На правах рукописи

Скворцова Мария Александровна

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ИРКУТСК — 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Демиденко Геннадий Владимирович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Фёдоров Владимир Евгеньевич**, ЧелГУ, зав. кафедрой
	кандидат физико-математических наук **Лемперт Анна Ананьевна**, ИДСТУ СО РАН, зав. лабораторией
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВПО** **“Национальный исследовательский Томский государственный университет”** (г. Томск)

Защита диссертации состоится 19 июня 2014 г. в 13 : 30 на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте www.idstu.irk.ru ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан “____” мая 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н. Т.В. Груздева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом начала интенсивно развиваться в середине прошлого столетия. Уравнения такого типа возникают при описании процессов, скорость изменения которых определяется не только настоящим, но и предшествующим состояниями. Они возникают во многих задачах теории автоматического регулирования и управления, автоматики и телемеханики, радиофизики, при моделировании процессов иммунологии, при изучении генных сетей, экономики и т. д.

Одной из важных проблем в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом является изучение устойчивости решений. Этой тематике посвящен ряд монографий (см., например, книги А.Д. Мышкиса (1951), Л.Э. Эльсгольца (1955), Н.Н. Красовского (1959), Э. Пинни (1961), Р. Беллмана и К. Кука (1967), В.П. Рубаника (1969), А. Халаная и Д. Векслера (1971), Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина (1971), Ю.А. Митропольского и Д.И. Мартынюка (1979), В.Б. Колмановского и В.Р. Носова (1981), С.Н. Шиманова (1983), Дж. Хейла (1984), Д.Г. Кореневского (1989), Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф. Рахматуллиной (1991), Ю.Ф. Долгого (1996), В.Б. Колмановского и А.Д. Мышкиса (1999), Н.В. Азбелева и П.М. Симонова (2001), К. Гу, В.Л. Харитонова и Дж. Чена (2003) и др.).

Исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом начались более полувека назад в работах А.А. Андронова и А.Г. Майера, Р. Беллмана, Н.Н. Красовского, Л.С. Понтрягина, Б.С. Разумихина, Н.Г. Чеботарева и Н.Н. Меймана, Л.Э. Эльсгольца и др. К настоящему времени наиболее изученными являются задачи об асимптотической устойчивости стационарных решений автономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, при этом широкое распространение получили спектральные методы исследований. Однако при исследовании асимптотической устойчивости решений конкретных систем использование этих методов может быть затруднительным. С одной стороны, приближенное вычисление корней квазимногочленов является весьма трудоемкой задачей (при этом их может быть счетное число), с другой стороны, эта задача является, вообще говоря, плохо обусловленной с точки зрения теории возмущений. Поэтому большое значение имеют различные признаки принадлежности корней квазимногочленов левой полуплоскости. Для уравнений с запаздывающим аргументом для этой цели зачастую используют метод D-разбиений, амплитудно-фазовый метод, метод Меймана–Чеботарева, а также методы, основанные на использовании аналогов теорем Ляпунова. Одним из наиболее распространенных является метод функционалов Ляпунова–Красовского. Достоинством этого метода является простота формулировок утверждений и сведение исследования асимптотической устойчивости к решению хорошо обусловленных задач. Однако в отличие от функции Ляпунова, с помощью которой доказывается оценка Крейна, характеризующая экспоненциальное убывание решений обыкновенных дифференциальных уравнений, использование функционалов Ляпунова–Красовского не позволяет получить аналоги таких оценок для решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Задача о получении аналогов оценки Крейна для решений автономных линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с помощью некоторых функционалов и без нахождения корней квазимногочленов была решена относительно недавно (см., например, работы [1,2,3,4]). Методы, предложенные в данных работах, основаны на использовании различных модификаций функционала Ляпунова–Красовского. Отметим, что использование модифицированных функционалов Ляпунова–Красовского позволяет получить аналоги оценки Крейна для решений нелинейных автономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, а также указать множества притяжения нулевого решения.

