$. *Для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$

$$\leq c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{1,0,0}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$+\|\|(1+|x'|^{|\alpha|})f(t,x',x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Как уже отмечалось, при $\varepsilon = 0$ решение вспомогательной задачи (2.18) при $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ можно выписать, как и в случае $\varepsilon > 0$:

$$v(\tau,\xi',x_n) = v_0(\tau,\xi',x_n) + v_1(\tau,\xi',x_n).$$

Но для того, чтобы использовать эту конструкцию для получения решения смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3), нужно применять ее регуляризацию с использованием функций $\chi^m(\xi')$, то есть рассматривать последовательности $\{v^m(\tau,\xi',x_n)\}$, где $v^m(\tau,\xi',x_n) = v(\tau,\xi',x_n)\chi^m(\xi')$. Напомним, что

$$\chi^m(\xi') = \begin{cases} 1, & |\xi'| > 1/m, \\ 0, & |\xi'| < 1/m. \end{cases}$$

Согласно леммам 2.6, 2.7 и 2.8 учитывая размерности, оценки на функцию $v_0^m(\tau,\xi',x_n)$ уже есть. Обратимся к той части решения, которое отвечает за граничные условия при $x_n = 0$.

Описание поэтапного получения явного вида этой функции $v_1(\tau,\xi',x_n)$ опускается, так как это было проделано в параграфе 2.6. Рассмотрим последовательность функций $\{v_1^m(\tau,\xi',x_n)\}$, ее члены имеют вид

$$v_1^m(\tau,\xi',x_n) = v_1(\tau,\xi',x_n)\chi^m(\xi') = -v_1^1(\tau,\xi',x_n)\chi^m(\xi')$$

$$-v_1^2(\tau,\xi',x_n)\chi^m(\xi') = -v_{11}^m(\tau,\xi',x_n) - v_{22}^m(\tau,\xi',x_n),$$

где $v_1^1(\tau,\xi',x_n)$ и $v_1^2(\tau,\xi',x_n)$ из (2.34).

Теперь перейдем к лемме об оценке $v_1^m(\tau,\xi',x_n)$.

Лемма 2.10 *Пусть выполнены условия теоремы 2.3, в этом случае справедливы оценки:*

$$\| |\xi'|^k v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \|D_{x_n}^k v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\sigma}\left\|\frac{\tilde f(\tau,\xi',x_n)}{|\tau|}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\frac{c}{\sigma}\left\|\left\|\frac{\tilde f(\tau,\xi',x_n)}{|\tau|}, L_1(\mathbb{R}^{n-1})\right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\right\|, \quad k=0,1,$$

$$\| |\xi'|^k v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \|D_{x_n}^k v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\sigma}\| |\tau|^{k-3}\tilde f(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|, \quad k=2,3,4,$$

$$\| |\tau| v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| \leq \frac{c}{\sigma}\left\|\tilde f(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\frac{c}{\sigma}\left\|\left\|\tilde f(\tau,\xi',x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\right\|,$$

$$\| |\tau|^2 v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| \leq \frac{c}{\sigma}\left\||\tau|\tilde f(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\frac{c}{\sigma}\left\|\left\||\tau|\tilde f(\tau,\xi',x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\right\|,$$

$$\| |\xi'|^2|\tau|^2 v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \| |\tau|^2 D_{x_n}^2 v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\| |\xi'|^2 D_{x_n}^2 v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| \leq \frac{c}{\sigma}\left\||\tau|\tilde f(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|,$$

с константой $c>0$, не зависящей от $f(t,x',x_n)$ и m.

Доказательство. Сфокусируемся на рассмотрении принципиальных аспектов. После применения неравенств, описанных в лемме 2.9, для функции v_{11}^m приходим к

$$\left\|\frac{\tilde f(\tau,\xi',x_n)\chi^m(\xi')}{2\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_1^+(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$= \left\| \left\| \frac{\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)\chi^m(\xi')}{2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2}, L_2(\mathbb{R}^{n-1}) \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+) \right\|$$

$$\leq \left\| \left\| \frac{\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)\chi^m(\xi')}{2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2}, \{|\xi'| < 1\} \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+) \right\|$$

$$+ \left\| \left\| \frac{\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2}, \{|\xi'| > 1\} \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+) \right\|.$$

У второго слагаемого при оценивании не возникает особенностей, для первого слагаемого при $n > 4$ на основании теоремы Римана-Лебега можно заключить о справедливости следующей оценки

$$\|v_{11}^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \left\| \left\| \frac{\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{2\sigma(|\tau| + |\xi'|)|\xi'|^2}, L_1(\mathbb{R}^{n-1}) \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+) \right\|.$$

Остальные оценки из леммы получаются аналогичным образом.

Далее обратимся к рассмотрению функции $v_{22}^m(\tau, \xi', x_n)$, уделяя внимание отличиям в ее анализе по сравнению с леммой 2.9. После интегрирования по переменной x_n и применения неравенства Гёльдера, используя равенство Парсеваля, приходим к

$$\left\| v_{22}^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\| \leq \left\| \frac{\hat{f}(\tau, \xi', \xi_n)\chi^m(\xi')}{2\lambda_2^+ \mathrm{Re}\lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + \xi_n^2)}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}^n) \right\|$$

$$\leq \left\| \left\| \frac{\hat{f}(\tau, \xi', \xi_n)\chi^m(\xi')}{2\lambda_2^+ \mathrm{Re}\lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + \xi_n^2)}, \{|\xi'| < 1\} \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}) \right\|$$

$$+ \left\| \left\| \frac{\hat{f}(\tau, \xi', \xi_n)\chi^m(\xi')}{2\lambda_2^+ \mathrm{Re}\lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + \xi_n^2)}, \{|\xi'| > 1\} \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}) \right\|,$$

где $\hat{f}(\tau, \xi', \xi_n)$ — преобразование Фурье от функции $\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)$ по переменной x_n. При $n > 4$, на основании теоремы Римана-Лебега можно заключить о справедливости следующей оценки

$$\left\| v_{22}^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$\leq \left\| \left\| \frac{\hat f(\tau,\xi',\xi_n)}{2\sigma(|\tau|+|\xi'|)|\xi'|^2}, L_1(\mathbb{R}^{n-1})\right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R})\right\|.$$

Для получения других оценок рассуждения повторяются. □

Лемма 2.11 *Пусть выполнены условия теоремы 2.4, в этом случае справедливы оценки:*

$$\||\xi'|^k v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \|D_{x_n}^k v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\sigma}\left\| \frac{\tilde f(\tau,\xi',x_n)}{|\tau|}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\frac{c}{\sigma}\left\|\left\| \frac{(1+|x'|^{|\alpha|})\mathfrak{L}_{t\to\tau}(f(t,x',x_n))}{|\tau|}, L_1(\mathbb{R}^{n-1})\right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\right\|, \quad k=0,1,$$

$$\||\xi'|^k v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \|D_{x_n}^k v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\||\xi'|^2 D_{x_n}^2 v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\||\tau|^2|\xi'|^2 v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\sigma}\||\tau|^{k-3}\tilde f(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|, \quad k=2,3,4,$$

$$\||\tau| v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| \leq \frac{c}{\sigma}\left\|\hat f(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\frac{c}{\sigma}\left\|\left\|(1+|x'|^{|\alpha|})\mathfrak{L}_{t\to\tau}(f(t,x',x_n)), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\right\|,$$

$$\||\tau|^2 v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\| + \||\tau|^2 D_{x_n}^2 v_1^m(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\leq \frac{c}{\sigma}\left\||\tau|\hat f(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\frac{c}{\sigma}\left\||\tau|\left\|(1+|x'|^{|\alpha|})\mathfrak{L}_{t\to\tau}(f(t,x',x_n)), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+)\right\|,$$

с константой $c>0$, не зависящей от $f(t,x',x_n)$ и m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сфокусируемся на рассмотрении лишь той части доказательства, где возникают условия ортогональности. После применения неравенств, описанных в лемме 2.10, для функции $v_1^m(\tau, \xi', x_n)$ получаем

$$\left\| v_1^m(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\|$$

$$\leq \left\| \left\| \frac{\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2}, \{|\xi'| < 1\} \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+) \right\|$$

$$+ \left\| \left\| \frac{\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{2\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2}, \{|\xi'| > 1\} \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+) \right\|$$

$$+ \left\| \left\| \frac{\hat{f}(\tau, \xi', \xi_n)}{2\lambda_2^+ \mathrm{Re}\lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + \xi_n^2)}, \{|\xi'| < 1\} \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}) \right\|$$

$$+ \left\| \left\| \frac{\hat{f}(\tau, \xi', \xi_n)}{2\lambda_2^+ \mathrm{Re}\lambda_2^+ ((\lambda_1^+)^2 + \xi_n^2)}, \{|\xi'| > 1\} \right\|, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}) \right\|.$$

При проведении оценок для второго и четвертого слагаемых особенностей не возникает. Для оценки первого и третьего слагаемых представим функцию $\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)$ в виде, как было описанно в лемме 2.7. При этом, учитывая выполнение условий ортогональности и повторяя шаги, представленные в лемме 2.10, получаем необходимые оценки. □

Лемма 2.12 *Пусть $\varepsilon = 0$ и выполняются условия лемм 2.10 или 2.11. Тогда при любых $q > 1$ имеют место сходимости*

$$\left\| |\xi'|^k [v_1^{m+q}(\tau, \xi', x_n) - v_1^m(\tau, \xi', x_n)], L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\|$$

$$+ \left\| D_{x_n}^k [v_1^{m+q}(\tau, \xi', x_n) - v_1^m(\tau, \xi', x_n)], L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\| \to 0, \quad m \to \infty,$$

при $k \leq 4$, а также

$$\left\| |\tau'|^2 [v_1^{m+q}(\tau, \xi', x_n) - v_1^m(\tau, \xi', x_n)], L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\|$$

$$+\big\||\tau'|^2|\xi'|^2[v_1^{m+q}(\tau,\xi',x_n)-v_1^m(\tau,\xi',x_n)],L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\big\|$$

$$+\big\||\tau'|^2D_{x_n}^2[v_1^{m+q}(\tau,\xi',x_n)-v_1^m(\tau,\xi',x_n)],L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\big\|\to 0,\quad m\to\infty,$$

Доказательство проводится точно также, как доказательства лемм 2.10 или 2.11. □

Доказательство теоремы 2.3 повторяет рассуждения из теоремы 2.1 параграфа 2.7, и, заменяя леммы 2.5 и 2.9 на 2.6 и 2.10, получаем сходимость последовательности $\{u^m(t,x)\}$ к решению задачи, при этом справедлива оценка, указанная в теореме. □

Доказательство теоремы 2.4 повторяет рассуждения из теоремы 2.1 параграфа 2.7, и, заменяя леммы 2.5 и 2.9 на 2.7 и 2.11, получаем сходимость последовательности $\{u^m(t,x)\}$ к решению задачи, при этом справедлива оценка, указанная в теореме. □

Замечание 2.3 *Как вытекает из [23, §2.9], сформулированные в теореме 2.4 условия ортогональности являются очень существенными для разрешимости смешанных задач* (2.1)–(2.3) *при* $\varepsilon = 0$.

Глава 3.

Смешанные краевые задачи для многомерного псевдогиперболического уравнения. Нерегулярный случай

3.1 Смешанные краевые задачи с обратимым оператором при старшей производной по времени

Перейдем к более сложной ситуации. Рассмотрим смешанную задачу в четверти пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{++} = \{t > 0, x \in \mathbb{R}^n_+, \}$ для псевдогиперболического уравнения

$$\big(\varepsilon\mathbb{I} - L_0(D_x)\big) D_t^2 u + [L_0(D_x)]^2 u + \sum_{|\beta|\leq 2} b_\beta D_x^\beta u = f(t,x), \tag{2.1}$$

с условиями при $x_n = 0$

$$\begin{aligned} (b_{11}u + b_{12}D_{x_n}u + b_{13}D^2_{x_n}u)\big|_{x_n=0} &= 0, \\ (b_{21}u + b_{22}D_{x_n}u + b_{23}D^2_{x_n}u)\big|_{x_n=0} &= 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

и начальными условиями

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad D_t u\big|_{t=0} = 0. \tag{2.3}$$

Напомним, что мы предполагаем, что смешанная краевая задача (2.1)–(2.3) удовлетворяет условию Лопатинского.

Будем называть смешанные краевые задачи (2.1), (2.2), (2.3) *нерегулярными*, если не выполняются условия $A_1 = A_3 = 0$, $A_2 \neq 0$.

Данная глава посвящена исследованию нерегулярных краевых задач для рассматриваемого класса уравнений.

Сформулируем теорему, которую будем доказывать в этом параграфе.

