На правах рукописи

ПЕТРЕНКО ПАВЕЛ СЕРГЕЕВИЧ

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Щеглова Алла Аркадьевна,** ИДСТУ СО РАН, зам. директора по н.р.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Фалалеев Михаил Валентинович,** ИМЭИ ИГУ, директор кандидат физико-математических наук **Орлова Ирина Витальевна,** НИИГТУ, доцент
Ведущая организация:	**Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН** (г. Новосибирск)

Защита состоится 19 июня 2014 г. в 10 ч. на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в ИДСТУ СО РАН по адресу: 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте www.idstu.irk.ru ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 16 мая 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н. Т.В. Груздева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию качественных свойств систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной и тождественно вырожденных в области определения. Такого рода системы в литературе принято называть системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). В линейном и в нелинейном случаях исследуются стабилизируемость, устойчивость, управляемость, наблюдаемость, детектируемость, а также правильность и приводимость.

Рост интереса к исследованиям в области систем ДАУ стимулируется проблемами математического моделирования во многих прикладных областях: теории автоматического регулирования, оптимальном управлении со смешанными ограничениями, теории электронных схем и электрических цепей, механике, химической кинетике, гидродинамике и теплотехнике и др.

Систематическое исследование систем ДАУ и построение численных методов их решения началось в нашей стране (Ю.Е. Бояринцев, В.М. Корсуков, Ю.Д. Шлапак, 1975) и США (C.W. Gear , S.L. Campbell, L.R. Petzold, 1971, 1973). Несколько позднее активно работающие в этой области математики появились в Германии (R. Maerz, E. Griepentrog, M. Hanke, R. Lamour), а также в других странах, например в Швейцарии (E. Hairer, Ch. Lubich).

Наряду с исследованиями конечномерных задач активно развивается теория вырожденных дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в банаховых пространствах

$$\mathcal{A}[u'] + \mathcal{B}[u] = f, \quad \ker \mathcal{A} \neq 0. \tag{1}$$

Большую роль в развитии этого направления сыграли труды С.Л. Соболева и С.Г. Крейна. Важнейшие результаты теории уравнений вида (1) представлены в работах Н.А. Сидорова, М.В. Фалалеева (Иркутск), С.В. Успенского, Г.В. Демиденко, С.Г. Пяткова (Новосибирск), Г.В. Свиридюка, В.Е. Федорова (Челябинск), И.В. Мельниковой (Екатеринбург), А.Г. Руткаса, Л.А. Власенко (Харьков), R.E. Shouolter, P. Chen, A. Favini, A. Yagi, K.J. Engel, R. Nagel, W. Rheinboldt и их учеников.

Наиболее значимые результаты по теории управления и устойчивости систем ДАУ получены L. Dai, D. Cobb, F.L. Lewis, E. Jonckheere, S.L. Campbell, P. Mueller, R. Maerz, C. Tishchendorf, V. Mehrmann,

T. Stykel, V.H. Linh, A. Varga, С.А. Мазаником, Ю.Д. Шлапаком, Ю.Е. Бояринцевым, В.Е. Федоровым, Г.А. Куриной, С.П. Зубовой, И.А. Асмыковичем, В.М. Марченко, А.А. Щегловой и др.

За последние 30 лет теория ДАУ превратилась в быстро развивающуюся область современной математики. Несмотря на то, что уже опубликованы сотни работ, посвященных исследованию ДАУ, качественная теория таких систем далека от завершения. В настощее время достаточно полно исследованы линейные системы с постоянными коэффициентами. Известные из литературы результаты для линейных нестационарных систем или нелинейных ДАУ получены при довольно жестких ограничениях: постоянство рангов матриц при производной искомой функции, низкий индекс неразрешенности[1] системы, специальная структура. В связи с этим на настоящий момент актуальной задачей теории является получение результатов по качественным свойствам, ориентированных на системы ДАУ, не подчиняющиеся указанным ограничениям.

Цель работы состоит в получении достаточных, а также необходимых и достаточных условий стабилизируемости, устойчивости, управляемости, наблюдаемости, детектируемости для линейных и нелинейных систем ДАУ в общих предположениях.

