На правах рукописи

ПОНОМАРЕВ ДЕНИС ВИКТОРОВИЧ

ИМПУЛЬСНО-СКОЛЬЗЯЩИЕ РЕЖИМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ДИНАМИКЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ИРКУТСК — 2014

Работа выполнена в Институте математики, экономики и информатики ФГБОУ ВПО «Иркутский государственный университет» (Министерство образования и науки Российской Федерации).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, **Финогенко Иван Анатольевич,** ИДСТУ СО РАН, зав. лабораторией
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Тонков Евгений Леонидович,** УдГУ, зав. кафедрой; кандидат физико-математических наук, доцент **Абдуллин Рафаэль Зинатович,** БГУЭП, доцент
Ведущая организация:	**Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина** (г. Екатеринбург)

Защита диссертации состоится 19 июня 2014 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в Институте динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте www.idstu.irk.ru ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 12 мая 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н. Т. В. Груздева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию дифференциальных включений с позиционными импульсным и разрывным управлениями в правой части.

Актуальность темы диссертации. В работах[1,2] исследован управляемый объект с позиционным импульсным управлением, которое определено как некоторый абстрактный оператор, сопоставляющий каждому состоянию объекта и текущему моменту времени сосредоточенный в нем импульс Дирака. Формализация позиционного импульсного управления заключается в дискретной реализации процесса управления в виде корректирующих импульсных воздействий на систему в точках направленного множества разбиений интервала управления. Реакцией системы на такое управление является некоторая разрывная функция, называемая ломаной Эйлера.

Дискретная реализация процесса импульсного позиционного управления в виде разрывных ломаных Эйлера используется в книге Н. Н. Красовского и А. И. Субботина[3] при исследовании игровых задач управления. В работах А. Н. Сесекина и С. Т. Завалищина позиционные импульсные управления возникали в вырожденных линейно-квадратичных задачах оптимального управления, в статьях В. Б. Костоусова исследовалась структура импульсно-скользящих режимов при импульсных возмущениях, задаваемых мерами. В литературе можно также встретить такие термины, как “импульсные скользящие”, “цикличные скользящие”, “скользящие” режимы (см. работы Б. М. Миллера, В. Ф. Кротова, В. И. Гурмана, Ни Минь Кань, И. В. Расиной).

Существуют различные способы описания разрывных траекторий динамических систем. Один из них восходит к работе В. Д. Мильмана, А. Д. Мышкиса[4] и состоит в том, чтобы устанавливать правила, по которым происходит скачок траектории. Систематически этот подход развивается в книге А. М. Самойленко и Н. А. Перестюк (описание этого подхода можно найти в книге Б. М. Миллера и Е. Я. Рубиновича[5]). Еще один путь описания решения дифференциального уравнения с δ-функцией Дирака в коэффициентах основан на предельном переходе в этом уравнении после замены в нем идеального импульса Дирака

[1] Завалищин С. Т., Сесекин А. Н., Дрозденко С. Е. Динамические системы с импульсной структурой. Свердловск : Сред.–Урал. кн. изд-во, 1983. 112 с.

[2] Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсно-скользящие режимы в нелинейных динамических системах // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 5. С. 790–799.

[3] Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука, 1974. 458 с.

[4] Мильман В. Д., Мышкис А. Д. Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. мат. журн. 1960. Т. 1. № 2. С. 233–237.

[5] Миллер Б. М., Рубинович Е. Я. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М. : Наука, 2005. 430 с.

на последовательность его гладких, непрерывных или иных аппроксимаций. Этот подход восходит к работе Я. Курцвейла[6], в которой правило скачка траектории, по сути, дает условие допустимости скачка через решение так называемого предельного уравнения (см. книгу В. А. Дыхты и О. Н. Самсонюк[7]). Но следует отметить[8], что при указанном аппроксимационном подходе скачок траектории не является однозначно определенным и зависит от характера предельного перехода. Сравнительный анализ различных подходов к изучению дифференциальных уравнений с обобщенными функциями имеется в книге[9] и обзорной статье[10].

Что же касается ломаных Эйлера, то отдельный интерес представляет случай, когда в результате действия корректирующих импульсов предельные справа точки соответствующей интегральной кривой оказываются на некотором многообразии (пересечении гиперповерхностей). Тогда (в соответствии с терминологией работ[1,2]) сеть ломаных Эйлера называется импульсно-скользящим режимом, а функция, предельная для равномерно сходящейся последовательности ломаных Эйлера при стремлении мелкости разбиения интервала управления к нулю — идеальным или предельным импульсно-скользящим режимом. В работах С. Т. Завалищина и А. Н. Сесекина были получены условия, когда для идеальных импульсно-скользящих режимов имеют место эффекты скольжения по пересечению гиперповерхностей.

Процессы типа скольжения (скользящие режимы) возникают во многих задачах теории управления. Но в большей степени они являются атрибутом управляемых систем с разрывными позиционными управлениями и теории разрывных систем в целом. Возникает естественный вопрос об описании идеальных импульсно-скользящих режимов дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями.