Теорема 3.1 *Пусть $\varepsilon > 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$ и числа A_i, $i = 1,2,3$, не удовлетворяют условиям из теоремы 2.1, при этом не все A_i одинаковые. Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что задача (2.1)–(2.3) однозначно разрешима в классе функций $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$ таких, что $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$, $i = 1,\dots,n$ при $\gamma > \gamma_0$, для любой $f(t,x',x_n)$ из соболевского пространства функций $W_{2,\gamma}^{2,2,0}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$ таких, что $f(t,x',x_n)|_{t=0} = D_t f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$. Для решения $u(t,x)$ выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})\| \le c(\gamma_0)\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{2,2,0}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})\|,$$

где константа $c(\gamma_0)$ не зависит от $f(t,x)$.

При доказательстве разрешимости мы будем использовать ту же схему, как при доказательстве теоремы 2.1. Для этого рассмотрим задачу (2.18). Решение этой задачи имеет вид (2.19), (2.22) и (2.26). Учитывая лемму 2.5, для доказательства теоремы нам нужно провести оценки функций $v_1(\tau,\xi',x_n)$ из (2.26). Представим ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} &v_1(\tau,\xi',x_n) \\ &= e^{-\lambda_1^+ x_n}\left[\alpha_1(\tau,\xi')\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds + \alpha_2(\tau,\xi')\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\right] \\ &+ e^{-\lambda_2^+ x_n}\left[\beta_1(\tau,\xi')\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds + \beta_2(\tau,\xi')\int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\right], \end{aligned} \tag{3.1}$$

где коэффициенты $\alpha_i(\tau,\xi')$ и $\beta_i(\tau,\xi')$ имеют вид

$$\alpha_1(\tau,\xi') = \frac{A_3\lambda_1^+\lambda_2^+ + A_2(\lambda_2^+ - \lambda_1^+) - A_1}{2\lambda_1^+(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)^2 \det B},$$

$$\alpha_2(\tau,\xi') = \frac{A_3(\lambda_2^+)^2 - A_1}{((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B},$$

$$\beta_1(\tau,\xi') = -\frac{A_3(\lambda_1^+)^2 - A_1}{((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B},$$

$$\beta_2(\tau,\xi') = -\frac{A_3\lambda_1^+\lambda_2^+ + A_2(\lambda_1^+ - \lambda_2^+) - A_1}{2\lambda_2^+(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)^2\det B}.$$

Здесь $\det B = A_3\lambda_1^+\lambda_2^+ - A_2(\lambda_2^+ + \lambda_1^+) + A_1$. Тогда $v_1(\tau,\xi',x_n)$ эквивалентно следующему выражению

$$v_1(\tau,\xi',x_n) = -\int\limits_0^{+\infty} D_{z_n}\Bigg(e^{-\lambda_1^+(x_n+z_n)}\Bigg[\alpha_1(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\alpha_2(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]$$

$$+e^{-\lambda_2^+(x_n+z_n)}\Bigg[\beta_1(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\beta_2(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]\Bigg)dz_n.$$

Дифференцируя по z_n и используя функцию Хевисайда, имеем

$$v_1(\tau,\xi',x_n) =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda_1^+ e^{-\lambda_1^+(x_n+z_n)}\theta(z_n+x_n)\theta(z_n)\Bigg[\alpha_1(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\alpha_2(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]dz_n$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1^+(x_n+z_n)}\theta(z_n+x_n)\theta(z_n)\Bigg[\alpha_1(\tau,\xi')\lambda_1^+\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\alpha_2(\tau,\xi')\lambda_2^+\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]dz_n$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda_2^+ e^{-\lambda_2^+(x_n+z_n)}\theta(z_n+x_n)\theta(z_n)\Bigg[\beta_1(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\beta_2(\tau,\xi')\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]dz_n$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_2^+(x_n+z_n)}\theta(z_n+x_n)\theta(z_n)\Bigg[\beta_1(\tau,\xi')\lambda_1^+\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds$$

$$+\beta_2(\tau,\xi')\lambda_2^+\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+(s+z_n)}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds\Bigg]dz_n.$$

Учитывая следующие равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(z_n+x_n)h(z_n)dz_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(x_n-\tilde{z}_n)h(-\tilde{z}_n)d\tilde{z}_n, \quad h(-\tilde{z}_n)=h_1(\tilde{z}_n),$$

$$F(k*h_1)(\xi_n)=\sqrt{2\pi}\hat{k}(\xi_n)\hat{h}_1(\xi_n),$$

$$(k*h_1)(x_n)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_n\xi_n}\hat{k}(\xi_n)\hat{h}_1(\xi_n)d\xi_n,$$

т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(z_n+x_n)h(z_n)dz_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_n\xi_n}\hat{k}(\xi_n)\hat{h}_1(\xi_n)d\xi_n,$$

получаем альтернативную запись для функции $v_1(\tau,\xi',x_n)$ из (3.1)

$$v_1(\tau,\xi',x_n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix_n\xi_n}\lambda_1^+}{\lambda_1^++i\xi_n}\left[\frac{\alpha_1(\tau,\xi')}{\lambda_1^+-i\xi_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_2(\tau,\xi')}{\lambda_2^+-i\xi_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds\right]d\xi_n$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix_n\xi_n}}{\lambda_1^++i\xi_n}\left[\frac{\lambda_1^+\alpha_1(\tau,\xi')}{\lambda_1^+-i\xi_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_2^+\alpha_2(\tau,\xi')}{\lambda_2^+-i\xi_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds\right]d\xi_n$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix_n\xi_n}\lambda_2^+}{\lambda_2^++i\xi_n}\left[\frac{\beta_1(\tau,\xi')}{\lambda_1^+-i\xi_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_2(\tau,\xi')}{\lambda_2^+-i\xi_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds\right]d\xi_n$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix_n\xi_n}}{\lambda_2^++i\xi_n}\left[\frac{\lambda_1^+\beta_1(\tau,\xi')}{\lambda_1^+-i\xi_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_2^+\beta_2(\tau,\xi')}{\lambda_2^+-i\xi_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds\right]d\xi_n.$$

Выделив группы слагаемых, содержащие выражения

$$\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds,$$

и осуществив перегруппировку, приходим к

$$v_1(\tau,\xi',x_n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ix_n\xi_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{2\lambda_1^+}{\lambda_1^++i\xi_n}\cdot\frac{\alpha_1(\tau,\xi')}{\lambda_1^+-i\xi_n}+\frac{\lambda_1^++\lambda_2^+}{\lambda_1^+-i\xi_n}\cdot\frac{\beta_1(\tau,\xi')}{\lambda_2^++i\xi_n}\right]d\xi_n$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ix_n\xi_n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{2\lambda_2^+}{\lambda_2^+-i\xi_n}\cdot\frac{\beta_2(\tau,\xi')}{\lambda_2^++i\xi_n}+\frac{\lambda_1^++\lambda_2^+}{\lambda_1^++i\xi_n}\cdot\frac{\alpha_2(\tau,\xi')}{\lambda_2^+-i\xi_n}\right]d\xi_n. \tag{3.2}$$

Теперь перейдем к доказательству лемм об оценках $v_1(\tau,\xi',x_n)$. В формуле решения (3.1) фигурирует определитель матрицы Лопатинского $\det B=A_3\lambda_1^+\lambda_2^+-A_2(\lambda_2^++\lambda_1^+)+A_1$. Согласно теореме 3.1 возможны три вида оценок для этого определителя. Докажем соответствующие леммы.

Лемма 3.1 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и* $A_3=A_2=0$, $A_1\neq 0$, *тогда при* $\gamma>\gamma_0$ *имеют место следующие оценки*

$$\|v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|+\||\xi'|^kv_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|$$

$$+\||\tau|v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|\leq\frac{c}{\gamma_0}\|\tilde f(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,\quad k=1,2,$$

$$\||\xi'|^3v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|\leq\frac{c}{\gamma_0}\||\xi'|\tilde f(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,$$

$$\||\xi'|^4v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|\leq\frac{c}{\gamma_0}\||\xi'|^2\tilde f(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,$$

$$\||\tau|^2|\xi'|^2v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|\leq\frac{c}{\gamma_0}\||\tau|^2\tilde f(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\|,$$

с константой $c>0$, *не зависящей от* $\tilde f(\tau,\xi',x_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $v_1(\tau,\xi',\xi_n)$ для рассматриваемой задачи согласно (3.2) принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix_n\xi_n}}{2\pi}\cdot\frac{\left[A_3\lambda_1^+(\lambda_1^++i\xi_n)+A_3\lambda_1^+\lambda_2^++A_2(\lambda_2^++i\xi_n)-A_1\right]}{((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)(\lambda_2^++i\xi_n)\det B}d\xi_n$$

$$\cdot\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_1^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix_n\xi_n}}{2\pi}\cdot\frac{\left[A_3\lambda_2^+(\lambda_2^++i\xi_n)+A_3\lambda_2^+\lambda_1^++A_2(\lambda_1^++i\xi_n)-A_1\right]}{((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)(\lambda_1^++i\xi_n)\det B}d\xi_n$$

$$\cdot\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda_2^+s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds=v_1^1(\tau,\xi',\xi_n)+v_1^2(\tau,\xi',\xi_n),\qquad(3.3)$$

здесь $\det B=A_1-A_2(\lambda_1^++\lambda_2^+)+A_3\lambda_1^+\lambda_2^+$. Для получения оценки нормы в пространстве L_2 полученного выражения, как и ранее, последовательно применим равенство Парсеваля, неравенство Минковского и неравенство Гёльдера, что позволит нам прийти к следующему результату:

$$\left\|v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|\le\left\|Q_1(\tau,\xi',\xi_n)\tilde f(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^{n+1})\right\|$$

$$+\left\|Q_2(\tau,\xi',\xi_n)\tilde f(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^{n+1})\right\|,$$

здесь

$$Q_1(\tau,\xi',\xi_n)=\frac{A_3\lambda_1^+(\lambda_1^++i\xi_n)+A_3\lambda_1^+\lambda_2^++A_2(\lambda_2^++i\xi_n)-A_1}{2\pi(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)(\lambda_2^++i\xi_n)\det B},$$

$$Q_2(\tau,\xi',\xi_n)=\frac{A_3\lambda_2^+(\lambda_2^++i\xi_n)+A_3\lambda_2^+\lambda_1^++A_2(\lambda_1^++i\xi_n)-A_1}{2\pi(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)(\lambda_1^++i\xi_n)\det B}.$$

Применяя лемму 2.3 и неравенство Минковского, приходим к

$$2\pi\left\|v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|^2\le$$

$$\leq \sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{0}^{+\infty} \Bigg[\left| \frac{A_3 \lambda_1^+ \lambda_2^+ |\tau| \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2} \sigma (|\tau|^2 + |\xi'|^2)(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)(\lambda_2^+ + i\xi_n) \det B} \right|^2$$

$$+ \left| \frac{A_3 \lambda_1^+ \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{3/2} (\lambda_2^+ - \lambda_1^+)(\lambda_2^+ + i\xi_n) \det B} \right|^2$$

$$+ \left| \frac{A_2 |\tau| \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{\sigma (\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2} (|\tau|^2 + |\xi'|^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+) \det B} \right|^2$$

$$+ \left| \frac{A_1 |\tau| \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{\sigma (\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2} (|\tau|^2 + |\xi'|^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(\lambda_2^+ + i\xi_n) \det B} \right|^2 \Bigg] d\xi_n \, d\xi' dx_n d\eta$$

$$+ \sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{0}^{+\infty} \Bigg[\left| \frac{A_3 \lambda_1^+ \lambda_2^+ \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2} \mathrm{Re}\lambda_1^+ ((\lambda_2^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_2^+ - \lambda_1^+) \det B} \right|^2$$

$$+ \left| \frac{A_3 \lambda_2^+ \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2} \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\lambda_2^+ - \lambda_1^+)(\lambda_2^+ - i\xi_n) \det B} \right|$$

$$+ \left| \frac{A_2 \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2} ((\lambda_2^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+) \det B} \right|^2$$

$$+ \left| \frac{A_1 \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2} ((\lambda_2^+)^2 + \xi_n^2) \mathrm{Re}\lambda_1^+ (\lambda_1^+ - \lambda_2^+) \det B} \right|^2 \Bigg] d\xi_n \, d\xi' dx_n d\eta.$$

Воспользуемся теоремой Тонелли для перестановки порядка интегрирования, исключая интеграл по переменной ξ_n, тогда имеем

$$2\pi \left\| v_1(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n) \right\|^2 \leq$$

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{0}^{+\infty} \Bigg[\left| \frac{A_3 \lambda_1^+ \lambda_2^+ |\tau| \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2} \sigma (|\tau|^2 + |\xi'|^2)(\lambda_2^+ - \lambda_1^+) \det B} \right|^2$$

$$+ \left| \frac{A_3 \lambda_1^+ \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{3/2} (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2} (\lambda_2^+ - \lambda_1^+) \det B} \right|^2$$

$$+\left|\frac{A_2|\tau|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B}\right|^2$$

$$+\left|\frac{A_1|\tau|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B}\right|^2\Bigg]d\xi'\,dx_n d\eta$$

$$+\sup_{\sigma>\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^{+\infty}\Bigg[\left|\frac{A_3\lambda_1^+\lambda_2^+\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2\mathrm{Re}\lambda_1^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|^2$$

$$+\left|\frac{A_3\lambda_2^+\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\mathrm{Re}\lambda_2^+\mathrm{Re}\lambda_1^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|^2+\left|\frac{A_2\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B}\right|^2$$

$$+\left|\frac{A_1\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2\mathrm{Re}\lambda_1^+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B}\right|^2\Bigg]d\xi'\,dx_n d\eta. \tag{3.4}$$

