

ОТЗЫВ
официального оппонента
на диссертацию Старицына Максима Владимировича
«Вариационный анализ задач оптимального управления в
бесконечномерных пространствах»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 1.1.2 — «Дифференциальные уравнения и
математическая физика»

Актуальность темы

Диссертация посвящена оптимальному управлению динамическими системами с бесконечномерными фазовыми пространствами, важнейшими примерами которых являются уравнения с частными производными на пространстве мер. Наиболее часто встречающиеся в различных прикладных задачах физики, биологии и экономики уравнения на меры – нелинейные уравнения неразрывности, которые часто называют уравнениями Власова, и уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Таким уравнениям удовлетворяют распределения детерминированных и случайных процессов, описывающих эволюцию большого числа взаимодействующих частиц. Исследование дифференциальных уравнений на пространстве мер восходит к классическим работам А. Н. Колмогорова, М. Кас, Н. Р. McKean, Р. Л. Добрушина. В работах С. Villani, S. Lisini, L. Ambrosio было показано, что уравнения неразрывности играют важнейшую роль в геометрии пространства вероятностных мер с метрикой Канторовича. В работах F. Otto, C. Villani, L. Ambrosio, J. A. Carrillo, A. Figalli к дифференциальным уравнениям на пространстве мер применялась теория градиентных потоков, для чего пространство вероятностных мер оснащалось структурой риманова многообразия. Современный анализ на пространстве вероятностных мер, в частности, различные способы дифференцирования функций от мер, разработан L. Ambrosio, В. Н. Колокольцовым, Р. Л. Lions, R. Carmona, F. Delarue в связи с исследованием нелинейных уравнений с частными производными на пространстве вероятностных мер. Примерами таких уравнений служат основные уравнения в теории игр среднего поля, с помощью которых обосновывается предельный переход в среднем поле. Огромный интерес представляют задачи оптимального управления на уравнениях для мер. Здесь можно отметить работы Ю. В. Авербуха, S.-L. Anita, В. А. Bonnet, A. Borzi, H. Frankowska, F. Rossi, P. Souganidis, Д. В. Хлопина, в которых на такие уравнения переносились принцип максимума Понтрягина и принцип динамического

программирования Беллмана. В настоящей диссертации, кроме собственно изучения задач оптимального управления и применения полученных результатов к уравнениям на меры, предложен и подробно разработан общий метод погружения задач в пространство мер, что позволяет нелинейные задачи линеаризовать, задачи с фазовыми пространствами разной размерности преобразовать в задачи с одним фазовым пространством, использовать преимущества слабой топологии пространства мер. Погружение задачи в пространство мер — чрезвычайно плодотворная и активно реализуемая в современной математике идея. Таким образом, тема диссертационной работы является актуальной, а полученные результаты представляют значительный интерес.

Структура и содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и библиографического списка. Во введении дана общая характеристика работы, сформулированы цели, задачи, положения, выносимые на защиту, и описана степень разработанности проблемы.

Первая глава содержит общий аппарат точных формул приращения. Во второй главе он применяется к обыкновенным и стохастическим системам. Третья глава посвящена нелокальным уравнениям неразрывности и баланса на пространствах мер, а четвертая — импульсному управлению в среднем поле и соответствующим формам принципа максимума Понтрягина.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность

Одним из важных результатов диссертации является тщательно проработанная абстрактная схема работы с нелинейным фазовым потоком и двойственным к нему потоком в пространстве мер, позволяющая получить в терминах генератора потока точные формулы приращений исследуемого на экстремум функционала (см. формулы приращений 1.46 и 1.49). С помощью этих формул получены необходимые условия экстремума, сформулированные в теореме 1.2. Эти условия являются новыми и более чувствительными по сравнению с известными принципами оптимальности в том смысле, что позволяют выявлять неоптимальные процессы среди классических экстремалей. Такое усиление проиллюстрировано на примерах. Проведенный анализ проясняет роль используемых предположений, делает доказательства результатов лаконичными и очень понятными, значительно расширяет область применения. В диссертации показано, как применить общую схему к фазовому потоку, порождаемому неавтономным векторным полем на банаховом пространстве. Во второй главе в случае векторного поля, заданного

формулой 2.10, проверены все условия из первой главы и получены точные формулы приращений, сформулирован принцип оптимальности. Кроме демонстрации применения разработанной в первой главе общей схемы, во второй главе построены примеры, показывающие, что новый принцип оптимальности является более чувствительным в сравнении с известными необходимыми условиями экстремума. Более того, новый подход применен к задачам стохастической оптимизации. Центральная серия результатов, представленная в третьей главе диссертации, посвящена управлению нелокальными потоками, возникающими при анализе нелинейных уравнений Власова для мер. Эволюция нелокального потока зависит от переноса некоторой наперед заданной меры под действием этого потока. Именно так устроены решения нелинейных уравнений неразрывности. Такое решение представляет собой кривую в пространстве мер, задаваемую переносом заданной меры под действием потока, порождаемого векторным полем, зависящим от этой кривой. В диссертации показано, что от нелокального потока можно перейти к фазовому потоку на банаховом пространстве ограниченных векторных полей. Этот переход позволяет напрямую применить результаты второй главы. Для вычисления генератора потока используется исчисление внутренних производных на пространстве вероятностных мер. Получены точные формулы приращений и принцип оптимальности для решений нелинейных уравнений неразрывности. Показано, что новый принцип оптимальности является более чувствительным в сравнении с принципом максимума Понтрягина, полученным для уравнений неразрывности в работах В. А. Bonnet, Н. Frankowska и F. Rossi. Отметим, что описание свойств нелокальных потоков и сопоставление им потоков на пространстве векторных полей представляют самостоятельный интерес и являются важным вкладом в теорию уравнений неразрывности и анализ на пространстве вероятностных мер. В диссертации исследованы уравнения баланса, описываемые нелинейными уравнениями неразрывности с потенциалом. Такие уравнения сводятся к уравнению неразрывности без потенциала с помощью увеличения размерности и использования барицентра. В диссертации получено много вспомогательных результатов, которые представляют значительный самостоятельный интерес, например теорема 1.1, теорема 2.1, теорема 3.2. Таким образом, данная диссертация вносит существенный вклад в теорию управления фазовыми потоками, порождаемыми дифференциальными уравнениями с частными производными на пространстве мер. Полученные результаты являются новыми, а ключевые утверждения подробно и аккуратно обоснованы.