Объект исследования. В работе рассматриваются системы управления

$$F(t, x(t), x'(t), u(t)) = 0, \ \ t \in I = [0, +\infty), \tag{2}$$

где $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция; $u(t)$ — l-мерная функция управления; $F(t, x, y, u) : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^n$,

$$\mathcal{D} = \{(t, x, y, u) : \ t \in I; \ \|x\|, \|y\|, \|u\| < K_0\} \subset \mathbf{R}^{2n+l+1}$$

($K_0 = \text{const} > 0$). Предполагается, что $F(t, x, y, u)$ имеет в $\mathcal{D}$ достаточное число непрерывных частных производных по каждому из своих аргументов и $\det \dfrac{\partial F(t, x, y, u)}{\partial y} \equiv 0$ в $\mathcal{D}$. Анализ проводится при допущении, что функция F обладает свойством

$$F(t, 0, 0, 0) = 0 \ \ \forall t \in I.$$

Изучаются качественные свойства ДАУ как в нелинейной (2), так и в линейной постановке

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \tag{3}$$

[1]Целочисленная величина, характеризующая меру неразрешенности ДАУ относительно производной. В диссертации используется понятие индекса по дифференцированию.

$$y(t) = C(t)x(t), \quad t \in I, \tag{4}$$

где $A(t), B(t)$ — заданные $(n \times n)$-матрицы, $\det A(t) \equiv 0$ на I, $U(t)$ и $C(t)$ — заданные матрицы размеров $n \times l$ и $m \times n$ соответственно, $y(t)$ — m-мерный наблюдаемый выход.

Методы исследования. В качестве методов исследования в диссертации использованы результаты из теории функций нескольких вещественных переменных, качественной теории систем ОДУ в нормальной форме, в частности, теории устойчивости, управляемости и наблюдаемости, а также аппарат обобщенных обратных матриц.

Методологической основой исследования, проведенного в диссертации, послужил разработанный А.А. Щегловой способ приведение рассматриваемой системы ДАУ (как в линейном, так и в нелинейном случае) к "эквивалентной структурной форме" с разделенными "дифференциальной" и "алгебраической" подсистемами.

Существование этой структурной формы доказано в условиях, близких к необходимым для регулярного поведения решений. При ее построении не используется замена переменных, вследствие чего сохраняется структура пучков матриц Якоби, описывающих систему. Нелинейные ДАУ, обладающие эквивалентной формой, допускают возможность исследования качественных свойств по линейному приближению. Кроме того, рассматриваемая ДАУ и ее структурная форма эквивалентны в смысле решений. В линейном случае метод преобразования к эквивалентной форме носит конструктивный характер, дает удобный способ нахождения многообразия решений и автоматически решает задачу о согласовании начальных данных.

Научная новизна. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и доказаны в наиболее общих предположениях. Критерии R-управляемости, R-наблюдаемости, приводимости, правильности, устойчивости, стабилизируемости и детектируемости получены для таких классов линейных и нелинейных ДАУ, для которых неприменимы другие методики исследования. Допускается произвольно высокий индекс неразрешенности, переменный ранг матриц Якоби $\partial F/\partial x$ и $\partial F/\partial x'$, сняты ограничения на ядра этих матриц и структуру системы как в линейном, так и в нелинейном случае.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе результатов обусловлены строгостью доказательств, применением апробированных методов исследования, сравнением с известными результатами, а также обсуждениями на научных конференциях и семинарах.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные результаты по качественным свойствам охватывают широкие классы линейных и нелинейных систем ДАУ, у которых семейство решений не имеет особых точек. Полученные в диссертации условия являются конструктивными, сформулированы в терминах входных данных и в предположениях, близких к необходимым для регулярного поведения решений.

Материалы диссертации могут быть использованы при разработке спецкурсов для студентов-математиков, а также при написании курсовых и дипломных работ, магистерских диссертаций.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проектов по программам СО РАН "Качественный и численный анализ гетерогенных систем" (№ гос. регистрации 01201351945), "Качественный анализ эволюционных уравнений и систем управления" (№ гос. регистрации 01201001351), Интеграционного проекта СО РАН № 85, Междисциплинарного интеграционного проекта № 107, программы Президиума РАН (проект № 17.1), программы ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (проект № 2012-1.2.1-12-000-1001-011), а также грантов РФФИ (проекты № 10-01-00132 и № 13-01-00287).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с паспортом специальности "01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление" в диссертации проведено теоретическое исследование качественных свойств систем дифференциально-алгебраических уравнений; получены достаточные, а также необходимые и достаточные условия стабилизируемости, управляемости, наблюдаемости, устойчивости линейных и нелинейных ДАУ в общих предположениях (пп. 3, 5 области исследований).