Так как $A_3=A_2=0$, из этого следует, что $|\det B|=|A_1|$, в этом случае имеем

$$\left|\frac{|\tau|}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)}\right|$$

$$\le c\left|\frac{|\tau|(|\lambda_1^+|)^{1/2}(\lambda_1^++\lambda_2^+)}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+|\lambda_1^+|)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}}\right|$$

$$\le c\left|\frac{|\tau|^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)(|\tau|^2+|\xi'|^2)|\tau|^2(\varepsilon+|\xi'|^2)^{1/4}}\right|$$

$$\le\frac{c}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}|\tau|^{1/2}(\varepsilon+|\xi'|^2)^{1/4}},$$

$$\left|\frac{1}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+}\right|$$

$$\le c\left|\frac{\lambda_1^+(\lambda_1^++\lambda_2^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+}\right|\le\frac{c}{\sigma(\varepsilon+|\xi'|)^2|\tau|}.$$

С учетом полученных неравенств приходим к требуемым оценкам в случае, если $A_3=A_2=0$. $\square$

Лемма 3.2 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и* $A_3 = 0$, $A_2 \neq 0$, $A_1 \neq 0$, *тогда оценки из леммы 3.1 остаются справедливыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий имеем

$$|\det B| = |A_2(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) - A_1| = |\lambda_1^+ + \lambda_2^+| \cdot \left| A_2 - \frac{A_1}{\lambda_1^+ + \lambda_2^+} \right| \geq c|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|. \tag{3.5}$$

Для подынтегральных выражений (3.4), учитывая (3.5), установим следующие оценки

$$\left| \frac{A_2|\tau|}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_2|\tau|(|\lambda_1^+|)^{1/2}}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+|\lambda_1^+|)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2)} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_2|\tau|^{1+1/2}(|\tau| + |\xi'|)^{1/2}}{\sigma^{1+1/2}(|\tau| + |\xi'|)(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}|\tau|^2} \right| \leq \frac{c_1}{\sigma^{1+1/2}(|\tau| + |\xi'|)^2|\tau|^{1/2}},$$

$$\left| \frac{A_1|\tau|}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_1|\tau|(|\lambda_1^+|)^{1/2}}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+|\lambda_1^+|)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2)(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_1|\tau|^{1+1/2}(|\tau| + |\xi'|)^{1/2}}{\sigma^{1+1/2}(|\tau| + |\xi'|)(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}|\tau|^2(\varepsilon + |\xi'|^2)^{1/4}} \right|$$

$$\leq \frac{c_2}{\sigma^{1+1/2}(|\tau| + |\xi'|)^2|\tau|^{1/2}(\varepsilon + |\xi'|^2)^{1/4}},$$

$$\left| \frac{A_2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B} \right| \leq c \left| \frac{A_2}{(\varepsilon + |\xi'|^2)((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2)} \right| \leq \frac{c_3}{(\varepsilon + |\xi'|)^2|\tau|^2},$$

$$\left| \frac{A_1}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2)\mathrm{Re}\lambda_1^+} \right| \leq \frac{c_4}{(\varepsilon + |\xi'|)^2|\tau|^2\mathrm{Re}\lambda_1^+}.$$

Из этих неравенств в силу (3.4) приходим к требуемым оценкам. □

Лемма 3.3 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и* $A_3 \neq 0$, *тогда оценки из леммы 3.1 остаются справедливыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом соотношения из леммы и условия, что $A_3 \neq 0$, за счет выбора $\sigma > \gamma > \gamma_0$ имеем

$$|\det B| = |\lambda_1^+ \lambda_2^+| \cdot \left| A_3 + \frac{A_1}{\lambda_1^+ \lambda_2^+} - A_2 \left| \frac{1}{\lambda_1^+} + \frac{1}{\lambda_2^+} \right| \right| \geq c|\lambda_1^+ \lambda_2^+|. \tag{3.6}$$

Для подынтегральных выражений (3.4), учитывая (3.6), установим следующие оценки

$$\left| \frac{A_3 \lambda_1^+ \lambda_2^+ |\tau|}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2} \sigma (|\tau|^2 + |\xi'|^2)(\lambda_2^+ - \lambda_1^+) \det B} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_3 |\tau| |\lambda_1^+|^{1/2} (\lambda_2^+ + \lambda_1^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+ |\lambda_1^+| \mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2} \sigma (|\tau|^2 + |\xi'|^2)((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2)} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_3 |\tau|^{1+1/2} (|\tau| + |\xi'|)^{3/2}}{\sigma^{3/2} (|\tau| + |\xi'|)(\varepsilon + |\xi'|^2)^{1/4} (|\tau|^2 + |\xi'|^2) |\tau|^2} \right| \leq \frac{c_1}{\sigma^{3/2} (|\tau|^2 + |\xi'|^2)},$$

$$\left| \frac{A_3 \lambda_1^+}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{3/2} (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2} (\lambda_2^+ - \lambda_1^+) \det B} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_3 \lambda_1^+ |\lambda_1^+|^{1/2} (\lambda_2^+ + \lambda_1^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+ |\lambda_1^+|)^{3/2} (\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2} ((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2) |\lambda_2^+|} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_3 (|\tau| + |\xi'|)^{5/2} |\tau|^{3/2}}{\sigma^{3/2} (|\tau| + |\xi'|)^3 |\tau|^2 (\varepsilon + |\xi'|^2)^{3/4}} \right| \leq \frac{c_2}{\sigma^{3/2} (|\tau| + |\xi'|)^{1/2} (\varepsilon + |\xi'|^2)^{3/4} |\tau|^{1/2}},$$

$$\left| \frac{A_2 |\tau|}{\sigma (\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2} (|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4} (\lambda_1^+ - \lambda_2^+) \det B} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_2 |\tau| (\lambda_2^+ + \lambda_1^+)}{\sigma (\mathrm{Re}\lambda_1^+ |\lambda_1^+|)^{1/2} (|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4} ((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2) |\lambda_2^+| |\lambda_1^+|^{1/2}} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{A_2 |\tau|^{7/4} (|\tau| + |\xi'|)}{\sigma^{3/2} (|\tau| + |\xi'|)(|\tau|^2 + |\xi'|^2) |\tau|^2 (\varepsilon + |\xi'|^2)^{1/2}} \right|$$

$$\leq \frac{c_3}{\sigma^{3/2} (|\tau|^2 + |\xi'|^2)(\varepsilon + |\xi'|^2)^{1/2}},$$

$$\left|\frac{A_1|\tau|}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B}\right|$$
$$\le c\left|\frac{A_1|\tau|(\lambda_1^++\lambda_2^+)}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+|\lambda_1^+|\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)||\lambda_2^+||\lambda_1^+|^{1/2}}\right|$$
$$\le c\left|\frac{A_1|\tau|^{7/4}(|\tau|+|\xi'|)}{\sigma^{7/4}(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)|\tau|^2|(\varepsilon+|\xi'|^2)^{3/4}}\right|$$
$$\le \frac{c_4}{\sigma^{7/4}(|\tau|+|\xi'|)^{5/2}(\varepsilon+|\xi'|^2)^{3/4}}.$$

Теперь рассмотрим подробнее вторую группу слагаемых из (3.4), учитывая оценку на $|\det B|$, имеем

$$\left|\frac{A_3\lambda_1^+\lambda_2^+}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2\mathrm{Re}\lambda_1^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|\le c\left|\frac{A_3\lambda_1^+(\lambda_2^++\lambda_1^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2\mathrm{Re}\lambda_1^+|\lambda_1^+|((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)}\right|$$

$$\le C\left|\frac{A_3|\tau|(|\tau|+|\xi'|)^2}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(|\tau|^2+|\xi'|^2)|\tau|^2}\right|\le\frac{c_5}{\sigma(\varepsilon+|\xi'|^2)|\tau|},$$
$$\left|\frac{A_3\lambda_2^+}{\mathrm{Re}\lambda_2^+\mathrm{Re}\lambda_1^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|\le c\left|\frac{A_3(\lambda_2^++\lambda_1^+)}{\mathrm{Re}\lambda_2^+\mathrm{Re}\lambda_1^+|\lambda_1^+|((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)}\right|$$
$$\le C\left|\frac{A_3(|\tau|+|\xi'|)|\tau|}{\sigma\mathrm{Re}\lambda_2^+(|\tau|^2+|\xi'|^2)|\tau|^2}\right|\le\frac{c_6}{\sigma(\varepsilon+|\xi'|^2)^{1/2}(|\tau|+|\xi'|)|\tau|},$$
$$\left|\frac{A_2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B}\right|\le c\left|\frac{A_2(\lambda_1^++\lambda_2^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)|\lambda_1^+||\lambda_2^+|}\right|$$
$$\le C\left|\frac{A_2(|\tau|+|\xi'|)|\tau|^{1/2}}{\sigma^{1/2}(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^3|\tau|^2(|\tau|+|\xi'|)}\right|\le\frac{c_7}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^3|\tau|},$$
$$\left|\frac{A_1}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2\mathrm{Re}\lambda_1^+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B}\right|$$
$$\le c\left|\frac{A_1(\lambda_1^++\lambda_2^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2\mathrm{Re}\lambda_1^+((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)|\lambda_1^+||\lambda_2^+|}\right|$$
$$\le C\left|\frac{A_1(|\tau|+|\xi'|)|\tau|}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^3(|\tau|^2+|\xi'|^2)|\tau|^2}\right|\le\frac{c_8}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^3(|\tau|+|\xi'|)|\tau|}.$$

С учетом полученных неравенств в силу (3.4) приходим к требуемым оценкам. $\square$

Лемма 3.4 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и* $A_3 = A_2 = 0$, $A_1 \neq 0$, *тогда при* $\gamma > \gamma_0$ *имеют место оценки*

$$\|D^2_{x_n} v_1(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\| \leq \frac{c}{\gamma_0}\|\tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\|,$$

$$\||\xi'|^2 D^2_{x_n} v_1(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\| + \||\tau|^2 D^2_{x_n} v_1(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\|$$
$$\leq \frac{c}{\gamma_0}\||\tau|^2 \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\| + \frac{c}{\gamma_0}\||\xi'|^2 \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\|.$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выпишем производные для решения рассматриваемой задачи

$$D^k_{x_n} v_1(\tau, \xi', x_n) = D^k_{x_n}[v_{11} + v_{13}] + D^k_{x_n}[v_{12} + v_{14}] =$$

$$\tilde{\alpha}_1(\tau, \xi') e^{-\lambda_1^+ x_n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s} \tilde{f}(\tau, \xi', s) ds + \tilde{\alpha}_2(\tau, \xi') e^{-\lambda_1^+ x_n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s} \tilde{f}(\tau, \xi', s) ds$$

$$+\tilde{\beta}_1(\tau, \xi') e^{-\lambda_2^+ x_n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s} \tilde{f}(\tau, \xi', s) ds$$

$$+ \tilde{\beta}_2(\tau, \xi') e^{-\lambda_2^+ x_n} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s} \tilde{f}(\tau, \xi', s) ds. \qquad (3.7)$$

где

$$\tilde{\alpha}_1(\tau, \xi') = \frac{[A_3 \lambda_1^+ \lambda_2^+ + A_2(\lambda_2^+ - \lambda_1^+) - A_1](-\lambda_1^+)^k}{2\lambda_1^+(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)^2 \det B},$$

$$\tilde{\alpha}_2(\tau, \xi') = \frac{[A_3(\lambda_2^+)^2 - A_1](-\lambda_1^+)^k}{((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+) \det B},$$

$$\tilde{\beta}_1(\tau,\xi') = -\frac{[A_3(\lambda_1^+)^2 - A_1](-\lambda_2^+)^k}{((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B},$$

$$\tilde{\beta}_2(\tau,\xi') = -\frac{[A_3\lambda_1^+\lambda_2^+ + A_2(\lambda_1^+ - \lambda_2^+) - A_1](-\lambda_2^+)^k}{2\lambda_2^+(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)^2\det B},$$

здесь $\det B = A_3\lambda_1^+\lambda_2^+ - A_2(\lambda_2^+ + \lambda_1^+) + A_1$. Далее проделав преобразования, описанные после формулировки теоремы 3.1, и сделав соответствующую замену $\alpha_i(\tau,\xi')$ на $\tilde{\alpha}_i(\tau,\xi')$ и $\beta_i(\tau,\xi')$ на $\tilde{\beta}_i(\tau,\xi')$, где $i = 1, 2$, приходим к

$$D_{x_n}^k v_1(\tau,\xi',x_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_n\xi_n}\frac{P_1(\tau,\xi',\xi_n)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{((\lambda_1^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(\lambda_2^+ + i\xi_n)\det B}d\xi_n$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_n\xi_n}\frac{P_2(\tau,\xi',\xi_n)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi',s)ds}{((\lambda_2^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(\lambda_1^+ + i\xi_n)\det B}d\xi_n, \tag{3.8}$$