Решения дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями подразделяются на различные типы квазирешений, обобщенных решений, а также классифицируются по своим свойствам. В разных ситуациях и теориях могут использоваться различные понятия решения. Их сравнительный анализ можно найти в книге В. М. Мат-

[6]Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations // Czechosl. Math. Journ. 1958. Vol. 8, no. 3. P. 360–588.

[7]Дыхта В. А., Самсонюк О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М. : Физматлит, 2003. 256 с.

[8]Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М. : Наука, 1985. 224 с.

[9]Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы. Модели и приложения. М. : Наука, 1991. 225 с.

[10]Сесекин А. Н. Динамические системы с нелинейной импульсной структурой // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1. С. 497–510.

росова[11]. Одним из наиболее употребительных и удобных в прикладных задачах стало определение решения в смысле А. Ф. Филиппова[8]. Методы изучения систем с разрывными позиционными управлениями разработаны М. А. Айзерманом, Е. С. Пятницким[12]. Из работ многих других ученых, посвященных, в основном, различным методам исследования качественного поведения разрывных систем, укажем на еще один содержательный и общий метод исследования разрывных управляемых систем — метод эквивалентного управления, развитый в работах В. И. Уткина[13], который позволяет описывать скользящие режимы на пересечении поверхностей разрыва позиционных управлений. Наши исследования идеальных импульсно-скользящих режимов опираются на упомянутые выше три метода определения решения разрывных систем: в смысле Филиппова, Айзермана-Пятницкого и метод эквивалентного управления.

Круг задач, которые приводят к динамическим системам с разрывными позиционными управлениями, очень широк. Отметим задачи полной управляемости, слежения и стабилизации, которые решаются выводом системы на скользящий режим. Если же ресурсов управления не хватает, то скользящий режим прекращается и цель управления не достигается. Но, как видно из вышесказанного, эти же задачи могут решаться и на идеальном импульсно-скользящем режиме. Поэтому представляет интерес комбинированное использование обычных позиционных управлений и импульсных позиционных управлений: в областях, где не хватает ресурсов обычных управлений, использовать импульсно-скользящие режимы.

Таким образом, исследуемые в диссертации задачи актуальны как для распространения методов импульсного позиционного управления на более широкий круг задач, так и для развития существующей теоретической базы для решения типичных задач теории разрывных систем управления.

Целью работы является исследование асимптотических свойств импульсно-скользящих режимов дифференциальных включений и изучение взаимосвязей идеального импульсно-скользящего режима со скользящими режимами систем с разрывными позиционными управлениями.

Объект исследования. В диссертации исследуется дифференциальное включение $\dot{x} \in F(t, x) + u$ с импульсным позиционным

[11]Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001. 380 с.

[12]Айзерман М. А., Пятницкий Е. С. Основы теории разрывных систем I, II // Автоматика и телемеханика. 1974. № 7. С. 33–47, № 8. С. 39–61.

[13]Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М. : Наука, 1981. 367 с.

управлением, под которым понимается некоторый абстрактный оператор $u \leftarrow p(t,x)\delta_t$, сопоставляющий каждому состоянию объекта x и текущему моменту времени t сосредоточенный в нем импульс Дирака $p(t,x)\delta_t$ и подразумевающий дискретную реализацию процесса управления в виде корректирующих импульсных воздействий на систему в точках направленного множества разбиений интервала управления.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, теории дифференциальных включений, многозначного анализа и элементы теории динамических систем с разрывными траекториями и импульсными воздействиями.

Научная новизна. В работе сама постановка задачи об описании идеальных импульсно-скользящих режимов систем с импульсным позиционным управлением как скользящих режимов разрывных систем с разрывными позиционными управлениями является новой. Для этой задачи разработаны более общие, чем известные ранее, методы изучения импульсно-скользящих режимов дифференциальных включений с применением многозначного анализа. Так, многозначный аналог метода эквивалентных управлений ранее не использовался. Для изучения структуры обобщенных решений включений с сосредоточенными в точке импульсами новым является подход, основанный на непрерывных однозначных аппроксимациях Иосиды многозначных отображений, что позволяет эффективно использовать для исследований известные в теории дифференциальных уравнений с импульсами факты. Получены теоремы о взаимосвязях скользящих и импульсно-скользящих режимов дифференциальных включений, которые являются новыми также и для дифференциальных уравнений, являющихся частным случаем дифференциальных включений. Доказана новая теорема об аппроксимации импульсно-скользящего режима системы последовательностями решений этой же системы с дельтаобразными непрерывными функциями в правой части.