В отличие от автономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом задача об асимптотической устойчивости решений неавтономных уравнений является менее изученной. Основные исследования в этом направлении проводятся для линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами. Основы теории устойчивости решений таких уравнений заложены в работах А.М. Зверкина, А. Стокса, А. Халаная, В. Хана, Дж. Хейла, С.Н. Шиманова. Основным подходом в этих исследованиях является развитие теории Флоке и использование оператора монодромии. Помимо указанного подхода в литературе развиваются: метод производящих функций, метод монотонных операторов, метод функционалов Ляпунова–Красовского. Следует отметить, что существующие условия асимптотической устойчивости решений неавтономных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом проверить достаточно сложно. Трудности возникают также при описании областей притяжения в случае систем нелинейных уравнений, а также при получении асимптотических оценок решений при $t \to \infty$.

Впервые аналоги оценок Крейна для решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициента-

[1] Kharitonov V.L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems // Systems Control Lett. 2004. V. 53, No. 5. P. 395–405.

[2] Хусаинов Д.Я., Иванов А.Ф., Кожаметов А.Т. Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.

[3] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

[4] Mondié S., Kharitonov V.L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50, No. 2. P. 268–273.

ми в линейных членах были получены в работах [3, 5]. При получении этих оценок применялась новая модификация функционалов Ляпунова–Красовского, основанная на использовании решения специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова.

Основываясь на идеях из статей [3, 5], в работах Г.В. Демиденко и И.И. Матвеевой были предложены модификации функционалов Ляпунова–Красовского для исследования экспоненциальной устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянными и периодическими коэффициентами. Они позволили получить оценки решений, являющиеся аналогами неравенств Крейна, которые характеризуют скорость экспоненциального убывания решений на бесконечности. Актуальной проблемой в настоящее время является получение аналогичных результатов для систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа. В диссертации с использованием указанных модифицированных функционалов Ляпунова–Красовского проводятся исследования в этом направлении.

Цель работы. Основной целью диссертации является исследование экспоненциальной устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянными и периодическими коэффициентами в линейных членах, нахождение множеств начальных данных, гарантирующих существование решений начальных задач "в целом", и получение оценок, характеризующих скорость убывания решений систем на бесконечности.

Объект исследования. Классы систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянными и периодическими коэффициентами в линейных членах.

Методы исследования. При получении результатов были использованы модифицированные функционалы Ляпунова–Красовского, введенные в работах [3, 5, 6]. Вспомогательным аппаратом исследования послужили методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и теории матриц.

Научная новизна. В диссертации для систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа исследован вопрос об экспоненциальной устойчивости решений по первому приближению. Без использования спектральной информации установлены оценки, характеризующие скорость убывания решений при $t \to \infty$. Экспоненциальные показатели и предэкспоненциальные множители получены в явном виде, при этом они зависят от величин, нахождение которых является хорошо обусловленной задачей с точки зрения теории возмущений. Все полученные результаты являются новыми.

[5] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

[6] Demidenko G.V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, No 3. P. 119–130.

Достоверность результатов. Достоверность результатов, полученных в диссертации, обусловлена строгостью доказательств, применением известных методов из теории обыкновенных дифференциальных уравнений и теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, а также обсуждениями на научных конференциях и семинарах.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты дополняют теорию устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом по первому приближению. Они могут быть использованы при исследовании конкретных систем дифференциальных уравнений нейтрального типа, возникающих в практических задачах. На основе полученных теоретических результатов могут быть разработаны алгоритмы для численного исследования экспоненциальной устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа по первому приближению.

Исследования по теме диссертации проводились при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-00329, № 14-01-31528) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянными и периодическими коэффициентами в линейных членах. Исследован вопрос существования решений начальных задач на всей полуоси и получены оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности. Поэтому область исследований соответствует пункту 9 "теория дифференциально-функциональных уравнений" в списке "области исследования", определенном паспортом специальности 01.01.02.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на конференциях: XLVIII, XLIX и LI Международные научные студенческие конференции "Студент и научно-технический прогресс" (г. Новосибирск, 2010 г., 2011 г., 2013 г.); IX молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения-2010" (г. Казань, 2010 г.); IV Международная конференция "Математика, ее приложения и математическое образование" (г. Улан-Удэ, 2011 г.); Международная научная конференция "Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование" (г. Волгодонск, 2011 г.); Школа-конференция по геометрическому анализу (г. Горно-Алтайск, 2012 г.); IV Международная конференция молодых ученых "Дифференциальные уравнения и их приложения", посвященная Я.Б. Лопатинскому (Украина, г. Донецк, 2012 г.); Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов-2013" (г. Москва, 2013 г.); Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (г. Новосибирск, 2013 г.); Крымская Международная математическая конференция (Украина, г. Судак, 2013 г.).