здесь

$$P_1(\tau,\xi',\xi_n) = (-\lambda_2^+)^k[A_1 - A_3(\lambda_1^+)^2](\lambda_1^+ + i\xi_n) \\ + (\lambda_2^+ + i\xi_n)(-\lambda_1^+)^k[A_3\lambda_2^+\lambda_1^+ + A_2(\lambda_2^+ - \lambda_1^+) - A_1],$$

$$P_2(\tau,\xi',\xi_n) = (-\lambda_1^+)^k[A_1 - A_3(\lambda_2^+)^2](\lambda_2^+ + i\xi_n) \\ + (\lambda_1^+ + i\xi_n)(-\lambda_2^+)^k[A_3\lambda_2^+\lambda_1^+ + A_2(\lambda_1^+ - \lambda_2^+) - A_1].$$

Начнем рассмотрение с выражения (3.8) при $k = 2$. Для того чтобы провести оценку в норме L_2 полученного выражения, воспользуемся, как и ранее, последовательно равенством Парсеваля, неравенством Минковского и неравенством Гёльдера. Принимая во внимание соотношение

$\lambda_1^+\lambda_2^+ + i\xi_n(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) = (\lambda_2^+ + i\xi_n)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) - (\lambda_2^+)^2$, имеем

$$\left\|D^2_{x_n} v_1(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\right\|$$

$$\leq \left\| \frac{A_1[(\lambda_2^+ + i\xi_n)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+) - (\lambda_2^+)^2] + (\lambda_2^+)^2[(\lambda_1^+ + i\xi_n)A_2 - i\xi_n\lambda_1^+ A_3]}{2\pi(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}((\lambda_2^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(\lambda_1^+ + i\xi_n)\det B} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^{n+1}_+) \right\|$$

$$+ \left\| \frac{A_1(\lambda_2^+)^2 - (\lambda_2^+ + i\xi_n)((\lambda_1^+)^2 A_2 + A_1(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)) - i\xi_n\lambda_2^+(\lambda_1^+)^2 A_3}{2\pi(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}((\lambda_1^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(\lambda_2^+ + i\xi_n)\det B} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^{n+1}_+) \right\|.$$

Тогда, с учетом леммы 2.3 и неравенства Минковского, приходим к

$$2\pi \left\|D^2_{x_n} v_1(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\right\|$$

$$\leq \left\| \frac{A_1(\lambda_2^+)^2 \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}((\lambda_2^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+ \det B}, L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^{n+1}_+) \right\|$$

$$+ \left\| \frac{A_1(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{\mathrm{Re}\lambda_1^+(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(\lambda_2^+ - i\xi_n)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B}, L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^{n+1}_+) \right\|$$

$$+ \left\| \frac{(\lambda_2^+)^2 A_2 \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}((\lambda_2^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B}, L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^{n+1}_+) \right\|$$

$$+ \left\| \frac{i\xi_n\lambda_1^+(\lambda_2^+)^2 A_3 \tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}((\lambda_2^+)^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+ \det B}, L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^{n+1}_+) \right\|$$

$$+ \left\| \frac{A_1(\lambda_2^+)^2|\tau|\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(\lambda_2^+ + i\xi_n)\det B}, L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^{n+1}_+) \right\|$$

$$+ \left\| \frac{|\tau|((\lambda_1^+)^2 A_2 + A_1(\lambda_1^+ + \lambda_2^+))\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2 + \xi_n^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B}, L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^{n+1}_+) \right\|$$

$$+\left\|\frac{i\xi_n|\tau|\lambda_2^+(\lambda_1^+)^2A_3\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi|^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)(\lambda_2^++i\xi_n)\det B},L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^{n+1})\right\|.$$

Применяя теорему Тонелли о перестановке порядка интегрирования и интегрируя по переменной ξ_n, приходим к

$$4\left\|D_{x_n}^2v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$\le\left\|\frac{A_1(\lambda_2^+)^2\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B},L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\left\|\frac{A_1(\lambda_1^++\lambda_2^+)\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\mathrm{Re}\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B},L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\left\|\frac{(\lambda_2^+)^2A_2\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B},L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\left\|\frac{\lambda_1^+(\lambda_2^+)^2A_3\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B},L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\left\|\frac{A_1(\lambda_2^+)^2|\tau|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B},L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\left\|\frac{|\tau|\lambda_2^+(\lambda_1^+)^2A_3\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{1/4}(\lambda_1^+-\lambda_2^+)(|\tau|+|\xi'|)\det B},L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|$$

$$+\left\|\frac{|\tau|((\lambda_1^+)^2A_2+A_1(\lambda_1^++\lambda_2^+))\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B},L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|. \tag{3.9}$$

Очевидно, при $A_3=A_2=0$, имеем $|\det B|=|A_1|$. Рассмотрим из (3.9) первые два слагаемых, умножая числитель и знаменатель на $\lambda_1^+(\lambda_1^++\lambda_2^+)$ и используя леммы 2.1 и 2.3, приходим к оценке

$$\left|\frac{(\lambda_2^+)^2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+}\right|\le C\left|\frac{(|\tau|+|\xi'|)^2}{\sigma|\tau|(|\tau|^2+|\xi'|^2)}\right|\le\frac{c_1}{\sigma|\tau|}.$$

$$\left|\frac{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\mathrm{Re}\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_2^+ (\lambda_1^+ - \lambda_2^+)}\right| \le C\left|\frac{(|\tau| + |\xi'|)^3}{\sigma(|\tau|^2 + |\xi'|^2)\mathrm{Re}\lambda_2^+ |\tau|}\right| \le \frac{c_2}{\sigma}.$$

Теперь перейдем к пятому и седьмому слагаемым из (3.9). Умножая числитель и знаменатель на $|\lambda_1^+|^{1/2}(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)$ и используя леммы 2.1 и 2.3, имеем оценку на дробные выражения

$$\left|\frac{(\lambda_2^+)^2|\tau|}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)}\right|$$

$$\le \left|\frac{(\varepsilon + |\xi'|^2)(|\tau| + |\xi'|)^{3/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau| + |\xi'|)(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)|\tau|^{1/2}}\right| \le \frac{c_3}{\sigma^{3/2}},$$

$$\left|\frac{|\tau|(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)}\right|$$

$$\le C\left|\frac{(|\tau| + |\xi'|)^{5/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau| + |\xi'|)|\tau|^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}}\right| \le \frac{c_4}{\sigma^{3/2}|\tau|^{1/2}}.$$

Из полученных неравенств в силу 3.9 вытекают требуемые оценки. □

Лемма 3.5 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и* $A_3 = 0$, $A_2 \ne 0$, $A_1 \ne 0$, *тогда имеют место оценки из леммы 3.4.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом соотношения из леммы и условия, что $A_3 = 0$, следует (3.5), т.е. $|\det B| \ge c|\lambda_1^+ + \lambda_2^+|$. Рассмотрим полученное выражение (3.9). Для первого и второго слагаемого из (3.9) умножим и поделим на λ_1^+ рациональное выражение, тогда с учетом лемм 2.1, 2.3, имеем

$$\left|\frac{A_1(\lambda_2^+)^2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+ \det B}\right| \le \left|\frac{C(|\tau| + |\xi'|)}{\sigma|\tau|(|\tau|^2 + |\xi'|^2)}\right| \le \frac{c_1}{\sigma|\tau|(|\tau| + |\xi'|)},$$

$$\left|\frac{A_1(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\mathrm{Re}\lambda_1^+ \mathrm{Re}\lambda_2^+ (\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B}\right| \le \left|\frac{C(|\tau| + |\xi'|)^2}{\sigma(|\tau|^2 + |\xi'|^2)\mathrm{Re}\lambda_2^+ |\tau|}\right| \le \frac{c_2}{\sigma\sqrt{\varepsilon + |\xi'|^2}|\tau|},$$

Теперь перейдем к третьему, пятому и седьмому слагаемым из (3.9), умножая числитель и знаменатель на $|\lambda_1^+|^{1/2}$ и используя леммы 2.1 и 2.3, имеем оценку

$$\left|\frac{(\lambda_2^+)^2 A_2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B}\right| \le c\left|\frac{A_2}{((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2)}\right| \le \frac{c_3}{|\tau|^2},$$

$$\left|\frac{A_1(\lambda_2^+)^2|\tau|}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B}\right|$$

$$\le C\left|\frac{A_1(\varepsilon+|\xi'|^2)(|\tau|+|\xi'|)^{1/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)|\tau|^{1/2}}\right| \le \frac{c_4}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)},$$

$$\left|\frac{|\tau|(\lambda_1^+)^2 A_2}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B}\right|$$

$$\le C\left|\frac{(|\tau|^2+|\xi'|^2)(|\tau|+|\xi'|)^{1/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}|\tau|^{1/2}}\right| \le \frac{c_5}{\sigma^{3/2}|\tau|^{1/2}},$$

$$\left|\frac{|\tau|A_1(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\sigma(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B}\right|$$

$$\le C\left|\frac{(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)|\tau|^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}}\right| \le \frac{c_6}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)|\tau|^{1/2}}.$$

Из полученных неравенств в силу 3.9 вытекают требуемые оценки. □

Лемма 3.6 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и* $A_3 \neq 0$, *тогда имеют место оценки из леммы 3.4.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом соотношения из леммы и условия, что $A_3 \neq 0$, следует (3.6), т.е. $|\det B| \ge c|\lambda_1^+\lambda_2^+|$. Рассмотрим полученное выражение (3.9). Для подынтегральных выражений получаем следующие оценки

$$\left|\frac{A_1(\lambda_2^+)^2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}\right| \le c\left|\frac{A_1\lambda_2^+(\lambda_1^++\lambda_2^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+))\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+}\right|$$

$$\le C\left|\frac{|\tau|+|\xi'|}{\sigma\mathrm{Re}\lambda_2^+|\tau|(|\tau|^2+|\xi'|^2)}\right| \le \frac{c_1}{\sigma(\varepsilon+|\xi'|^2)^{1/2}|\tau|(|\tau|+|\xi'|)},$$

$$\left|\frac{A_1(\lambda_1^++\lambda_2^+)}{\mathrm{Re}\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B}\right| \le c\left|\frac{A_1(\lambda_1^++\lambda_2^+)^2}{\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+\mathrm{Re}\lambda_2^+\lambda_2^+((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+))}\right|$$

$$\le C\left|\frac{A_1(|\tau|+|\xi'|)^2}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)\mathrm{Re}\lambda_2^+\lambda_2^+|\tau|}\right| \le \frac{c_2}{\sigma(\varepsilon+|\xi'|^2)|\tau|},$$

$$\left|\frac{(\lambda_2^+)^2A_2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B}\right| \le c\left|\frac{(\lambda_2^+)(\lambda_1^++\lambda_2^+)A_2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+))\lambda_1^+}\right|$$

$$\le C\left|\frac{(|\tau|+|\xi'|)A_2}{\mathrm{Re}\lambda_2^+|\tau|^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)}\right| \le \frac{c_3}{(\varepsilon+|\xi'|^2)^{1/2}|\tau|^{3/2}},$$

$$\left|\frac{\lambda_1^+(\lambda_2^+)^2A_3}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}\right| \le c\left|\frac{\lambda_1^+\lambda_2^+(\lambda_1^++\lambda_2^+)A_3}{\mathrm{Re}\lambda_2^+((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+))\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+}\right|$$

$$\le C\left|\frac{(|\tau|+|\xi'|)^2A_3}{\sigma|\tau|(|\tau|^2+|\xi'|^2)}\right| \le \frac{c_4}{\sigma|\tau|},$$

$$\left|\frac{A_1(\lambda_2^+)^2|\tau|}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\det B}\right|$$

$$\le c\left|\frac{A_1\lambda_2^+|\tau|(\lambda_1^++\lambda_2^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_1^+)^{1/2}(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+))}\right|$$

$$\le C\left|\frac{A_1\lambda_2^+(|\tau|+|\xi'|)}{\sigma^{3/4}(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^{1/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)|\tau|^{1/4}}\right| \le \frac{c_5}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)}.$$

Принимая во внимание оценку $|(\lambda_1^+)^2 A_2 + A_1(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)| \le C(|\tau| + |\xi'|)^2$, имеем

$$\left|\frac{|\tau|((\lambda_1^+)^2 A_2 + A_1(\lambda_1^+ + \lambda_2^+))}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\det B}\right| \le$$

$$\left|\frac{c|\tau|((\lambda_1^+)^2 A_2 + A_1(\lambda_1^+ + \lambda_2^+))(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+))(\lambda_1^+)^{1/2}\lambda_2^+}\right|$$

$$\le C^*\left|\frac{(|\tau| + |\xi'|)^3}{\sigma^{3/4}(|\tau| + |\xi'|)^{3/2}|\tau|^{1/4}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}\lambda_2^+}\right| \le \frac{c_6}{\sigma^{3/4}|\tau|^{1/4}(\varepsilon + |\xi'|^2)^{1/2}}.$$