Достоверность результатов. Все утверждения диссертации являются полностью доказанными с использованием хорошо известных и достоверных фактов теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, теории дифференциальных включений и многозначного анализа. Они опубликованы в рецензируемых научных журналах и прошли обсуждение на научных конференциях и семинарах.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации развит новый подход к изучению импульсно-скользящих режимов систем, полученных в результате процедуры дискретизации импульсного позиционного управления, основанный на их описании системами с разрывными позиционными управлениями. Результаты диссертации являются дополнением существующей теоретической базы для решения прикладных задач, которые приводят к системам с позиционными разрывными и импульсными управлениями, и могут применяться для исследования динамики конкретных систем управления. Исследования по теме диссертации проводились в рамках плановых тем НИР Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВПО "ИГУ", проекта РФФИ № 10–01–00132а и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (проект № 2012–1.2.1–12–000–1001–011).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации рассмотрены дифференциальные включения с позиционным импульсным управлением и установлена взаимосвязь идеальных импульсно-скользящих режимов со скользящими режимами дифференциальных включений с разрывными позиционными управлениями. Полученные результаты применены для исследования управляемых механических систем, представленных уравнениями Лагранжа второго рода. Область исследований диссертации соответствует п. 4 "Динамические системы, дифференциальные уравнения на многообразиях" и п. 11 "Дифференциальные включения и системы вариационных неравенств" паспорта специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены на Всероссийской конференции "Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях" (Иркутск, 2009, 2011), на XI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Иркутск–Байкал, 2010), на XI Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Конференция Пятницкого), (Москва, 2010), на II Международной школе-семинаре "Нелинейный анализ и экстремальные задачи" (Иркутск, 2010), на Международной конференции "Колмогоровские чтения – V. Общие проблемы управления и их приложения" (ОПУ-2011) (Тамбов, 2011), на XV Байкальской международной школе-семинаре "Методы оптимизации и их приложения" (Иркутск–Байкал, 2011), на IV Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование" (Улан-Удэ, 2011), на Международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения С. Л. Соболева "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений" (Новосибирск, 2013), а также на конференциях и семинарах ИДСТУ СО РАН и на семинаре кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа ИМЭИ ФГБОУ ВПО "ИГУ".

Публикации и личный вклад. По результатам диссертации опубликовано 12 работ, список которых приведен в конце автореферата. Основные результаты главы 1 опубликованы соответственно в статье [1], главы 2 — в статьях [2,3], главы 3 — в статье [4], входящих в перечень рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ для опубликования результатов диссертаций, также отражены в материалах и трудах международных и всероссийских конференций [5–12]. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично и не нарушают авторских прав других лиц. В совместных публикациях И. А. Финогенко принадлежат постановки исследуемых задач.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 98 страницах, состоит из введения, трех глав, содержащих 14 разделов, заключения и списка литературы, включающего 76 наименований. В диссертации содержатся 4 рисунка и для удобства чтения приведен список основных предположений, которые фигурируют в формулировках лемм и теорем.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении сформулирована цель и дана общая характеристика и основное содержание работы, отражена актуальность, практическая значимость и научная новизна исследования.

Пусть R^n — n-мерное векторное пространство с евклидовой нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x) + u, \tag{1}$$

где $F: R^1 \times R^n \to R^n$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями, u — управляющее воздействие, задаваемое абстрактным оператором $u \leftarrow p(t,x)\delta_t$, сопоставляющим каждому текущему моменту времени t и состоянию объекта x импульс $p(t,x)\delta_t$. Здесь вектор-функция $p(t,x) = \big(p_1(t,x), \ldots, p_n(t,x)\big)$ — интенсивность импульса, δ_t — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в момент времени t. Выражение $p(t,x)\delta_t$ называется позиционным импульсным управлением. Формализация импульсного позиционного управления заключается в дискретной реализации процесса управления в виде корректирующих импульсных воздействий на систему в точках множества разбиений $h\colon t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_0 + T$ отрезка $I = [t_0, t_0 + T]$. Реакцией системы на такое управление является некоторая разрывная функция $x^h(t)$, называемая ломаной Эйлера, которая применительно к нашей ситуации на каждом промежутке $(t_k, t_{k+1}]$ совпадает с решением задачи Коши для дифференциального включения

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x), \\ x(t_k) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big), \quad k = \overline{0, N-1}, \end{cases}$$

где $x^h(t_0) = x_0$. Множество всех ломаных Эйлера является сетью, направленной по убыванию $d(h) = \max\{\Delta t_k\colon k = \overline{0, N-1}\}$. В случае, когда в результате действия корректирующего импульса в моменты времени t_k предельная справа точка $\bigl(t_k, x(t_k + 0)\bigr)$ интегральной кривой, соответствующей ломаной Эйлера, оказывается на некотором многообразии

$$S = \{(t, x) \in R^{n+1}\colon \sigma^j(t, x) = 0,\ j = \overline{1, m}\},$$

сеть ломаных Эйлера называется импульсно-скользящим режимом, а функция $r(\cdot)$, предельная для равномерно сходящейся на промежутке $(t_0, t_0 + T]$ последовательности ломаных Эйлера $\{x^{h_i}(\cdot)\}$ при $d(h_i) \to 0$ и доопределенная в точке t_0 равенством $r(t_0) = r(t_0 + 0)$ — идеальным или предельным импульсно-скользящим режимом.