Основные результаты диссертации обсуждались на семинаре Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН "Избранные вопросы математического анализа" (руководитель: профессор Г.В. Демиденко) и на семинаре по дифференциальным уравнениям, управлению и системному анализу Института динамики систем и теории управления СО РАН (руководитель: профессор В.А. Дыхта).

Публикации и личный вклад. По теме диссертации опубликовано 15 работ, из них 4 статьи [1]–[4] в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертации.

Из совместных работ в диссертацию включены результаты, полученные автором лично и не нарушающие авторских прав других лиц. В работе [1] Г.В. Демиденко принадлежат постановки исследуемых задач, построение модифицированного функционала Ляпунова–Красовского, доказательство теорем об устойчивости в линейном и почти линейном случаях. Т.В. Котовой принадлежит доказательство теоремы о робастной асимптотической устойчивости. В работе [3] Г.В. Демиденко принадлежат постановки исследуемых задач, получение оценок решений систем при одном запаздывании. Е.С. Водопьянову принадлежит установление оценки для модифицированного функционала Ляпунова–Красовского в случае нескольких запаздываний.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, заключения и списка цитируемой литературы. Объем работы — 165 страниц. Список цитируемой литературы содержит 120 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Г.В. Демиденко за постановку задачи и поддержку, а также к.ф.-м.н. Л.Н. Бондарь и к.ф.-м.н. И.И. Матвеевой за полезные дискуссии и помощь в работе.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается краткий обзор известных результатов по теме диссертации, в том числе используемых при получении результатов диссертации, формулируются задачи исследования, вводятся необходимые обозначения и излагаются основные результаты.

В **первой главе** диссертации рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами в линейной части

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \tag{1}$$

где $F(t,u,v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u и оценке

$$\|F(t,u,v)\| \le q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_i,\ \omega_i \ge 0,\ i=1,2. \tag{2}$$

Основная цель — изучение экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1) по первому приближению в случае, когда D — ненулевая матрица, и ее спектр принадлежит единичному кругу.

Для изложения дальнейшего материала нам понадобится результат Г.В. Демиденко [6].

Теорема. *Пусть* $\|D\| < 1$. *Предположим, что существуют матрицы*

$$H = H^* > 0, \quad K(s) \in C^1([0,\tau]) \tag{3}$$

такие, что

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{4}$$

при этом

$$\mathbf{C} = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB + A^*HD \\ B^*H + D^*HA & D^*HB + B^*HD - K(\tau) \end{pmatrix} > 0. \tag{5}$$

Тогда нулевое решение системы (1) при $F(t,u,v) \equiv 0$ *экспоненциально устойчиво.*

При доказательстве используется модифицированный функционал Ляпунова–Красовского

$$V_1(t,y) = \langle H(y(t)+Dy(t-\tau)), (y(t)+Dy(t-\tau))\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Мы будем предполагать, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (3)–(5), гарантирующие экспоненциальную устойчивость решений линейной системы уравнений нейтрального типа. При этих условиях мы находим область допустимых начальных данных, при которых решение системы уравнений (1) существует на всей полуоси, и стремится к нулю на бесконечности, а также устанавливаем оценки решений системы (1), характеризующие экспоненциальное убывание при $t \to \infty$.