В завершение, учитывая $|\tau| \ge \sigma$, приходим к

$$\left|\frac{|\tau|\lambda_2^+(\lambda_1^+)^2 A_3}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{1/4}(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(((|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{1/2} + (\varepsilon + |\xi'|^2)^{1/2})\det B}\right|$$

$$\le c\left|\frac{|\tau|(\lambda_1^+)^2 A_3(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+)^{1/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{1/4}((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+))(|\tau| + |\xi'|)(\lambda_1^+)^{1/2}}\right|$$

$$\le C\left|\frac{(|\tau| + |\xi'|)^3}{\sigma^{3/4}(|\tau| + |\xi'|)^{5/2}(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{1/4}|\tau|^{1/4}}\right| \le \frac{c_7}{\sigma}.$$

Отсюда вытекают требуемые оценки при $A_3 \ne 0$ для L_2–норм функций $D_{x_n}^2 v_1(\tau, \xi', \xi_n)$, $|\xi'|^2 D_{x_n}^2 v_1(\tau, \xi', \xi_n)$ и $|\tau|^2 D_{x_n}^2 v_1(\tau, \xi', \xi_n)$. □

Лемма 3.7 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и* $A_3 = A_2 = 0$, $A_1 \ne 0$, *тогда при* $\gamma > \gamma_0$ *имеет место оценка*

$$\|D_{x_n}^4 v_1(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|$$

$$\le \frac{c}{\gamma_0}\||\tau|^2 \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\| + \frac{c}{\gamma_0}\||\xi'|^2 \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $\tilde{f}(\tau, \xi', x_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим выражение (3.8) при $k=4$:

$$D^4_{x_n} v_1(\tau,\xi',x_n)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_n\xi_n}\frac{P_1(\tau,\xi',\xi_n)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds}{((\lambda_1^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)(\lambda_2^++i\xi_n)\det B}d\xi_n$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix_n\xi_n}\frac{P_2(\tau,\xi',\xi_n)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde f(\tau,\xi',s)ds}{((\lambda_2^+)^2+\xi_n^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)(\lambda_1^++i\xi_n)\det B}d\xi_n, \quad (3.10)$$

где

$$P_1(\tau,\xi',\xi_n)=(\lambda_1^+)^4(\lambda_2^++i\xi_n)A_2+((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^++(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)(\lambda_2^++i\xi_n)A_1$$
$$+i\xi_n(\lambda_2^+)^3A_1-(\lambda_1^+)^2\lambda_2^+(i\xi_n(\lambda_2^+)^2+((\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2)(\lambda_2^++i\xi_n))A_3,$$
$$P_2(\tau,\xi',\xi_n)=(\lambda_2^+)^4(\lambda_1^++i\xi_n)A_2+((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^++(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)(\lambda_2^++i\xi_n)A_1$$
$$+i\xi_n(\lambda_2^+)^3A_1-(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+(i\xi_n(\lambda_2^+)^2+\lambda_1^+(\lambda_1^++\lambda_2^+)(\lambda_2^++i\xi_n))A_3.$$

Применяя последовательно к выражению (3.10) равенство Парсеваля, неравенство Минковского и неравенство Гёльдера, используя лемму 2.3, а затем используя теорему Тонелли, проинтегрируем по переменной ξ_n. Тогда учитывая оценку $|(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{1/2}+(\varepsilon+|\xi'|^2)^{1/2}|\geq(|\tau|+|\xi'|)$, приходим к неравенству

$$4\left\|D^4_{x_n}v_1(\tau,\xi',x_n),L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\right\|$$

$$\leq\left\|\frac{|\tau|(\lambda_1^+)^4A_2\tilde f(\tau,\xi',x_n)}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B},L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\right\|$$

$$+\left\|\frac{|\tau|((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^++(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)A_1\tilde f(\tau,\xi',x_n)}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B},L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\right\|$$

$$+\left\|\frac{|\tau|(\lambda_2^+)^3A_1\tilde f(\tau,\xi',x_n)\tilde f(\tau,\xi',x_n)}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{1/4}(|\tau|+|\xi'|)(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B},L_2(\mathbb{C}^+_\gamma\times\mathbb{R}^n_+)\right\|$$

$$
+\left\|\frac{|\tau|(\lambda_1^+)^2(\lambda_2^+)^3A_3\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{1/4}(|\tau|+|\xi'|)(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|
$$

$$
+\left\|\frac{|\tau|(\lambda_1^+)^2\lambda_2^+((\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2)A_3\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|
$$

$$
+\left\|\frac{(\lambda_2^+)^4A_2\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|
$$

$$
+\left\|\frac{((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^++(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)A_1\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|
$$

$$
+\left\|\frac{(\lambda_2^+)^3A_1\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|
$$

$$
+\left\|\frac{(\lambda_2^+)^4\lambda_1^+A_3\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}, L_2(\mathbb{C}_\gamma^+\times\mathbb{R}_+^n)\right\|
$$

$$
+\left\|\frac{(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+\lambda_1^+(\lambda_1^++\lambda_2^+)A_3\tilde{f}(\tau,\xi',x_n)}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}, L_2(\mathbb{R}_+^n)\right\|. \tag{3.11}
$$

При $A_3 = A_2 = 0$, имеем $|\det B| = |A_1|$. Рассмотрим выражение (3.11), а также оценки

$$
\left|\frac{|\tau|((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^++(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)A_1}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|
$$

$$
=\left|\frac{|\tau|(\lambda_2^++\lambda_1^+)((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^++(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)A_1|\lambda_1^+|^{1/2}}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\mathrm{Re}\lambda_1^+|\lambda_1^+|)^{1/2}((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)}\right|
$$

$$
\le c\left|\frac{|\tau|^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^4(|\tau|+|\xi'|)^{1/2}}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(|\tau|+|\xi'|)|\tau|^2}\right| \le c_2\frac{(|\tau|+|\xi'|)^2}{\sigma^{3/2}|\tau|^{1/2}},
$$

$$
\left|\frac{|\tau|(\lambda_2^+)^3A_1}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{1/4}(|\tau|+|\xi'|)(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|
$$

$$= \left| \frac{|\tau|(\lambda_2^+)^3(\lambda_2^+ + \lambda_1^+)|\lambda_1^+|^{1/2}}{\sigma(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{1/4}(|\tau| + |\xi'|)(\mathrm{Re}\lambda_1^+|\lambda_1^+|)^{1/2}((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2)} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{|\tau|^{3/2}(\varepsilon + |\xi'|)^3(|\tau| + |\xi'|)^{3/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau| + |\xi'|)^{5/2}|\tau|^2} \right| \leq c_3 \frac{|\xi'|^2}{\sigma^2},$$

$$\left| \frac{((\lambda_1^+)^3 + (\lambda_1^+)^2\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)A_1}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+ \det B} \right|$$

$$= \left| \frac{\lambda_1^+(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)((\lambda_1^+)^3 + (\lambda_1^+)^2\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)A_1}{\mathrm{Re}\lambda_2^+((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2)\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{|\tau|(|\tau| + |\xi'|)^5}{\sigma \mathrm{Re}\lambda_2^+|\tau|^2(|\tau|^2 + |\xi'|^2)} \right| \leq c \left| \frac{(|\tau| + |\xi'|)^3}{\sigma \mathrm{Re}\lambda_2^+|\tau|} \right| \leq \frac{c_5}{\sigma}(|\tau|^2 + |\xi'|^2),$$

$$\left| \frac{(\lambda_2^+)^3 A_1}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+ - \lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+ \det B} \right| = \left| \frac{\lambda_1^+(\lambda_2^+)^3(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)}{\mathrm{Re}\lambda_2^+((\lambda_2^+)^2 - (\lambda_1^+)^2)\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+} \right|$$

$$\leq c \left| \frac{(|\tau| + |\xi'|)^2(\varepsilon + |\xi'|^2)}{|\tau|(|\tau|^2 + |\xi'|^2)} \right| \leq c_6 \frac{|\xi'|^2}{\sigma|\tau|}.$$

Отсюда вытекает требуемая оценка для функции $D^4_{x_n} v_1(\tau, \xi', \xi_n)$ в рассматриваемом случае. $\square$

Лемма 3.8 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и* $A_3 = 0$, $A_2 \neq 0$, $A_1 \neq 0$, *тогда имеет место оценка из леммы 3.7.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом соотношения из леммы и условия, что $A_3 = 0$, следует (3.5). Рассмотрим формулу (3.11). Для подынтегральных выражений в первом, во втором, в третьем и в шестом слагаемых с учетом лемм 2.1, 2.3, имеем

$$\left| \frac{|\tau|(\lambda_1^+)^4 A_2}{\sigma(|\tau|^2 + |\xi'|^2)^{3/4}(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+ - \lambda_1^+) \det B} \right|$$

$$\leq c\left|\frac{|\tau|^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^4(|\tau|+|\xi'|)^{1/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(|\tau|+|\xi'|)|\tau|^2}\right| \leq c_1\frac{(|\tau|+|\xi'|)^2}{\sigma^{3/2}|\tau|^{1/2}},$$

$$\left|\frac{|\tau|((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)A_1}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|$$

$$\leq c\left|\frac{|\tau|^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^3(|\tau|+|\xi'|)^{1/2}}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(|\tau|+|\xi'|)|\tau|^2}\right| \leq c_2\frac{(|\tau|+|\xi'|)}{\sigma^{3/2}|\tau|^{1/2}},$$

$$\left|\frac{|\tau|(\lambda_2^+)^3A_1}{\sigma(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|$$

$$\leq c\left|\frac{|\tau|^{3/2}(\varepsilon+|\xi'|)^3(|\tau|+|\xi'|)^{1/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^{5/2}|\tau|^2}\right| \leq c_3\frac{|\xi'|}{\sigma^{3/2}|\tau|^{1/2}},$$

$$\left|\frac{(\lambda_2^+)^4A_2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right| \leq c\left|\frac{(\lambda_2^+)^4A_2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)}\right| \leq c_4\frac{|\xi'|^2}{|\tau|^2}.$$

Для подынтегральных выражений в седьмом и восьмом слагаемых из (3.11), в силу лемм 2.1 и 2.3, имеем

$$\left|\frac{((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^+ + (\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)A_1}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}\right|$$

$$\leq \left|\frac{c(|\tau|+|\xi'|)^4}{\sigma\mathrm{Re}\lambda_2^+|\tau|(|\tau|^2+|\xi'|^2)}\right| \leq \frac{c_5(|\tau|+|\xi'|)}{\sigma},$$

$$\left|\frac{(\lambda_2^+)^3A_1}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}\right| \leq c\left|\frac{(|\tau|+|\xi'|)(\varepsilon+|\xi'|^2)}{|\tau|^2(|\tau|^2+|\xi'|^2)}\right| \leq c_6\frac{|\xi'|}{\sigma|\tau|^2}.$$

С учетом неравенств из (3.11) приходим к требуемой оценке. □

Лемма 3.9 *Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и* $A_3 \neq 0$, *тогда имеют место оценки из леммы 3.4.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что при $A_3 \neq 0$ имеем оценку (3.6). Рассмотрим выражение (3.11). Тогда для подынтегрального выражения в первом и во втором слагаемых из (3.11), очевидно, получаем следующие оценки:

$$\left|\frac{|\tau|(\lambda_1^+)^4A_2}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|$$

$$\leq c\left|\frac{|\tau|(\lambda_1^+)^3A_2(\lambda_2^++\lambda_1^+)|\lambda_1^+|^{1/2}}{\sigma(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}(\mathrm{Re}\lambda_1^+|\lambda_1^+|)^{1/2}((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)\lambda_2^+}\right|$$

$$\leq c\left|\frac{|\tau|^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^4(|\tau|+|\xi'|)^{1/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^{5/2}|\tau|^2\lambda_2^+}\right|\leq c_1\frac{(|\tau|+|\xi'|)^2}{\sigma^{3/2}|\tau|^{1/2}(\varepsilon+|\xi'|^2)^{1/2}},$$

$$\left|\frac{|\tau|((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^++(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)A_1}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|$$

$$\leq c\left|\frac{|\tau|((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^++(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)(\lambda_2^++\lambda_1^+)}{\sigma(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}(\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+)^{1/2}\lambda_2^+|\lambda_1^+|^{1/2}((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)}\right|$$

$$\leq c\left|\frac{|\tau|^{7/4}(|\tau|+|\xi'|)^4}{\sigma^{7/4}(|\tau|+|\xi'|)^3(\varepsilon+|\xi'|^2)^{1/2}|\tau|^2}\right|\leq c_2\frac{|\tau|}{\sigma^2},$$