Первая глава посвящена описанию импульсно-скользящих режимов дифференциальных включений (1) с помощью обычных скользящих режимов систем с разрывными позиционными управлениями.

Первый раздел носит вспомогательный характер и содержит необходимые предварительные сведения из теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, во втором разделе приведена постановка задачи. В третьем разделе изучены общие свойства идеальных импульсно-скользящих режимов, которые используются в дальнейшем.

В четвертом разделе исследована управляемая система (1) с разрывным позиционным управлением вида $u = B(t, x)\tilde{u}$, где $B(t, x)$ — некоторая непрерывная $n \times m$ матричная функция, удовлетворяющая равенству

$$\sigma_x(t, x) B(t, x) = -E_m \tag{2}$$

для любой точки $(t, x) \in S$. Здесь E_m — единичная $m \times m$ матрица, $\sigma_x(t, x)$ — $m \times n$ матрица Якоби по переменной x векторной функции $\sigma(t, x) = \bigl(\sigma^1(t, x), \ldots, \sigma^m(t, x)\bigr)$. Управление $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m)$ определяется равенствами

$$\tilde{u}_i(t, x) = H_i(t, x) \operatorname{sgn} \sigma^i(t, x) \tag{3}$$

для любых $(t, x) \notin S_i = \{(t, x) \in R^{n+1}\colon \sigma^i(t, x) = 0\}$, где $H_i(t, x) \geqslant 0$ — некоторые непрерывные функции, $i = \overline{1, m}$, sgn — функция знака. Тогда включение (1) запишется в виде

$$\dot{x} \in F(t, x) + B(t, x)\tilde{u}(t, x). \tag{4}$$

Пусть $\tilde{U}_i(t, x)$ — отрезок, концами которого являются предельные значения функций $\tilde{u}_i(t, x)$ в каждой точке (t, x), $i = \overline{1, m}$. В точках непрерывности функции $\tilde{u}_i(t, x)$ множество $\tilde{U}_i(t, x)$ состоит из одной точки — значения этой функции. Через $\tilde{U}(t, x) \subset R^m$ обозначим множество векторов $(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_m)$, когда $\tilde{u}_i$ независимо друг от друга пробегают множества $\tilde{U}_i(t, x)$.

Под решением задачи (4), определенным на отрезке $I=[t_0,t_0+T]$, понимается решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t,x)+B(t,x)\tilde{U}(t,x), \tag{5}$$

т. е. абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая (5) почти всюду на I.

Включение (5) может быть представлено в виде управляемой системы

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x)+B(t,x)\tilde{u}, \\ \tilde{u} \in \tilde{U}(t,x). \end{cases} \tag{6}$$

Решением задачи (6), определенным на отрезке I, называется пара $\big(x(t),\tilde{u}(t)\big)$, состоящая из абсолютно непрерывной функции $x(t)$ (траектории) и измеримой функции $\tilde{u}(t)$ (управления), удовлетворяющих включениям (6) почти всюду на I.

Для многозначного отображения $F(t,x)$ вводятся в рассмотрение следующие условия:

(B1) для любой непрерывной функции $x: R^1 \to R^n$ многозначное отображение $t \to F(t,x(t))$ измеримо;

(B2) при почти каждом $t \in R^1$ отображение $x \to F(t,x)$ полунепрерывно сверху;

(B3) существует такая суммируемая по Лебегу на каждом конечном промежутке функция $l(t)$, что для любых $(t,x) \in R^1 \times R^n$, $w \in F(t,x)$ выполняется неравенство $\|w\| \leqslant l(t)\big(1+\|x\|\big)$.

Теорема 1. *Пусть для многозначного отображения* $F(t,x)$ *с выпуклыми компактными значениями выполняются предположения* (B1)–(B3), *функции* $\sigma^i(t,x)$, $i=\overline{1,m}$, $m \leqslant n$, *являются непрерывно дифференцируемыми, матрица* $B(t,x)$ *и функции* $H_i(t,x)$ *непрерывны. Тогда:*

1. Для любых начальных условий $x(t_0)=x_0$ *существует локальное решение включения* (5), *определенное на некотором отрезке* $I=[t_0,t_0+T]$.

2. Для любого решения $x(t)$ *включения* (5) *найдется измеримая функция* $\tilde{u}(t)$ *такая, что пара* $(x(t),\tilde{u}(t))$ *будет решением управляемой системы* (6).