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на Российско-монгольских конференциях молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению, Иркутск (Россия) – оз. Ханх (Монголия), 2011, 2013; X Международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление", Казань, 2012; III Международной школе-семинаре "Нелинейный анализ и экстремальные задачи", Иркутск, 2012, а также на ежегодных конференциях "Ляпуновские чтения", Иркутск, 2010–2013. Результаты диссертации обсуждались на семинаре в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; на семинаре в Институте математики, экономики и информатики ИГУ, Иркутск, Россия, а также неоднократно на семинарах Института динамики систем и теории управления СО РАН.

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано 5 статей [1–5] в журналах, рекомендованных ВАК РФ для опубликования результатов диссертаций. Журналы, в которых опубликованы работы [1, 5], реферируются в международной базе цитирования SCOPUS. В совместных статьях [1, 4, 5] научному руководителю А.А. Щегловой принадлежат постановки задач и идеи некоторых доказательств.

В диссертации результаты научного руководителя, касающиеся разрешимости и построения эквивалентных структурных форм, приведены в первом и втором разделах первой главы со ссылками на соответствующие работы. Все результаты, представленные в третьем разделе первой главы а также во второй и третьей главах, принадлежат автору диссертации. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно.

Результаты главы 1 опубликованы в работе [1], главы 2 — в работах [1, 3–5], главы 3 — в работах [2, 4, 5].

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 142 наименования. Общий объем диссертации составляет 137 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведена постановка задачи, пояснена специфика объекта исследования, обоснована актуальность темы диссертации, приведены обзор литературы по данной тематике и краткое содержание работы, сформулированы основные результаты и обоснована их новизна.

В первом и втором разделах **первой главы** содержатся вспомогательные сведения, касающиеся построения и некоторых свойств эквивалентной структурной формы для линейных и нелинейных систем ДАУ, сформулированы теоремы существования. Эти результаты послужили основой для анализа, проведенного в других разделах диссертации.

Определение 1. Система конечных уравнений

$$\mathcal{F}_r(t,x,y,z_1,\dots,z_r,u,v_1,\dots,v_r) = \begin{pmatrix} F(t,x,y,u) \\ F_1(t,x,y,z_1,u,v_1) \\ \dots \\ F_r(t,x,y,z_1,\dots,z_r,u,v_1,\dots,v_r) \end{pmatrix} = 0,$$

в которой $x, y, z_j \in \mathbf{R}^n$; $u, v_j \in \mathbf{R}^l$, а функции $F_j(t, x, y, z_1, \ldots$ $\ldots z_j, u, v_1, \ldots, v_j)$ $(j = \overline{1, r})$ обладают свойством: для любых двух вектор-функций $\phi(t) \in \mathbf{C}^{j+1}(I)$, $\psi(t) \in \mathbf{C}^j(I)$ (n и l-мерной соответственно) таких, что $(t, \phi(t), \phi'(t), \psi(t)) \in \mathcal{D}$ $\forall t \in I$,

$$F_j(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \ldots, \phi^{(j+1)}(t), \psi(t), \ldots, \psi^{(j)}(t)) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^j F(t, \phi(t), \phi'(t), \psi(t)),$$

называется r-*продолженной системой* по отношению к ДАУ (2).

Поставим в соответствие функции $F(t, x, y, u)$ следующие матрицы размеров $n(r+1) \times nr$, $n(r+1) \times n(r+1)$ и $n(r+1) \times n(r+2)$ соответственно:

$$\Gamma_{r,z} = \Gamma_{r,z}(t, x, y, z_1, \ldots, z_r, u, v_1, \ldots, v_r) = \left(\partial \mathcal{F}_r / \partial z_1 \quad \ldots \quad \partial \mathcal{F}_r / \partial z_r \right),$$

$$\Gamma_{r,y} = \left(\partial \mathcal{F}_r / \partial y \quad \Gamma_{r,z} \right), \quad \Gamma_{r,x} = \left(\partial \mathcal{F}_r / \partial x \quad \Gamma_{r,y} \right).$$

Под *решением* ДАУ (1) на интервале $T \subseteq I$ будем понимать функцию $x(t) \in \mathbf{C}^1(T)$, обращающую систему (1) в тождество на T при подстановке.

Теорема 1[2]. *Пусть*

1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{r+2}(\mathcal{D})$*;*

2) $\exists \alpha_{r+1} \in \mathbf{R}^{rl+(r+2)n+1} : \mathcal{F}_{r+1}(\alpha_{r+1}) = 0, \ \operatorname{rank} \Gamma_{r,x}(\alpha_r) = n(r+1)$;

3) $\operatorname{rank} \Gamma_{r,z} = \rho = \mathrm{const}$*;*

4) в матрице $\Gamma_{r,x}(\alpha_r)$ *существует квадратная подматрица порядка* $n(r+1)$*, включающая в себя* ρ *столбцов матрицы* $\Gamma_{r,z}(\alpha_r)$ *и* n *первых столбцов матрицы* $\Gamma_{r,y}(\alpha_r)$*;*

5) $\operatorname{rank} \Gamma_{r+1,y}(\alpha_{r+1}) = \operatorname{rank} \Gamma_{r,y}(\alpha_r) + n$.

Тогда на некотором интервале $I_\tau = (t_0 - \tau, t_0 + \tau) \subset I$ *все решения системы (2) являются решениями системы*

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), u(t), u'(t), \ldots, u^{(r)}(t)), \tag{5}$$

$$x_2(t) = f_0(t, x_1(t), u(t), u'(t), \ldots, u^{(r)}(t)), \tag{6}$$

и наоборот. Здесь

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = Qx(t), \tag{7}$$

вектор-функции $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *имеют размерности* $n - d$ *и* $d = nr - \rho$ *соответственно;* Q *— матрица перестановок строк.*

[2] Щеглова А.А. Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. 2008. № 10. С. 57–80.

Определение 2. Система (5), (6) называется *эквивалентной структурной формой* для ДАУ (2).

Определение 3. Начальные данные $x(t_0) = x_0$ будем называть *согласованными* с системой (2), если выполняется соотношение

$$x_2(t_0) = f_0(t, x_1(t_0), u(t_0), u'(t_0), \ldots, u^{(r)}(t_0)).$$

Эквивалентная форма для линейной ДАУ (3) получается как результат действия на ДАУ (3) оператора $\mathcal{R} = \sum\limits_{j=0}^{r} R_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j$ и имеет вид[3]

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} H_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \tag{8}$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} G_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \;\; t \in I, \tag{9}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ определяются по формуле (7). Оператор $\mathcal{R}$ определен единственным образом и обладает левым обратным оператором

$$\mathcal{M} = M_0(t) + M_1(t)\frac{d}{dt}. \tag{10}$$

Если

$$A(t) = \frac{\partial F(t,x,y,u)}{\partial y}(t,0,0,0), \;\; B(t) = \frac{\partial F(t,x,y,u)}{\partial x}(t,0,0,0),$$

$$U(t) = \frac{\partial F(t,x,y,u)}{\partial u}(t,0,0,0), \tag{11}$$

то система (3) будет линейным приближением для ДАУ (2). Известно[2], что при выполнении предположений 2)–5) теоремы 1 и условия $F(t,x,y,u) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D})$ система (8), (9), определенная на некотором интервале $I_0 \subseteq I_\tau$, является системой первого приближения для ДАУ (5), (6).

В третьем разделе первой главы построена эквивалентная структурная форма, получены условия согласования начальных данных и доказана теорема о разрешимости сопряженной линейной системы ДАУ

$$\left(A^\top(t)z(t)\right)' - B^\top(t)z(t) + C^\top(t)\tilde{u}(t) = 0, \tag{12}$$

[3]Щеглова А.А. Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами // Известия вузов. Математика. 2010. № 9. С. 57–70.

$$\tilde{y}(t) = U^{\top}(t)z(t), \quad t \in I. \tag{13}$$

Получены условия, при которых оператор замены переменной, преобразующий сопряженную ДАУ к эквивалентной форме, имеет правый обратный.

Во **второй главе** исследуются качественные свойства линейных нестационарных систем ДАУ.

В первом разделе получены достаточные и необходимые и достаточные условия R-управляемости ДАУ (3) и R-наблюдаемости сопряженной системы (12), (13), в частности, в терминах матриц управляемости и наблюдаемости.

Определение 4. Система (3) называется *R-управляемой*, если за конечное время она может быть переведена из любого согласованного начального состояния x_0 в любое состояние из достижимого множества M за счет выбора вектор-функции управления $u(t)$.

Множество $M \subset \mathbf{R}^n$ называется *достижимым* из $x_0 \in \mathbf{R}^n$, если существует достаточно гладкое управление $u(t)$, которое переводит систему (3) из состояния x_0 в некоторое состояние $x_1 \in M$ за конечное время.

Определение 5. Система (12), (13) называется *R-наблюдаемой* на отрезке I, если по известному выходу (13) и управлению $u(t)$ можно единственным образом восстановить решение $z(t)$ системы (12).

Показано, что система (3), (4) R-наблюдаема, если R-управляема система (12). В свою очередь, R-наблюдаемость ДАУ (12), (13) влечет за собой R-управляемость системы (3).

Второй раздел посвящен стабилизируемости ДАУ с векторным управлением. Обоснованы достаточные условия стабилизируемости, и предложен алгоритм синтеза стабилизирующего управления.

Определение 6. ДАУ (3) будем называть стабилизируемой, если существует обратная связь $u(t) = H(t)x(t)$ такая, что замкнутая система

$$A(t)x'(t) + (B(t) + U(t)H(t))\,x(t) = 0$$

асимптотически устойчива.

Рассмотрим систему специального вида со скалярным управлением $w(t)$

$$\begin{aligned} x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + b_1(t)w(t) &= 0, \\ x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + b_2(t)w(t) &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где $J_1(t), J_2(t)$ — матрицы из системы (8), (9); $x_1(t)$, $x_2(t)$ связаны с функцией $x(t)$ соотношением (7).

Для системы (14) найдем матрицу управляемости

$$\mathcal{K}(t) = \left(K_0(t) \;\; K_1(t) \;\; \dots \;\; K_{n-d-1}(t)\right), \tag{15}$$

$$K_0(t) = b_1(t), \;\; K_i(t) = J_1(t)K_{i-1}(t) + K'_{i-1}(t), \;\; i = \overline{1, n-d}.$$

Если $\mathcal{K}(t)$ обратима на I, то определим функцию

$$v(t) = \mathcal{K}^{-1}(t)K_{n-d}(t) = \operatorname{colon}(v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n-d}(t)), \tag{16}$$

где $\operatorname{colon}(v_1(t), v_2(t), \dots, v_{n-d}(t))$ обозначает вектор-столбец с элементами $v_1(t), \dots, v_{n-d}(t)$.

Теорема 2. *Пусть*
1) $A(t), B(t) \in \mathbf{C}^{4(r+1)+n-d}(I)$, $U(t) \in \mathbf{C}^{3(r+1)+n-d}(I)$*;*
2) в отношении ДАУ (3) выполнены условия 3), 4) теоремы 1;
3) $\operatorname{rank} U(t) \equiv \mathrm{const}$*;*
4) $\operatorname{rank} W(t) \equiv \mathrm{const} < n$*, где*

$$W(t) = \begin{pmatrix} \left(E - U(t)U^{-}(t)\right) M_0(t) - \dfrac{d}{dt}\Big(\left(E - U(t)U^{-}(t)\right) M_1(t)\Big) \\ \left(E - U(t)U^{-}(t)\right) M_1(t) \end{pmatrix},$$

$M_0(t)$ и $M_1(t)$ — коэффициенты левого обратного оператора (10) для $\mathcal{R}$, $U^{-}(t)$ — любая полуобратная для $U(t)$ матрица с элементами из пространства $\mathbf{C}^{3(r+1)+n-d}(I)$;
5) существует функция $g(t) \in \mathbf{C}^{3r+2+n-d}(I)$ такая, что для функции $b(t) = \left(E - W^{-}(t)W(t)\right) g(t) = \operatorname{colon}\left(b_2(t), b_1(t)\right)$ выполняются условия:
i) в (15) $\mathcal{K}(t)$ — матрица Ляпунова;
ii) в (16) каждая из функций $v_i(t) \in \mathbf{C}^{i-1}(I)$ $(i = \overline{1, n-d})$ ограничена вместе со своими производными до порядка $i-1$ включительно;
6) $\|b_2(t)\|_{\mathbf{R}^d} \le k_2 = \mathrm{const}$*;* $\|J_2(t)\| \le k_1 = \mathrm{const}$.
Тогда найдется управление вида

$$u(t) = U^{-}(t)\left(M_0(t)b(t)w(t) + M_1(t)\frac{d}{dt}\left(b(t)w(t)\right)\right),$$

стабилизирующее систему (3), при этом $w(t)$ — скалярное управление, стабилизирующее систему (14).

В третьем разделе первой главы получены условия детектируемости для системы

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0, \;\; t \in I, \tag{17}$$

со скалярным выходом

$$y(t) = c^{\top}(t)x(t). \tag{18}$$

Определение 7. Система (17), (18) называется *детектируемой*, если существует такая достаточно гладкая n-мерная вектор-функция $l(t)$, что система

$$A(t)e'(t) + \big(B(t) - l(t)c^{\top}(t)\big)\,e(t) = 0$$

асимптотически устойчива.

Обоснованы достаточные условия детектируемости ДАУ (17), (18) индекса 1.

В *четвертом и пятом разделах* в предположениях существования эквивалентной структурной формы получены критерии приводимости и правильности ДАУ (3), доказаны теоремы о связи этих свойств.

Третья глава посвящена исследованию качественных свойств нелинейных систем вида (2) по первому приближению.

В *первом разделе* рассматривается локальная R-управляемость в ноль. Под локальной R-управляемостью в ноль подразумевается возможность перехода ДАУ (2) из любого согласованного начального состояния в ноль за счет соответствующего выбора гладкого управления.

Теорема 3. *Пусть*
1) $F(t,x,y,u) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D})$, $u(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$*;*
2) выполнены условия 2)–5) теоремы 1.

Если система 1-го приближения (3) R-управляема или локально R-управляема в ноль на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I_\tau$, то ДАУ (2) является локально R-управляемой в ноль на этом отрезке.

Во *втором разделе* получены условия локальной R-наблюдаемости, которую, в предположениях теоремы 1, можно понимать как локальную наблюдаемость подсистемы (5).

Определение 8. Система (2) с выходной функцией

$$y(t) = \phi(t, x(t)) \tag{19}$$

называется *локально R-наблюдаемой* на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I_\tau$, если существует такое число $\delta > 0$, что для любых $z_0, \tilde{z}_0 \in \mathbf{R}^{n-d}$ из δ-окрестности точки $x_1 = 0$ выполняется условие

$$\phi(t, x_1(t, t_0, z_0)) \not\equiv \phi(t, x_1(t, t_0, \tilde{z}_0)), \quad t \in I_\tau,$$

где $x_1(t, t_0, z_0)$ — решение системы (5) с начальным условием $x_1(t_0) = z_0$.

В предположениях теоремы 3 доказано, что полная наблюдаемость системы первого приближения (3) на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I_\tau$ влечет за собой локальную R-наблюдаемость нелинейной системы ДАУ (2), (19).

В *третьем и четвертом разделах* построена глобальная эквивалентная структурная форма для нелинейных ДАУ, доказана глобальная теорема существования решения задачи Коши. На основе этих результатов доказаны теоремы о стабилизируемости (в случае скалярного управления) и устойчивости нулевого положения равновесия нелинейной системы по первому приближению.

Определение 9. Систему (2), допускающую представление

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) + r(t, x, x', u) = 0,$$

будем называть *стабилизируемой*, если существуют достаточно гладкие $(l \times n)$-матрица $\Omega(t)$ и вектор-функция $\rho(t, x)$ такие, что при

$$u(t) = \Omega(t)x(t) + \rho(t, x)$$

$(\rho(t, 0) \equiv 0)$ нулевое положение равновесия замкнутой системы

$$F(t, x(t), x'(t), \Omega(t)x(t) + \rho(t, x(t))) = 0$$

асимптотически устойчиво при любых нелинейных функциях $r(t, x, x', u)$, $\rho(t, x)$, удовлетворяющих некоторым условиям малости в окрестности точки $x = 0, x' = 0, u = 0$.