Для подынтегральных выражений в третьем, пятом и шестом слагаемых в (3.11) в силу лемм 2.1 и 2.3 имеем

$$\left|\frac{|\tau|(\lambda_2^+)^3A_1}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{1/4}(|\tau|+|\xi'|)(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|$$

$$\leq\left|\frac{|\tau|^{3/2}(\varepsilon+|\xi'|^2)(|\tau|+|\xi'|)}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^{5/2}(\lambda_1^+)^{1/2}|\tau|^2}\right|\leq c_3\frac{|\xi'|}{\sigma^{3/2}},$$

$$\left|\frac{|\tau|(\lambda_1^+)^2(\lambda_2^+)^3A_3}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{1/4}(|\tau|+|\xi'|)(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|$$

$$\leq c\left|\frac{|\tau|\lambda_1^+(\lambda_2^+)^2(\lambda_1^++\lambda_2^+)(\lambda_1^+)^{1/2}}{\sigma(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}(\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+)^{1/2}|\tau|^2}\right|\leq c^*\left|\frac{|\tau|^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^{5/2}|\xi'|^2}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^{5/2}|\tau|^2}\right|\leq c_4\frac{|\xi'|^2}{\sigma^2},$$

$$\left|\frac{|\tau|(\lambda_1^+)^2\lambda_2^+((\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2)A_3}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)^{3/4}(\mathrm{Re}\lambda_1^+)^{1/2}(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|$$

$$\leq c\left|\frac{|\tau|\lambda_1^+((\lambda_1^+)^2+(\lambda_2^+)^2)(\lambda_2^+-\lambda_1^+)(\lambda_1^+)^{1/2}}{\sigma(|\tau|+|\xi'|)^{3/2}(\mathrm{Re}\lambda_1^+\lambda_1^+)^{1/2}((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2)}\right|$$

$$\leq c\left|\frac{|\tau|^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^4(|\tau|+|\xi'|)^{1/2}}{\sigma^{3/2}(|\tau|+|\xi'|)^{5/2}|\tau|^2}\right|\leq c_5\frac{(|\tau|+|\xi'|)^2}{\sigma^2},$$

$$\left|\frac{(\lambda_2^+)^4A_2}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\det B}\right|\leq c\left|\frac{(\lambda_2^+)^3A_2(\lambda_2^++\lambda_1^+)}{(\mathrm{Re}\lambda_2^+)^2|\tau|^2\lambda_1^+}\right|\leq c_6\frac{|\xi'|}{\sigma|\tau|},$$

$$\left|\frac{((\lambda_1^+)^3+(\lambda_1^+)^2\lambda_2^++(\lambda_2^+)^2\lambda_1^+)A_1}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}\right|\leq c\left|\frac{|\tau|(|\tau|+|\xi'|)^4}{\sigma\mathrm{Re}\lambda_2^+\lambda_2^+|\tau|^2(|\tau|^2+|\xi'|^2)}\right|\leq c_7\frac{|\tau|}{\sigma},$$

$$\left|\frac{(\lambda_2^+)^3A_1}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}\right|\leq c\left|\frac{|\tau|(\lambda_2^+)(\lambda_2^++\lambda_1^+)}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)|\tau|^2}\right|\leq\frac{c_8}{\sigma|\tau|},$$

$$\left|\frac{(\lambda_2^+)^4\lambda_1^+A_3}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}\right|\leq c\left|\frac{|\tau|(\lambda_2^+)^2(|\tau|+|\xi'|)^2}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)|\tau|^2}\right|\leq c_9\frac{|\xi'|^2}{\sigma|\tau|},$$

$$\left|\frac{(\lambda_2^+)^2(\lambda_1^+)^2(\lambda_1^++\lambda_2^+)A_3}{\mathrm{Re}\lambda_2^+(\lambda_2^+-\lambda_1^+)\mathrm{Re}\lambda_1^+\det B}\right|\leq\left|\frac{c(|\tau|+|\xi'|)^4}{\sigma(|\tau|^2+|\xi'|^2)|\tau|}\right|\leq\frac{c_{10}}{\sigma}(|\tau|+|\tau||\xi'|+|\xi'|^2).$$

Учитывая полученные неравенства в силу (3.7), приходим к требуемой оценке. □

Доказательство теоремы 3.1.

Учитывая явный вид $v(\tau,\xi',x_n)$ из (2.19), заключаем, что $v(\tau,\xi',x_n)$ аналитична в $\mathbb{C}_\gamma^+$ при почти всех $(\xi',x_n)\in\mathbb{R}_+^n$. Таким образом, из лемм 2.5, 3.1–3.9 и обобщённой теоремы Пэли–Винера следует, что функция $u(t,x',x_n)=\mathfrak{L}^{-1}_{\tau\to t}F^{-1}(v(\tau,\xi',x_n))$, принадлежит пространству $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, при этом $D_t^2D_{x_n}^2u(t,x',x_n)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $D_t^2D_{x'}^2u(t,x',x_n)\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ при $\gamma>\gamma_0$, и является решением смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3).

Из оценок, установленных в леммах 2.5, 3.1–3.9, следует неравенство

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})\|$$

$$\leq c(\gamma_0)\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{2,2,0}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})\|.$$

Единственность решения вытекает из условия Лопатинского и обобщенной теоремы Пэли–Винера. $\square$

Рассмотрим пример, демонстрирующий, что если правая часть уравнения (2.1) будет обладать меньшим числом обобщенных производных, то есть $f(t,x) \notin W_{2,\gamma}^{2,2,0}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$, то решение не будет существовать в соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.1) с начально-краевыми условиями

$$\big(\varepsilon\mathbb{I} - \Delta\big) D_t^2 u + \Delta^2 u = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^2, \quad \varepsilon > 0, \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered} D_{x_2} u|_{x_2=0} = 0, \\ D_{x_2}^2 u|_{x_2=0} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Отметим, что при данных условиях $A_3 = 1$, $A_1 = A_2 = 0$. Тогда, согласно теореме 3.1, для однозначной разрешимости в пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^3)$, $\gamma > \gamma_0$ от правой части уравнения (3.12) достаточно потребовать принадлежность соболевскому пространству функций $W_{2,\gamma}^{2,2,0}(\mathbb{R}_{++}^3)$ и $f(t,x_1,x_2)|_{t=0} = D_t f(t,x_1,x_2)|_{t=0} = 0$.

Рассмотрим функцию $f(t,x_1,x_2) = g_1(t) g_2(x_1) g_3(x_2)$, где

$$g_1(t) = \begin{cases} \sin(t), & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad g_2(x_1) = \begin{cases} e^{-x_1}, & 0 < x_1 \leq 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$g_3(x_2) = \frac{1}{x_2^{2/3}+1}, \quad x_2 > 0.$$

Преобразование Лапласа и преобразование Фурье для функций $g_1(t)$ и $g_2(x_1)$ соответственно имеют вид

$$\tilde{g}_1(\tau) = \frac{e^{-\pi\tau+1}}{\tau^2+1}, \quad \hat{g}_2(\xi_1) = \frac{1-e^{-(i\xi_1+1)}}{i\xi_1+1}.$$

По предположению справедлива оценка

$$\|D_t^2 D_{x_1}^2 u(t,x_1,x_2), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^3_{++})\| \leq c < \infty.$$

Очевидно, что $f(t,x_1,x_2) \in W_{2,\gamma}^{1,0,0}(\mathbb{R}^3_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ и $f(t,x_1,x_2)|_{t=0} = 0$. Предположим, что с такой функцией $f(t,x_1,x_2)$ смешанная краевая задача (3.12), (3.13) имеет решение $u(t,x_1,x_2) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^3_{++})$ и $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^3_{++})$, $i = 1, 2$.

В силу обобщенной теоремы Пэли-Винера для получения формулы решения смешанной задачи (2.1), (2.2), (2.3) можно использовать решение краевой задачи

$$\begin{gathered}
\tau^2(\varepsilon\mathbb{I} + \xi_2^2 - D_{x_2}^2)v + (D_{x_2}^2 - \xi_2^2)^2 v = \tilde{f}(\tau,\xi_1,x_2), \quad x_2 > 0, \\
D_{x_2}u|_{x_2=0} = 0, \\
D_{x_2}^2 u|_{x_2=0} = 0, \\
v \in W_2^4(\mathbb{R}_+).
\end{gathered}$$

Учитывая теперь формулы решения вида (2.19), (2.22), (2.23), а также леммы 2.5, 3.1, 3.4, 3.7, приходим к тому, что особый интерес представляет часть решения, отвечающая за краевые условия. Выпишем соответствующую формулу

$$v_1(\tau,\xi_1,x_2) = -\frac{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)e^{-\lambda_1^+ x_2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi_1,s)ds}{2\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)}$$
$$+\frac{\lambda_2^+ e^{-\lambda_1^+ x_2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi_1,s)ds}{\lambda_1^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)}+\frac{\lambda_1^+ e^{-\lambda_2^+ x_2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi_1,s)ds}{\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)}$$
$$-\frac{(\lambda_1^+ + \lambda_2^+)e^{-\lambda_2^+ x_2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_2^+ s}\tilde{f}(\tau,\xi_1,s)ds}{2\lambda_2^+\big((\lambda_2^+)^2-(\lambda_1^+)^2\big)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)}. \quad (3.14)$$

Проделав перегруппировку слагаемых, которые описаны после формулировки теоремы 3.1, и используя информацию из лемм 3.3, 3.6 и 3.9, ясно, что нужно рассмотреть выражение:

$$J = \left\| \frac{\tau^2|\xi_1|^2(\lambda_1^+ + \lambda_2^+ + i\xi_n)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{g}_1(\tau)\hat{g}_2(\xi_1)g_3(s)ds}{\lambda_2^+(\lambda_2^+ + i\xi_2)(\lambda_1^+-\lambda_2^+)\big((\lambda_1^+)^2+\xi_2^2\big)}, L_2(C_\gamma^+\times\mathbb{R}^2)\right\|^2.$$

Очевидно, имеем

$$J \ge \sup_{\sigma>\gamma}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{\tau^2|\xi_1|^2(\mathrm{Re}\lambda_1^+ + \mathrm{Re}\lambda_2^+)^2\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{g}_1(\tau)\hat{g}_2(\xi_1)g_3(s)ds}{\lambda_2^+(\lambda_2^+ + i\xi_2)((\lambda_1^+)^2-(\lambda_2^+)^2)\big((\lambda_1^+)^2+\xi_2^2\big)}\right|^2 d\eta d\xi_1 d\xi_2$$

$$\ge \sup_{\sigma>\gamma}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\left|\frac{|\xi_1|^2(\sigma+\sqrt{\varepsilon+|\xi_1|^2})^2\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s}\tilde{g}_1(\tau)\hat{g}_2(\xi_1)g_3(s)ds}{\lambda_2^+(\lambda_2^+ + i\xi_2)\big(|\tau|^2+\xi_1^2+\xi_2^2\big)}\right|^2 d\eta d\xi_1 d\xi_2.$$

После интегрирования по переменной ξ_2, подставляя функции $\tilde{g}_1(\tau)$, $\hat{g}_2(\xi_1)$, $g_3(s)$, с учетом неравенства $(|\tau|^2+\xi_1^2)^{3/4} \le c(|\tau|+|\xi_1|)^{3/2}$ и того, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda_1^+ s}}{1+s^{2/3}} ds$ является сходящимся, приходим к оценке

$$J \geq \sup_{\sigma>\gamma} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi_1^2(\sigma+\sqrt{\varepsilon+\xi_1^2})^4(2\sqrt{|\tau|^2+\xi_1^2}+\sqrt{\varepsilon+\xi_1^2})d\eta d\xi_1}{\left|\sqrt[4]{\varepsilon+\xi_1^2}\sqrt{(|\tau|+|\xi_1|)^3}(\sqrt{|\tau|^2+\xi_1^2}+\sqrt{\varepsilon+\xi_1^2})(1+i\xi_1)\tau^2\right|^2}$$

$$\geq c^* \sup_{\sigma>\gamma} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\left|\sigma+\sqrt{\varepsilon+\xi_1^2}\right|^4 d\eta d\xi_1}{\left|\sqrt[4]{\varepsilon+\xi_1^2}(|\tau|^2+\xi_1^2)^{3/4}(\sqrt{|\tau|^2+\xi_1^2}+\sqrt{\varepsilon+\xi_1^2})^{1/2}\tau^2\right|^2}.$$

Рассмотрим теперь интеграл по переменной ξ_1

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(\sigma+\sqrt{\varepsilon+\xi_1^2})^4}{\sqrt{\varepsilon+\xi_1^2}(|\tau|^2+\xi_1^2)^{3/2}(\sqrt{|\tau|^2+\xi_1^2}+\sqrt{\varepsilon+\xi_1^2})} d\xi_1.$$

Очевидно, что данный интеграл расходится. Таким образом, получаем противоречие. Следовательно, для такой функции $f(t,x_1,x_2)$ решения не существует в соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^3_{++})$.