Решение $x(t)$ включения (4), удовлетворяющее условию $\big(t,x(t)\big) \in S$, $t \in [t_0,t_0+T]$, называется скользящим режимом. Для каждых $(t,x) \in S$ обозначим:

$$\tilde{U}^{eq}(t,x)=\sigma_t(t,x)+\sigma_x(t,x)F(t,x),\ \tilde{U}^{*eq}(t,x)=\tilde{U}^{eq}(t,x)\cap\tilde{U}(t,x).$$

Элементы $\tilde{u}^{*eq}(t,x)$ множества $\tilde{U}^{*eq}(t,x)$ называются эквивалентными управлениями, а отображение $(t,x) \to \tilde{U}^{*eq}(t,x)$ — многозначным эквивалентным управлением.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 1 и $x(t)$ — скользящий режим включения (5), определенный на отрезке $I = [t_0, t_0+T]$. Тогда $\tilde{U}^{*eq}\big(t, x(t)\big) \neq \emptyset$ для почти всех $t \in I$ и функция $x(t)$ является траекторией управляемой системы*

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) + B(t,x)\tilde{u}, \\ \tilde{u} \in \tilde{U}^{*eq}(t,x). \end{cases} \tag{7}$$

Обозначим $W_\delta(t,x) = \{(t',x') \colon \|x'-x\| < \delta,\ |t-t'| < \delta\}$, $\delta > 0$.

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 1 и на множестве S выполняется равенство (2). Предположим, что для каждой точки $(t,x) \in S$ существует $\varepsilon > 0$ и окрестность $W_\delta(t,x)$ этой точки такая что для всех $(t',x') \in W_\delta(t,x)$ и для всех индексов $i = \overline{1,m}$ выполняется неравенство*

$$\max_{w \in F(t',x')} |\sigma^i_t(t,x) + \langle \nabla_x \sigma^i(t,x), w\rangle| < H_i(t,x) - \varepsilon. \tag{8}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Для любого решения $x(t)$ дифференциального включения (4) с начальными данными $(t_0,x_0) \in S$ выполняется $\big(t,x(t)\big) \in S$ для всех точек $t \geqslant t_0$, в которых это решение существует;

2. Для любых точек $(t,x) \in S$ выполняется $\tilde{U}^{*eq}(t,x) = \tilde{U}^{eq}(t,x) \subset \operatorname{int}\tilde{U}(t,x)$, где символ int *означает внутренность множества;*

3. Для любых начальных данных $(t_0,x_0) \in S$ существует скользящий режим включения (4), определенный на правом максимальном промежутке существования, и любое решение $x(t)$ с начальными данными $(t_0,x_0) \in S$ является скользящим режимом тогда и только тогда, когда оно является траекторией управляемой системы (7) с теми же самыми начальными данными;

4. Множество S является устойчивым в следующем смысле: для любых $(t_0,x_0) \in S$ и $\tau > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при условиях $\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$ и $|t_0 - \tilde{t}_0| < \delta$ для любого решения дифференциального включения (4) с начальным условием $x(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0$ выполняется $\big(t,x(t)\big) \in S$ для всех точек $t \geqslant t_0 + \tau$, в которых это решение существует.

Теорема 3 используется далее при изучении включения, которому удовлетворяет идеальный импульсно-скользящий режим включения (1), но сформулированный в ней результат представляет также и самостоятельный интерес, так как системы, в которых одновременно присутствуют многозначные или разрывные характеристики (возмущения, сухое трение и др.) и разрывные позиционные управления, стабилизирующие систему, ранее не изучались.

В пятом разделе первой главы показана связь между импульсно-скользящими режимами и скользящими режимами дифференциальных включений. Рассматриваются такие управления, которые после каждого корректирующего импульса приводят систему на многообразие $S = \{(t,x) \in I \times R^n \colon \sigma^i(t,x) = 0,\ i = \overline{1,m}\}$, $m \leqslant n$. Для этой цели используются условия

$$\sigma\bigl(t, x + p(t,x)\bigr) = 0;\ p(t,x) = 0 \Longleftrightarrow \sigma(t,x) = 0, \tag{9}$$

и величина импульсного воздействия определяется равенством

$$p(t,x) = B(t,x)\sigma(t,x). \tag{10}$$

Предполагается, что $B(t,x)$ — непрерывная матричная функция размерности $n \times m$ и $\sigma(t,x)$ — непрерывно дифференцируемая векторная функция с матрицей Якоби $\sigma_x(t,x)$, имеющие ранг, равный m для всех $(t,x) \in S$. Отметим, что при этих предположениях из условий (9), (10) вытекает равенство (2).

Теорема 4. *Пусть для многозначного отображения $F(t,x)$ с выпуклыми компактными значениями выполняются предположения* (B1)–(B3)*, функция $p(t,x)$, определенная равенством* (10)*, удовлетворяет условию $\|p(\tau,y) - p(t,x)\| \leqslant L\bigl(|\tau - t| + \|y - x\|\bigr)$ для всех $(t,x), (\tau,y) \in I \times R^n$. Предположим, что выполняется условие* (9) *и справедливы неравенства* (8)*. Тогда любой идеальный импульсно-скользящий режим $r(t)$ включения* (1) *с позиционным импульсным управлением $u \leftarrow p(t,x)\delta_t$ является скользящим режимом этого же включения с разрывным позиционным управлением $u = B(t,x)\tilde{u}(t,x)$ при условии, что $r(t_0) = x_0 + p(t_0,x_0)$, $\tilde{u}(t,x)$ — функция, определенная равенствами* (3)*, и $B(t,x)$ — матрица, фигурирующая в равенстве* (10).