Соответствие диссертации критериям Положения о присуждении ученых степеней

Пункт 9 Положения о присуждении ученых степеней требует, чтобы докторская диссертация представляла собой научно-квалификационную работу, содержащую либо совокупность теоретических положений, квалифицируемых как научное достижение, либо решение научной проблемы, имеющей существенное значение для соответствующей отрасли науки.

Представленная работа удовлетворяет данному критерию. В ней получены результаты, относящиеся к общей теории дифференциальных уравнений, уравнениям на пространствах мер и математической теории оптимального управления. В частности, в диссертации представлены:

- точные формулы приращения функционала для задач управления эволюционными системами и уравнениями на пространствах мер;
- позиционные необходимые условия оптимальности для задач управления нелокальными уравнениями неразрывности;
- редукция задач управления уравнениями баланса к задачам управления уравнениями неразрывности;
- импульсно-траекторное расширение и условия принципа максимума Понтрягина для задач управления в среднем поле.

Работа соответствует пункту 10 Положения: она выполнена автором самостоятельно, имеет внутреннее единство, а ее основные положения выносятся на публичную защиту как новые научные результаты. В диссертации и автореферате обозначен личный вклад автора в совместные публикации.

Пункты 11–13 Положения выполнены в части опубликования основных результатов. По теме диссертации опубликованы 18 научных статей: 6 статей — в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией, и 12 статей — в журналах, индексируемых в международных базах Web of Science и Scopus. Тем самым основные положения диссертации прошли необходимую научную апробацию в рецензируемых изданиях.

Требования пункта 14 Положения соблюдены: использованные источники цитируются корректно, сведения о личном вкладе автора приведены, а результаты, полученные в соавторстве, отделены от результатов других участников совместных работ.

Замечания

По представленной диссертационной работе имеются следующие замечания.

1. В работе имеются опечатки, которые иногда затрудняют понимание. Приведем несколько примеров. На стр. 40 во второй части доказательства утверждения 1.2 вместо F_t должно быть f_t . На стр. 49 в третьей снизу выносной формуле индекс t надо заменить на T перед последним равенством. На стр. 58 используется без определения величина φ_{sth} . На стр. 92 в конце первой части доказательства теоремы 2.1 потеряна формула с оценкой второго слагаемого. На стр. 122 в формулировке леммы 3.2 нет определения величины V .

2. Условия, при которых справедливы теорема 1.2 и точные формулы приращений 1.46 и 1.49, рассредоточены по всей первой главе, что затрудняет восприятие и понимание этих результатов. Значительно удобнее, когда все предположения, которые надо проверять, собраны вместе перед формулировкой основного результата. Аналогичное замечание относится ко второй главе диссертации, где абстрактная схема применяется к дифференциальным уравнениям на банаховых пространствах.

3. Во второй главе при обсуждении стохастического оптимального управления в предположении 2.2 на стр. 110 липшицевость коэффициентов и невырожденность матрицы диффузии являются избыточными условиями, одно из этих предположений можно ослабить.

4. Основные результаты диссертации установлены при условиях липшицевости и ограниченности, а при определении инфинитезимальных объектов часто предполагается равномерность предельного перехода (см. определение 1.3 и предположение 1.4). Такие предположения являются ограничительными и было бы полезно прокомментировать возможность ослабления условий, как это, например, сделано по поводу предположения 1.1 в замечании 1.6.

5. Во второй главе получены результаты для дифференциальных уравнений на банаховых пространствах. Однако приведены всего лишь два примера применения этих результатов: конечномерные системы дифференциальных уравнений и системы уравнений на пространстве векторных полей, порождаемые нелинейными уравнениями неразрывности. Представляют интерес приложения к интегро-дифференциальным уравнениям и к уравнениям с частными производными.

Сделанные замечания не влияют на содержательность и обоснованность результатов диссертации.

Заключение

Таким образом, диссертационная работа Старицына Максима Владимировича «Вариационный анализ задач оптимального управления в бесконечномерных пространствах» является завершенным научным исследованием, соответствует требованиям пунктов 9–14 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 № 842 «О порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Автор диссертации, Старицын Максим Владимирович, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 — «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Официальный оппонент:

Шапошников Станислав Валерьевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (МГУ имени М. В. Ломоносова).



С. В. Шапошников

«23» июля 2026 г.

Контактная информация:

МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, 119991, город Москва, Ленинские горы, дом 1.

Телефон: +7 (495) 939-12-63; электронная почта: office@mech.math.msu.su;
сайт: <https://math.msu.ru>.

Подпись официального оппонента Шапошникова С. В. удостоверяю.

Декан
механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова,
член-корреспондент РАН, профессор



А. И. Шафареви́ч

«23» июля 2026 г.