Рассмотрим теперь следующую функцию $f(t,x_1,x_2)$, которая из пространства $W_{2,\gamma}^{-2,0,0}(\mathbb{R}^3_{++})$, $\gamma>0$ и $D_t f(t,x_1,x_2)|_{t=0} = f(t,x_1,x_2)|_{t=0} = 0$: $f(t,x_1,x_2) = g_1(t)g_2(x_1)g_3(x_2)$

$$g_1(t) = \begin{cases} t\sin^2(t), & 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad g_2(x_1) = \begin{cases} e^{-x_1}, & 0 < x_1 \leq 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$g_3(x_2) = \frac{1}{x_2^{2/3}+1}, \quad x_2 > 0.$$

Предположим, что с такой функцией $f(t,x_1,x_2)$ смешанная краевая задача (3.12), (3.13) имеет решение $u(t,x_1,x_2) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}^3_{++})$ и $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^3_{++})$, $i=1,2$.

По предположению справедлива оценка

$$\|D_t^2 D_{x_1}^2 u(t,x_1,x_2), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^3_{++})\| \leq c < \infty.$$

Далее будем повторять предыдущую схему рассуждения. Преобразование Лапласа и преобразование Фурье для функций $g_1(t)$ и $g_2(x_1)$, очевидно, имеют вид

$$\tilde{g}_1(\tau) = \frac{e^{-\pi\tau}\left(\left(6\tau^2+8\right)e^{\pi\tau} - \tau^3 - 6\tau^2 - 8\pi\tau - 8\right)}{\tau^6 + 8\tau^4 + 16\tau^2},$$

$$\hat{g}_2(\xi_1) = \frac{1 - e^{-(i\xi_1+1)}}{i\xi_1 + 1},$$

соответственно. После перегруппировки слагаемых, описанной после формулировки теоремы 3.1 и информации из лемм 3.3, 3.6 и 3.9, ясно, что нужно рассмотреть выражение:

$$J = \left\| \frac{\tau^2|\xi_1|^2(\lambda_1^+ + \lambda_2^+ + i\xi_n)\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s} g_1(\tau)\hat{g}_2(\xi_1)g_3(s)ds}{\lambda_2^+(\lambda_2^+ + i\xi_2)(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)\left((\lambda_1^+)^2 + \xi_2^2\right)}, L_2(C_\gamma^+ \times \mathbb{R}^2) \right\|^2.$$

Имеем

$$J \geq \sup_{\sigma>\gamma} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\tau^2|\xi_1|^2(\mathrm{Re}\lambda_1^+ + \mathrm{Re}\lambda_2^+)^2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s} g_1(\tau)\hat{g}_2(\xi_1)g_3(s)ds}{\lambda_2^+(\lambda_2^+ + i\xi_2)((\lambda_1^+)^2 - (\lambda_2^+)^2)\left((\lambda_1^+)^2 + \xi_2^2\right)} \right|^2 d\eta d\xi_1 d\xi_2$$

$$\geq \sup_{\sigma>\gamma} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda_1^+ s} g_1(\tau)\hat{g}_2(\xi_1)g_3(s)ds|\xi_1|(\sigma + \sqrt{\varepsilon + |\xi_1|^2})^2}{(\lambda_2^+ + i\xi_2)\left(|\tau|^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2\right)} \right|^2 d\eta d\xi_1 d\xi_2.$$

После интегрирования по переменной ξ_2, подставляя функцию $g_1(\tau)\hat{g}_2(\xi_1)g_3(s)$, с учетом неравенства $(|\tau|^2 + \xi_1^2)^{3/4} \leq c(|\tau| + |\xi_1|)^{3/2}$ и того, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda_1^+ s}}{1+s^{2/3}}ds$ является сходящимся, имеем

$$J \geq \sup_{\sigma>\gamma} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi_1|^2(\sigma + \sqrt{\varepsilon + \xi_1^2})^4(2\sqrt{|\tau|^2 + \xi_1^2} + \sqrt{\varepsilon + \xi_1^2})|\tau|^{-6} d\eta d\xi_1}{|\sqrt[4]{\varepsilon + \xi_1^2}(|\tau| + |\xi_1|)^{3/2}(\sqrt{|\tau|^2 + \xi_1^2} + \sqrt{\varepsilon + \xi_1^2})(1 + i\xi_1)|^2}$$

$$\geq c^* \sup_{\sigma>\gamma} \iint_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{(\sigma + \sqrt{\varepsilon + \xi_1^2})^2}{\sqrt[4]{\varepsilon + \xi_1^2}(|\tau| + |\xi_1|)^{3/2}(\sqrt{|\tau|^2 + \xi_1^2} + \sqrt{\varepsilon + \xi_1^2})^{1/2}\tau^3} \right|^2 d\eta d\xi_1.$$

Рассмотрим интеграл по переменной ξ_1

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(\sigma + \sqrt{\varepsilon + \xi_1^2})^4}{\sqrt{\varepsilon + |\xi_1|^2}(|\tau|^2 + \xi_1^2)^{3/2}(\sqrt{|\tau|^2 + \xi_1^2} + \sqrt{\varepsilon + |\xi_1|^2})} d\xi_1.$$

Очевидно, что этот интеграл расходится, то есть получаем противоречие. Следовательно, для такой функции $f(t, x_1, x_2)$ смешанная задача не имеет решение в соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^3)$.

3.2 Смешанные краевые задачи с обратимым оператором при старшей производной по времени и младшими членами

Настоящий раздел посвящен обобщению результатов, полученных выше.

Рассмотрим класс смешанных краевых задач в четверти пространства при $t > 0$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, $\varepsilon > 0$, для дифференциального уравнения

$$\big(\varepsilon\mathbb{I} - L_0(D_x)\big)D_t^2 u + [L_0(D_x)]^2 u + \sum_{|\beta|\leq 2} b_\beta D_x^\beta u = f(t, x), \tag{3.15}$$

с начально-краевыми условиями

$$\begin{gathered} (b_{11}u + b_{12}D_{x_n}u + b_{13}D_{x_n}^2 u)\big|_{x_n=0} = 0, \\ (b_{21}u + b_{22}D_{x_n}u + b_{23}D_{x_n}^2 u)\big|_{x_n=0} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0, \end{gathered} \tag{3.16}$$

где $\varepsilon > 0$ и $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ и $j = 1, 2, 3$, $b_\beta \in \mathbb{C}$.

Теорема 3.2 *Пусть $\varepsilon > 0$, и A_i, $i = 1, 2, 3$, не удовлетворяют условиям из теоремы 2.1, при этом не все A_i одинаковые. Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что задача (3.15) однозначно разрешима в пространстве функций $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$, таких, что $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$,*

$i = 1, \dots, n$ при $\gamma > \gamma_0$, для любой $f(t, x', x_n)$ из соболевского пространства $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ такой, что $f(t, x', x_n)|_{t=0} = D_t f(t, x', x_n)|_{t=0} = 0$. Для решения $u(t, x)$ выполнена оценка:

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| \\ \le c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|,$$

где константа $c(\gamma_0)$ не зависит от $f(t, x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем уравнение (3.15) с младшими членами в следующей форме:

$$L(D_t, D_x)u - L_{\text{мл}}(D_x)u = f(t,x),$$

здесь

$$L(D_t, D_x) = \big(\varepsilon\mathbb{I} - L_0(D_x)\big)D_t^2 + [L_0(D_x)]^2,$$
$$L_{\text{мл}}(D_x) = -\sum_{|\beta|\le 2} b_\beta D_x^\beta.$$

При доказательстве теоремы 3.1 было построено решение краевой задачи для любой $f(t,x) \in W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, и $D_t f(t, x', x_n)|_{t=0} = f(t, x', x_n)|_{t=0} = 0$, то есть в операторном виде решение смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3) имеет вид

$$u(t,x) = \mathfrak{L}^{-1}_{\tau\to t}(F^{-1}[v(\tau, \xi', x_n)]) = Rf(t,x).$$

В силу оценок из лемм 2.5, 3.1–3.9

$$\|v_0(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\| + \||\xi'|^k v_0(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\|$$

$$+\|v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\| + \||\xi'|^k v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\|$$

$$+\|D^k_{x_n} v_0(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\| + \|D^k_{x_n} v_1(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}^+_\gamma \times \mathbb{R}^n_+)\|$$

$$\leq \frac{c}{\gamma_0}\|\tilde{f}(\tau,\xi',x_n), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times \mathbb{R}_+^n)\|, \quad k=1,2,$$

приходим к

$$\|u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})\| + \|D_x u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})\|$$
$$+ \|D_x^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})\| \leq \frac{c^*}{\gamma_0}\|f(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})\|. \quad (3.17)$$

Решение краевой задачи (3.15), (3.16) будем искать в виде

$$u(t,x) = Rg(t,x), \qquad g(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,2,0}(\mathbb{R}_{++}^{n+1}), \quad g|_{t=0} = D_t g|_{t=0} = 0.$$

Тогда неизвестная функция $g(t,x)$ будет определяться из уравнения

$$L(D_t,D_x)Rg(t,x) - L_{\text{МЛ}}(D_x)Rg(t,x) = f(t,x), \quad t>0, \quad x_n>0. \quad (3.18)$$

В силу того, что $L(D_t,D_x)R = \mathbb{I}$, задача (3.18) редуцируется к решению операторного уравнения в пространстве функций $W_{2,\gamma}^{2,2,0}(\mathbb{R}_{++}^{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$ таких, что $D_t f(t,x',x_n)|_{t=0} = f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$, которое имеет вид

$$[\mathbb{I} - A]g(t,x) = f(t,x), \quad t>0, \quad x_n>0, \quad (3.19)$$

где $A = L_{\text{МЛ}}(D_x)R$. В силу оценки (3.17), а также определения оператора $L_{\text{МЛ}}(D_x)$, для нормы оператора A справедливо неравенство

$$\|A\| \leq \frac{\hat{c}}{\gamma_0},$$

причем $\hat{c}$ не зависит от γ_0. Тогда найдется такое $\tilde{\gamma}_0 \in \mathbb{R}_+$, что для всех $\gamma_0 > \tilde{\gamma}_0$ будет справедливо

$$\|A\| \leq q < 1.$$

Следовательно, применяя теорему фон Неймана [25] к уравнению (3.19), получаем единственное решение

$$g(t,x) = [\mathbb{I} - A]^{-1} f(t,x), \quad t > 0, \quad x_n > 0,$$

которое принадлежит классу $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ и $D_t g(t,x',x_n)|_{t=0} = g(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$, причем справедлива оценка

$$\|[\mathbb{I} - A]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - ||A||}.$$

Из всего вышеизложенного можно прийти в заключению, что функция

$$u(t,x) = R[\mathbb{I} - A]^{-1} f(t,x)$$

является искомым решением краевой задачи (3.15), (3.16). Очевидно, решение определяется единственным образом. $\square$

3.3 Смешанные краевые задачи с однородным эллиптическим оператором при старшей производной по времени

Перейдем к формулировке результатов в случае, когда $\varepsilon = 0$ для нерегулярных смешанных задач.

Теорема 3.3 *Пусть $n > 4$, $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \leq 3$ и A_i, $i = 1,2,3$, не удовлетворяют условиям из теоремы 2.3, при этом не все A_i одинаковые. Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что задача (2.1)–(2.3) однозначно разрешима в классе функций $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ таких, что $D^2_t D^2_{x_i} u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1,\ldots,n$, для любой $f(t,x',x_n)$ из класса $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ такой, что $f(t,x',x_n)|_{t=0} = D_t f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$ и $f(t,x) \in$*

$L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1}))$. *Для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$\leq c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Теорема 3.4 *Пусть* $n = 2, 3, 4$, $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \leq 3$ *и* A_i, $i = 1, 2, 3$, *не удовлетворяют условиям из теоремы 2.4, при этом не все* A_i *одинаковые. Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (2.1)–(2.3) *однозначно разрешима в пространстве функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ *таких, что* $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \ldots, n$, *для любой* $f(t,x',x_n)$ *из класса* $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ *такой, что* $f(t,x',x_n)|_{t=0} = D_t f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$, *при этом*

$$(1 + |x'|^{|\alpha|}) f(t,x',x_n) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1})), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} x'^{\alpha} f(t,x',x)\,dx' = 0,$$

где $|\alpha| = 0$ *при* $n = 3, 4$, $|\alpha| = 1$ *при* $n = 2$. *Для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$\leq c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$+ \|\|(1 + |x'|^{|\alpha|}) f(t,x',x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Как уже отмечалось, при $\varepsilon = 0$ решение вспомогательной задачи (2.18) при $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ можно выписать, как и в случае $\varepsilon > 0$:

$$v(\tau, \xi', x_n) = v_0(\tau, \xi', x_n) + v_1(\tau, \xi', x_n).$$

Но для того, чтобы использовать указанную выше конструкцию для получения решения смешанной краевой задачи (2.1)–(2.3), нужно применять ее регуляризацию с использованием функций $\chi^m(\xi')$:

$$\chi^m(\xi') = \begin{cases} 1, & |\xi'| > 1/m, \\ 0, & |\xi'| < 1/m, \end{cases}$$

то есть рассматривать последовательность $\{v^m(\tau, \xi', x_n)\}$, где $v^m(\tau, \xi', x_n) = v(\tau, \xi', x_n)\chi^m(\xi')$.

Согласно леммам 2.6, 2.7 и 2.8, учитывая размерности, оценки на функцию $v_0^m(\tau, \xi', x_n)$ уже получены. Обратимся к той части решения, которое отвечает за граничные условия при $x_n = 0$.

Описание поэтапного получения явного вида этой функции $v_1(\tau, \xi', x_n)$ опускаем, так как это было проделано в параграфе 3.1. Последовательность $\{v_1^m(\tau, \xi', x_n)\}$ имеет вид

$$v_1^m(\tau, \xi', x_n) = v_1(\tau, \xi', x_n)\chi^m(\xi') = -v_1^1(\tau, \xi', x_n)\chi^m(\xi')$$

$$-v_1^2(\tau, \xi', x_n)\chi^m(\xi') = -v_{11}^m(\tau, \xi', x_n) - v_{22}^m(\tau, \xi', x_n),$$

и $v_1^1(\tau, \xi', x_n)$, $v_1^2(\tau, \xi', x_n)$ из (3.3). Для получения оценок $v_1^m(\tau, \xi', x_n)$ следует повторить рассуждения из доказательств лемм 3.1–3.9.

Доказательство теоремы 3.3 проводится по аналогии с доказательством теоремы 2.3 с использованием оценок, установленных в леммах 3.1–3.9. □

Доказательство теоремы 3.4 проводится по аналогии с доказательством теоремы 2.4 с использованием оценок, установленных в леммах 3.1–3.9. □

Заключение

В диссертационной работе проведено исследование корректности смешанных краевых задач для класса псевдогиперболических уравнений четвертого порядка в четверти пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{++}$. Основные научные результаты:

1. Выделены и исследованы классы регулярных и нерегулярных смешанных краевых задач, удовлетворяющих условию Лопатинского.

2. Установлены достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решений рассматриваемых задач в анизотропном весовом соболевском пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости.

3. Получены явные формулы решений и их оценки для смешанных краевых задач с помощью применения аналитического подхода, основанного на преобразовании Фурье-Лапласа.

Таким образом, настоящая работа представляет собой систематическое исследование корректности смешанных краевых задач для класса псевдогиперболических уравнений четвертого порядка. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени.

Список литературы

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 205 с.
2. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи параметром и параболические задачи общего вида // Успехи. мат. наук. – 1964. – Т.16, № 9. – С. 53–161.
3. Белоносов С. М., Черноус К. А. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
4. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975.
5. Бондарь Л. Н., Мингнаров С. Б. О необходимых условиях разрешимости для одной псевдогиперболической системы // Математические труды. – 2024. – Т. 27, № 2. – С. 26–39.
6. Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В. Краевые задачи для одного псевдогиперболического уравнения в четверти плоскости // Математические труды. – 2021. – Т. 24, № 2. – С. 3–23.
7. Брузон М. С. Явные решения обобщенного уравнения Буссинеска // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 160. – С. 23–34.
8. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. – Москва-Ленинград: Стройиздат, 1940.
9. Власов В.З Тонкостенные упругие стержни, 2-е изд., перераб. и доп. – М.:Физматгиз, 1959.
10. Габов С. А. Математические основы линейной теории ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме // Мат. моделирование. – 1989. – Т. 1, № 12. – С. 133–148.

11. Габов С. А., Свешников А. Г. Математические задачи динамики флотирующей жидкости // Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ». – 1990. – Т. 28. – С. 3–86.

12. Габов С. А., Крутицкий П. А. Энергетические характеристики нестационарных внутренних волн в вертикальном канале со стратифицированной жидкостью // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1990. – Т. 30, № 5. – С. 751–766.

13. Гальперн С. А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Труды Моск. мат. о-ва. – 1960. – Т. 9. – С. 401–423.

14. Гальперн С. А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными (автореферат докторской диссертации) // Успехи мат. наук. – 1963. – Т. 18, вып. 2. – С. 239–249.

15. Герасимов С. И., Ерофеев В. И. Задачи волновой динамики элементов конструкций. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2014.

16. Годунов С. К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994. – Т. 1: Краевые задачи.

17. Демиденко Г. В., Ма С. Об одном классе псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами // Сибирский математический журнал. – 2025. – Т. 66, №6. – С. 1063–1073.

18. Демиденко Г. В., Нурмахматов В. С. Энергетические оценки для одного равномерно строго псевдогиперболического оператора // Челяб. физ.-матем. журн. – 2025. – Т. 10, №4. – С. 649–663.

19. Демиденко Г. В. Энергетические оценки для одного класса псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2024. – Т. 64, № 8. – С. 1466–1475.

20. Демиденко Г. В., Кудрявцев А. А. Краевые задачи в четверти плоскости для уравнения Рэлея–Бишопа // Математические заметки СВФУ. – 2021. – Т. 28, № 3. – С. 5–18.

21. Демиденко Г. В. Пространства Соболева и обобщенные решения: учеб. пособие. – Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.

22. Демиденко Г. В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1289–1303.

23. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. – Новосибирск: Научная книга, 1998.

24. Дюжева А. В. Задача с интегральным условием I рода для уравнения четвертого порядка // Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер. – 2019. – Т. 25, № 1. – С. 21–31.

25. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.

26. Корпусов М. О., Свешников А. Г. О разрушении решений класса сильно нелинейных волновых диссипативных уравнений типа Соболева с источниками // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2005. – Т. 69, № 4. – С. 89–128.

27. Крайс О. Смешанная задача для гиперболических систем // Математика. – 1970. – Т. 14, № 4. – С. 98–111.

28. Крейн С. Г., Хазан М. И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Серия «Математический анализ». – 1983. – Т. 21. – С. 130–264.

29. Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Задачи о малых движениях тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33, № 1. – С. 117–123.

30. Копачевский Н. Д. Применение метода С. Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1976. – Т. 16, № 2. – С. 426–439.

31. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1961.

32. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1984.

33. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения – М.: Мир, 1971.

34. Нго Зуй Кан, Чан Тху Ха. Малые движения системы вязких вращающихся жидкостей при наличии тепловой конвекции // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1989. – Т. 29, № 4. – С. 577–588.

35. Пулькина Л. С. Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2016. – № 9. – С. 42–50.

36. Романенков А. М. О единственности решения начально-краевой задачи для линейного псевдогиперболического уравнения высокого порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2025. – Т. 29, № 4. – С. 740–749.

37. Сакамото Р. Смешанные задачи для гиперболических уравнений. I. Энергетические неравенства // Математика. – 1972. – Т. 16, № 1. – С. 62–80.

38. Сакамото Р. Смешанные задачи для гиперболических уравнений. II // Математика. – 1972. – Т. 16, № 1. – С. 81–99.

39. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

40. Соболев С. Л. Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, филиал «Гео» изд-ва СО РАН, 2003.

41. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М : Наука, 1967. – 444 с.

42. Умаров Х. Г. Задача Коши для уравнения крутильных колебаний нелинейно-упругого стержня бесконечной длины // Прикладная математика и механика. – 2019. – Т. 83, № 2. – С. 249–264.

43. Умаров Х. Г. Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболического уравнения, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска // Сибирский математический журнал. – 2022. – Т. 63, № 3. – С. 672–689.

44. Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г. Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. – Новосибирск: Наука, 1984.

45. Федоров В. Е. Голоморфные разрешающие полугруппы уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Математический сборник. – 2004. – Т. 195, № 8. – С. 131–160.

46. Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 417, № 1. – С. 56–61.

47. Чириков В. А. Уравнения поперечных колебаний коротких балок: Деп. в ВИНИТИ 06.12.2005, № 1595–В2005, 2005.

48. Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 320 с.

49. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1961.

50. Шазарен Ж., Пириу А. Описание корректно поставленных гиперболических смешанных задач // Математика. – 1974. – Т. 18, № 2. – С. 79–109.

51. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams // Aeronautical Quarterly. – 1952. – Т. 3, № 4. – С. 280–293.

52. Bondar L. N., Demidenko G. V. Solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic system // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2021. – Т. 66, № 6–7. – С. 1084–1099.

53. Bondar L. N., Nurmakhmatov V. On solvability of the boundary value problem for one pseudohyperbolic equation // Сибирские электронные математические известия. – 2021. – Т. 18, № 2. – С. 1046–1057.

54. Carroll R. W., Showalter R. E. Singular and Degenerate Cauchy Problems. — N. Y.: Academic Press, 1976. — 333 p.

55. Chen G., Song R., Wang S. Local existence and global nonexistence theorems for a damped nonlinear hyperbolic equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2010. – Т. 368, № 1. – С. 19–31.

56. Constantin Ad., Molinet L. The initial value problem for a generalized Boussinesq equation // Differential Integral Equations. – 2002. – Т. 15, № 9. – С. 1061–1072.

57. Favini A., Yagi A. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces. – New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, 1999.

58. Fedotov I., Shatalov M., Marais J. Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration // Acta Mechanica. – 2016. – T. 227, № 11. – C. 3315–3324.

59. Fedotov I., Volevich L. V. The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2006. – T. 13, № 3. – C. 278–292.

60. Lerey J. Essai sur mouvement plans dun liquide visqueux que limitent des parois // J. Math.-Pures Appl. Ser. IX. – 1934. – T. 13, fasc. 4. – P. 331-418.

61. Leray J., Schauder J. Topologie et equations fonctionnelles // Ann. Sci. – 1934. – Vol. 51. – P. 45–78.

62. Oseen C. W. Hydrodynamik. – Leipzig: Akademische, 1927.

63. Pereira P. J. S., Lopes N. D., Trabuco L. Soliton-type and other travelling wave solutions for an improved class of nonlinear sixth-order Boussinesq equations // Nonlinear Dynam. – 2015. – T. 82, № 1–2. – C. 783–818.

64. Polat N., Piskin E. Existence and asymptotic behavior of solution of Cauchy problem for the damped sixth-order Boussinesq equations // Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. – 2015. – Vol. 31, № 3. – P. 735–746.

65. Rao J. S. Advanced Theory of Vibration. – New Delhi: Wiley Eastern, 1992.

66. Rossby C.G. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacement of the semi-permanent centers of action // J. Marine Res.– 1939.– Vol. 2, № 1. – P. 38-55.

67. Schneider G., Wayne C. E. Kawahara dynamics in dispersive media // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2001. – T. 152–153. – P. 384–394.

68. Showalter R. E. Partial differential equations of Sobolev—Galpern type // Pacific J. Math. — 1969. — Vol. 31, № 3. — P. 214–231.

69. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 568 p.

70. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators, Inverse and Ill-Posed Problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2003. – 226 p.

71. Ting T. W. Parabolic and pseudo-parabolic partial differential equations // J. Math. Soc. Japan. — 1969. — Vol. 21, № 3. — P. 440–453.

72. Wang Yp., Guo Bl. Blow-up of solution for a generalized Boussinesq equation // Applied Mathematics and Mechanics. – 2007. – T. 28. – C. 1437–1443.

73. Zhang Z., Huang J., Sun M. Well-posedness and decay property for the generalized damped Boussinesq equation with double rotational inertia // Kodai Math. J. – 2016. – T. 39, № 3. – C. 535–551.

Публикации автора по теме диссертации

74. Шеметова В. В. Одна краевая задача для псевдогиперболического уравнения в четверти пространства // Математические труды. – 2025. – Т. 28, № 2. – С. 102–123

75. Shemetova V. V. Solvability Conditions for an Initial-boundary Value Problem a Pseudo-hyperbolic Equation with Nonzero Initial Conditions // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2025. – T. 46, № 4. – C. 1910–1919.

76. Шеметова В. В. Об одной краевой задаче для псевдогиперболического уравнения // Математические труды. – 2023. – Т. 26, № 1. – С. 192–207.

77. Бондарь Л. Н., Шеметова В. В. О краевых задачах в четверти плоскости для одного псевдогиперболического уравнения // Математические труды. – 2022. – Т. 25, № 2. – С. 3–30.

Тезисы и материалы конференций

78. Shemetova V. V. On solvability conditions for boundary value problems for the Vlasov- Rayleigh-Bishop equation // 2024 International Conference on Computational Modeling and Applied Mathematics - Chinese-Russian Conference «Differential Equations and Applications». – Dalian, China – C. 34.

79. Shemetova V. V. Boundary value problems for a class of pseudohyperbolic equations // Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2024). Proceedings of the 8th International School-Seminar. – Irkutsk: Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, 2024. – C. 246–247.

80. Шеметова В. В. Смешанные задачи в четверти пространства для одного псевдогиперболического уравнения // Материалы 61-й Международной научной студенческой конференции. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2023. – С. 112.

81. Шеметова В. В. Об одной краевой задаче в четверти пространства для псевдогиперболического уравнения // Материалы конференции. В 2-х частях. Том Часть 2. – Могилев: Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования «Белорусско-Российский университет», 2023. – С. 35–36.

82. Shemetova V. V. An initial-boundary value problem for a pseudohyperbolic equation // Differential and Difference Equations. Russian-Chinese Conference. – Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2023. – C. 146.