Отметим, что позиционное импульсное управление при весьма общих предположениях формирует последовательности ломаных Эйлера. Разрывное управление $\tilde{u}(t,x)$ обладает универсальностью в том смысле, что сохраняет свою структуру для различных целевых множеств S и способно обеспечивать их стабилизацию. Но применимость управлений типа $\tilde{u}(t,x)$ для реализации скользящих режимов имеет ограничения. В шестом разделе использование этих двух типов управлений рассматривается на содержательном примере управления движением линейного осциллятора с сухим трением. Графическая визуализация численных экспериментов подтверждает аналитические исследования.

В седьмом разделе первой главы получены дифференциальные включения с разрывными позиционными управлениями для идеальных импульсно-скользящих режимов дифференциальных включений

$A(t,x)\dot{x} \in F(t,x) + u$ с матрицей при производной. Для них установлены аналоги теорем из раздела 5. Эти результаты используются в третьей главе при исследовании режимов декомпозиции и импульсно-скользящих режимов для уравнений Лагранжа второго рода механических систем.

Во второй главе изучено дифференциальное включение с сосредоточенными в точках импульсами. Первый раздел носит постановочный и вспомогательный характер. В нем приводятся известные факты о непрерывных аппроксимациях Иосиды многозначных отображений.

Введем в рассмотрение непрерывные функции $\delta_i(t)$, удовлетворяющие условиям:

(D1) $\delta_i(t) = 0$ $(t \leqslant \alpha_i,\ t \geqslant \beta_i)$, $\delta_i(t) \geqslant 0$ $(\alpha_i < t < \beta_i)$, где $\alpha_i \to 0$, $\beta_i \to 0$, $\beta_i - \alpha_i \leqslant \tau_i \to 0$ при $i \to +\infty$;

(D2) $\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} \delta_i(t)\,dt = 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots$

Функции, удовлетворяющие условиям (D1)–(D2), называются дельтаобразными.

В практическом использовании процедуры импульсного управления неизбежно возникает задача о замене в системе импульса Дирака последовательностью его непрерывных аппроксимаций дельтаобразными функциями. При этом характер предельного перехода при $\tau_i \to +0$ влияет на величину скачка траектории в точке приложения импульса. В данной главе исследованы два типа предельного перехода на дельтаобразных функциях. Один из них приводит к известным условиям допустимости скачка в моменты импульсных воздействий, а другой — определяет величину импульсной коррекции непосредственно по значению заранее заданной интенсивности импульса. Исследования опираются на известные факты для дифференциальных уравнений с импульсами с использованием непрерывных однозначных аппроксимаций Иосиды многозначных отображений.

Пусть $F : (\alpha, \beta) \times R^n \to R^n$ — многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями.

Условие $\mathcal{A}$. *Для любых точек $t \in (\alpha, \beta)$ и $x, y \in R^n$ выполняется неравенство*

$$(x - y)^T A(t,x)(u - v) \leqslant l\|x - y\|^2$$

для любых $u \in F(t,x)$ и $v \in F(t,y)$, где $l > 0$ — константа, $A(t,x) = [a_{ij}(t,x)]_{i,j=1}^n$ — некоторая симметричная, положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матрица, собственные значения которой ограничены некоторым отрезком $[c,d]$, $0 < c \leqslant d < +\infty$.

(Здесь векторы понимаются как столбцы, знак “T“ обозначает вектор-строку.)

Во втором разделе второй главы изучено включение

$$\dot{x} \in F(t,x) + g(t,x)\delta(t), \tag{11}$$

где $\delta(t)$ — символ мгновенного ударного воздействия на систему в момент $t = 0$ (кратко — δ-функция Дирака). Включение вида (11) рассматривается как идеализация включений

$$\dot{x} \in F(t,x) + g\big(t,x)\delta_i(t), \tag{12}$$

где $\delta_i(t)$ образуют последовательность непрерывных дельтаобразных функций. Введем в рассмотрение задачи:

$$\dot{u} \in F(t,u),\ u(t_0) = x_0,\ t \in [t_0, 0]; \tag{13}$$

$$\frac{dv}{ds} = g(0,x),\ v(0) = u(0),\ s \in [0,1]; \tag{14}$$

$$\dot{w} \in F(t,w), w(0) = v(1),\ t \in [0, t_0 + T]. \tag{15}$$

Теорема 5. *Пусть $F(t,x)$ — ограниченное, полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми компактными значениями, удовлетворяющее условию $\mathcal{A}$, функция $g(t,x)$ непрерывна и для любого t удовлетворяет условию Липшица по переменной x с константой L_g. Тогда для любой последовательности решений $x_i(t)$ задач* (12) *при $i \to +\infty$ имеет место:*

$$\begin{aligned} &x_i(t) \to u(t),\ t_0 \leqslant t < 0;\\ &x_i(t) \to w(t),\ 0 < t \leqslant t_0 + T, \end{aligned}$$