Первая глава состоит из шести параграфов. В первом параграфе рассматривается начальная задача для системы (1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau) + \\ \qquad\qquad + F(t,y(t),y(t-\tau)), \quad t > 0, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0). \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Будем предполагать, что показатели нелинейности ω_i, $i = 1, 2$, в (2) строго положительны.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся некоторые обозначения. Введем три эрмитовы матрицы. Вначале определим матрицу $M = K(\tau) - D^* K(0) D$. Из условия (5) вытекает, что $M > 0$. Определим теперь матрицы

$$L = -HA - A^*H - K(0)-$$
$$-\Big(H(B-AD) - K(0)D\Big)M^{-1}\Big((B-AD)^*H - D^*K(0)\Big),$$
$$N = \Big(H(B-AD) - K(0)D\Big)M^{-2}\Big((B-AD)^*H - D^*K(0)\Big).$$

Отметим, что условие (5) эквивалентно тому, что $M > 0$ и $L > 0$.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|, \quad \bar{q}_1 = q_1\|H\|\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1 + \|D\|)^{\omega_1}.$$

Пусть $\theta > 0$ такое, что

$$\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\Big]\|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1+2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\},$$

где $l_{\min} > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц L и M соответственно. Обозначим $\varepsilon = \min\{\widetilde{c}, k\}$, где

$$\widetilde{c} = \frac{l_{\min}}{\|H\|} - \Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\Big](1 + 2\|N\|),$$

$k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Отметим, что в силу выбора чисел θ и k число ε строго положительно.

В дальнейшем введенные параметры θ, ε, $\bar{q}_1$ будут использоваться при описании множества для начальных данных, при которых решение начальной задачи (6) существует на всей полуоси, и при указании равномерных оценок решения.

Сформулируем результаты, предполагая вначале, что $\|D\| < 1$.

Теорема 1.1.1. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (3)–(5) и $\|D\| < e^{-\varepsilon\tau/2}$. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, где*

$$\mathcal{E}_1 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V_1(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V_1(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V_1(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-\|D\|e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}+\|D\|\Phi<\theta\Bigg\},$$

решение начальной задачи (6) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\le\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V_1(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V_1(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-\|D\|e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}e^{-\varepsilon t/2}+\Phi\|D\|^{t/\tau}.$$

Теорема 1.1.2. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (3)–(5) и $\|D\|=e^{-\varepsilon\tau/2}$. Тогда при $\varphi(t)\in\mathcal{E}_2$, где*

$$\mathcal{E}_2=\Bigg\{\varphi(t)\in C^1([-\tau,0]):\quad \Phi<\theta,\quad 2\bar{q}_1(V_1(0,\varphi))^{\omega_1/2}<\varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V_1(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V_1(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau/2}}{\varepsilon\tau/2}\right)+\|D\|\Phi<\theta\Bigg\},$$

решение начальной задачи (6) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\le\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V_1(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V_1(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{t}{\tau}+1\right)+\Phi\right)e^{-\varepsilon t/2}.$$

Теорема 1.1.3. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (3)–(5) и $e^{-\varepsilon\tau/2}<\|D\|<1$. Тогда при $\varphi(t)\in\mathcal{E}_3$, где*

$$\mathcal{E}_3=\Bigg\{\varphi(t)\in C^1([-\tau,0]):\quad \Phi<\theta,\quad 2\bar{q}_1(V_1(0,\varphi))^{\omega_1/2}<\varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V_1(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V_1(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\|D\|\Phi<\theta\Bigg\},$$

решение начальной задачи (6) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\le\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V_1(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V_1(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\Phi\right)\|D\|^{t/\tau}.$$

Из этих теорем непосредственно вытекает

Следствие 1.1.1. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (3)–(5) и $\|D\|<1$. Тогда нулевое решение системы уравнений (1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства теорем 1.1.1–1.1.3 приведены во втором параграфе.

В первом параграфе содержатся также формулировки теорем о разрешимости начальной задачи (6) и об оценках ее решений для случая, когда $\|D\| \geq 1$ и спектр матрицы D принадлежит единичному кругу. Из этих теорем будет вытекать экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы уравнений (1). Все эти утверждения доказаны в третьем параграфе.

В четвертом параграфе главы рассматривается случай, когда хотя бы один из показателей нелинейности в (2) равен нулю, т. е. $\omega_1\omega_2 = 0$. При этом, если $\omega_1 = 0$ (или $\omega_2 = 0$), то на коэффициент q_1 из (2) (или на q_2) возникают условия вида $q_1 \leq q^*$ (или $q_2 \leq q^*$). Во всех случаях сформулированы теоремы существования на всей полуоси и указаны оценки решений системы (1). Техника доказательства основана на использовании модифицированного функционала Ляпунова–Красовского $V_1(t, y)$. Из этих теорем вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы уравнений (1).

В пятом параграфе главы обсуждается вопрос о построении матриц H и $K(s)$, удовлетворяющих условиям (3)–(5).

В шестом параграфе рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau(t))) = Ay(t) + By(t-\tau(t)) + F(t, y(t), y(t-\tau(t))), \quad t > 0,$$

где A, B, D — вещественные матрицы размера $n \times n$, $F(t, u, v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u и оценке (2), $\tau(t)$ — гладкая функция такая, что

$$0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2 < \infty, \quad \tau'(t) \leq \alpha < 1.$$

В этом параграфе приведены некоторые обобщения результатов, полученных в предыдущих параграфах. В частности, указываются достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения таких систем уравнений.

Во **второй главе** диссертации рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейной части

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \quad (7)$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с вещественнозначными непрерывными T-периодическими элементами, $F(t, u, v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u и оценке (2). Основная цель — изучение экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (7) по первому приближению в случае, когда D — ненулевая матрица, и ее спектр принадлежит единичному кругу.

Для изложения дальнейшего материала нам понадобится следующий результат Г.В. Демиденко и И.И. Матвеевой.

Теорема. *Предположим, что существуют матрицы*

$$H(t) = H^*(t) \in C^1([0,T]) \quad \text{и} \quad K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau]) \tag{8}$$

такие, что

$$H(0) = H(T) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{9}$$

при этом

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11}(t) & \mathbf{C}_{12}(t) \\ \mathbf{C}_{12}^*(t) & \mathbf{C}_{22}(t) \end{pmatrix} > 0, \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

где

$$\mathbf{C}_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0),$$

$$\mathbf{C}_{12}(t) = -H(t)B(t) - A^*(t)H(t)D,$$

$$\mathbf{C}_{22}(t) = K(\tau) - D^*H(t)B(t) - B^*(t)H(t)D.$$

Тогда нулевое решение системы уравнений (7) при $F(t,u,v) \equiv 0$ экспоненциально устойчиво.

При доказательстве используется модифицированный функционал Ляпунова–Красовского

$$V_2(t,y) = \langle H(t)(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Мы будем предполагать, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (8)–(10), гарантирующие экспоненциальную устойчивость решений линейной системы уравнений нейтрального типа. При этих условиях мы находим область допустимых начальных данных, при которых решение системы уравнений (7) существует на всей полуоси и стремится к нулю на бесконечности, а также устанавливаем оценки решений системы (7), характеризующие экспоненциальное убывание при $t \to \infty$.

Вторая глава состоит из пяти параграфов. В первом параграфе рассматривается начальная задача для системы (7):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь $\varphi(t) \in C^1([-\tau,0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Будем предполагать, что показатели нелинейности ω_i, $i=1,2$, в (2) строго положительны.

Для формулировки утверждений нам потребуется ввести некоторые обозначения. По аналогии с первой главой введем три эрмитовы матрицы. Вначале определим матрицу $M = K(\tau) - D^* K(0) D$. Из условия (10) вытекает, что $M > 0$. Определим теперь при $t \in [0,T]$ следующие матрицы

$$L(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) -$$

$$-\Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - K(0)D\Big)M^{-1}\Big((B(t) - A(t)D)^* H(t) - D^* K(0)\Big),$$

$$N(t) = \Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - K(0)D\Big)M^{-2}\times$$

$$\times\Big((B(t) - A(t)D)^* H(t) - D^* K(0)\Big).$$

Отметим, что условие (10) эквивалентно тому, что $M > 0$, $L(t) > 0$, $t \in [0,T]$.

Введем следующие обозначения:

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|, \qquad h_{\min} = \min_{t\in[0,T]} \|H^{-1}(t)\|^{-1},$$

$$\bar{q}_1 = q_1(1+\|D\|)^{\omega_1} \max_{t\in[0,T]} \Big\{\|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|^{1+\omega_1/2}\Big\}.$$

Пусть $\theta > 0$ такое, что

$$\left(q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\right)\|H(t)\| < \min\left\{\frac{l_{\min}(t)}{1+2\|N(t)\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\},$$

где $l_{\min}(t) > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц $L(t)$ и M соответственно. Обозначим

$$\varepsilon(t) = \min\{\widetilde{c}(t), k\}, \quad \varepsilon_{\max} = \max_{t\in[0,T]} \varepsilon(t), \quad \varepsilon_{\min} = \min_{t\in[0,T]} \varepsilon(t),$$

где

$$\widetilde{c}(t) = \frac{l_{\min}(t)}{\|H(t)\|} - \left(q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\right)(1+2\|N(t)\|),$$

$k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau].$$

В силу выбора чисел θ и k функция $\varepsilon(t)$ строго положительна. Обозначим

$$r^{-\omega_1/2} = \bar{q}_1\omega_1\left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int_0^T \varepsilon(\xi)d\xi\right)\right]^{-1}\int_0^T \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int_0^\eta \varepsilon(\xi)d\xi\right)d\eta.$$

Введенные величины используются при описании множества для начальных данных, при которых решение начальной задачи (11) существует на всей полуоси, а также при указании оценок решения.

Сформулируем результаты, предполагая для простоты, что $\|D\| < 1$. Как и в случае постоянных матриц $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$ результаты существенным образом зависят от матрицы D.

Теорема 2.1.1. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (8)–(10) и $\|D\| < e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}$. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, где*

$$\mathcal{E}_1 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad V_2(0,\varphi) < r,$$

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V_2(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1}V_2(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta \Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (11) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V_2(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1}V_2(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \times$$

$$\times \left(1 - \|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right) + \Phi\|D\|^{t/\tau}.$$

Теорема 2.1.2. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (8)–(10), и существует точка $t_* \in [0,T]$ такая, что $\|D\| = e^{-\varepsilon(t_*)\tau/2}$. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, где*

$$\mathcal{E}_2 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad V_2(0,\varphi) < r,$$

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V_2(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1}V_2(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\frac{e^{-1+\gamma_{\min}\tau/2}}{\gamma_{\min}\tau/2}\right) + \|D\|\Phi < \theta \Bigg\},$$

$$\gamma(t) = \min\left\{\varepsilon(t), \frac{2}{\tau}\ln\frac{1}{\|D\|}\right\}, \quad \gamma_{\min} = \min_{t\in[0,T]} \gamma(t),$$

решение $y(t)$ начальной задачи (11) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V_2(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1} V_2(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \times$$

$$\times \left(\frac{t}{\tau} + 1\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right) + \Phi\|D\|^{t/\tau}.$$

Теорема 2.1.3. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (8)–(10) и $e^{-\varepsilon_{\min}\tau/2} < \|D\| < 1$. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$, где*

$$\mathcal{E}_3 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau,0]): \quad \Phi < \theta, \quad V_2(0,\varphi) < r,$$

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V_2(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1} V_2(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - (\|D\| e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta\Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (11) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V_2(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1} V_2(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - (\|D\| e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \Phi\right) \|D\|^{t/\tau}.$$

Из этих теорем непосредственно вытекает

Следствие 2.1.1. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (8)–(10) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (7) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства теорем 2.1.1–2.1.3 приведены во втором параграфе.

В первом параграфе содержатся также формулировки теорем о разрешимости начальной задачи (11) "в целом" и об оценках ее решений для случая, когда $\|D\| \ge 1$, и спектр матрицы D принадлежит единичному кругу. Из этих теорем непосредственно вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (7). Эти утверждения доказаны в третьем параграфе.

В четвертом параграфе главы рассматривается случай, когда хотя бы один из показателей нелинейности в (2) равен нулю, т. е. $\omega_1\omega_2 = 0$. При этом, если $\omega_1 = 0$ (или $\omega_2 = 0$), то на коэффициент q_1 из (2) (или на q_2) возникают условия вида $q_1 \le q^*$ (или $q_2 \le q^*$). Во всех случаях сформулированы теоремы существования на всей полуоси и указаны оценки решений системы (7). Техника доказательства основана на использовании функционала $V_2(t, y)$.

Таким образом, достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (7) являются условия существования матриц $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющих (8)–(10). В пятом параграфе рассматривается вопрос о том, как можно построить эти матрицы.

В **заключении** кратко сформулированы полученные в работе результаты.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Найдены множества начальных данных, при которых решение начальных задач для класса систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами в линейных членах существует на всей полуоси, и получены оценки, характеризующие скорость убывания решений систем на бесконечности. Установленные оценки решений являются аналогами оценок Крейна для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Определены множества начальных данных, при которых решение начальных задач для класса систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах существует на всей полуоси, и получены оценки, характеризующие скорость убывания решений систем на бесконечности.

3. Доказана экспоненциальная устойчивость нулевого решения рассматриваемых классов систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Демиденко Г.В., Котова Т.В., Скворцова М.А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений нейтрального типа // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 17–29.

2. Скворцова М.А. Оценки решений и области притяжения нулевого решения систем квазилинейных уравнений нейтрального типа // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2011. № 37 (254), вып. 10. С. 30–39.

3. Демиденко Г.В., Водопьянов Е.С., Скворцова М.А. Оценки решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими отклонениями аргумента // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 3. С. 53–60.

4. Скворцова М.А. Асимптотические свойства решений систем уравнений нейтрального типа с переменным запаздыванием // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, вып. 4. С. 143–152.

5. Скворцова М.А. Асимптотическая устойчивость нулевого решения квазилинейных систем нейтрального типа // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 2010. Т. 40. С. 307–311.
6. Скворцова М.А. Квазилинейные системы дифференциальных уравнений нейтрального типа // Материалы XLVIII Междунар. научной студенческой конф. “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. С. 64.
7. Скворцова М.А. Об оценках решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Материалы IV Междунар. конф. “Математика, ее приложения и математическое образование”. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2011. Ч. 2. С. 149–153.
8. Скворцова М.А. Оценки решений уравнений нейтрального типа в области асимптотической устойчивости // Материалы XLIX Междунар. научной студенческой конф. “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2011. С. 63.
9. Скворцова М.А. Оценки решений систем квазилинейных уравнений нейтрального типа // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тез. докл. Междунар. научной конф. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. С. 168–169.
10. Скворцова М.А. Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу. Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012. С. 45–46.
11. Скворцова М.А. Асимптотические свойства решений систем квазилинейных уравнений нейтрального типа // Тез. докл. IV Междунар. конф. молодых ученых “Дифференциальные уравнения и их приложения”, посвященной Я.Б. Лопатинскому. Донецк: ДонНУ, 2012. С. 74.
12. Скворцова М.А. Асимптотическая устойчивость решений нелинейных систем уравнений нейтрального типа с переменным запаздыванием // Материалы 51-й Междунар. научной студенческой конф. “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013. С. 105.
13. Скворцова М.А. Об асимптотической устойчивости решений уравнений нейтрального типа // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тез. докл. Междунар. научной конф. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2013. С. 149–150.

14. Скворцова М.А. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений: тез. докл. Междунар. конф., посвященной 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2013. С. 254.

15. Скворцова М.А. Оценки решений уравнений нейтрального типа с переменным запаздыванием // Тез. докл. Крымской Междунар. математической конф. Симферополь: Изд-во КНЦ НАНУ, 2013. Т. 2. С. 15–16.

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института динамики систем и теории управления
Сибирского отделения Российской академии наук
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
E-mail: rio@icc.ru

Подписано к печати 11.04.2014г.
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 1,2 п.л.
Заказ 75. Тираж 130 экз.

Издательство СО РАН
630090, Новосибирск, Морской пр., 2
Отпечатано в Издательстве СО РАН