Отзыв научного руководителя
на диссертацию Шеметовой Валентины Владимировны
"Краевые задачи для класса псевдогиперболических уравнений",
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико–математических наук по специальности 1.1.2 —
дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертационная работа В.В. Шеметовой посвящена изучению смешанных краевых задач в четверти пространства R^{n+1}_{++} для одного класса псевдогиперболических уравнений

$$L_0(D_x)D_t^2u + L_1(D_x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in R^{n+1}_{++}, \tag{1}$$

где $L_0(D_x)$ и $L_1(D_x)$ — эллиптические операторы второго и четвертого порядка соответственно. Предполагается, что краевые задачи удовлетворяют условию типа Лопатинского. В рассматриваемый класс задач входят классические постановки для n-мерных аналогов уравнений Власова–Рэлея–Бишопа, уравнения Гальперна, модифицированного уравнения Буссинеска и др. Основная цель — изучение корректности рассматриваемого класса задач.

Уравнения вида (1) являются уравнениями, не разрешенными относительно старшей производной. Такие уравнения начали изучать во второй половине XX столетия после публикаций работ С.Л. Соболева по исследованиям задачи о малых колебаниях вращающейся жидкости. Исторически это были первыми глубокими исследованиями уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, поэтому в литературе такие уравнения часто называют уравнениями *соболевского типа*. В настоящее время существует достаточно развитая теория для некоторых классов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной. Однако для псевдогиперболических уравнений имеется ряд известных публикаций, посвященных задаче Коши, а по смешанным задачам имеется лишь несколько работ по изучению конкретных краевых задач для одномерных уравнений. Поэтому исследования по теории смешанных краевых задач для псевдогиперболических уравнений общего вида только начинаются, и работа В.В. Шеметовой является одним из первых исследований по общим смешанным задачам для таких уравнений. Следует также отметить, что псевдогиперболические уравнения возникают при решении ряда прикладных задач теории упругости, гидродинамики, при конструировании волноводов. Поэтому тема исследований является актуальной и представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

С поставленной задачей В.В. Шеметова успешно справилась, полученные ею результаты составили основу настоящей диссертации. Изложим коротко содержание диссертации, состоящей из трех глав.

Первая глава посвящена исследованию смешанных краевых задач в четверти плоскости для одномерного псевдогиперболического уравнения, характеризующегося наличием обратимого оператора при старшей производной по времени

$$
\begin{gathered}
(\varepsilon I - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x > 0, \quad t > 0, \\
(b_{11}u + b_{12}D_x u + b_{13}D_x^2 u + b_{14}D_x^3 u)|_{x=0} = 0, \\
(b_{21}u + b_{22}D_x u + b_{23}D_x^2 u + b_{24}D_x^3 u)|_{x=0} = 0, \\
u|_{t=0} = 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $\varepsilon > 0$, $a \in R$, $b_{jk} \in R$, $j = 1, 2$, $k = 1, \ldots, 4$. Предполагается, что краевые задачи удовлетворяют условию Лопатинского.

Цель данной главы состоит в том, чтобы выделить классы смешанных краевых задач и доказать их разрешимость в анизотропных соболевских пространствах $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_{++}^2)$ с экспоненциальным весом по t.

Основные результаты главы: получены достаточные условия разрешимости смешанных краевых задач (2) в пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_{++}^2)$, при этом выделены три класса задач. Для первого класса задач эти условия являются аналогами условий разрешимости задачи Коши, т. е. $f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(R_{++}^2)$. Для второго класса эти условия являются более жесткими, а именно: $f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,0}(R_{++}^2)$. А для третьего класса на правую часть налагаются еще более сильные требования гладкости: $f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{3,0}(R_{++}^2)$. При этом для всех случаев автору удалось построить примеры граничных операторов, когда для разрешимости указанные условия являются необходимыми.

Полученные результаты проиллюстрированы на первой и второй краевых задачах для уравнения Власова, что дает новые результаты о разрешимости для этого уравнения.

Во второй и третьей главах рассматриваются многомерные смешанные краевые задачи в R^{n+1}_{++} для псевдогиперболических уравнений:

$$(\varepsilon I - L_0(D_x))D_t^2 u + [L_0(D_x)]^2 u + \sum_{|\beta|\le 3} a_\beta D_x^\beta u = f(t,x), \quad t>0, \quad x\in R^n_+,$$

$$\begin{gathered}(b_{11}u + b_{12}D_{x_n}u + b_{13}D^2_{x_n}u)|_{x_n=0} = 0, \\ (b_{21}u + b_{22}D_{x_n}u + b_{23}D^2_{x_n}u)|_{x_n=0} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad D_t u|_{t=0} = 0,\end{gathered} \tag{3}$$

где $\varepsilon \ge 0$ и $b_{i,j} \in R$, $i = 1,2$ и $j = 1,2,3$. Предполагается, что краевые задачи удовлетворяют условию типа Лопатинского. Это условие обеспечивает единственность решения задач (3) в весовом пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^{n+1}_{++})$.

При изучении разрешимости смешанных задач вида (3) даже в одномерном случае, как показано в первом параграфе, возникают определенные сложности с нахождением условий на правую часть уравнения, при которых существует решение $u(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(R^{n+1}_{++})$. При изучении многомерных задач автор выделил два класса задач (3): *регулярные* и *нерегулярные* краевые задачи. Описание этих классов дается в терминах коэффициентов граничных операторов.

Вторая глава диссертации посвящена изучению регулярных краевых задач (3). Основными результатами здесь являются теоремы об однозначной разрешимости в пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^{n+1}_{++})$, при этом условия разрешимости зависят от параметра ε. А именно, если $\varepsilon > 0$, то для разрешимости регулярной краевой задачи (3) достаточно потребовать, чтобы $f(t,x) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(R^{n+1}_{++})$. Но если $\varepsilon = 0$, то при $n > 4$ для разрешимости задачи (3), например, для финитных $f(t,x)$ для разрешимости достаточно выполнения таких же условий, а при $n \le 4$ помимо этих условий нужно, чтобы $f(t,x)$ удовлетворяла некоторым условиям ортогональности. Если условия ортогональности не выполнены, то, как показывают примеры, задача может не иметь решений $u(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(R^{n+1}_{++})$.

В третьей главе диссертации изучаются нерегулярные краевые задачи (3). В главе также доказаны теоремы об однозначной разрешимости в пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^{n+1}_{++})$. Условия разрешимости также зависят от параметра ε и размерности n. Однако теоремы о разрешимости для нерегулярных задач существенно отличаются от теорем из второй главы. А именно, для разрешимости таких задач требуется более жесткое условие на гладкость правой части уравнения. Надо, чтобы $f(t,x) \in W^{2,2,0}_{2,\gamma}(R^{n+1}_{++})$, при этом, если это условие не выполнено, то задача может не иметь решений $u(t,x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(R^{n+1}_{++})$.

На мой взгляд, диссертационная работа выполнена на высоком научном уровне. Автором получен ряд новых результатов, имеющих важное значение в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Результаты диссертации обоснованы полными доказательствами, своевременно опубликованы, неоднократно докладывались на научных конференциях и семинарах. По теме диссертации имеется 10 публикаций, из которых 4 статьи в журналах из списка ВАК. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Представленная диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, и ее автор Шеметова Валентина Владимировна несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 1.1.2 — дифференциальные уравнения и математическая физика.

Научный руководитель
Заведующий кафедрой дифференциальные уравнения механико-математического факультета Новосибирского государственного университета,
доктор физико-математических наук (специальность 01.01.01),
профессор

Демиденко Геннадий Владимирович

23 марта 2026 г.

Адрес: 630090, г. Новосибирск, Пирогова, 1.
Тел.: +79139311403, email: g.demidenko@g.nsu.ru

Подпись Демиденко
Специалист Управления кад
«23» 03