где $u(t)$ и $w(t)$ — решения включений (13) *и* (15) *соответственно.*

В третьем разделе меняется характер предельного перехода на последовательностях дельтообразных функций и рассматривается задача

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F\big(t, x(t)\big) + \delta(t)p\big(x(t-0)\big),\\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{16}$$

как идеализация последовательности задач

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F\big(t, x(t)\big) + \delta_i(t)p\big(x(t-\tau_i)\big),\ i = 1, 2, \dots .\\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{17}$$

Вводятся в рассмотрение дифференциальные включения

$$\dot{u} \in F(t,u),\ u(t_0) = x_0,\ t \in [t_0, 0]; \tag{18}$$

$$\dot z \in F(t, z),\ z(0) = u(0) + p\big(u(0)\big),\ t \in [0, t_0 + T]. \qquad (19)$$

Теорема 6. *Пусть для многозначного отображения $F(t,x)$ выполняются все условия теоремы 5 и функция $p(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда для любой последовательности решений $x_i(t)$ задач* (17) *при $i \to +\infty$ имеет место*

$$x_i(t) \to u(t),\ t_0 \leqslant t < 0;$$
$$x_i(t) \to z(t),\ 0 < t \leqslant t_0 + T,$$

где $u(t)$ и $z(t)$ — решения включений (18) *и* (19) *соответственно.*

Определение 1. *Под обобщенным решением включения* (16) *будем понимать функцию $x(t)$, удовлетворяющую дифференциальному включению* (18) *на отрезке $[t_0, 0]$ и дифференциальному включению* (19) *на промежутке $(0, t_0 + T]$ с начальным условием $x(+0) = x(0) + p\big(x(0)\big)$.*

Доопределение обобщенного решения $x(t)$ в точке разрыва $t = 0$ пределом слева (который, очевидно, существует) является удобным для нас соглашением.

Отметим, что доказательства теорем 2.2.1 и 2.3.1 основаны на использовании аппроксимации Иосиды $F_\lambda(t,x)$ многозначных отображений. Для обобщенных решений $x(t)$ включений (11), (16) и обобщенного решения $x_\lambda(t)$ уравнения, полученного из этих включений заменой в них многозначного отображения $F(t,x)$ на его аппроксимацию Иосиды $F_\lambda(t,x)$, получены оценки вида

$$\|x(t) - x_\lambda(t)\| = O(\sqrt{\lambda} + \|x(t_0) - x_\lambda(t_0)\|).$$

В четвертом разделе второй главы изучен вопрос об аппроксимации ломаных Эйлера. Предполагается, что функция $p(t,x)$ не зависит от переменной t и обозначается $p(t,x) = p(x)$. Для разбиения h отрезка I вводится в рассмотрение задача

$$\begin{cases} \dot x(t) \in F\big(t, x(t)\big) + p\big(x(t-0)\big) \sum\limits_{k=1}^{N-1} \delta(t - t_k), \\ x(t_0) = x_0 + p(x_0), \end{cases}$$

обобщенное решение которой (в смысле определения 2.3.2) является ломаной Эйлера включения (1), начиная с точки $t_0 + 0$. Это позволяет доказать теорему об аппроксимации ломаных Эйлера последовательностями задач с дельтаобразными функциями и некоторым образом определяет место ломаных Эйлера в теории систем с разрывными траекториями.

В третьей главе рассмотрена механическая система с n степенями свободы и с силами сухого трения в виде уравнений Лагранжа второго рода

$$A(t,q)\ddot{q} = g(t,q,\dot{q}) + Q^A(t,q,\dot{q}) + Q^T(t,q,\dot{q}) + u \tag{20}$$

с начальным условием $(t_0, q_0, \dot{q}_0)$. Здесь представляет интерес наличие в (20) разрывной по $\dot{q}$ функции $Q^T(t,q,\dot{q})$ (обобщенные силы кулонова трения), непрерывной, положительно определенной при любых $(t,q) \in I \times R^n$ матрицы $A(t,q)$, которая в общем случае может отличаться от единичной матрицы, а также наличие управляющих сил u.

Для механических систем движение по пересечению множеств $S_i = \{(t,q,\dot{q}) : \dot{q}_i = \varphi_i(t,q)\}$, $i = \overline{1,n}$, называется режимом декомпозиции. Такие движения позволяют эффективно решать ряд задач управления механическими системами. В работах Е. С. Пятницкого[14] развита соответствующая теория (принцип декомпозиции) для уравнений Лагранжа второго рода (без учета сил трения), где асимптотически устойчивый режим декомпозиции обеспечивается управлениями вида $u_i = -H_i \operatorname{sgn}\big(\dot{q}_i - \varphi_i(t,q)\big)$.