В предположениях, обеспечивающих эквивалентность в смысле решений ДАУ (2) системе вида

$$x_1'(t) = \varphi_1(t, x_1(t), u(t)), \quad x_2(t) = \varphi_0(t, x_1(t), u(t), u'(t), ..., u^{(r)}(t)),$$

получены достаточные условия стабилизируемости системы (2).

Пусть в (2) функция F не зависит от переменной u. Допустим, что имеют место предположения 2)–5) теоремы 1, условие $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D})$, и функция $F(t, x, y)$ определена в области $\mathcal{D} = I \times \mathcal{X} \times \mathbf{R}^n$, где $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathbf{R}^d$, $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathbf{R}^{n-d}$ — окрестность точки $x_1 = 0$ (см. (5)–(7)).

Введем обозначения: $\bar{Z}_j = (z_1, \dots, z_j)$, $\quad j = r, r+1$,

$$L(C) = \max_{\|\chi\|_{\mathbf{R}^q}=1} \|C\chi\|_{\mathbf{R}^p}, \quad l(C) = \min_{\|\chi\|_{\mathbf{R}^q}=1} \|C\chi\|_{\mathbf{R}^p},$$

C — некоторая $(p \times q)$-матрица.

Подматрицу, фигурирующую в условии 4) теоремы 1, обозначим

$$\Delta_r(t,x,y,\bar Z_r) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x_2} \;\; \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial y} \;\; \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial Z_1} \right), \tag{20}$$

где $\operatorname{colon}(Z_1,\, Z_2) = Q_1 \bar Z_r$; $x_1 \in \mathbf{R}^{n-d}$, $x_2 \in \mathbf{R}^d$ (см. (7)), $Z_1 \in \mathbf{R}^\rho$, $Z_2 \in \mathbf{R}^d$; Q_1 — матрица перестановок строк.

Построим для (2) $(r+1)$-продолженную систему

$$\mathcal{F}_{r+1}(t,x,y,\bar Z_{r+1}) = 0.$$

Предположим, что в $n(r+2)\times(n+d)$-матрице $\left(\frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_2} \;\; \frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial z_{r+1}} \right)$ имеется подматрица S размеров $n(r+2)\times n$ такая, что в некоторой области

$$\operatorname{rank}\Gamma_{r+1,z} = \operatorname{rank}\left(\frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_1} \;\; S \right) = \rho + n. \tag{21}$$

При этом

$$S = \frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_3}(t,x,y,Z_1,Z_3,Z_4), \tag{22}$$

где $\operatorname{colon}(Z_3, Z_4) = Q_2 \operatorname{colon}(Z_2, z_{r+1})$, Q_2 — матрица перестановок строк, $Z_3 \in \mathbf{R}^n$, $Z_4 \in \mathcal{Z}_4$, $\mathcal{Z}_4 \subseteq \mathbf{R}^d$ — окрестность точки $Z_4 = 0$.

Обозначим

$$\Delta_{r+1} = \left(\frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_2} \;\; \frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial y} \;\; \frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_1} \;\; \frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_3} \right), \quad \hat\Delta = \left(\frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial t} \;\; \frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial x_1} \;\; \frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_4} \right).$$

Теорема 4. *Пусть*
1) $F(t,x,y) \in \mathbf{C}^{r+2}(\mathcal{D})$;
2) $\operatorname{rank}\Gamma_{r,z} = \rho = \mathrm{const}$ *всюду в области* $\mathcal{D}\times\mathcal{Z}$, *где* $\mathcal{Z} = \mathbf{R}^\rho \times \mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_2 \subseteq \mathbf{R}^d$ — *окрестность точки* $Z_2 = 0$;
3) в матрице $\Gamma_{r,x}$ *имеется квадратная порядка* $n(r+1)$ *подматрица (20), обратимая всюду в области* $\mathcal{D}\times\mathcal{Z}$ *и включающая в себя* ρ *столбцов матрицы* $\Gamma_{r,z}$ *и* n *первых столбцов матрицы* $\Gamma_{r,y}$;
4) в матрице $\left(\frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial Z_2} \;\; \frac{\partial\,\mathcal{F}_{r+1}}{\partial z_{r+1}} \right)$ *имеется* $(n(r+2)\times n)$*-подматрица (22) такая, что в области* $\mathcal{D}\times\mathbf{R}^\rho\times\mathbf{R}^n\times\mathcal{Z}_4$ *имеют место равенства (21);*
5) существует непрерывная функция $v(s) : I \to I$ *со свойствами*

$$v(s) > 0, \;\; s \in (0,\infty); \quad \int\limits_1^\infty \frac{ds}{v(s)} = \infty,$$

такая, что справедливы оценки

$$l\left(\Delta_{r+1}\right) > 0, \quad L\left(\hat{\Delta}\right)/l\left(\Delta_{r+1}\right) \leq v\left(\|(x_2, y, Z_1, Z_3)\|\right).$$

Тогда любое решение системы (2) является решением системы

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t)), \quad x_2(t) = f_0(t, x_1(t)) \tag{23}$$

и наоборот. При этом функции f_0 *и* f_1 *определены всюду в области* $I \times \mathcal{X}_1$.

В сделанных предположениях система (2) может быть представлена в форме

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + r(t, x(t), x'(t)) = 0,$$

где $A(t)$, $B(t)$ определяются из (11), функция $r(t, x, y)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|x\|,\|y\| \to 0} \frac{r(t, x, y)}{\|x\| + \|y\|} = 0.$$

В предположениях теоремы 4 систему (23) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + r_1(t, x_1(t)) &= 0, \\ x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + r_2(t, x_1(t)) &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{pmatrix} r_2(t, x_1) \\ r_1(t, x_1) \end{pmatrix} = \mathcal{R}\left[r(t, x, x')\right], \tag{25}$$

оператор $\mathcal{R}$ преобразует систему первого приближения в эквивалентную форму.

Теорема 5. *Пусть*
1) $F(t, x, y) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D})$*;*
2) выполнены предположения 2)–5) теоремы 4;
3) существует константа $m > 1$ *и функция* $\mu(t) \in \mathbf{C}(I)$*, имеющая неположительный характеристический показатель, такие что в некоторой окрестности точки* $x_1 = 0$ *функция* $r_1(t, x_1)$ *из (25) подчинена условию*

$$\|r_1(t, x_1)\| \leq \mu(t)\|x_1\|^m;$$

4) система $x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) = 0$ *правильна и все ее характеристические показатели отрицательны;*

5) в (24) J_2 имеет неположительный характеристичекий показатель и $\|r_2(t, x_1)\| \to 0$ при $\|x_1\| \to 0$.

Тогда тривиальное решение уравнения (2) асимптотически устойчиво.

В *заключении* основные результаты работы обсуждаются с точки зрения перспективы дальнейших исследований.

РЕЗУЛЬТАТЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Построена эквивалентная форма, получены условия согласования начальных данных и доказана теорема о разрешимости для сопряженной линейной системы ДАУ.

2. Для линейных ДАУ с векторным управлением получены условия стабилизируемости, для систем индекса 1 получены условия детектируемости. Обоснованы достаточные и необходимые и достаточные условия R-управляемости и R-наблюдаемости, доказаны теоремы о связи этих свойств. Получены критерии приводимости и правильности.

3. Для нелинейных систем получены условия локальной R-управляемости в ноль, локальной R-наблюдаемости, достаточные условия стабилизируемости и устойчивости по первому линейному приближению.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

1. Щеглова А.А., Петренко П.С. R-наблюдаемость и R-управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем // Известия вузов. Математика 2012. № 3. С. 73–91.
2. Петренко П.С. Локальная R-управляемость в ноль нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Известия ИГУ. Математика 2011. № 4. С. 101–115.
3. Петренко П.С. Детектируемость линейных систем дифференциально-алгебраических уравнений // Известия ИГУ. Математика 2013. № 3. С. 109–116.
4. Щеглова А.А., Петренко П.С. Правильные системы дифференциально-алгебраических уравнений // Известия ИГУ. Математика 2013. № 4. С. 107–127.
5. Shcheglova A.A., Petrenko P.S. Stabilizability of solutions to linear and nonlinear differential-algebraic equations // Journal of Mathematical Sciences 2014. № 4. P. 596–615.

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института динамики систем и теории управления СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
E-mail: rio@icc.ru

Подписано к печати 11.04.2014 г.
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 1,1 п.л.
Заказ 3. Тираж 150 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН