«УТВЕРЖДАЮ»
Ректор ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский государственный университет»
профессор Э.В. Галажинский

« 23 » мая 2014 г.

ОТЗЫВ
ведущей организации на диссертацию Скворцовой Марии Александровны
«Оценки решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

В диссертационной работе М.А. Скворцовой рассматриваются некоторые классы систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа. Целью автора является изучение экспоненциальной устойчивости решений таких систем. Основы теории устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом были заложены в середине прошлого столетия, при этом большой вклад был внесен советскими математиками (А.А. Андронов, А.М. Зверкин, Г.А. Каменский, Н.Н. Красовский, А.Д. Мышкис, Л.С. Понтрягин, Б.С. Разумихин, Н.Г. Чеботарев, С.Н. Шиманов, Л.Э. Эльсгольц и др.). В настоящее время имеется огромное количество работ по исследованию устойчивости решений различных классов дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, а также конкретных уравнений такого типа, возникающих в прикладных задачах. Однако при изучении нелинейных дифференциальных уравнений зачастую возникает необходимость в доказательстве теорем о разрешимости «в целом». Большой интерес представляет изучение асимптотического поведения решений на бесконечности, получение оценок решений, характеризующих скорость стабилизации на бесконечности, и др. Поэтому тема диссертационной работы является актуальной и представляет интерес как с теоретической точки зрения, так и с прикладной.

Остановимся кратко на содержании представленной диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации составляет 165 страниц.

Во введении автор дает краткий обзор работ, посвященных теории устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, определяет цели исследований, описывает результаты, вынесенные на защиту.

Основные результаты диссертации можно разделить на две группы. К первой группе относятся теоремы о разрешимости на полуоси $t > 0$ начальной задачи для некоторых классов систем нелинейных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами в линейных членах, оценки областей притяжения нулевого решения и оценки, характеризующие экспоненциальное убывание решений при $t \to \infty$ (глава 1). Ко второй группе относятся аналогичные результаты для некоторых классов систем нелинейных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах (глава 2).

В первой главе диссертации рассматриваются системы нелинейных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами в линейных членах

$$\frac{d}{dt}\big(y(t) + Dy(t-\tau)\big) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $\tau > 0$ – это параметр запаздывания, непрерывная вектор-функция $F(t,u,v)$ удовлетворяет условию Липшица по u и оценке

$$\| F(t,u,v) \| \le q_1 \| u \|^{1+\omega_1} + q_2 \| v \|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2, \omega_1, \omega_2 \ge 0. \quad (2)$$

Предполагается, что матрицы A, B, D удовлетворяют некоторым условиям, при которых нулевое решение линейной системы $(F(t,u,v) \equiv 0)$ экспоненциально устойчиво. Цель автора – доказательство разрешимости «в целом» начальной задачи для систем вида (1) и получение оценок решений вида

$$\| y(t) \| \le c e^{-\varepsilon t}, \quad \varepsilon > 0, \quad t > 0. \quad (3)$$

Из этих оценок непосредственно вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (1).

В первых четырех параграфах первой главы автором доказано несколько теорем о разрешимости «в целом» начальной задачи, при этом условия на начальные данные, при которых гарантируется существование решения на всей полуоси $t > 0$, указываются конструктивно. При получении этих результатов автор использует модифицированный функционал Ляпунова-Красовского

$$V(t,y) = \langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau)) \rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \quad (4)$$

где матрицы $H = H^* > 0$ и $K(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

$$\mathbf{C} = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB + A^*HD \\ B^*H + D^*HA & D^*HB + B^*HD - K(\tau) \end{pmatrix} > 0.$$

В доказанных теоремах приводятся также оценки решений вида (3). Оценки областей притяжения и константы c, ε в (3) зависят от параметров системы и указываются явно. Интересно отметить, что в описании областей притяжения нулевого решения и в оценках вида (3) существенную роль играет норма матрицы D и ее спектральные характеристики.

В пятом параграфе автор обсуждает задачу о выборе эрмитовых матриц H и $K(s)$, определяющих функционал (4), использование которых позволило бы получить оценки вида (3) с максимальным показателем $\varepsilon > 0$. Решение этой задачи удалось получить для скалярных уравнений. Следует отметить, что такая задача для систем уравнений не является тривиальной, и исследование ее представляет очень большой интерес, поскольку решение такой задачи позволило бы получать точные оценки скорости стабилизации решений нелинейных систем нейтрального типа без нахождения корней квазимногочленов.

В шестом параграфе рассматриваются системы нелинейных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами в линейных членах и переменным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau(t))) = Ay(t) + By(t-\tau(t)) + F(t, y(t), y(t-\tau(t))), \quad t > 0,$$

где $\tau(t)$– гладкая функция такая, что

$$0 < \tau_1 \le \tau(t) \le \tau_2 < \infty, \quad \tau'(t) \le \alpha < 1.$$

Для таких систем автор приводит некоторые обобщения результатов, полученных в предыдущих параграфах, в частности, указывает условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения.

Во второй главе диссертации рассматриваются системы нелинейных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \quad (5)$$

где $A(t)$, $B(t)$ – непрерывные T-периодические матрицы, спектр матрицы D принадлежит единичному кругу, непрерывная вектор-функция $F(t,u,v)$ удовлетворяет условию Липшица по u и оценке (2). Предполагается, что матрицы $A(t)$, $B(t)$, D удовлетворяют условиям, при которых нулевое решение системы линейных уравнений $(F(t,u,v) \equiv 0)$ экспоненциально устойчиво. Основная цель автора – доказательство разрешимости «в целом» начальной задачи для систем (5), описание областей притяжения нулевого решения и получение оценок решений, характеризующих экспоненциальное убывание решений при $t \to \infty$.

В первых четырех параграфах второй главы автором доказан ряд теорем о разрешимости начальной задачи, при этом, как и в первой главе, условия на начальные данные, при которых существует решение на всей полуоси $t > 0$, указываются конструктивно. Однако в отличие от автономных систем при получении этих результатов автор использует новую модификацию функционала Ляпунова-Красовского следующего вида

$$V(t,y) = \langle H(t)(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds. \qquad (6)$$

Этот функционал существенно отличается от функционала (4) первым слагаемым и при его построении используется критерий асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами из работы Г.В. Демиденко, И.И. Матвеевой (Сиб. мат. журн., 2001). Используя функционал (6), автору удается получить оценки решений начальной задачи. В частности, при $\| D \| < 1$ они имеют вид

$$\| y(t) \| \leq c_1 \exp\left(-\int_0^t \varepsilon(s)ds\right) + c_2 \| D \|^{\frac{t}{\tau}}, \quad \varepsilon(t) \geq \varepsilon_0 > 0, \quad t > 0,$$

где константы c_1, c_2 и функция $\varepsilon(t)$ зависят от параметров системы и вычисляются явно. Из этих оценок непосредственно вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (5). Отметим также, что в описании областей притяжения нулевого решения и в оценках решений существенную роль играет норма матрицы D и ее спектральные характеристики.

В пятом параграфе автор приводит примеры построения эрмитовых матриц $H(t)$и $K(s)$, определяющих функционал (6).

По диссертации имеется несколько критических замечаний.

1. На стр. 33, 83, 89, 99 автору следовало бы дать четкое описание класса вектор-функций, в котором строится решение начальной задачи и пояснить смысл условий согласования для начальных данных.
2. Автор «забывает» указать какая матричная норма используется в тексте диссертации.
3. Автору следовало бы пояснить насколько существенны ограничения на матрицу D.
4. К сожалению, автор не иллюстрирует полученные результаты примерами, наличие которых несомненно украсило бы текст диссертации.

Указанные замечания не влияют на положительную оценку диссертации в целом. Диссертационная работа выполнена на достаточно высоком научном уровне. Автором получен ряд новых результатов, представляющих несомненный интерес в теории устойчивости для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Все результаты диссертации обоснованы полными доказательствами. По теме диссертации опубликовано 15 работ, из них 4 статьи в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК. Результаты исследований докладывались на научных конференциях и семинарах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Полученные результаты могут в дальнейшем применяться в научных исследованиях в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, в Новосибирском государственном университете, в Томском государственном университете, в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, в Институте динамики систем и теории управления СО РАН и др.

Представленная диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 –дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, и ее автор Скворцова Мария Александровна несомненно заслуживает присуждения указанной степени.

Отзыв обсужден на заседании кафедры высшей математики и математического моделирования 22 мая 2014 г.

Зав. кафедрой,
доктор физ.-мат. наук,
профессор В.В. Конев

ПОДПИСЬ УДОСТОВЕРЯЮ
ВЕДУЩИЙ ДОКУМЕНТОВЕД УПРАВЛЕНИЯ
ДЕЛАМИ И ОРГАНИЗАЦИОННОГО
ОБЕСПЕЧЕНИЯ Н.Г.МИХЕЕВА

Управление делами и организационного обеспечения