Режим декомпозиции есть не что иное, как скользящий режим исследуемой механической системы с разрывными позиционными управлениями. В первом разделе третьей главы исследуются общие условия, при которых идеальный импульсно-скользящий режим является режимом декомпозиции. Во втором разделе третьей главы показана связь идеальных импульсно-скользящих режимов механической системы с множеством S, определяемым уравнением $\dot{q} = \varphi(t,q)$, с режимом декомпозиции системы (20). Получены условия на ресурс управления, которые обеспечивают устойчивый режим декомпозиции под воздействием обычных разрывных позиционных управлений. Однако, в тех областях, где этих ресурсов не достаточно, режим декомпозиции можно рассматривать как идеальный импульсно-скользящий режим и с любой точностью обеспечивать его импульсно-скользящим режимом. Возникающие здесь особенности движения системы рассмотрены на примере двухзвенного манипулятора на шероховатой горизонтальной плоскости.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Доказана теорема о существовании идеального импульсно-скользящего режима дифференциального включения с выпуклой правой частью. Для описания идеальных импульсно-скользящих режимов получено дифференциальное включение с разрывными позиционными управлениями и разработан метод многозначного

[14] Пятницкий Е. С. Синтез иерархических систем управления механическими и электромеханическими объектами на принципе декомпозиции. I, II // АиТ. 1989. № 1. С. 87–98, № 2. С. 57–71.

эквивалентного управления. Установлены условия, при которых любой импульсно-скользящий режим дифференциального включения с импульсным позиционным управлением в правой части является скользящим режимом этого же включения с ограниченными разрывными позиционными управлениями.

2. Изучена структура разрывных траекторий дифференциальных включений с изолированными в точках импульсами Дирака в правой части в зависимости от характера предельных переходов на последовательностях решений этого же включения при замене в нем импульса Дирака последовательностями его непрерывных аппроксимаций дельтаобразными функциями. Доказаны теоремы об аппроксимации импульсно-скользящего режима дифференциального включения последовательностями его непрерывных решений с дельтаобразными функциями в правой части.

3. Для механических систем с сухим трением, представленных уравнениями Лагранжа второго рода, установлены общие условия на ресурсы управления, при которых идеальный импульсно-скользящий режим является асимптотически устойчивым режимом декомпозиции с двумя различными типами разрывных позиционных управлений. Для уравнений движения линейного осциллятора с сухим трением и двухзвенного манипулятора на шероховатой плоскости получены условия комбинированного использования позиционных разрывных и импульсных управлений.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Финогенко И. А., Пономарев Д. В. О дифференциальных включениях с позиционными разрывными и импульсными управлениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 284–299.

2. Пономарев Д. В. О решениях дифференциальных включений с импульсной структурой // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 51–60.

3. Пономарев Д. В., Финогенко И. А. Аппроксимация импульсно-скользящего режима дифференциального включения // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 85–103.

4. Пономарев Д. В. Импульсно-скользящие режимы управляемых механических систем // Вестник Удмуртского университета. Сер.

Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2013. – Вып. 3. – С. 65–78.

5. Пономарев Д. В. О решениях дифференциальных включений с импульсной структурой // Материалы XI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2010. – С. 64.

6. Пономарев Д. В. О разрывных траекториях дифференциальных включений // Тез. докладов XI Международной конференции "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" (Конференция Пятницкого). – М. : ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 2010. – С. 331–332.

7. Ponomariov D. V. On discontinuous trajectories of differential inclusions // Тез. докладов II Международной школы-семинара "Нелинейный анализ и экстремальные задачи". – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2010. — С. 61.

8. Пономарев Д. В. Об уравнении импульсно-скользящего режима // Вестник Тамбовского Университета. – 2011. – Т. 16, вып. 4. – С. 1155–1156.

9. Пономарев Д. В. Импульсно-скользящие режимы дифференциальных включений // Труды X Международной Четаевской конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление". Т. 2. – Казань: КГТУ, 2012. – С. 451–453.

10. Пономарев Д. В. О скользящих режимах дифференциальных включений // Тез. докладов III Международной школы-семинара "Нелинейный анализ и экстремальные задачи". – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2012. – С. 40.

11. Пономарев Д. В., Финогенко И. А. О дифференциальных уравнениях управляемых систем с позиционными и импульсными управлениями // Тез. докладов Международной конференции "Моделирование, управление и устойчивость" (MCS-2012). – Севастополь (Украина), 2012. – С. 95–96.

12. Пономарев Д. В., Финогенко И. А. Импульсно-скользящие режимы дифференциальных включений // Тез. докладов Международной конференции, посвященной 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений". – Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева, 2013. – С. 298.

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института динамики систем и теории управления СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
E-mail: rio@icc.ru

Подписано к печати 14.04.2014 г.
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 1,2 п.л.
Заказ 4. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН