РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н.Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук
(ИММ УрО РАН)
г.Екатеринбург, 620990
ул.Софьи Ковалевской, д.16
тел.(343) 374-83-32, факс 374-25-81
E-mail bvi@imm.uran.ru
16.04.2015 № 16343/18 - 2171
На № от .

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор Института
математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
академик РАН

В.И. Бердышев

«16» апреля 2015 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертацию Кузнецова Павла Александровича «Аналитические решения задачи об инициировании тепловой волны для нелинейного уравнения теплопроводности», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертация Кузнецова П.А. посвящена доказательству теорем существования и единственности, а также построению кусочно-аналитических решений задач с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности, записанного в полярных или сферических координатах. При этом рассмотренные задачи при некоторых дополнительных предположениях могут быть интерпретированы как задачи об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданным на замкнутой достаточно гладкой поверхности, ограничивающей область, обладающую свойством звездности.

Нелинейное уравнение теплопроводности имеет широкую область применения при моделировании различных физических процессов. В диссертационной работе автор рассматривает наиболее интересный с точки зрения приложений случай степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. При наличии такого рода нелинейности уравнение теплопроводности может описывать фильтрацию идеального политропного газа, проходящего через пористый грунт. Исследованиями нелинейного уравнения теплопроводности (фильтрации) и различных начально-краевых задач для него занимались такие выдающиеся ученые, как Ж. Буссинеск, Я.Б. Зельдович, Г.И. Баренблатт, О.А. Олейник, О.А. Ладыженская, А.А. Самарский, Х.Л. Васкес и другие. Задачи, рассматриваемые в диссертации, имеют решения типа тепловых волн, имеющих конечную скорость распространения по холодному фону. В линейном случае такие решения известны со времен Ж. Фурье. Первые подобные примеры для нелинейного случая встречаются в работах 1950-х годов Я.Б. Зельдовича, А.С. Компанейца; Г.И. Баренблатта и О.А. Олейник. Большой вклад в исследование вышеуказанных задач в классе аналитических функций был сделан А.Ф. Сидоровым и представителями его научной школы. Помимо работ самого А.Ф. Сидорова, можно выделить работы С.П. Баутина, С.С. Титова, М.Ю. Филимонова, Н.А. Вагановой, А.Л. Казакова, Л.И. Рубиной и других ученых.

Диссертация П.А. Кузнецова посвящена наименее изученному на сегодняшний день случаю, когда уравнение поверхности, на которой заданы краевые условия, не может быть однозначно разрешено относительно одной из переменных, и указанная поверхность является замкнутой. Поэтому тема исследования является актуальной и представляет интерес для теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Остановимся кратко на содержании диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 153 наименования, и пяти приложений. Общий объем диссертации – 139 страниц.

Во введении автор дает историческую справку, обосновывает актуальность темы исследования, вводит основные определения, формулирует цели работы, излагает основные результаты, вынесенные на защиту, описывает структуру диссертации.

Первая глава состоит из пяти разделов и посвящена исследованию задачи с краевым режимом, заданным на сфере либо цилиндре. В первых двух разделах главы автор формулирует и доказывает теорему существования и единственности аналитического в некоторой окрестности $\tau = 0$, $\rho = R$ решения задачи

$$u_\tau = u\left(\frac{\nu}{\rho}u_\rho + u_{\rho\rho}\right) + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2; \tag{1}$$

$$u(\tau,\rho)\big|_{\rho=R} = f(\tau), \tag{2}$$

где ν, σ, R – положительные константы, а функция $f(\tau)$ (краевой режим) является аналитической в некоторой окрестности $\tau = 0$ и обладает свойствами

$$f(0) = 0; \qquad f'(0) = f_1 > 0.$$

При этом единственность решения предполагается с точностью до знака $u_\rho\big|_{\tau=0;\ \rho=R}$. Доказательство теоремы проведено очень подробно по схеме, которая использована также при доказательстве теорем в случаях большей размерности.

В третьем разделе главы проведено построение решения задачи (1), (2) в виде кратного степенного ряда, и выписаны рекуррентные формулы для его коэффициентов. Также в конце раздела автор приводит доказательство следствия, утверждающего, что при $\nu = 1$ и $\nu = 2$ задача (1), (2) имеет в некоторой окрестности $\tau = 0$, $\rho = R$ единственное кусочно-аналитическое решение, удовлетворяющее условию $u(0,\rho) = 0$ и являющееся тепловой волной (причем выбор направления движения последней обеспечивает единственность решения).

В четвертом разделе приведены результаты иллюстрирующих численных расчетов, выполненных на основе отрезков построенных рядов. Данные результаты сопоставлены с результатами расчетов, выполненных с помощью метода граничных элементов.

В пятом разделе первой главы результаты, полученные в первых трех разделах, обобщаются на случай трех пространственных переменных.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию задачи

$$u_\tau = u\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}u_\rho\right) + \frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\varphi^2\right); \qquad (3)$$

$$u(\tau,\rho,\varphi)\big|_{\rho=R(\varphi)} = f(\tau,\varphi). \qquad (4)$$

Здесь уравнение (3) – нелинейное уравнение теплопроводности, записанное в полярных координатах, переменные ρ и φ таковы, что $\rho > 0$, а $\varphi \in \Upsilon$, где Υ – некоторый конечный или бесконечный числовой промежуток. Функции $R(\varphi) > 0$ и $f(\tau,\varphi)$ являются аналитическими в некоторой окрестности $\tau = 0$ и при всех допустимых φ. Функция $f(\tau,\varphi)$ также удовлетворяет условиям

$$f(0,\varphi) = 0; \qquad f_\tau(0,\varphi) > 0.$$

В первых двух разделах второй главы сформулирована и доказана теорема существования и единственности аналитического решения задачи (3), (4) в некоторой полной окрестности $\tau = 0$, $\rho = R(\varphi)$ при выборе знака $u_\rho\big|_{\tau=0;\ \rho=R}$.

В третьем разделе решение задачи (3), (4) построено в виде двойного степенного ряда с коэффициентами, зависящими от φ. При этом для определения коэффициентов ряда возможно использование рекуррентных формул, полученных в третьем разделе первой главы. В конце раздела автор приводит следствие из доказанной теоремы, утверждающее, что при $\Upsilon = [0; 2\pi]$ и при периодичности функций f и R по φ с периодом 2π, задача (3), (4) имеет единственное кусочно-аналитическое решение, удовлетворяющее начальному условию $u\big|_{\tau=0} = 0$ и являющееся в некоторой окрестности $\tau = 0$, $\rho = R(\varphi)$ аналитической тепловой волной при выборе направления движения последней.

В третьей главе диссертации результаты предыдущей главы обобщаются на случай трех пространственных переменных. При этом рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности в случае сферических координат с краевым условием

$$u(\tau,\rho,\varphi,\theta)\big|_{\rho=R(\varphi,\theta)}=f(\tau,\varphi,\theta).$$

Схема исследований та же, что и во второй главе. В первых двух разделах сформулирована и доказана теорема существования и единственности аналитического решения задачи. В третьем разделе построено решение в виде двойного степенного ряда с коэффициентами, зависящими от переменных φ и θ, и сформулировано следствие, аналогичное следствию из третьего раздела второй главы.

В приложения вынесены вспомогательные выкладки и утверждения.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Доказаны новые теоремы существования и единственности локально-аналитических решений краевых задач с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности, записанного в полярных (цилиндрических) и сферических координатах.

2. Построены новые аналитические решения нелинейного уравнения теплопроводности, удовлетворяющие краевым условиям специального вида с вырождением, и имеющие вид двойных рядов по степеням переменных r (расстояние до многообразия, несущего граничные условия) и t (время), коэффициенты которых определяются при решении трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений. Получены рекуррентные формулы для коэффициентов. Выполнены иллюстрирующие численные расчеты с использованием отрезков рядов.

3. Показано, что доказанные утверждения и найденные решения могут быть использованы для построения аналитических тепловых волн, распространяющихся по холодному фону с конечной скоростью, которые порождены краевыми режимами, заданными на замкнутых поверхностях, таких, как круговой цилиндр; сфера; аналитическая кривая или поверхность, ограничивающая звездную область.

Диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне. Основные утверждения снабжены полными доказательствами. Автором получен ряд новых результатов, представляющих несомненный интерес для теории дифференциальных уравнений в частных производных.

По диссертации имеется несколько замечаний.

1. Необходимость выполнения условия звездности, определенного автором во введении, упоминается также в разделах 2.1 и 3.1. Тем не менее, было бы уместным упомянуть о нем в тексте самих следствий. В формулировках следствий 3 и 4 следовало бы указать, что кривая $\rho=R(\varphi)$ и поверхность $\rho=R(\varphi,\theta)$, будучи замкнутыми (в силу периодичности функций R), ограничивают области, обладающие свойством звездности.

2. В разделе 1.4 было бы целесообразно подвести итог всего вычислительного эксперимента в целом, не ограничиваясь комментариями отдельных его этапов.

3. Из текста диссертации неясно, какого рода трудности возникают при увеличении размерности задачи. Следовало бы остановиться на этом более подробно.

4. Радиус сходимости построенных рядов никак не оценивается.

Эти замечания не влияют на общую положительную оценку работы.

По теме диссертации опубликованы 14 работ, из них 3 – в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК. Результаты исследований докладывались на представительных научных семинарах и конференциях в Иркутске, Красноярске, Новосибирске и Екатеринбурге. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Полученные результаты могут применяться в научных исследованиях в Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, в Новосибирском государственном университете, в Иркутском государственном университете, в Институте динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Институте вычислительного моделирования СО РАН, Уральском государственном университете путей сообщения и других организациях.

Представленная диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, а ее автор, Кузнецов Павел Александрович, заслуживает присуждения указанной степени.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании Отдела прикладных задач Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН 15 апреля 2015 года, протокол № 2.

Ведущий научный сотрудник
Институтa математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
доктор физ.-мат. наук — Филимонов Михаил Юрьевич

Почтовый адрес: 620990, г. Екатеринбург,
ул. Софьи Ковалевской, дом 16, ИММ УрО РАН,
e-mail: fmy@imm.uran.ru
Тел.: (343) 3753480

Заведующий Отделом прикладных задач
Института математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
доктор физ.-мат. наук, профессор — Короткий Александр Илларионович

Почтовый адрес: 620990, г. Екатеринбург,
ул. Софьи Ковалевской, дом 16, ИММ УрО РАН,
e-mail: korotkii@imm.uran.ru
Тел.: (343) 3753452

Подписи М.Ю. Филимонова и А.И. Короткого заверяю:

ЗАВ. ОТДЕЛОМ КАДРОВ Л.Н. Бестужева

16.04.2015 г.