ОТЗЫВ

на диссертацию Скворцовой Марии Александровны
"Оценки решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа",
представленную на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Представленная диссертация посвящена изучению экспоненциальной устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Системы уравнений нейтрального типа относятся к системам уравнений с запаздывающим аргументом, в которых параметры запаздывания содержатся не только в неизвестной вектор-функции, но и в ее производных. Такие системы возникают при решении ряда задач прикладного характера, в которых скорость эволюции процесса зависит не только от предшествующих состояний, но и от скоростей в предшествующие моменты времени. В литературе уравнения нейтрального типа впервые были выделены в отдельный класс уравнений с запаздывающим аргументом в монографии Л.Э. Эльсгольца (1955 г.). В настоящее время имеется очень большое число теоретических и прикладных исследований различных аспектов теории дифференциальных уравнений нейтрального типа. Одним из активно развивающихся направлений исследований является проблема устойчивости решений. Большой интерес при изучении устойчивости представляют задачи нахождения области притяжения невозмущенного решения и получения оценок, характеризующих асимптотические свойства решений. Эти задачи имеют важное прикладное значение, однако для существенно нелинейных уравнений они, как правило, являются достаточно сложными и мало изученными. Отметим, что в последние годы заметно увеличилось количество работ, посвященных разработке методов построения областей притяжения для различных классов нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Настоящая диссертация посвящена исследованию указанных задач. Поэтому тема диссертационной работы безусловно является актуальной.

Представленная диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Во введении содержится обширная библиография по теории устойчивости для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, дается некоторый обзор развитых методов исследования, описываются результаты, вынесенные на защиту. Дадим краткий обзор основных результатов диссертации.

В первой главе автор изучает класс систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = Ay(t)+By(t-\tau)+F(t,y(t),y(t-\tau)), \qquad t>0. \quad (1)$$

Предполагается, что матрицы A, B и D — постоянные, при этом спектр матрицы D принадлежит единичному кругу, а вектор-функция $F(t,u,v)$ непрерывна по совокупности аргументов, удовлетворяет условию Липшица по u и оценке

$$\|F(t,u,v)\| \le q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \qquad q_1,q_2 \ge 0, \qquad \omega_1,\omega_2 \ge 0.$$

Цель исследования — доказательство теорем о разрешимости начальной задачи на всей полуоси $\{t>0\}$ и получение равномерных оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание решений при $t\to\infty$.

При изучении поставленных задач автор предполагает, что матричные коэффициенты A, B, D такие, что существуют матрицы $H=H^*>0$ и $K(s)\in C^1([0,\tau])$,

$$K(s)=K^*(s)>0, \qquad \frac{d}{ds}K(s)<0, \qquad s\in[0,\tau],$$

при которых составная матрица

$$\begin{pmatrix} HA+A^*H+K(0) & HB+A^*HD \\ B^*H+D^*HA & D^*HB+B^*HD-K(\tau) \end{pmatrix}$$

отрицательно определена. Отметим, что это условие было введено в работах Г.В. Демиденко при изучении устойчивости решений линейных систем нейтрального типа.

В первом параграфе автор формулирует ряд теорем о разрешимости начальной задачи на всей полуоси $\{t>0\}$ для существенно нелинейных уравнений ($\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$). В этих утверждениях указываются также оценки, из которых вытекает экспоненциальное убывание решений на бесконечности. Доказательство этих теорем проводится в следующих двух параграфах. В четвертом параграфе доказывается несколько теорем о разрешимости на полуоси $\{t > 0\}$ для нелинейных уравнений в случаях, когда хотя бы один из параметров нелинейности ω_1, ω_2 может быть нулевым.

Отметим, что формулировки доказываемых теорем существенно зависят от параметров системы и эрмитовых матриц H, $K(s)$, при этом области притяжения нулевого решения указываются явно. В пятом параграфе автор обсуждает вопрос о том, как сказывается влияние матриц H и $K(s)$ на получаемых оценках решений.

В последнем параграфе автор рассматривает системы уравнений нейтрального типа с переменным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau(t))) = Ay(t)+By(t-\tau(t))+F(t,y(t),y(t-\tau(t))), \qquad t > 0.$$

В предположении, что гладкая функция $\tau(t)$ удовлетворяет условиям

$$0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2 < \infty, \qquad \tau'(t) \leq \alpha < 1,$$

приводятся некоторые обобщения теорем, доказанных в предыдущих параграфах.

Для доказательства основных теорем в первой главе автор использует функционал типа Ляпунова–Красовского следующего вида

$$V(t,y) = \langle H(y(t)+Dy(t-\tau)), (y(t)+Dy(t-\tau))\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Во второй главе автор изучает класс систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+F(t,y(t),y(t-\tau)), \qquad t > 0 \tag{2}$$

Предполагается, что матрицы $A(t)$, $B(t)$ — T-периодические и непрерывные, матрица D — постоянная, при этом ее спектр принадлежит единичному кругу, а вектор-функция $F(t,u,v)$ удовлетворяет тем же условиям, как в главе 1.

Целью исследования, как и в случае системы (1), является доказательство теорем о разрешимости начальной задачи для системы (2) на всей полуоси $\{t>0\}$ и получение оценок решений, характеризующих скорость убывания решений на бесконечности.

При изучении поставленных задач автор предполагает, что матричные коэффициенты $A(t)$, $B(t)$, D такие, что существуют эрмитовы матрицы $H(t)\in C^1([0,T])$ и $K(s)\in C^1([0,\tau])$,

$$H(0)=H(T)>0, \qquad K(s)>0, \qquad \frac{d}{ds}K(s)<0, \qquad s\in[0,\tau],$$

при которых составная матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)+K(0) & H(t)B(t)+A^*(t)H(t)D \\ B^*(t)H(t)+D^*H(t)A(t) & D^*H(t)B(t)+B^*(t)H(t)D-K(\tau) \end{pmatrix}$$

отрицательно определена. Отметим, что это условие было введено в работе Г.В. Демиденко, И.И. Матвеевой при изучении устойчивости решений линейных систем нейтрального типа.

В первых трех параграфах автор формулирует и доказывает некоторые теоремы о разрешимости начальной задачи для системы (2) на всей полуоси $\{t>0\}$ для существенно нелинейных уравнений ($\omega_1>0, \omega_2>0$), а также устанавливает равномерные оценки решений, из которых вытекает экспоненциальное убывание решений на бесконечности. В четвертом параграфе приводятся теоремы о разрешимости на полуоси $\{t>0\}$ для нелинейных уравнений в случаях, когда хотя бы один из параметров нелинейности ω_1,ω_2 может быть нулевым. Формулировки теорем существенно зависят от параметров системы и эрмитовых матриц $H(t)$, $K(s)$, при этом области притяжения нулевого решения указываются явно. В пятом параграфе автор рассматривает примеры построения матриц $H(t)$, $K(s)$.

Для доказательства основных теорем во второй главе автор использует функционал типа Ляпунова–Красовского следующего вида

$$V(t,y) = \langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)), (y(t)+Dy(t-\tau))\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Отметим, что при его построении применяется критерий асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, который формулируется в терминах разрешимости специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова.

Из теорем, доказанных в первой и второй главах, непосредственно вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения рассматриваемых классов систем дифференциальных уравнений нейтрального типа. Указанные области притяжения нулевого решения и установленные оценки решений являются новыми. Поэтому результаты диссертации несомненно представляют математический интерес.

Вместе с тем необходимо отметить, что сам текст диссертации не лишен некоторых недостатков.

1. Прежде всего, не совсем удачным представляется название работы, поскольку, на наш взгляд, оно является недостаточно конкретным. Фактически, в диссертации речь идет о нахождении условий асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа, что и следовало отразить в названии.

2. Библиографический список, в целом, достаточно представителен, однако в нем имеются некоторые пробелы. В частности, отсутствуют ссылки на работы представителей научной школы Н.Н. Красовского: А.Б. Куржанского, Н.Ю. Лукоянова, А.Н. Сесекина. Большего внимания, по нашему мнению, заслуживают работы А.В. Кима. Отметим также отсутствие в списке известной монографии Б.С. Разумихина «Устойчивость эредитарных систем», 1988 г.

3. Определенные нарекания вызывает структура работы. Так, в первом параграфе главы 1 сформулированы без доказательства шесть теорем, которые затем доказываются во втором и третьем параграфах, что существенно затрудняет восприятие работы. В четвертом

и пятом параграфах представлен ряд теорем, часть из которых, по словам автора, являются прямым следствием теорем, доказанных выше, – на наш взгляд их уместнее было бы назвать следствиями. Главе 2 присущи аналогичные недостатки. При этом иногда автор «увлекается» своими рассуждениями и повторяет их практически дословно (см., например, текст из доказательства теоремы 1.1.5 на стр. 57-58 и текст из доказательства теоремы 1.1.6 на стр. 59-60).

4. С учетом того, что формулировки теорем зачастую довольно громоздки, было бы уместно привести несколько иллюстративных примеров, демонстрирующих возможность конструктивного применения полученных результатов. К сожалению, такие примеры в работе отсутствуют.

Кроме того, имеются некоторые погрешности изложения.

1. Формулировки некоторых теорем о разрешимости начальной задачи на всей полуоси $\{t > 0\}$ зависят от величины нормы $\|D\|$. К сожалению, в диссертации не указано, какая матричная норма при этом используется.

2. На стр. 58 в правой части оценки нормы $\|y(t)\|$ вместо выражения $\left(1 - \rho e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}$ необходимо поставить $e^{-1+\varepsilon\tau/2}(\varepsilon\tau/2)^{-1}$.

3. На стр. 79 в третьем абзаце дается очень запутанное объяснение преимущества условий из теоремы 1.5.1 по сравнению с условиями (1.1.5)–(1.1.7). Для того, чтобы оценить эти преимущества, достаточно лишь сравнить соответствующие матричные неравенства.

4. На стр. 85 в условия теоремы 1.5.5 необходимо добавить требование $H > 0$.

Отметим, что отдельные погрешности такого типа представляются несущественными для оценки диссертации. Резюмируя, можно сказать, что диссертация М.А. Скворцовой представляет собой серьезное исследование в области дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Автором решены важные и трудные задачи, связанные с проблемой экспоненциальной устойчивости решений систем нелинейных уравнений нейтрального типа. Основные результаты диссертации являются новыми. Они обоснованы полными доказательствами, своевременно опубликованы и неоднократно докладывались на международных конференциях и семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

На основании сказанного считаю, что рецензируемая диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, и ее автор Скворцова Мария Александровна заслуживает присуждения указанной степени.

Официальный оппонент
кандидат физико-математических наук,
заведующий лабораторией системного
анализа и вычислительных методов
ИДСТУ СО РАН А.А. Лемперт

12.05.2014 г.

Подпись заверяю
Нач. Отдела ДОО
Кос-Т.Б. Кононенко
12.05.2014