ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Скворцова Мария Александровна

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Г.В. Демиденко

НОВОСИБИРСК — 2014

Содержание

Введение

Теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом начала интенсивно развиваться в середине прошлого столетия. Уравнения такого типа возникают при описании процессов, скорость изменения которых определяется не только настоящим, но и предшествующим состояниями. Такие процессы часто называют “процессами с запаздыванием” или “с последействием”. Они возникают во многих задачах теории автоматического регулирования и управления, автоматики и телемеханики, радиофизики, при моделировании процессов иммунологии, при изучении генных сетей, экономики и т. д. (см., например, [8], [11], [12], [14], [15], [20], [21], [24], [34], [36], [37], [51], [52], [54], [57], [58], [59], [67], [69], [83], [85], [103], [104], [113], [114], [118], [119]).

В настоящее время имеется огромное число работ по теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Для таких уравнений изучаются различные постановки задач, проводятся теоретические и численные исследования свойств решений, рассматриваются конкретные модели, возникающие в приложениях. Одной из важных проблем в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом является изучение устойчивости решений. Этой тематике посвящен ряд монографий (см., например, книги А.Д. Мышкиса [55] (1951), Л.Э. Эльсгольца [96] (1955), Н.Н. Красовского [44] (1959), Э. Пинни [60] (1961), Р. Беллмана и К. Кука [10] (1967), В.П. Рубаника [68] (1969), А. Халаная и Д. Векслера [87] (1971), Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина [98] (1971), Ю.А. Митропольского и Д.И. Мартынюка [53] (1979), В.Б. Колмановского и В.Р. Носова [39] (1981), С.Н. Шиманова [95] (1983), Дж. Хейла [89] (1984), Д.Г. Кореневского [41] (1989), [42] (2008), Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф. Рахматуллиной [1] (1991), Ю.Ф. Долгого [33] (1996), В.Б. Колмановского и А.Д. Мышкиса [111] (1999), Н.В. Азбелева и П.М. Симонова [4] (2001), К. Гу, В.Л. Харитонова и Дж. Чена [105] (2003) и др.).

В диссертации рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = Ay(t)+By(t-\tau)+F(t,y(t),y(t-\tau)), \quad t>0, \quad (0.1)$$

где A, B, D — вещественные матрицы размера $n \times n$, $F(t,u,v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u и оценке

$$\|F(t,u,v)\| \le q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_i,\ \omega_i \ge 0,\ i=1,2.$$

Цель наших исследований — изучение экспоненциальной устойчивости нулевого решения некоторых классов систем вида (0.1) в случае, когда D — ненулевая матрица. В диссертации дается описание областей допустимых начальных условий, при которых решение системы существует на всей полуоси $\{t > 0\}$ и стремится к нулю на бесконечности, а также устанавливаются оценки решений системы (0.1), характеризующие экспоненциальное убывание при $t \to \infty$.

Отметим, что в случае ненулевой матрицы D системы уравнений вида (0.1) в литературе принято называть системами *нейтрального типа*. Уравнения нейтрального типа были впервые выделены в книге [96] (см. [10], стр. 112).

Исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом начались более полувека назад (А.А. Андронов и А.Г. Майер [7], Р. Беллман [9], Н.Н. Красовский [43], Л.С. Понтрягин [61], Б.С. Разумихин [62] и др.). К настоящему времени наиболее изученными являются задачи об асимптотической устойчивости стационарных решений **автономных** дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, при этом широкое распространение получили спектральные методы исследований. Основой для них служит спектральный критерий асимптотической устойчивости. В случае, когда $D = 0$, в силу этого критерия асимптотическая устойчивость нулевого решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > 0, \tag{0.2}$$

эквивалентна принадлежности корней квазимногочлена

$$\det(A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda I) = 0 \tag{0.3}$$

левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ (см., например, [10], [89], [97]). В этом случае из асимптотической устойчивости решений вытекает экспоненциальная устойчивость. В случае, когда матрица D —

ненулевая, необходимым условием асимптотической устойчивости нулевого решения системы

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > 0, \tag{0.4}$$

является принадлежность корней квазимногочлена

$$\det(A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda I - \lambda e^{-\lambda\tau}D) = 0 \tag{0.5}$$

левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. При этом достаточным условием экспоненциальной устойчивости решений системы (0.4) является принадлежность корней квазимногочлена (0.5) полуплоскости $\mathbb{C}_{-,\gamma} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq \gamma < 0\}$ (см., например, [10], [89], [97]).

Для широкого класса систем нелинейных автономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом достаточным условием асимптотической устойчивости нулевого решения также служит принадлежность корней квазимногочлена левой полуплоскости (см., например, [10], [89], [97]). Однако при исследовании асимптотической устойчивости решений конкретных систем уравнений проверка этого условия может представлять очень сложную задачу. С одной стороны, приближенное вычисление корней квазимногочленов является весьма трудоемкой задачей (при этом их может быть счетное число), с другой стороны, эта задача является, вообще говоря, **плохо обусловленной**. Действительно, даже в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания ($D = B = 0$)

$$\frac{d}{dt}y = Ay + f(t,y), \quad t > 0, \tag{0.6}$$

при исследовании асимптотической устойчивости с использованием спектрального критерия возникает необходимость в проверке принадлежности спектра матрицы A левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$. Но как известно, задача о нахождении спектра **недиагонализируемых** матриц относится к плохо обусловленным задачам, и даже очень малые возмущения элементов матрицы могут привести к очень большим ошибкам при вычислении собственных значений (см., например, [19], [84]). Это обстоятельство может послужить серьезным препятствием при изучении устойчивости решений с помощью стандартных программ на ЭВМ. Поэтому при исследовании асимптотической устойчивости решений конкретных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания) большое значение приобретают различные признаки принадлежности корней квазимногочленов (собственных значений) левой полуплоскости. Для уравнений с запаздывающим аргументом для этой цели зачастую используют *метод D-разбиений* (см., например, [92]), *амплитудно-фазовый метод* (см., например, [97]), *метод Меймана–Чеботарева* (см., например, [93]), а также методы, основанные на использовании *аналогов* теорем Ляпунова [43], [62].

Из этих методов, пожалуй, наиболее распространенным является метод с использованием *функционалов Ляпунова–Красовского* [44]. Достоинством этого метода является простота формулировок утверждений и сведение исследования асимптотической устойчивости к решению хорошо обусловленных задач. Приведем один из результатов Н.Н. Красовского, полученных этим методом, для линейной системы (0.2).

Теорема (Н.Н. Красовский). *Предположим, что существуют матрицы $H = H^* > 0$ и $K = K^* > 0$ такие, что выполнено матричное неравенство*

$$\begin{pmatrix} HA + A^*H + K & HB \\ B^*H & -K \end{pmatrix} < 0.$$

Тогда нулевое решение системы (0.2) асимптотически устойчиво.

При доказательстве данного утверждения использовался функционал Ляпунова–Красовского следующего вида

$$V(t, y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle Ky(s), y(s)\rangle ds. \tag{0.7}$$

Функционал (0.7) является аналогом функции Ляпунова $\langle Hy, y\rangle$ для системы дифференциальных уравнений (0.6), которая строится по решению матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0. \tag{0.8}$$

Хорошо известно, что это уравнение играет очень важную роль при исследовании асимптотической устойчивости решений систем вида (0.6). В частности, используя решение $H = H^* > 0$ уравнения (0.8), можно указать оценку решений линейной системы уравнений (0.6) ($f(t, y) \equiv 0$), характеризующую скорость убывания на бесконечности. Например, в случае, когда $C = I$, справедлива оценка [22]:

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{2\|A\|\|H\|} \ \exp\left(-\frac{t}{2\|H\|}\right) \ \|y(0)\|, \quad t > 0. \tag{0.9}$$

При помощи решения матричного уравнения Ляпунова (0.8) также можно оценить область притяжения нулевого решения нелинейной системы (0.6) и установить оценку экспоненциального убывания решения, не вычисляя при этом собственные значения матрицы A. Подчеркнем, что в отличие от задачи о нахождении матричного спектра построение решения матричного уравнения (0.8) является хорошо обусловленной задачей (см. [18]). Именно поэтому подход, основанный на использовании матричного уравнения Ляпунова, послужил основой для разработки численных методов исследования асимптотической устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений с *гарантированной точностью* [19]. Отметим, что аппарат матричных уравнений активно применяется при решении задач о расположении матричного спектра (см., например, [19], [28], [47], [100]).

Функционал Ляпунова–Красовского (0.7) можно использовать также при исследовании асимптотической устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Однако в отличие от функции Ляпунова, с помощью которой доказывается *оценка Крейна* (0.9), использование функционалов вида (0.7) не позволяет получить аналоги оценки Крейна для решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и тем самым установить экспоненциальную устойчивость решений. Обзор некоторых результатов, полученных с помощью функционалов Ляпунова–Красовского до 2003 г., содержится в работе [116].

Задача о получении аналогов оценки Крейна для решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с помощью некоторых функционалов и без нахождения корней квазимногочленов была решена относительно недавно (см., например, [26], [90], [108], [115]). Методы, предложенные в данных работах, основаны на использовании различных модификаций функционала Ляпунова–Красовского.

В частности, в работе [26] был предложен модифицированный функционал Ляпунова–Красовского следующего вида

$$V(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds \tag{0.10}$$

с матрицами $H = H^* > 0$ и $K(s) = K^*(s) > 0$. Отметим, что в отличие от функционала (0.7) здесь матрица K является переменной. Приведем результат из этой работы для линейной системы (0.2).

Рассмотрим начальную задачу для системы (0.2)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > 0, \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{0.11}$$

где $\varphi(t) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция.

Справедлива следующая теорема [26].

Теорема (Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева). *Предположим, что существуют матрицы $H = H^* > 0$ и $K(s) \in C^1([0,\tau])$ такие, что*

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau],$$

и составная матрица

$$\mathbf{C} = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB \\ B^*H & -K(\tau) \end{pmatrix}$$

положительно определена. Тогда для решения $y(t)$ начальной задачи (0.11) справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}\; e^{-\varepsilon t/2}, \tag{0.12}$$

где

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{c_{\min}}{\|H\|}, k\right\},$$

$h_{\min} > 0$ и $c_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц H и $\mathbf{C}$ соответственно, $k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Оценка (0.12) является аналогом оценки Крейна (0.9). Подчеркнем, что при ее получении не использовалась информация о расположении корней квазимногочлена (0.3).

Отметим, что использование модифицированных функционалов Ляпунова–Красовского позволяет получить аналоги оценки Крейна для решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, а также указать множества притяжения нулевого решения и тем самым установить экспоненциальную устойчивость решений [26].

Для линейных систем дифференциальных уравнений нейтрального типа (0.4) Г.В. Демиденко предложил использовать обобщение модифицированного функционала Ляпунова–Красовского (0.10) в следующем виде

$$V(t,y) = \langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau)) \rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \tag{0.13}$$

где $H = H^* > 0$ и $K(s) = K^*(s) > 0$. Используя данный функционал, в работе [102] были проведены исследования экспоненциальной устойчивости решений систем (0.4). Приведем один из результатов этой работы.

Рассмотрим следующую начальную задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > 0, \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{0.14}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$.

Справедлива следующая теорема [102].

Теорема (Г.В. Демиденко). *Пусть* $\|D\| < 1$. *Предположим, что существуют матрицы*

$$H = H^* > 0, \quad K(s) \in C^1([0,\tau]) \tag{0.15}$$

такие, что

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{0.16}$$

при этом

$$\mathbf{C} = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB + A^*HD \\ B^*H + D^*HA & D^*HB + B^*HD - K(\tau) \end{pmatrix} > 0. \qquad (0.17)$$

Тогда нулевое решение системы (0.4) экспоненциально устойчиво.

В работе [102] установлены также оценки решений задачи (0.14), являющиеся аналогами оценки Крейна (0.9). Из этих оценок следует, что все решения убывают с экспоненциальной скоростью, при этом скорость убывания существенным образом зависит от матрицы D. Подчеркнем, что оценки получены без информации о корнях квазимногочлена (0.5). В работе [30] эти результаты были обобщены на случай, когда спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Несколько иного типа оценки решений систем нейтрального типа (0.4) были получены в работах [90], [99], [109].

В отличие от автономных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом задача об асимптотической устойчивости решений **неавтономных** дифференциальных уравнений является менее изученной. Основные исследования в этом направлении проводятся для линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0, \qquad (0.18)$$

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad T > \tau.$$

В литературе имеются также некоторые обобщения на случай почти периодических коэффициентов [5], [66]. Основы теории устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами заложены в работах А.М. Зверкина [35], А. Стокса [117], А. Халаная [86], В. Хана [106], Дж. Хейла [89], С.Н. Шиманова [95]. Основным подходом в этих исследованиях является развитие теории Флоке и использование *оператора монодромии*, являющегося обобщением матрицы монодромии для обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}y = A(t)y, \quad A(t+T) \equiv A(t), \quad t > 0. \qquad (0.19)$$

Отметим, что этот подход применяется также при изучении устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом нейтрального типа с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0, \tag{0.20}$$

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad D(t+T) \equiv D(t), \quad T > \tau.$$

Элементы теории Флоке для систем уравнений с запаздывающим аргументом изложены, например, в работах [16], [17], [33], [40], [46] и др.

Помимо указанного подхода к проблеме устойчивости решений систем вида (0.18), (0.20) в литературе развиваются: *метод производящих функций* (см., например, [48], [65], [94]), *метод монотонных операторов* (см., например, [1], [2], [3], [13]), *метод функционалов Ляпунова–Красовского* (см., например, [32], [38], [39], [44], [45], [63], [64], [91]).

Следует отметить, что существующие условия асимптотической устойчивости решений неавтономных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом проверить достаточно сложно. Трудности возникают также при описании областей притяжения при рассмотрении систем нелинейных уравнений, а также при получении асимптотических оценок решений при $t \to \infty$.

Впервые аналоги оценок Крейна для решений систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \tag{0.21}$$

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad T > \tau,$$

были получены в работах [26], [27]. При получении этих оценок применялась новая модификация функционалов Ляпунова–Красовского. Для описания этой модификации функционалов вначале приведем критерий асимптотической устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (0.19), установленный в работе [23].

Рассмотрим следующую краевую задачу для дифференциального уравнения Ляпунова с периодическими коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -P(t), \quad t \in [0,T], \\ \\ H(0) = H(T), \end{cases} \tag{0.22}$$

где $P(t) = P^*(t) > 0$ — непрерывная матрица на отрезке $[0,T]$. Имеет место следующий критерий асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы (0.19) [23].

Теорема (Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева).
I. Если нулевое решение линейной системы (0.19) асимптотически устойчиво, то существует единственное решение $H(t) = H^*(t) > 0$ *краевой задачи (0.22).*
II. Если краевая задача (0.22) имеет решение $H(t) = H^*(t)$ *такое, что* $H(0) > 0$*, то нулевое решение линейной системы (0.19) асимптотически устойчиво.*

В работе [23] получена также оценка решений линейной системы (0.19):

$$\|y(t)\| \le \sqrt{h_{\min}^{-1}(t)\|H(0)\|}\exp\left(-\int\limits_0^t \frac{p_{\min}(\xi)}{2\|H(\xi)\|}d\xi\right)\|y(0)\|, \quad t > 0, \tag{0.23}$$

где $h_{\min}(t)$, $p_{\min}(t)$ — минимальные собственные значения матриц $H(t)$, $P(t)$ соответственно (через $H(t)$ и $P(t)$ обозначены матрицы, продолженные с отрезка $[0,T]$ на всю полуось $\{t \ge 0\}$ T-периодическим образом). Отметим, что эта оценка является аналогом оценки Крейна (0.9) в случае дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и она характеризует экспоненциальную скорость убывания решений системы (0.19) на бесконечности.

Отметим, что с использованием решения $H(t)$ краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова (0.22) в работах [25], [101] были проведены исследования асимптотической устойчивости решений нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Преимуществом использования решения $H(t)$ краевой задачи (0.22) по сравнению, например, с вычислением мультипликаторов является тот факт, что задача о построении решения (0.22) является хорошо обусловленной задачей (см. [23]).

На основе указанного критерия авторы [26] ввели следующий модифицированный функционал Ляпунова–Красовского

$$V(t, y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds \tag{0.24}$$

и предложили использовать его при исследовании асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида (0.21).

Приведем, например, один результат для системы линейных уравнений (0.18). Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0, \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{0.25}$$

где $\varphi(t) \in C([-\tau, 0])$. Имеет место следующая теорема [26].

Теорема (Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева). *Предположим, что существуют матрицы*

$$H(t) = H^*(t) \in C^1([0, T]) \quad \textit{и} \quad K(s) = K^*(s) \in C^1([0, \tau])$$

такие, что

$$H(0) = H(T) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau],$$

и составная матрица

$$\mathbf{C}(t) = -\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + K(0) & H(t)B(t) \\ B^*(t)H(t) & -K(\tau) \end{pmatrix}$$

положительно определена на отрезке $[0, T]$. *Тогда для решения начальной задачи (0.25) справедлива оценка*

$$\|y(t)\|^2 \le h_{\min}^{-1}(t) \exp\left(-\int_0^t \varepsilon(\xi) d\xi \right) V(0, \varphi), \tag{0.26}$$

где

$$\varepsilon(t) = \min\left\{ \frac{c_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k \right\},$$

$h_{\min}(t) > 0$ *и* $c_{\min}(t) > 0$ *— минимальные собственные значения матриц* $H(t)$ *и* $\mathbf{C}(t)$ *соответственно,* $k > 0$ *— максимальное число такое, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Оценка (0.26) является аналогом неравенства Крейна (0.9) для обыкновенных дифференциальных уравнений, из нее вытекает экспоненциальная устойчивость решений системы (0.18).

Использование модифицированных функционалов Ляпунова–Красовского вида (0.13) и (0.24) при получении аналогов неравенства Крейна приводит к идее применения функционала

$$V(t, y) = \langle H(t)(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle$$
$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds \tag{0.27}$$

для исследования экспоненциальной устойчивости нулевого решения систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+F(t, y(t), y(t-\tau)). \tag{0.28}$$

В случае линейных дифференциальных уравнений ($F(t, u, v) \equiv 0$) такие исследования проведены в работе [31]. Сформулируем один из результатов этой работы.

Теорема (Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева). *Предположим, что существуют матрицы*

$$H(t) = H^*(t) \in C^1([0, T]) \quad \text{и} \quad K(s) = K^*(s) \in C^1([0, \tau]) \tag{0.29}$$

такие, что

$$H(0) = H(T) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau], \tag{0.30}$$

при этом

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11}(t) & \mathbf{C}_{12}(t) \\ \mathbf{C}_{12}^*(t) & \mathbf{C}_{22}(t) \end{pmatrix} > 0, \quad t \in [0, T], \tag{0.31}$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0), \\ \\ \mathbf{C}_{12}(t) = -H(t)B(t) - A^*(t)H(t)D, \\ \\ \mathbf{C}_{22}(t) = K(\tau) - D^*H(t)B(t) - B^*(t)H(t)D. \end{cases}$$

Тогда нулевое решение системы линейных дифференциальных уравнений (0.28) экспоненциально устойчиво.

В работе [31] получены также оценки решений (0.28) ($F(t,u,v) \equiv 0$), являющиеся аналогами неравенств Крейна.

Отметим, что в настоящее время метод функционалов Ляпунова–Красовского интенсивно развивается (см., например, работы [6], [107], [110], [116] и имеющуюся в них библиографию).

Остановимся подробнее на содержании диссертации. Диссертация состоит из двух глав.

В первой главе рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа (0.1) с постоянными коэффициентами в линейной части

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0,$$

где $F(t,u,v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u и оценке

$$\|F(t,u,v)\| \le q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_i,\ \omega_i \ge 0,\ i = 1, 2. \tag{0.32}$$

Основная цель — изучение экспоненциальной устойчивости нулевого решения в случае, когда D — ненулевая матрица, и ее спектр принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Мы будем предполагать, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что **выполнены условия (0.15)–(0.17)**, гарантирующие экспоненциальную устойчивость решений линейной системы уравнений нейтрального типа (0.4). При этих условиях мы находим область допустимых начальных данных, при которых решение системы уравнений (0.1) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$ и стремится к нулю на бесконечности, а также устанавливаем оценки решений системы (0.1), характеризующие экспоненциальное убывание при $t \to \infty$. При получении результатов мы существенно используем модифицированный функционал Ляпунова–Красовского вида (0.13).

Первая глава состоит из шести параграфов. **В первом параграфе** рассматривается начальная задача для системы (0.1) с условиями на отрезке $[-\tau, 0]$:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0). \end{cases} \tag{0.33}$$

Здесь $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. В первом параграфе мы будем предполагать, что показатели нелинейности $\omega_i,\ i = 1, 2$ в (0.32) строго положительные.

Для формулировки основных результатов нам понадобятся некоторые обозначения.

Введем три эрмитовы матрицы. Вначале определим матрицу

$$M = K(\tau) - D^* K(0) D.$$

Из условия (0.17) вытекает, что $M > 0$. Определим теперь следующие матрицы

$$L = -HA - A^*H - K(0)$$
$$-\Big(H(B - AD) - K(0)D\Big)M^{-1}\Big((B - AD)^*H - D^*K(0)\Big),$$
$$N = \Big(H(B - AD) - K(0)D\Big)M^{-2}\Big((B - AD)^*H - D^*K(0)\Big).$$

Отметим, что условие (0.17) эквивалентно тому, что $M > 0$ и $L > 0$ (см. параграф 1.1).

Введем следующие обозначения:

$$\Phi = \max_{t \in [-\tau, 0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\bar{q}_1 = q_1 \|H\| \|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2} (1 + \|D\|)^{\omega_1}.$$

Пусть $\theta > 0$ такое, что

$$\Big[q_1\|D\|(1 + \|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\Big]\|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1 + 2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\},$$

где $l_{\min} > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц L и M соответственно. Обозначим

$$\varepsilon = \min\{\widetilde{c}, k\}, \tag{0.34}$$

где

$$\widetilde{c} = \frac{l_{\min}}{\|H\|} - \Big[q_1 \|D\|(1 + \|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\Big](1 + 2\|N\|),$$

$k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Отметим, что в силу выбора чисел θ и k число ε строго положительно.

В дальнейшем введенные параметры θ, ε, $\bar{q}_1$ будут использоваться при описании множества для начальных данных, при которых решение начальной задачи (0.33) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$, и при указании равномерных оценок решения.

Сформулируем результаты, предполагая для простоты, что $\|D\| < 1$.

Теорема 1.1.1. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и*

$$\|D\| < e^{-\varepsilon\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, где

$$\mathcal{E}_1 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1 (V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \|D\| e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta \Bigg\},$$

решение начальной задачи (0.33) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \|D\| e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1} e^{-\varepsilon t/2} + \Phi \|D\|^{t/\tau}.$$

Теорема 1.1.2. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и*

$$\|D\| = e^{-\varepsilon\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, где

$$\mathcal{E}_2 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau/2}}{\varepsilon\tau/2}\right) + \|D\|\Phi < \theta\Bigg\},$$

решение начальной задачи (0.33) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\frac{t}{\tau} + 1\right) + \Phi\right) e^{-\varepsilon t/2}.$$

Теорема 1.1.3. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и*

$$e^{-\varepsilon\tau/2} < \|D\| < 1.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$, где

$$\mathcal{E}_3 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - (\|D\| e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta\Bigg\},$$

решение начальной задачи (0.33) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - (\|D\| e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \Phi\right) \|D\|^{t/\tau}.$$

Из этих теорем непосредственно вытекает

Следствие 1.1.1. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы уравнений (0.1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства теорем 1.1.1–1.1.3 приведены **во втором параграфе**.

В первом параграфе содержатся также формулировки теорем о разрешимости начальной задачи (0.33) и об оценках ее решений для случая, когда $\|D\| \geq 1$ и спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Из этих теорем будет вытекать экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы уравнений (0.1). Все эти утверждения доказаны **в третьем параграфе**.

В четвертом параграфе главы рассматривается случай, когда хотя бы один из показателей нелинейности в (0.32) равен нулю, т. е. $\omega_1\omega_2 = 0$. Здесь нужно выделять три подслучая: а) $\omega_1 > 0$, $\omega_2 = 0$; б) $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$; в) $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Остановимся коротко на каждом из них. При формулировке теорем мы будем использовать введенные выше обозначения и для определенности будем предполагать, что $\|D\| < 1$.

Пусть $\omega_1 > 0$, $\omega_2 = 0$. Предположим, что коэффициент q_2 из условия (0.32) удовлетворяет неравенству

$$q_2\|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1+2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}.$$

Это неравенство гарантирует, что существует число $\theta > 0$, такое, что

$$\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\Big]\|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1+2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\},$$

т. е. число $\theta > 0$ можно выбирать так же, как в первом параграфе при $\omega_2 = 0$.

При формулировке теорем о разрешимости “в целом” начальной задачи (0.33), как и ранее, нужно рассматривать три случая: $\|D\| < e^{-\varepsilon\tau/2}$, $\|D\| = e^{-\varepsilon\tau/2}$, $\|D\| > e^{-\varepsilon\tau/2}$, где параметр $\varepsilon > 0$ определен в (0.34) с учетом условия $\omega_2 = 0$. Отметим, что в зависимости от случаев в качестве множества для начальных данных, при которых решение задачи (0.33) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$, можно взять множества $\mathcal{E}_i$ из соответствующих теорем 1.1.1–1.1.3.

Приведем, например, теорему для первого случая.

Теорема 1.4.1. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и*

$$\|D\| < e^{-\varepsilon\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$ решение начальной задачи (0.33) определено при всех $t > 0$, при этом для решения справедлива оценка, указанная в теореме 1.1.1.

Аналогичные теоремы справедливы и в двух других случаях. Из этих теорем вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы уравнений (0.1).

Пусть $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$. Предположим, что коэффициент q_1 из условия (0.32) удовлетворяет неравенству

$$q_1(1 + \sqrt{1 + \|D\|^2})\|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1 + 2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}.$$

Пусть $\bar{\theta} > 0$ такое, что

$$\left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + \left(q_1\|D\| + q_2\bar{\theta}^{\omega_2}\right)^2}\right]\|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1 + 2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}.$$

Обозначим

$$\bar{\varepsilon} = \min\{\bar{c}, k\}, \tag{0.35}$$

где

$$\bar{c} = \frac{l_{\min}}{\|H\|} - \left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + \left(q_1\|D\| + q_2\bar{\theta}^{\omega_2}\right)^2}\right](1 + 2\|N\|).$$

Отметим, что в силу выбора чисел $\bar{\theta}$ и k имеем $\bar{\varepsilon} > 0$.

В дальнейшем введенные параметры $\bar{\theta}$ и $\bar{\varepsilon}$ будут использоваться при описании множества для начальных данных, при которых решение начальной задачи (0.33) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$, и при указании равномерных оценок решения.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.4.7. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и*

$$\|D\| < e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_1$, *где*

$$\bar{\mathcal{E}}_1 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \bar{\theta} \Bigg\},$$

решение начальной задачи (0.33) определено при всех $t > 0$. *При этом справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \Big(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\Big)^{-1} e^{-\bar{\varepsilon}t/2} + \Phi \|D\|^{t/\tau}. \qquad (0.36)$$

Теорема 1.4.8. *Предположим, что существуют матрицы* H *и* $K(s)$ *такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и*

$$\|D\| = e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_2$, *где*

$$\bar{\mathcal{E}}_2 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(\frac{e^{-1+\bar{\varepsilon}\tau/2}}{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right) + \|D\|\Phi < \bar{\theta} \Bigg\},$$

решение начальной задачи (0.33) определено при всех $t > 0$. *При этом справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \left(\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(\frac{t}{\tau} + 1\right) + \Phi \right) e^{-\bar{\varepsilon}t/2}. \qquad (0.37)$$

Теорема 1.4.9. *Предположим, что существуют матрицы* H *и* $K(s)$ *такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и*

$$e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2} < \|D\| < 1.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_3$, *где*

$$\bar{\mathcal{E}}_3 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}\left(1-(\|D\|e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\|D\|\Phi<\bar{\theta}\Bigg\},$$

решение начальной задачи (0.33) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\leq\left(\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}\left(1-(\|D\|e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\Phi\right)\|D\|^{t/\tau}. \quad (0.38)$$

Из приведенных результатов непосредственно вытекает следующее

Следствие 1.4.3. *Пусть $\omega_1=0$, $\omega_2>0$. Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и $\|D\|<1$. Тогда нулевое решение системы (0.1) экспоненциально устойчиво.*

Пусть $\omega_1=\omega_2=0$. Предположим, что коэффициенты q_1, q_2 из условия (0.32) удовлетворяют неравенству

$$\left[q_1+\sqrt{q_1^2+(q_1\|D\|+q_2)^2}\right]\|H\|<\min\left\{\frac{l_{\min}}{1+2\|N\|},\frac{m_{\min}}{2}\right\}.$$

Данное неравенство гарантирует, что число $\bar{\varepsilon}$, определенное в (0.35) при $\omega_2=0$, положительно.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1.4.13. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и*

$$\|D\|<e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2}.$$

Тогда для решения начальной задачи (0.33) с начальной вектор-функцией $\varphi(t)\in C^1([-\tau,0])$ имеет место оценка (0.36).

Теорема 1.4.14. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и*

$$\|D\|=e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2}.$$

Тогда для решения начальной задачи (0.33) с начальной вектор-функцией $\varphi(t)\in C^1([-\tau,0])$ имеет место оценка (0.37).

Теорема 1.4.15. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и*

$$e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2}<\|D\|<1.$$

Тогда для решения начальной задачи (0.33) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (0.38).

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает

Следствие 1.4.5. *Пусть $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.15)–(0.17) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (0.1) экспоненциально устойчиво.*

В четвертом параграфе содержатся также формулировки теорем о разрешимости начальной задачи (0.33) и об оценках ее решений для случая, когда $\omega_1\omega_2 = 0$, $\|D\| \geq 1$ и спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Из этих теорем вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы уравнений (0.1).

Итак, достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (0.1) являются условия существования эрмитовых матриц H и $K(s)$, удовлетворяющих (0.15)–(0.17). **В пятом параграфе** рассматривается вопрос о конструктивном построении матриц H и $K(s)$, удовлетворяющих условиям (0.15)–(0.17).

В шестом параграфе рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменным запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau(t))) = Ay(t)+By(t-\tau(t))+F(t, y(t), y(t-\tau(t))), \quad (0.39)$$

где A, B, D — вещественные матрицы размера $n \times n$, $F(t, u, v)$ — вещественнозначная непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица по u и оценке (0.32), $\tau(t)$ — гладкая функция такая, что

$$0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2 < \infty, \quad \tau'(t) \leq \alpha < 1.$$

В этом параграфе приведены некоторые обобщения результатов, полученных в предыдущих параграфах. В частности, указываются достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения систем уравнений вида (0.39).

Получение результатов основано на использовании функционалов вида (0.10), (0.13). В связи с этим отметим, что в литературе имеется ряд очень важных результатов об асимптотической устойчивости решений уравнений вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + \sum_{j=1}^{k} b_j x(t - \tau_j(t))$$

(см., например, [49], [50], [56], [112], [120]).

Во второй главе рассматриваются системы нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейной части

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+F(t,y(t),y(t-\tau)), \quad (0.40)$$

где $\tau > 0$ — постоянный параметр запаздывания, $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n\times n$ с вещественнозначными непрерывными T-периодическими элементами, $T > \tau$, D — вещественная постоянная матрица, $F(t,u,v)$ — вещественнозначная вектор-функция, удовлетворяющая условиям (0.32).

Основная цель — изучение экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (0.40) в случае, когда D — ненулевая матрица, и ее спектр принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Мы будем предполагать, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что **выполнены условия (0.29)–(0.31)**, гарантирующие экспоненциальную устойчивость решений линейной системы уравнений нейтрального типа (0.28). При этих условиях мы находим область допустимых начальных данных, при которых решение системы уравнений (0.40) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$ и стремится к нулю на бесконечности, а также устанавливаем оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание при $t \to \infty$. При получении результатов мы существенно используем модифицированный функционал Ляпунова–Красовского вида (0.27), не используя при этом результатов из теории Флоке.

Вторая глава состоит из пяти параграфов. **В первом параграфе** рассматривается начальная задача для системы уравнений (0.40)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau)) = A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau) \\ \qquad\qquad +F(t,y(t),y(t-\tau)), \quad t>0, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t\in[-\tau,0], \quad y(+0)=\varphi(0), \end{cases} \quad (0.41)$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — вещественнозначная вектор-функция. В первом параграфе мы будем предполагать, что показатели нелинейности ω_i, $i = 1, 2$ в (0.32) строго положительные.

Для формулировки утверждений нам потребуется ввести некоторые обозначения.

По аналогии с первой главой введем три эрмитовы матрицы. Вначале определим матрицу

$$M = K(\tau) - D^* K(0) D.$$

Из условия (0.31) вытекает, что $M > 0$. Определим теперь при $t \in [0, T]$ следующие матрицы

$$L(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0)$$

$$-\Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - K(0)D\Big)M^{-1}$$

$$\times\Big((B(t) - A(t)D)^* H(t) - D^* K(0)\Big),$$

$$N(t) = \Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - K(0)D\Big)M^{-2}$$

$$\times\Big((B(t) - A(t)D)^* H(t) - D^* K(0)\Big).$$

Отметим, что условие (0.31) эквивалентно тому, что

$$M > 0, \quad L(t) > 0, \quad t \in [0, T]$$

(см. параграф 2.1).

Введем следующие обозначения:

$$\Phi = \max_{t \in [-\tau, 0]} \|\varphi(t)\|, \quad h_{\min} = \min_{t \in [0,T]} \|H^{-1}(t)\|^{-1},$$

$$\bar{q}_1 = q_1 (1 + \|D\|)^{\omega_1} \max_{t \in [0,T]} \left\{ \|H(t)\| \|H^{-1}(t)\|^{1+\omega_1/2} \right\}.$$

Пусть $\theta > 0$ такое, что

$$(q_1 \|D\| (1 + \|D\|)^{\omega_1} \theta^{\omega_1} + q_2 \theta^{\omega_2}) \|H(t)\| < \min\left\{ \frac{l_{\min}(t)}{1 + 2\|N(t)\|}, \frac{m_{\min}}{2} \right\},$$

где $l_{\min}(t) > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц $L(t)$ и M соответственно. Обозначим

$$\varepsilon(t) = \min\{\widetilde{c}(t), k\}, \quad \varepsilon_{\max} = \max_{t\in[0,T]} \varepsilon(t), \quad \varepsilon_{\min} = \min_{t\in[0,T]} \varepsilon(t), \tag{0.42}$$

где

$$\widetilde{c}(t) = \frac{l_{\min}(t)}{\|H(t)\|} - (q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2})\,(1+2\|N(t)\|),$$

$k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Отметим, что в силу выбора чисел θ и k функция $\varepsilon(t)$ строго положительна. Обозначим

$$r^{-\omega_1/2} = \bar{q}_1\omega_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \varepsilon(\xi)d\xi\right)\right]^{-1} \int\limits_0^T \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\eta \varepsilon(\xi)d\xi\right) d\eta.$$

В дальнейшем введенные величины будут использоваться при описании множества для начальных данных, при которых решение начальной задачи (0.41) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$, а также при указании равномерных оценок решения.

Сформулируем результаты, предполагая для простоты, что $\|D\| < 1$. Как и в случае постоянных матриц $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$ результаты существенным образом зависят от матрицы D.

Теорема 2.1.1. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.29)–(0.31) и*

$$\|D\| < e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, где

$$\mathcal{E}_1 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau,0]) : \quad \Phi < \theta, \quad V(0,\varphi) < r,$$

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \|D\|e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta\Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (0.41) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\left(1-\|D\|e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right)+\Phi\|D\|^{t/\tau}.$$

Теорема 2.1.2. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.29)–(0.31), и существует точка $t_* \in [0,T]$ такая, что*

$$\|D\| = e^{-\varepsilon(t_*)\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, где

$$\mathcal{E}_2 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau,0]): \quad \Phi<\theta, \quad V(0,\varphi)<r,$$

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{e^{-1+\gamma_{\min}\tau/2}}{\gamma_{\min}\tau/2}\right)+\|D\|\Phi<\theta\Bigg\},$$

$$\gamma(t)=\min\left\{\varepsilon(t),\frac{2}{\tau}\ln\frac{1}{\|D\|}\right\}, \quad \gamma_{\min}=\min_{t\in[0,T]}\gamma(t),$$

решение $y(t)$ начальной задачи (0.41) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\left(\frac{t}{\tau}+1\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right)+\Phi\|D\|^{t/\tau}.$$

Теорема 2.1.3. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.29)–(0.31) и*

$$e^{-\varepsilon_{\min}\tau/2} < \|D\| < 1.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$, где

$$\mathcal{E}_3 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad V(0,\varphi) < r,$$

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - (\|D\| e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta \Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (0.41) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - (\|D\| e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \Phi \right) \|D\|^{t/\tau}.$$

Из этих теорем непосредственно вытекает

Следствие 2.1.1. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (0.29)–(0.31) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (0.40) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства теорем 2.1.1–2.1.3 приведены **во втором параграфе**.

В первом параграфе содержатся также формулировки теорем о разрешимости начальной задачи (0.41) “в целом” и об оценках ее решений для случая, когда $\|D\| \geq 1$, и спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Из этих теорем непосредственно вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (0.40). Эти утверждения доказаны **в третьем параграфе**.

В четвертом параграфе главы рассматривается случай, когда хотя бы один из показателей нелинейности в (0.32) равен нулю, т. е. $\omega_1\omega_2 = 0$. При этом, если $\omega_1 = 0$ (или $\omega_2 = 0$), то на коэффициент q_1 из (0.32) (соответственно q_2) возникают условия вида $q_1 \leq q^*$ (или $q_2 \leq q^*$). Во всех случаях сформулированы теоремы существования на всей полуоси $\{t > 0\}$ и указаны оценки решений системы (0.40). Техника доказательства всех теорем аналогична проведенной ранее и основана на использовании модифицированного функционала Ляпунова–Красовского (0.27).

Таким образом, достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (0.40) являются условия существования матриц $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющих (0.29)–(0.31). **В пятом параграфе** рассматривается вопрос о том, как можно построить эти матрицы.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [29], [30], [70]–[82].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Г.В. Демиденко за постановку задачи и поддержку, а также к.ф.-м.н. Л.Н. Бондарь и к.ф.-м.н. И.И. Матвеевой за полезные дискуссии и помощь в работе.

Глава 1. Системы дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами в линейных членах

§ 1.1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

В первой главе мы будем рассматривать системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau)$$
$$+F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0. \tag{1.1.1}$$

Здесь A, B и D — вещественные постоянные матрицы размера $n \times n$, $\tau > 0$ — постоянный параметр запаздывания, $F(t,u,v)$ — вещественнозначная вектор-функция, удовлетворяющая условиям:

$$F(t,u,v) \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}^{2n}),$$
$$\|F(t,u^1,v) - F(t,u^2,v)\| \le L\|u^1 - u^2\|,$$
$$\|F(t,u,v)\| \le q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2 \ge 0, \quad \omega_1, \omega_2 \ge 0. \tag{1.1.2}$$

Если матрица D — ненулевая, то такие системы в литературе принято называть системами дифференциальных уравнений *нейтрального типа.*

Основная цель — изучение экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1.1) в случае, когда D — ненулевая матрица, и ее спектр принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Мы будем предполагать, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия вида (0.15)–(0.17), гарантирующие экспоненциальную устойчивость решений линейной системы уравнений нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > 0.$$

При этих условиях мы находим область допустимых начальных данных, при которых решение системы уравнений (1.1.1) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$ и стремится к нулю на бесконечности, а также устанавливаем оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание при $t \to \infty$.

Напомним, что нулевое решение линейной системы уравнений нейтрального типа экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда все корни квазимногочлена

$$\det\left(\lambda I + \lambda e^{-\lambda\tau} D - A - e^{-\lambda\tau} B\right) = 0$$

содержатся в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda < -\gamma < 0\}$. При этом для решений системы справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le c e^{-\gamma t}, \quad t > 0.$$

Однако на практике вычисление корней квазимногочленов представляет собой довольно сложную проблему. С одной стороны, приближенное вычисление корней квазимногочленов является весьма трудоемкой задачей (при этом их может быть счетное число), с другой стороны, эта задача является, вообще говоря, плохо обусловленой. Поэтому на практике вместо спектрального критерия зачастую применяются другие методы.

Как отмечалось во введении, существуют различные методы исследования экспоненциальной устойчивости решений линейных систем уравнений с запаздывающим аргументом. В работе [102] был предложен модифицированный функционал Ляпунова–Красовского следующего вида

$$\begin{aligned} V(t,y) = \langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle \\ + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

где $H = H^* > 0$ и $K(s) = K^*(s) > 0$. С использованием этого функционала были получены оценки решений начальной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > 0, \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{1.1.4}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$.

Приведем результат из работы [102].

Теорема (Г.В. Демиденко). *Пусть* $\|D\| < 1$. *Предположим, что существуют матрицы*

$$H = H^* > 0, \quad K(s) \in C^1([0, \tau]) \tag{1.1.5}$$

такие, что

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau], \tag{1.1.6}$$

при этом

$$\mathbf{C} = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB + A^*HD \\ B^*H + D^*HA & D^*HB + B^*HD - K(\tau) \end{pmatrix} > 0. \tag{1.1.7}$$

Тогда для решения $y(t)$ начальной задачи (1.1.4) справедливы следующие оценки.

1. Если $\|D\| < e^{-\varepsilon\tau/2}$, то имеет место оценка

$$\|y(t)\| \le \left(Q \left(1 - \|D\| e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1} + 1 \right) \max_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi(s)\| \; e^{-\varepsilon t/2},$$

где

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{c_{\min}}{\|H\|(1 + \|D\|^2)}, \; k \right\},$$

$$Q = \sqrt{h_{\min}^{-1}(2\|H\|(1 + \|D\|^2) + \tau K)}, \quad K = \max_{s \in [0, \tau]} \|K(s)\|,$$

$h_{\min} > 0$ и $c_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц H и $\mathbf{C}$ соответственно, $k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0, \tau].$$

2. Если $\|D\| = e^{-\varepsilon\tau/2}$, то имеет место оценка

$$\|y(t)\| \le \left(Q\frac{t}{\tau} + 1 \right) \max_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi(s)\| \; e^{-\varepsilon t/2}.$$

3. Если $e^{-\varepsilon\tau/2} < \|D\| < 1$, то имеет место оценка

$$\|y(t)\| \le \left(Q e^{\varepsilon\tau/2} \left(\|D\| e^{\varepsilon\tau/2} - 1\right)^{-1} + 1 \right) \max_{s \in [-\tau, 0]} \|\varphi(s)\| \; \|D\|^{t/\tau}.$$

Подчеркнем, что указанные оценки решений получены без использования корней характеристического квазимногочлена. Их вывод основан на использовании функционала (1.1.3). Из приведенных оценок следует, что все решения убывают с экспоненциальной скоростью, при этом скорость убывания существенным образом зависит от матрицы D.

В этой главе при изучении экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы нелинейных уравнений нейтрального типа (1.1.1) мы будем рассматривать начальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = Ay(t) + By(t-\tau) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{1.1.8}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — вещественнозначная вектор-функция. Будем предполагать, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). При доказательстве теорем о разрешимости "в целом" и при получении оценок решений мы также будем использовать модифицированный функционал Ляпунова–Красовского (1.1.3). Из доказанных теорем будет вытекать экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (1.1.1).

Перейдем к изложению основных результатов настоящей главы.

Вначале рассмотрим случай, когда показатели нелинейности ω_i, $i = 1, 2$ в (1.1.2) строго положительные.

Для формулировки утверждений нам потребуется ввести некоторые обозначения.

Вначале перепишем условие (1.1.7). Заметим, что матрицу $\mathbf{C}$ можно представить в виде

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^* & I \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где

$$C = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & H(B - AD) - K(0)D \\ (B - AD)^*H - D^*K(0) & D^*K(0)D - K(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Поэтому матричное неравенство (1.1.7) эквивалентно неравенству $C > 0$. Отсюда, в частности, следует

$$C_{22} = K(\tau) - D^*K(0)D > 0.$$

Тогда матрицу C можно представить в виде

$$C = \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{12}^* & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^* & I \end{pmatrix}. \tag{1.1.9}$$

Следовательно, условие (1.1.7) эквивалентно следующим неравенствам

$$M = C_{22} = K(\tau) - D^*K(0)D > 0, \tag{1.1.10}$$

$$L = C_{11} - C_{12}C_{22}^{-1}C_{12}^* = -HA - A^*H - K(0)$$
$$-\Big(H(B - AD) - K(0)D\Big)M^{-1}\Big((B - AD)^*H - D^*K(0)\Big) > 0. \tag{1.1.11}$$

Определим еще одну эрмитову матрицу

$$N = \Big(H(B - AD) - K(0)D\Big)M^{-2}\Big((B - AD)^*H - D^*K(0)\Big). \tag{1.1.12}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\bar{q}_1 = q_1\|H\|\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1 + \|D\|)^{\omega_1}. \tag{1.1.13}$$

Пусть $\theta > 0$ такое, что

$$\Big[q_1\|D\|(1 + \|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\Big]\|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1 + 2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}, \tag{1.1.14}$$

где $l_{\min} > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц L и M соответственно. Обозначим

$$\varepsilon = \min\{\widetilde{c}, k\}, \tag{1.1.15}$$

где

$$\widetilde{c} = \frac{l_{\min}}{\|H\|} - \Big[q_1\|D\|(1 + \|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\Big](1 + 2\|N\|), \tag{1.1.16}$$

$k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau]. \tag{1.1.17}$$

Отметим, что в силу выбора чисел θ и k число ε строго положительно.

В дальнейшем введенные параметры θ, ε, $\bar{q}_1$ будут использоваться при описании множества для начальных данных, при которых решение начальной задачи (1.1.8) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$, и при указании равномерных оценок решения.

Вначале мы сформулируем результаты для случая, когда $\|D\| < 1$. Как и в случае линейной системы уравнений, результаты существенным образом зависят от матрицы D.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1.1. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7) и*

$$\|D\| < e^{-\varepsilon\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, где

$$\mathcal{E}_1 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \|D\| e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta \Bigg\},$$

решение начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \|D\| e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1} e^{-\varepsilon t/2} + \Phi \|D\|^{t/\tau}. \tag{1.1.18}$$

Теорема 1.1.2. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7) и*

$$\|D\| = e^{-\varepsilon\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, где

$$\mathcal{E}_2 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau/2}}{\varepsilon\tau/2}\right)+\|D\|\Phi<\theta\Bigg\},$$

решение начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t>0$. *При этом справедлива оценка*

$$\|y(t)\|\leq\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{t}{\tau}+1\right)+\Phi\right)e^{-\varepsilon t/2}. \qquad (1.1.19)$$

Теорема 1.1.3. *Предположим, что существуют матрицы* H *и* $K(s)$ *такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7) и*

$$e^{-\varepsilon\tau/2}<\|D\|<1.$$

Тогда при $\varphi(t)\in\mathcal{E}_3$, *где*

$$\mathcal{E}_3=\Bigg\{\varphi(t)\in C^1([-\tau,0]):\quad \Phi<\theta,\quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}<\varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\|D\|\Phi<\theta\Bigg\},$$

решение начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t>0$. *При этом справедлива оценка*

$$\|y(t)\|\leq\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\Phi\right)\|D\|^{t/\tau}. \qquad (1.1.20)$$

Из этих теорем непосредственно вытекает

Следствие 1.1.1. *Предположим, что существуют матрицы* H *и* $K(s)$ *такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7) и* $\|D\|<1$. *Тогда нулевое решение системы уравнений (1.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства теорем 1.1.1–1.1.3 приведены во втором параграфе.

Приведем теперь формулировки утверждений для случая, когда $\|D\|\geq 1$, а спектр принадлежит единичному кругу $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\}$.

Хорошо известно, что принадлежность спектра матрицы D единичному кругу эквивалентна тому, что дискретное матричное уравнение Ляпунова

$$\widetilde{H} - D^*\widetilde{H}D = I \tag{1.1.21}$$

имеет единственное решение $\widetilde{H} = \widetilde{H}^* > 0$ (см., например, [22]). Отметим, что решение имеет вид

$$\widetilde{H} = I + D^*D + (D^*)^2D^2 + \ldots .$$

Поэтому $\|\widetilde{H}\| \geq 1$. Используя $\|\widetilde{H}\|$, введем следующее обозначение:

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{1}{\|\widetilde{H}\|}}. \tag{1.1.22}$$

Как и в случае, когда $\|D\| < 1$, при формулировке результатов возникают три случая:

$$\rho < e^{-\varepsilon\tau/2}, \quad \rho = e^{-\varepsilon\tau/2}, \quad e^{-\varepsilon\tau/2} < \rho < 1.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.1.4. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7) и*

$$\rho < e^{-\varepsilon\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$, где

$$\mathcal{E}_4 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \rho e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1} + \rho\Phi \right) < \theta \Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|} \Bigg(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times \left(1 - \rho e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1} e^{-\varepsilon t/2} + \Phi \rho^{t/\tau}\Bigg). \qquad (1.1.23)$$

Теорема 1.1.5. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7) и*

$$\rho = e^{-\varepsilon\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$, где

$$\mathcal{E}_5 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1 (V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\| \|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau/2}}{\varepsilon\tau/2} \right) + \rho\Phi \right) < \theta \Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\|\widetilde{H}\| \|\widetilde{H}^{-1}\|} \Bigg(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times \left(\frac{t}{\tau} + 1 \right) + \Phi \Bigg) e^{-\varepsilon t/2}. \qquad (1.1.24)$$

Теорема 1.1.6. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7) и*

$$e^{-\varepsilon\tau/2} < \rho < 1.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$, где

$$\mathcal{E}_6 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1 (V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\| \|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - (\rho e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \rho\Phi \right) < \theta \Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Bigg(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\left(1-(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\Phi\Bigg)\rho^{t/\tau}. \qquad (1.1.25)$$

Доказательства данных утверждений приведены в третьем параграфе.

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1.2. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Тогда нулевое решение системы (1.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Таким образом, достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1.1) являются условия существования матриц H и $K(s)$, удовлетворяющих (1.1.5)–(1.1.7). В пятом параграфе рассматривается вопрос о том, как можно построить данные матрицы.

В четвертом параграфе рассматривается случай, когда хотя бы один из показателей нелинейности в (1.1.2) равен нулю, т. е. $\omega_1\omega_2 = 0$. При этом, если $\omega_1 = 0$ (или $\omega_2 = 0$), то на коэффициент q_1 из (1.1.2) (соответственно q_2) возникают условия вида $q_1 \le q^*$ (или $q_2 \le q^*$). Во всех случаях доказаны теоремы существования на всей полуоси $\{t > 0\}$ и получены оценки решений системы (1.1.1).

§ 1.2. Доказательства теорем 1.1.1–1.1.3

Доказательство теоремы 1.1.1.
Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$. Рассмотрим функционал (1.1.3):

$$V(t,y) = \langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle$$
$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

В силу условий (1.1.5), (1.1.6) на матрицы H и $K(s)$ этот функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$, получим

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv \left\langle H\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\right\rangle$$
$$+ \left\langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), \frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau))\right\rangle$$
$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$
$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Поскольку $y(t)$ — решение системы (1.1.1), то полученное тождество переписывается в виде

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv \big\langle H\big[Ay(t)+By(t-\tau)+F(t,y(t),y(t-\tau))\big], (y(t)+Dy(t-\tau))\big\rangle$$
$$+\big\langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), \big[Ay(t) + By(t-\tau) + F(t,y(t),y(t-\tau))\big]\big\rangle$$
$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$
$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Преобразуем данное тождество. Имеем:

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv \big\langle (HA + A^*H + K(0))y(t), y(t)\big\rangle$$

$$+\Big\langle (B^*H + D^*HA)y(t), y(t-\tau)\Big\rangle + \Big\langle (HB + A^*HD)y(t-\tau), y(t)\Big\rangle$$
$$+\Big\langle (D^*HB + B^*HD - K(\tau))y(t-\tau), y(t-\tau)\Big\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$
$$+2\left\langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), F(t, y(t), y(t-\tau))\right\rangle$$
$$\equiv \left\langle \mathbf{C}\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$
$$+2\left\langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), F(t, y(t), y(t-\tau))\right\rangle,$$

где матрица $\mathbf{C}$ определена в (1.1.7). В дальнейшем нам будет удобнее переписать полученное тождество в эквивалентном виде. Поскольку

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix},$$

то

$$\left\langle \mathbf{C}\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$= \left\langle \mathbf{C}\begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$= \left\langle C\begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^* & I\end{pmatrix}\mathbf{C}\begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I\end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & H(B - AD) - K(0)D \\ (B - AD)^*H - D^*K(0) & D^*K(0)D - K(\tau)\end{pmatrix}.$$

Заметим, что полученная матрица C совпадает с матрицей (1.1.9). Отсюда нетрудно получить

$$\frac{d}{dt}V(t, y) + \left\langle C\begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$
-\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s) y(s), y(s) \right\rangle ds
$$

$$
\equiv 2 \left\langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), F(t, y(t), y(t-\tau)) \right\rangle . \qquad (1.2.1)
$$

Вначале приведем оценку на матрицу C. Используя обозначения (1.1.9)–(1.1.11), имеем

$$
C = \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I \end{pmatrix}.
$$

Как отмечалось ранее, условие (1.1.7) равносильно двум условиям (1.1.10), (1.1.11). В силу условий (1.1.10), (1.1.11) матрицы L и M эрмитовы и положительно определенные. Значит минимальные собственные значения $l_{\min}$ и $m_{\min}$ данных матриц положительны. Отсюда получим неравенство

$$
C \geq \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\min} I & 0 \\ 0 & m_{\min} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I \end{pmatrix}. \qquad (1.2.2)
$$

Теперь в тождестве (1.2.1) оценим интегральное слагаемое. Используя неравенство (1.1.17), получим

$$
\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s) y(s), y(s) \right\rangle ds \leq -k \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s) y(s), y(s) \rangle \, ds. \qquad (1.2.3)
$$

Наконец, оценим величину, стоящую в правой части тождества (1.2.1). В силу неравенства

$$
\|u\| \leq \|u + Dv\| + \|D\| \|v\|
$$

и оценки

$$
(a + \delta b)^{1+\omega} \leq (1+\delta)^{\omega} \left(a^{1+\omega} + \delta b^{1+\omega} \right), \quad a, b, \delta, \omega \geq 0,
$$

из неравенства (1.1.2) получим

$$
\|F(t, u, v)\| \leq q_1 \|u\|^{1+\omega_1} + q_2 \|v\|^{1+\omega_2}
$$

$$
\leq q_1 (\|u + Dv\| + \|D\| \|v\|)^{1+\omega_1} + q_2 \|v\|^{1+\omega_2}
$$

$$
\leq q_1 (1 + \|D\|)^{\omega_1} \left(\|u + Dv\|^{1+\omega_1} + \|D\| \|v\|^{1+\omega_1} \right) + q_2 \|v\|^{1+\omega_2}.
$$

Следовательно,

$$2\left\langle H(u+Dv),F(t,u,v)\right\rangle \le 2\|H\|\|u+Dv\|\|F(t,u,v)\|$$

$$\le 2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|u+Dv\|^{2+\omega_1}$$

$$+2\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|v\|^{\omega_1}+q_2\|v\|^{\omega_2}\Big]\|H\|\|u+Dv\|\|v\|.$$

Учитывая оценку

$$2\|u\|\|v\| \le \|u\|^2+\|v\|^2,$$

получим неравенство

$$2\left\langle H(u+Dv),F(t,u,v)\right\rangle \le 2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|u+Dv\|^{2+\omega_1}$$

$$+\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|v\|^{\omega_1}+q_2\|v\|^{\omega_2}\Big]\|H\|\Big[\|u+Dv\|^2+\|v\|^2\Big]. \quad (1.2.4)$$

Положим в данном неравенстве $u=y(t)$, $v=y(t-\tau)$ и оценим первое слагаемое. В силу положительной определенности функционала $V(t,y)$ имеем оценку

$$\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2 \le \|H^{-1}\|V(t,y).$$

Значит, используя обозначение (1.1.13), получим

$$2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}$$

$$\le 2q_1\|H\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}V^{1+\omega_1/2}(t,y)=2\bar{q}_1V^{1+\omega_1/2}(t,y). \quad (1.2.5)$$

Теперь оценим второе слагаемое в (1.2.4). Поскольку

$$\|u+Dv\|^2+\|v\|^2=\left\langle \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+Dv\\ v\end{pmatrix},\begin{pmatrix} u+Dv\\ v\end{pmatrix}\right\rangle$$

и имеет место неравенство

$$\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I+2C_{12}C_{22}^{-2}C_{12}^* & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0\\ C_{22}^{-1}C_{12}^* & I\end{pmatrix},$$

то

$$\|u+Dv\|^2+\|v\|^2 \le \left\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I+2C_{12}C_{22}^{-2}C_{12}^* & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix} I & 0\\ C_{22}^{-1}C_{12}^* & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+Dv\\ v\end{pmatrix},\begin{pmatrix} u+Dv\\ v\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Принимая во внимание обозначение (1.1.12) матрицы N, отсюда нетрудно получить оценку

$$\|u+Dv\|^2+\|v\|^2 \le \left\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix} \right\rangle. \qquad (1.2.6)$$

Полагая в неравенстве (1.2.4) $u=y(t)$, $v=y(t-\tau)$ и используя (1.2.5), (1.2.6), получим неравенство

$$2\left\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)), F(t,y(t),y(t-\tau))\right\rangle \le 2\bar{q}_1 V^{1+\omega_1/2}(t,y)$$

$$+\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}+q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big]\|H\|$$

$$\times \left\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle. \qquad (1.2.7)$$

Итак, в силу полученных неравенств (1.2.2), (1.2.3) и (1.2.7) из тождества (1.2.1) имеем оценку

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \left\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\min}I & 0 \\ 0 & m_{\min}I \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds \le 2\bar{q}_1 V^{1+\omega_1/2}(t,y)$$

$$+\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}+q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big]\|H\|$$

$$\times \left\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Преобразуем полученную оценку. Поскольку

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^* & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ C_{22}^{-1}C_{12}^*(y(t)+Dy(t-\tau))+y(t-\tau) \end{pmatrix},$$

то, обозначая

$$z(t) = C_{22}^{-1}C_{12}^*(y(t)+Dy(t-\tau))+y(t-\tau), \tag{1.2.8}$$

получим неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \left\langle \begin{pmatrix} l_{\min}I & 0 \\ 0 & m_{\min}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$-\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{\omega_1} + q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big]\|H\|$$

$$\times\left\langle \begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds \le 2\bar{q}_1 V^{1+\omega_1/2}(t,y). \tag{1.2.9}$$

Следующая наша цель — доказать разрешимость начальной задачи (1.1.8) на всей полуоси $\{t>0\}$ при $\varphi(t)\in\mathcal{E}_1$. Более того, мы докажем, что на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m\in\mathbb{N}$, имеет место оценка

$$\|y(t)\| \le \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon t/2} + \|D\|^m\Phi. \tag{1.2.10}$$

Пусть $t\in[0,\tau)$. Поскольку $\varphi(t)\in\mathcal{E}_1$, то $\Phi<\theta$. Используя (1.2.9), нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \left\langle \begin{pmatrix} l_{\min}I & 0 \\ 0 & m_{\min}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$-\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1}+q_2\theta^{\omega_2}\Big]\|H\|$$

$$\times\left\langle\begin{pmatrix}(1+2\|N\|)I & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(t)+Dy(t-\tau)\\ z(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)+Dy(t-\tau)\\ z(t)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds\le 2\bar{q}_1V^{1+\omega_1/2}(t,y). \qquad (1.2.11)$$

Используя условие (1.1.14) на величину θ и обозначение (1.1.16) величины $\widetilde{c}$, получим

$$\begin{pmatrix}l_{\min}I & 0\\ 0 & m_{\min}I\end{pmatrix}-\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1}+q_2\theta^{\omega_2}\Big]\|H\|\begin{pmatrix}(1+2\|N\|)I & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}$$

$$\ge\begin{pmatrix}\widetilde{c}\|H\|I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ge\widetilde{c}\begin{pmatrix}H & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\widetilde{c}\,\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds\le 2\bar{q}_1V^{1+\omega_1/2}(t,y).$$

В силу определения (1.1.15) величины ε отсюда получим неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\varepsilon V(t,y)\le 2\bar{q}_1V^{1+\omega_1/2}(t,y). \qquad (1.2.12)$$

Поскольку $\varphi(t)\in\mathcal{E}_1$, то $2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}<\varepsilon$. Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t,y)\le\frac{V(0,\varphi)}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}}e^{-\varepsilon t},$$

откуда имеем неравенство

$$\|y(t)+Dy(t-\tau)\|\le\sqrt{\|H^{-1}\|V(t,y)}$$

$$\le\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}e^{-\varepsilon t/2}. \qquad (1.2.13)$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \le \|y(t) + Dy(t-\tau)\| + \|D\|\|y(t-\tau)\|$$
$$\le \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} e^{-\varepsilon t/2} + \|D\|\Phi.$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0,\tau]$, и при $m = 1$ неравенство (1.2.10) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (1.1.8) установлено на отрезке $[0,(m-1)\tau]$, $m \ge 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau,(m-1)\tau)$ имеет место оценка (1.2.10), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau,$ $(m-1)\tau)$ выполнено

$$\|y(t')\| \le \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\sum_{j=0}^{m-2} (\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j\right) e^{-\varepsilon t'/2}$$
$$+\|D\|^{m-1}\Phi, \quad t' \in [(m-2)\tau,(m-1)\tau). \tag{1.2.14}$$

Поскольку по условию теоремы $\|D\| < e^{-\varepsilon\tau/2}$, то

$$\sum_{j=0}^{m-2} (\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j \le \sum_{j=0}^{\infty} (\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j = \left(1 - \|D\|e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}.$$

Используя это неравенство и оценку $\|D\|^{m-1} \le \|D\|$, из (1.2.14) получим неравенство

$$\|y(t')\| \le \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \|D\|e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi.$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \|D\|e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta$$

из определения множества $\mathcal{E}_1$, имеем оценку

$$\|y(t')\| \le \theta, \quad t' \in [(m-2)\tau,(m-1)\tau). \tag{1.2.15}$$

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (1.2.15) из неравенства (1.2.9) получим оценку (1.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m = 1$, нетрудно отсюда получить неравенство (1.2.13). Используя это неравенство и неравенство (1.2.14) при $t' = t - \tau$, получим оценку

$$\|y(t)\| \leq \|y(t) + Dy(t-\tau)\| + \|D\|\|y(t-\tau)\|$$

$$\leq \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} e^{-\varepsilon t/2}$$

$$+\|D\|\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\sum_{j=0}^{m-2}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon(t-\tau)/2} + \|D\|^{m-1}\Phi\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon t/2} + \|D\|^m\Phi.$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$ решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0, m\tau]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (1.2.10).

Теперь уже нетрудно получить оценку (1.1.18). Действительно, используя неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j \leq \left(1 - \|D\|e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}$$

и оценку

$$\|D\|^m \leq \|D\|^{t/\tau},$$

из (1.2.10) получим

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon t/2} + \|D\|^m\Phi$$

$$\leq \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1 - \|D\|e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}e^{-\varepsilon t/2} + \|D\|^{t/\tau}\Phi,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.1.2.

Доказательство данной теоремы проведем по аналогии с доказательством теоремы 1.1.1. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$. Рассмотрим функционал (1.1.3). В силу условий (1.1.5), (1.1.6) на матрицы H и $K(s)$ этот функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 1.1.1, получим неравенство (1.2.9).

Покажем, что решение начальной задачи (1.1.8) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$ будет определено на всей полуоси $\{t > 0\}$, при этом на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка (1.2.10).

Пусть $t \in [0, \tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, то $\Phi < \theta$. Используя (1.2.9), нетрудно получить неравенство (1.2.11). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1.1.1, из этого неравенства получим оценку (1.2.12). Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, то $2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon$. Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t,y) \le \frac{V(0,\varphi)}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}} e^{-\varepsilon t},$$

откуда имеем неравенство (1.2.13). Следовательно,

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\le \|y(t) + Dy(t-\tau)\| + \|D\|\|y(t-\tau)\| \\ &\le \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} e^{-\varepsilon t/2} + \|D\|\Phi. \end{aligned}$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0, \tau]$, и при $m = 1$ неравенство (1.2.10) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (1.1.8) установлено на отрезке $[0, (m-1)\tau]$, $m \ge 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau, (m-1)\tau)$ имеет место оценка (1.2.10), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau, (m-1)\tau)$ выполнено (1.2.14). Поскольку $\|D\| = e^{-\varepsilon\tau/2}$, то

$$\left(\sum_{j=0}^{m-2} (\|D\| e^{\varepsilon\tau/2})^j\right) e^{-\varepsilon t'/2} = (m-1)e^{-\varepsilon t'/2} \le \left(\frac{t'}{\tau} + 1\right) e^{-\varepsilon t'/2}$$

$$\leq \max_{\xi \geq 0} \left\{ \left(\frac{\xi}{\tau} + 1 \right) e^{-\varepsilon \xi/2} \right\} \leq \left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau/2}}{\varepsilon\tau/2} \right).$$

Используя это неравенство и оценку $\|D\|^{m-1} \leq \|D\|$, из (1.2.14) получим неравенство

$$\|y(t')\| \leq \frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau/2}}{\varepsilon\tau/2} \right) + \|D\|\Phi.$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau/2}}{\varepsilon\tau/2} \right) + \|D\|\Phi < \theta$$

из определения множества $\mathcal{E}_2$, имеем оценку (1.2.15).

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (1.2.15) из неравенства (1.2.9) получим оценку (1.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m = 1$, нетрудно отсюда получить неравенство (1.2.13). Используя это неравенство и неравенство (1.2.14) при $t' = t - \tau$, получим оценку

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} e^{-\varepsilon t/2}$$

$$+\|D\| \left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\sum_{j=0}^{m-2} (\|D\| e^{\varepsilon\tau/2})^j \right) e^{-\varepsilon(t-\tau)/2} + \|D\|^{m-1}\Phi \right)$$

$$= \frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\sum_{j=0}^{m-1} (\|D\| e^{\varepsilon\tau/2})^j \right) e^{-\varepsilon t/2} + \|D\|^m\Phi.$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$ решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0, m\tau]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (1.2.10).

Теперь уже нетрудно получить оценку (1.1.19). Действительно, используя неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1} (\|D\| e^{\varepsilon\tau/2})^j = m \leq \frac{t}{\tau} + 1$$

и оценку
$$\|D\|^m \le \|D\|^{t/\tau},$$
из (1.2.10) получим требуемую оценку.

Теорема 1.1.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.1.3.
Доказательство этой теоремы также, как и теоремы 1.1.2, проводится по аналогии с доказательством теоремы 1.1.1. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$. Рассмотрим функционал (1.1.3). В силу условий (1.1.5), (1.1.6) на матрицы H и $K(s)$ этот функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 1.1.1, получим неравенство (1.2.9).

Покажем, что решение начальной задачи (1.1.8) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ будет определено на всей полуоси $\{t > 0\}$, при этом на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка (1.2.10).

Пусть $t \in [0, \tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$, то $\Phi < \theta$. Используя (1.2.9), нетрудно получить неравенство (1.2.11). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1.1.1, из этого неравенства получим оценку (1.2.12). Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$, то $2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon$. Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку
$$V(t,y) \le \frac{V(0,\varphi)}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}} e^{-\varepsilon t},$$
откуда имеем неравенство (1.2.13). Следовательно,
$$\|y(t)\| \le \frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} e^{-\varepsilon t/2} + \|D\|\Phi.$$
Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0, \tau]$, и при $m = 1$ неравенство (1.2.10) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (1.1.8) установлено на отрезке $[0, (m-1)\tau]$, $m \ge 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau, (m-1)\tau)$ имеет место оценка (1.2.10), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau,$

$(m-1)\tau)$ выполнено (1.2.14). Поскольку по условию теоремы $e^{-\varepsilon\tau/2} < \|D\| < 1$, то

$$\left(\sum_{j=0}^{m-2}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon t'/2} = \left(\sum_{j=0}^{m-2}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{m-2-j}\right)e^{-\varepsilon t'/2}$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^{m-2}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{t'/\tau-j}\right)e^{-\varepsilon t'/2} \le \left(\sum_{j=0}^{\infty}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{-j}\right)\|D\|^{t'/\tau}$$

$$\le \left(1-(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1}.$$

Используя это неравенство и оценку $\|D\|^{m-1} \le \|D\|$, из (1.2.14) получим неравенство

$$\|y(t')\| \le \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \|D\|\Phi.$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta$$

из определения множества $\mathcal{E}_3$, имеем оценку (1.2.15).

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (1.2.15) из неравенства (1.2.9) получим оценку (1.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m = 1$, нетрудно отсюда получить неравенство (1.2.13). Используя это неравенство и неравенство (1.2.14) при $t' = t-\tau$, получим оценку

$$\|y(t)\| \le \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}e^{-\varepsilon t/2}$$

$$+\|D\|\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\sum_{j=0}^{m-2}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon(t-\tau)/2} + \|D\|^{m-1}\Phi\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon t/2} + \|D\|^m\Phi.$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0, m\tau]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (1.2.10).

Теперь уже нетрудно получить оценку (1.1.20). Действительно, используя неравенство

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon t/2} = \left(\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{m-1-j}\right)e^{-\varepsilon t/2}$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty}(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{-j}\right)\|D\|^{t/\tau} = \left(1-(\|D\|e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1}\|D\|^{t/\tau}$$

и оценку

$$\|D\|^m \leq \|D\|^{t/\tau},$$

из (1.2.10) получим требуемое неравенство.

Теорема 1.1.3 доказана.

§ 1.3. Доказательства теорем 1.1.4–1.1.6

Цель настоящего параграфа — доказать теоремы 1.1.4–1.1.6. Для этого нам понадобится аналог неравенства М.Г. Крейна (см., например, [19]):

$$\|D^j\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\rho^j, \tag{1.3.1}$$

где $\widetilde{H}$ определено в (1.1.21), ρ определено в (1.1.22).

Отметим, что доказательства теорем 1.1.4–1.1.6 проводятся по аналогии с доказательствами теорем 1.1.1–1.1.3.

Доказательство теоремы 1.1.4.
Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$. Рассмотрим функционал (1.1.3). В силу условий (1.1.5), (1.1.6) на матрицы H и $K(s)$ этот функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 1.1.1, получим неравенство (1.2.9).

Покажем, что решение начальной задачи (1.1.8) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$ будет определено на всей полуоси $\{t > 0\}$, при этом на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\right.$$
$$\left. \times \left(\sum_{j=0}^{m-1}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^j\right) e^{-\varepsilon t/2} + \rho^m \Phi\right). \tag{1.3.2}$$

Пусть $t \in [0, \tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$, то $\Phi < \theta$. Используя (1.2.9), нетрудно получить неравенство (1.2.11). Используя условие (1.1.14) на величину θ и обозначение (1.1.16) величины $\widetilde{c}$, получим

$$\begin{pmatrix} l_{\min} I & 0 \\ 0 & m_{\min} I \end{pmatrix} - \left[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\right]\|H\| \begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix}$$
$$\geq \begin{pmatrix} \widetilde{c}\|H\|I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq \widetilde{c}\begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \widetilde{c}\,\langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds\le 2\bar q_1V^{1+\omega_1/2}(t,y).$$

В силу определения (1.1.15) величины ε отсюда получим неравенство (1.2.12). Поскольку $\varphi(t)\in\mathcal{E}_4$, то $2\bar q_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}<\varepsilon$. Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t,y)\le\frac{V(0,\varphi)}{\left(1-\frac{2\bar q_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}}e^{-\varepsilon t},$$

откуда имеем неравенство (1.2.13). Следовательно,

$$\|y(t)\|\le\|y(t)+Dy(t-\tau)\|+\|D\|\|y(t-\tau)\|$$

$$\le\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar q_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}e^{-\varepsilon t/2}+\|D\|\Phi.$$

Из этого неравенства, используя оценку (1.3.1) при $j=1$ и учитывая, что $\|\widetilde H\|\|\widetilde H^{-1}\|\ge1$, получим

$$\|y(t)\|\le\sqrt{\|\widetilde H\|\|\widetilde H^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar q_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}e^{-\varepsilon t/2}+\rho\Phi\right).$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0,\tau]$, и при $m=1$ неравенство (1.3.2) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (1.1.8) установлено на отрезке $[0,(m-1)\tau]$, $m\ge2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau,(m-1)\tau)$ имеет место оценка (1.3.2), т. е. при $t'\in[(m-2)\tau,(m-1)\tau)$ выполнено

$$\|y(t')\|\le\sqrt{\|\widetilde H\|\|\widetilde H^{-1}\|}\Bigg(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar q_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{m-2}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon t'/2}+\rho^m\Phi\Bigg),\quad t'\in[(m-2)\tau,(m-1)\tau).\qquad(1.3.3)$$

Поскольку по условию теоремы $\rho < e^{-\varepsilon\tau/2}$, то

$$\sum_{j=0}^{m-2}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^j \le \sum_{j=0}^{\infty}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^j = \left(1-\rho e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}.$$

Используя это неравенство и оценку $\rho^{m-1} \le \rho$, из (1.3.3) получим неравенство

$$\|y(t')\| \le \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-\rho e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}+\rho\Phi\right).$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-\rho e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}+\rho\Phi\right) < \theta$$

из определения множества $\mathcal{E}_4$, имеем оценку (1.2.15).

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (1.2.15) из неравенства (1.2.9) получим оценку (1.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m = 1$, нетрудно отсюда получить неравенство (1.2.13). Далее, представим $y(t)$ в виде

$$y(t) = \Big[y(t)+Dy(t-\tau)\Big] - D\Big[y(t-\tau)+Dy(t-2\tau)\Big] + \dots$$

$$+(-1)^{m-1}D^{m-1}\Big[y(t-(m-1)\tau)+Dy(t-m\tau)\Big] + (-1)^m D^m y(t-m\tau)$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j D^j\Big[y(t-j\tau)+Dy(t-(j+1)\tau)\Big] + (-1)^m D^m y(t-m\tau).$$

Из этого представления следует очевидное неравенство

$$\|y(t)\| \le \sum_{j=0}^{m-1}\|D^j\|\|y(t-j\tau)+Dy(t-(j+1)\tau)\| + \|D^m\|\|y(t-m\tau)\|.$$

Отсюда, используя оценки (1.2.13), (1.3.1) и оценку

$$\|y(t-m\tau)\| \le \Phi,$$

получим неравенство

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\sum_{j=0}^{m-1}\rho^j e^{-\varepsilon(t-j\tau)/2}+\rho^m\Phi\right).$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$ решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0, m\tau]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (1.3.2).

Теперь уже нетрудно получить оценку (1.1.23). Действительно, используя неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^j \leq \left(1-\rho e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}$$

и оценку

$$\rho^m \leq \rho^{t/\tau},$$

из (1.3.2) получим требуемую оценку.

Теорема 1.1.4 доказана.

Доказательство теоремы 1.1.5.

Доказательство данной теоремы проведем по аналогии с доказательством теоремы 1.1.4. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$. Рассмотрим функционал (1.1.3). В силу условий (1.1.5), (1.1.6) на матрицы H и $K(s)$ этот функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 1.1.1, получим неравенство (1.2.9).

Покажем, что решение начальной задачи (1.1.8) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$ будет определено на всей полуоси $\{t > 0\}$, при этом на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка (1.3.2).

Пусть $t \in [0, \tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$, то $\Phi < \theta$. Отсюда и из (1.2.9) нетрудно получить неравенство (1.2.11). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1.1.4, из этого неравенства получим оценку (1.2.12). Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$, то $2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon$. Тогда, используя неравенство Гроноулла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t,y) \leq \frac{V(0,\varphi)}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}}e^{-\varepsilon t}.$$

Следовательно, как при доказательстве теоремы 1.1.4, получим

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}e^{-\varepsilon t/2}+\rho\Phi\right).$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0,\tau]$, и при $m=1$ неравенство (1.3.2) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (1.1.8) установлено на отрезке $[0,(m-1)\tau]$, $m \ge 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau,(m-1)\tau)$ имеет место оценка (1.3.2), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau,$ $(m-1)\tau)$ выполнено (1.3.3). Поскольку по условию теоремы $\rho = e^{-\varepsilon\tau/2}$, то

$$\left(\sum_{j=0}^{m-2}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon t'/2} = (m-1)e^{-\varepsilon t'/2} \le \left(\frac{t'}{\tau}+1\right)e^{-\varepsilon t'/2}$$

$$\le \max_{\xi\ge 0}\left\{\left(\frac{\xi}{\tau}+1\right)e^{-\varepsilon\xi/2}\right\} \le \left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau/2}}{\varepsilon\tau/2}\right).$$

Используя это неравенство и оценку $\rho^{m-1} \le \rho$, из (1.3.3) получим неравенство

$$\|y(t')\| \le \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-\rho e^{\varepsilon\tau/2}\right)^{-1}+\rho\Phi\right).$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau/2}}{\varepsilon\tau/2}\right)+\rho\Phi\right) < \theta$$

из определения множества $\mathcal{E}_5$, имеем оценку (1.2.15).

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (1.2.15) из неравенства (1.2.9) получим оценку (1.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m=1$, нетрудно отсюда получить неравенство (1.2.13). Далее, проводя рассуждения, как при доказательстве теоремы 1.1.4, получим, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$ решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0, m\tau]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (1.3.2).

Теперь уже нетрудно получить оценку (1.1.24). Действительно, используя неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1} (\rho e^{\varepsilon\tau/2})^j = m \leq \frac{t}{\tau} + 1$$

и оценку

$$\rho^m \leq \rho^{t/\tau},$$

из (1.3.2) получим требуемую оценку.

Теорема 1.1.5 доказана.

Доказательство теоремы 1.1.6.
Доказательство этой теоремы мы также проведем по аналогии с доказательством теоремы 1.1.4. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$. Рассмотрим функционал (1.1.3). В силу условий (1.1.5), (1.1.6) на матрицы H и $K(s)$ этот функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 1.1.1, получим неравенство (1.2.9).

Покажем, что решение начальной задачи (1.1.8) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$ будет определено на всей полуоси $\{t > 0\}$, при этом на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка (1.3.2).

Пусть $t \in [0, \tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$, то $\Phi < \theta$. Отсюда и из (1.2.9) нетрудно получить неравенство (1.2.11). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1.1.4, из этого неравенства получим оценку (1.2.12). Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$, то $2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon$. Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t,y) \leq \frac{V(0,\varphi)}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}} e^{-\varepsilon t},$$

откуда имеем неравенство (1.2.13). Следовательно, как при доказательстве теоремы 1.1.4, получим

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} e^{-\varepsilon t/2} + \rho\Phi \right).$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0, \tau]$, и при $m = 1$ неравенство (1.3.2) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (1.1.8) установлено на отрезке $[0,(m-1)\tau]$, $m \geq 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau,(m-1)\tau)$ имеет место оценка (1.3.2), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau,$ $(m-1)\tau)$ выполнено (1.3.3). Поскольку по условию теоремы $e^{-\varepsilon\tau/2} <$ $\rho < 1$, то

$$\left(\sum_{j=0}^{m-2}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon t'/2} = \left(\sum_{j=0}^{m-2}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^{m-2-j}\right)e^{-\varepsilon t'/2}$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{m-2}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^{t'/\tau-j}\right)e^{-\varepsilon t'/2} \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^{-j}\right)\rho^{t'/\tau}$$

$$\leq \left(1-(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1}.$$

Используя это неравенство и оценку $\rho^{m-1} \leq \rho$, из (1.3.3) и из определения множества $\mathcal{E}_6$, как при доказательстве теоремы 1.1.4, имеем оценку (1.2.15).

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (1.2.15) из неравенства (1.2.9) получим оценку (1.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m = 1$, нетрудно отсюда получить неравенство (1.2.13). Поэтому по аналогии с предыдущим получаем, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$ решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0, m\tau]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (1.3.2).

Теперь уже нетрудно получить оценку (1.1.25). Действительно, используя неравенство

$$\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon t/2} = \left(\sum_{j=0}^{m-1}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^{m-1-j}\right)e^{-\varepsilon t/2}$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty}(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^{-j}\right)\rho^{t/\tau} = \left(1-(\rho e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}\right)^{-1}\rho^{t/\tau}$$

и оценку

$$\rho^m \leq \rho^{t/\tau},$$

из (1.3.2) получим требуемое неравенство.

Теорема 1.1.6 доказана.

§ 1.4. Случай $\omega_1\omega_2 = 0$

В данном параграфе мы рассмотрим случай, когда в оценке (1.1.2) на вектор-функцию $F(t,u,v)$

$$\omega_1\omega_2 = 0.$$

Вначале рассмотрим случай

$$\omega_1 > 0, \quad \omega_2 = 0.$$

Будем предполагать, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7), гарантирующие экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы. Пусть также выполнено неравенство

$$q_2\|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1+2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}, \tag{1.4.1}$$

где $l_{\min} > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц (1.1.11) и (1.1.10) соответственно, N определено в (1.1.12). Данное условие гарантирует, что существует величина $\theta > 0$, удовлетворяющая неравенству (1.1.14) при $\omega_2 = 0$:

$$\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\Big]\|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1+2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}.$$

Это в свою очередь означает, что величина ε, определенная в (1.1.15), положительна.

Из теорем 1.1.1–1.1.3 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 1.4.1. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (1.4.1) и*

$$\|D\| < e^{-\varepsilon\tau/2},$$

где ε определено в (1.1.15). Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$ решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (1.1.18).

Теорема 1.4.2. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (1.4.1) и*

$$\|D\| = e^{-\varepsilon\tau/2},$$

где ε определено в (1.1.15). Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$ решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (1.1.19).

Теорема 1.4.3. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (1.4.1) и*

$$e^{-\varepsilon\tau/2} < \|D\| < 1,$$

где ε определено в (1.1.15). Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (1.1.20).

Доказательства данных утверждений дословно повторяют доказательства теорем 1.1.1–1.1.3, только в соответствующих местах вместо ω_2 нужно поставить 0 (см. § 1.2).

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.4.1. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (1.4.1) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (1.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Сформулированные утверждения также нетрудно обобщить на случай, когда $\|D\| \geq 1$, а спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

Приведем соответствующие результаты.

Теорема 1.4.4. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (1.4.1) и*

$$\rho < e^{-\varepsilon\tau/2},$$

где ρ, ε определены в (1.1.22), (1.1.15) соответственно. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$ решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (1.1.23).

Теорема 1.4.5. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (1.4.1) и*

$$\rho = e^{-\varepsilon\tau/2},$$

где ρ, ε определены в (1.1.22), (1.1.15) соответственно. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$ решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (1.1.24).

Теорема 1.4.6. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (1.4.1) и*

$$e^{-\varepsilon\tau/2} < \rho < 1,$$

где ρ, ε определены в (1.1.22), (1.1.15) соответственно. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$ решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (1.1.25).

Доказательства теорем 1.4.4–1.4.6 в точности повторяют доказательства теорем 1.1.4–1.1.6, только в соответствующих местах вместо ω_2 нужно поставить 0 (см. § 1.3).

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.4.2. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (1.4.1). Тогда нулевое решение системы (1.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Теперь рассмотрим случай, когда в оценке (1.1.2)

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 > 0.$$

Будем предполагать, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7), гарантирующие экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы. Предположим также, что выполнено условие

$$q_1 \left[1 + \sqrt{1 + \|D\|^2}\right] \|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1 + 2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}, \tag{1.4.2}$$

где $l_{\min} > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц (1.1.11) и (1.1.10) соответственно, N определено в (1.1.12).

Введем следующие обозначения. Пусть $\bar{\theta} > 0$ такое, что

$$\left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + \left(q_1\|D\| + q_2\bar{\theta}^{\omega_2}\right)^2}\right] \|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1 + 2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}. \tag{1.4.3}$$

Отметим, что условие (1.4.2) гарантирует существование величины $\bar{\theta} > 0$. Обозначим

$$\bar{\varepsilon} = \min\{\bar{c}, k\}, \tag{1.4.4}$$

где

$$\bar{c} = \frac{l_{\min}}{\|H\|} - \left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + \left(q_1\|D\| + q_2\bar{\theta}^{\omega_2}\right)^2}\right](1 + 2\|N\|), \tag{1.4.5}$$

$k > 0$ определено в (1.1.17). Отметим, что в силу условия (1.4.3) на параметр $\bar{\theta}$ имеем $\bar{c} > 0$, т. е. число $\bar{\varepsilon}$ строго положительно.

В дальнейшем введенные параметры $\bar{\theta}$ и $\bar{\varepsilon}$ будут использоваться при описании множества для начальных данных, при которых решение начальной задачи (1.1.8) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$, и при указании равномерных оценок решения.

Вначале мы сформулируем результаты для случая, когда $\|D\| < 1$. Как ранее, $\Phi = \max\limits_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.4.7. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (1.4.2) и*

$$\|D\| < e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_1$, где

$$\bar{\mathcal{E}}_1 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}\left(1 - \|D\|e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \bar{\theta}\Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}\left(1 - \|D\|e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1}e^{-\bar{\varepsilon}t/2} + \Phi\|D\|^{t/\tau}. \tag{1.4.6}$$

Теорема 1.4.8. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (1.4.2) и*

$$\|D\| = e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_2$*, где*

$$\bar{\mathcal{E}}_2 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(\frac{e^{-1+\bar{\varepsilon}\tau/2}}{\bar{\varepsilon}\tau/2} \right) + \|D\|\Phi < \bar{\theta} \Bigg\},$$

решение $y(t)$ *начальной задачи (1.1.8) определено при всех* $t > 0$*. При этом справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \left(\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(\frac{t}{\tau} + 1 \right) + \Phi \right) e^{-\bar{\varepsilon} t/2}. \qquad (1.4.7)$$

Теорема 1.4.9. *Предположим, что существуют матрицы* H *и* $K(s)$ *такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть* q_1 *удовлетворяет неравенству (1.4.2) и*

$$e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2} < \|D\| < 1.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_3$*, где*

$$\bar{\mathcal{E}}_3 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(1 - (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^{-1} \right)^{-1} + \|D\|\Phi < \bar{\theta} \Bigg\},$$

решение $y(t)$ *начальной задачи (1.1.8) определено при всех* $t > 0$*. При этом справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \le \Bigg(\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}$$

$$\times \left(1 - (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^{-1} \right)^{-1} + \Phi \Bigg) \|D\|^{t/\tau}. \qquad (1.4.8)$$

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.4.3. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (1.4.2) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (1.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Приведем теперь формулировки утверждений для случая, когда $\|D\| \geq 1$, а спектр принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.4.10. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (1.4.2) и*

$$\rho < e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2},$$

где ρ определено в (1.1.22). Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_4$, где

$$\bar{\mathcal{E}}_4 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)} \left(1 - \rho e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1} + \rho\Phi \right) < \bar{\theta} \Bigg\},$$

$\widetilde{H}$ определено в (1.1.21), решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|} \Bigg(\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}$$

$$\times \left(1 - \rho e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1} e^{-\bar{\varepsilon}t/2} + \Phi \rho^{t/\tau} \Bigg). \tag{1.4.9}$$

Теорема 1.4.11. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (1.4.2) и*

$$\rho = e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2},$$

где ρ определено в (1.1.22). Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_5$, где

$$\bar{\mathcal{E}}_5 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}\left(\frac{e^{-1+\bar{\varepsilon}\tau/2}}{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)+\rho\Phi\right)<\bar{\theta}\Bigg\},$$

$\widetilde{H}$ определено в (1.1.21), решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t>0$, при этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\leq\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Bigg(\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}$$

$$\times\left(\frac{t}{\tau}+1\right)+\Phi\Bigg)e^{-\bar{\varepsilon}t/2}. \qquad (1.4.10)$$

Теорема 1.4.12. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (1.4.2) и*

$$e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2}<\rho<1,$$

где ρ определено в (1.1.22). Тогда при $\varphi(t)\in\bar{\mathcal{E}}_6$, где

$$\bar{\mathcal{E}}_6=\Bigg\{\varphi(t)\in C^1([-\tau,0]):\quad\Phi<\bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}\left(1-(\rho e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\rho\Phi\right)<\bar{\theta}\Bigg\}$$

$\widetilde{H}$ определено в (1.1.21), решение $y(t)$ начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t>0$, при этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\leq\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Bigg(\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}$$

$$\times\left(1-(\rho e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\Phi\Bigg)\rho^{t/\tau}. \qquad (1.4.11)$$

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.4.4. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (1.4.2). Тогда нулевое решение системы (1.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства теорем 1.4.7–1.4.12 проводятся по той же схеме, что и доказательства теорем 1.1.1–1.1.6. Приведем, например, доказательство теоремы 1.4.7. Остальные теоремы доказываются аналогично.

Доказательство теоремы 1.4.7. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_1$. Рассмотрим функционал (1.1.3):

$$V(t,y) = \langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau)) \rangle$$
$$+ \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds.$$

В силу условий (1.1.5), (1.1.6) на матрицы H и $K(s)$ этот функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$, так же, как и в теореме 1.1.1, получим тождество (1.2.1):

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \left\langle C \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$- \int_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds$$
$$\equiv 2 \langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), F(t, y(t), y(t-\tau)) \rangle ,$$

где матрица $C > 0$ определена в (1.1.9).

Вначале приведем оценку на матрицу C. Так же, как в теореме 1.1.1, используя условия (1.1.10) и (1.1.11), получим оценку (1.2.2):

$$C \geq \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\min} I & 0 \\ 0 & m_{\min} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I \end{pmatrix}.$$

Теперь в тождестве (1.2.1) оценим интегральное слагаемое. Используя неравенство (1.1.17), получим неравенство (1.2.3):

$$\int_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds \leq -k \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds.$$

Наконец, оценим величину, стоящую в правой части тождества (1.2.1). В силу неравенства

$$\|u\| \le \|u + Dv\| + \|D\|\|v\|$$

из оценки (1.1.2) при $\omega_1 = 0$ получим

$$\|F(t,u,v)\| \le q_1\|u + Dv\| + q_1\|D\|\|v\| + q_2\|v\|^{1+\omega_2}.$$

Следовательно,

$$2\left\langle H(u+Dv), F(t,u,v)\right\rangle \le 2\|H\|\|u+Dv\|\|F(t,u,v)\|$$

$$\le 2\|H\|\Big[q_1\|u+Dv\|^2 + \left(q_1\|D\| + q_2\|v\|^{\omega_2}\right)\|u+Dv\|\|v\|\Big].$$

Учитывая оценку

$$2\alpha\|u\|^2 + 2\beta\|u\|\|v\| \le \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)(\|u\|^2 + \|v\|^2),$$

получим неравенство

$$2\left\langle H(u+Dv), F(t,u,v)\right\rangle$$

$$\le \left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + \left(q_1\|D\| + q_2\|v\|^{\omega_2}\right)^2}\right]\|H\|\Big(\|u+Dv\|^2 + \|v\|^2\Big).$$

Теперь воспользуемся неравенством (1.2.6):

$$\|u+Dv\|^2 + \|v\|^2 \le \left\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix}\right\rangle.$$

Имеем:

$$2\left\langle H(u+Dv), F(t,u,v)\right\rangle \le \left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + \left(q_1\|D\| + q_2\|v\|^{\omega_2}\right)^2}\right]\|H\|$$

$$\times\left\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix}\right.$$

$$\left. \times \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix}\right\rangle. \tag{1.4.12}$$

Итак, в силу полученных неравенств (1.2.2), (1.2.3) и (1.4.12) из тождества (1.2.1) имеем оценку

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\Bigg\langle\begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{\min}I & 0\\ 0 & m_{\min}I\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} I & 0\\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\Bigg\rangle$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds$$

$$\le\left[q_1+\sqrt{q_1^2+(q_1\|D\|+q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2})^2}\right]\|H\|$$

$$\times\Bigg\langle\begin{pmatrix} I & C_{12}C_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} I & 0\\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\Bigg\rangle.$$

В силу обозначения (1.2.8):

$$z(t)=C_{22}^{-1}C_{12}^{*}(y(t)+Dy(t-\tau))+y(t-\tau)$$

данная оценка перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\Bigg\langle\begin{pmatrix} l_{\min}I & 0\\ 0 & m_{\min}I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau)\\ z(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau)\\ z(t)\end{pmatrix}\Bigg\rangle$$

$$-\left[q_1+\sqrt{q_1^2+(q_1\|D\|+q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2})^2}\right]\|H\|$$

$$\times\Bigg\langle\begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau)\\ z(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau)\\ z(t)\end{pmatrix}\Bigg\rangle$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds\le 0. \qquad (1.4.13)$$

Следующая наша цель — доказать разрешимость начальной задачи (1.1.8) на всей полуоси $\{t>0\}$ при $\varphi(t)\in\bar{\mathcal{E}}_1$. Более того, мы докажем, что на любом промежутке $[(m-1)\tau,m\tau)$, $m\in\mathbb{N}$, имеет место оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(\sum_{j=0}^{m-1} (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^j \right) e^{-\bar{\varepsilon}t/2} + \|D\|^m \Phi. \quad (1.4.14)$$

Пусть $t \in [0,\tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_1$, то $\Phi < \bar{\theta}$. Используя (1.4.13), нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \left\langle \begin{pmatrix} l_{\min} I & 0 \\ 0 & m_{\min} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$- \left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + \left(q_1\|D\| + q_2\bar{\theta}^{\omega_2}\right)^2} \right] \|H\|$$

$$\times \left\langle \begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+k \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle \, ds \le 0. \quad (1.4.15)$$

Используя условие (1.4.3) на величину $\bar{\theta}$ и обозначение (1.4.5) величины $\bar{c}$, получим

$$\begin{pmatrix} l_{\min} I & 0 \\ 0 & m_{\min} I \end{pmatrix} - \left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + \left(q_1\|D\| + q_2\bar{\theta}^{\omega_2}\right)^2} \right] \|H\| \begin{pmatrix} (1+2\|N\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix}$$

$$\ge \begin{pmatrix} \bar{c}\|H\| I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ge \bar{c} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \bar{c} \left\langle H(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau)) \right\rangle$$

$$+k \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle \, ds \le 0.$$

В силу определения (1.4.4) величины $\bar{\varepsilon}$ отсюда получим неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \bar{\varepsilon} V(t,y) \le 0.$$

Из этого неравенства получим оценку

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\, e^{-\bar{\varepsilon}t},$$

откуда имеем неравенство

$$\|y(t) + Dy(t-\tau)\| \le \sqrt{\|H^{-1}\| V(t,y)} \le \sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}\; e^{-\bar{\varepsilon} t/2}. \quad (1.4.16)$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}\; e^{-\bar{\varepsilon} t/2} + \|D\|\Phi.$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0,\tau]$, и при $m = 1$ неравенство (1.4.14) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (1.1.8) установлено на отрезке $[0,(m-1)\tau]$, $m \ge 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau,(m-1)\tau)$ имеет место оценка (1.4.14), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau,$ $(m-1)\tau)$ выполнено

$$\|y(t')\| \le \sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(\sum_{j=0}^{m-2} (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^j \right) e^{-\bar{\varepsilon} t'/2}$$
$$+ \|D\|^{m-1}\Phi, \quad t' \in [(m-2)\tau,(m-1)\tau). \quad (1.4.17)$$

Поскольку по условию теоремы $\|D\| < e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2}$, то

$$\sum_{j=0}^{m-2} (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^j \le \sum_{j=0}^{\infty} (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^j = \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1}.$$

Используя это неравенство и оценку $\|D\|^{m-1} \le \|D\|$, из (1.4.17) получим неравенство

$$\|y(t')\| \le \sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi.$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \bar{\theta}$$

из определения множества $\bar{\mathcal{E}}_1$, имеем оценку

$$\|y(t')\| \le \theta, \quad t' \in [(m-2)\tau,(m-1)\tau). \quad (1.4.18)$$

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (1.4.18) из неравенства (1.4.13) получим оценку (1.4.15). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m = 1$, нетрудно отсюда получить неравенство (1.4.16). Используя это неравенство и неравенство (1.4.18) при $t' = t - \tau$, получим оценку

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}\; e^{-\bar{\varepsilon}t/2}$$

$$+\|D\| \left(\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(\sum_{j=0}^{m-2} (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^j \right) e^{-\bar{\varepsilon}(t-\tau)/2} + \|D\|^{m-1}\Phi \right)$$

$$= \sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(\sum_{j=0}^{m-1} (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^j \right) e^{-\bar{\varepsilon}t/2} + \|D\|^m \Phi.$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_1$ решение начальной задачи (1.1.8) определено на всем отрезке $[0, m\tau]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (1.4.14).

Теперь уже нетрудно получить оценку (1.4.6). Действительно, используя неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1} (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^j \leq \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1}$$

и оценку

$$\|D\|^m \leq \|D\|^{t/\tau},$$

из (1.4.14) получим

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(\sum_{j=0}^{m-1} (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2})^j \right) e^{-\bar{\varepsilon}t/2} + \|D\|^m \Phi$$

$$\leq \sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)} \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1} e^{-\bar{\varepsilon}t/2} + \|D\|^{t/\tau} \Phi,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1.4.7 доказана.

Наконец, рассмотрим случай, когда $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ в условии (1.1.2) на вектор-функцию $F(t, u, v)$. Будем предполагать, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7), гарантирующие экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы. Пусть также выполнено неравенство

$$\left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + (q_1\|D\| + q_2)^2}\right] \|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1+2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}, \qquad (1.4.19)$$

где $l_{\min} > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц (1.1.11) и (1.1.10) соответственно, N определено в (1.1.12). Данное условие совпадает с условием (1.4.3) при $\omega_2 = 0$ и гарантирует, что величина $\bar{\varepsilon}$, определенная в (1.4.4), положительна. Также заметим, что при $\omega_1 = \omega_2 = 0$ из (1.4.3) следует, что величина $\bar{\theta}$ может быть совершенно произвольной.

Из теорем 1.4.7–1.4.12 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 1.4.13. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 и q_2 удовлетворяют неравенству (1.4.19) и*

$$\|D\| < e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2},$$

где $\bar{\varepsilon}$ определено в (1.4.4). Тогда для решения начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (1.4.6).

Теорема 1.4.14. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 и q_2 удовлетворяют неравенству (1.4.19) и*

$$\|D\| = e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2},$$

где $\bar{\varepsilon}$ определено в (1.4.4). Тогда для решения начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (1.4.7).

Теорема 1.4.15. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 и q_2 удовлетворяют неравенству (1.4.19) и*

$$e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2} < \|D\| < 1,$$

где $\bar{\varepsilon}$ определено в (1.4.4). Тогда для решения начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (1.4.8).

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.4.5. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 и q_2 удовлетворяют неравенству (1.4.19) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (1.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Сформулированные утверждения также нетрудно обобщить на случай, когда $\|D\| \geq 1$, а спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

Приведем соответствующие результаты.

Теорема 1.4.16. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 и q_2 удовлетворяют неравенству (1.4.19) и*

$$\rho < e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2},$$

где ρ, $\bar{\varepsilon}$ определены в (1.1.22), (1.4.4) соответственно. Тогда для решения начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (1.4.9).

Теорема 1.4.17. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 и q_2 удовлетворяют неравенству (1.4.19) и*

$$\rho = e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2},$$

где ρ, $\bar{\varepsilon}$ определены в (1.1.22), (1.4.4) соответственно. Тогда для решения начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (1.4.10).

Теорема 1.4.18. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 и q_2 удовлетворяют неравенству (1.4.19) и*

$$e^{-\bar{\varepsilon}\tau/2} < \rho < 1,$$

где ρ, $\bar{\varepsilon}$ определены в (1.1.22), (1.4.4) соответственно. Тогда для решения начальной задачи (1.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (1.4.11).

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.4.6. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Пусть q_1 и q_2 удовлетворяют неравенству (1.4.19). Тогда нулевое решение системы (1.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства сформулированных теорем легко вытекают из доказательств теорем 1.4.7–1.4.12. Действительно, поясним это на примере теоремы 1.4.13. Пусть $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$. Поскольку величина $\bar{\theta}$ может быть совершенно произвольной, то возьмем в качестве $\bar{\theta}$ такое число, чтобы были выполнены неравенства

$$\Phi < \bar{\theta}, \quad \sqrt{\|H^{-1}\| V(0, \varphi)} \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \bar{\theta},$$

т. е. чтобы вектор-функция $\varphi(t)$ принадлежала множеству $\bar{\mathcal{E}}_1$. Все дальнейшие рассуждения дословно повторяют доказательство теоремы 1.4.7.

§ 1.5. О выборе матриц H и $K(s)$

Основной вопрос, который рассматривается в данном параграфе — вопрос о выборе матриц H и $K(s)$, удовлетворяющих условиям (1.1.5)–(1.1.7), которые гарантируют экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы из (1.1.4). Приведем один из вариантов построения матриц H и $K(s)$, удовлетворяющих данным условиям.

Вначале рассмотрим случай, когда $\|D\| < 1$.

Нетрудно видеть, что из условия (1.1.7) следует матричное неравенство $HA + A^*H < 0$. В качестве $H = H^* > 0$ возьмем решение матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -I. \tag{1.5.1}$$

Далее, в качестве $K(s)$ возьмем матрицу

$$K(s) = \mu e^{-ks} I, \quad \mu > 0, \quad k > 0. \tag{1.5.2}$$

Используя введенные матрицы, из утверждений, сформулированных в § 1.1, нетрудно получить следующий результат об экспоненциальной устойчивости.

Теорема 1.5.1. *Предположим, что $\|D\| < 1$ и существует $H = H^* > 0$ — решение матричного уравнения Ляпунова (1.5.1), причем выполнено матричное неравенство*

$$\begin{aligned}(1 - \|D\|^2)I + H(B - AD)D^* + D(B - AD)^*H \\ > 2\sqrt{\|H(B - AD)(B - AD)^*H\|}\; I.\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Тогда нулевое решение линейной системы из (1.1.4) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. В силу теоремы из [102] для экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы из (1.1.4) достаточно выполнения условий (1.1.5)–(1.1.7). В § 1.1 было установлено, что условие (1.1.7) эквивалентно двум условиям (1.1.10), (1.1.11). В силу определений (1.5.1) и (1.5.2) условия (1.1.5) и (1.1.6) выполнены, а условия (1.1.10) и (1.1.11) перепишутся в виде

$$e^{-k\tau} I - D^*D > 0,$$

$$I - \mu I - \mu^{-1}\Big(H(B - AD) - \mu D\Big)$$

$$\times\Big(e^{-k\tau}I - D^*D\Big)^{-1}\Big((B-AD)^*H - \mu D^*\Big) > 0.$$

Поскольку

$$e^{-k\tau}I - D^*D \geq (e^{-k\tau} - \|D\|^2)I,$$

то достаточно проверить, что

$$e^{-k\tau} - \|D\|^2 > 0, \tag{1.5.4}$$

$$I - \mu I - \mu^{-1}(e^{-k\tau} - \|D\|^2)^{-1}\Big(H(B-AD) - \mu D\Big)$$

$$\times\Big((B-AD)^*H - \mu D^*\Big) > 0.$$

В силу условия $\|D\| < 1$ при достаточно малом $k > 0$ первое неравенство выполнено. Второе неравенство эквивалентно следующему:

$$(e^{-k\tau} - \|D\|^2)I + H(B-AD)D^* + D(B-AD)^*H$$

$$> \mu^{-1}H(B-AD)(B-AD)^*H + \mu\left((e^{-k\tau} - \|D\|^2)I + DD^*\right).$$

Для справедливости этого неравенства достаточно показать, что имеет место следующая оценка

$$(e^{-k\tau} - \|D\|^2)I + H(B-AD)D^* + D(B-AD)^*H$$

$$> \left(\mu^{-1}\|H(B-AD)(B-AD)^*H\| + \mu e^{-k\tau}\right)I.$$

Если $B = AD$, то это неравенство будет выполнено при

$$0 < \mu < 1 - \|D\|^2 e^{k\tau}. \tag{1.5.5}$$

Если же $B \neq AD$, то, полагая

$$\mu = \sqrt{\|H(B-AD)(B-AD)^*H\|}\; e^{k\tau/2}, \tag{1.5.6}$$

получим

$$(e^{-k\tau} - \|D\|^2)I + H(B-AD)D^* + D(B-AD)^*H$$

$$> 2\sqrt{\|H(B-AD)(B-AD)^*H\|}\; e^{-k\tau/2}I.$$

При $k = 0$ это неравенство совпадает с (1.5.3). Значит при k, достаточно близком к 0, оно также будет выполнено. Таким образом, выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). В силу теоремы [102] это означает, что нулевое решение системы из (1.1.4) экспоненциально устойчиво.

Теорема доказана.

Теорема 1.5.1 дает более грубые условия по сравнению с (1.1.5)–(1.1.7). Однако, преимущество данных условий заключается в том, что они являются конструктивными, поскольку решение матричного уравнения (1.5.1) может быть найдено с гарантированной точностью (см., например, [19], [100]).

Теперь приведем оценки решений системы (1.1.1) и оценки областей притяжения нулевого решения с использованием матриц из (1.5.1), (1.5.2).

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.5.1. Введем следующие обозначения.

Пусть $k > 0$ такое, что выполнено неравенство (1.5.4), и $\mu > 0$ определено в (1.5.5), (1.5.6). Предположим, что в условии (1.1.2) на вектор-функцию $F(t, u, v)$ показатели нелинейности ω_i, $i = 1, 2$, строго положительные, и пусть $\theta > 0$ удовлетворяет неравенству (1.1.14) с матрицами

$$M = \mu(e^{-k\tau} - \|D\|^2)I > 0,$$

$$L = I - \mu I - \mu^{-1}(e^{-k\tau} - \|D\|^2)^{-1}\Big(H(B - AD) - \mu D\Big)$$
$$\times\Big((B - AD)^* H - \mu D^*\Big) > 0,$$

$$N = \mu^{-2}(e^{-k\tau} - \|D\|^2)^{-2}\Big(H(B - AD) - \mu D\Big)\Big((B - AD)^* H - \mu D^*\Big).$$

Пусть

$$\varepsilon = \min\{\widetilde{c}, k\},$$

где $\widetilde{c} > 0$ из (1.1.16) с введенными матрицами L и N.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1.5.1. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, где множество $\mathcal{E}_1$ из теоремы 1.1.1, решение начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка (1.1.18).*

Утверждение теоремы следует из теоремы 1.1.1, поскольку в силу условия (1.5.4) имеем

$$\|D\| < e^{-k\tau/2} \le e^{-\varepsilon\tau/2}.$$

Теперь приведем результаты в случае, когда спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Нетрудно видеть, что данное условие эквивалентно условиям (1.1.6), (1.1.10).

Действительно, пусть выполнены условия (1.1.6), (1.1.10). Тогда в силу $\frac{d}{ds}K(s) < 0$ имеем $K(0) > K(\tau)$. Следовательно,

$$K(0) - D^*K(0)D = K(0) - K(\tau) + M > 0.$$

Поскольку $K(0) = K^*(0) > 0$, то спектр матрицы D лежит в единичном круге.

Обратно, пусть спектр матрицы D лежит в единичном круге. Значит, по критерию Ляпунова существует единственное решение $\widetilde{H} = \widetilde{H}^* > 0$ дискретного матричного уравнения Ляпунова (1.1.21). Возьмем в качестве $K(s)$ матрицу

$$K(s) = \mu e^{-ks}\widetilde{H}, \quad \mu > 0, \quad k > 0. \tag{1.5.7}$$

Тогда условие (1.1.6) будет выполнено, а условие (1.1.10) перепишется в виде:

$$M = \mu(e^{-k\tau}\widetilde{H} - D^*\widetilde{H}D) > 0.$$

При достаточно малом $k > 0$ это условие будет также выполнено.

Используя матрицы H и $K(s)$ из (1.5.1) и (1.5.7), также, как и в случае $\|D\| < 1$, нетрудно получить результат об экспоненциальной устойчивости.

Теорема 1.5.3. *Предположим, что существуют $H = H^* > 0$ — решение матричного уравнения Ляпунова (1.5.1) и $\widetilde{H} = \widetilde{H}^* > 0$ — решение дискретного матричного уравнения Ляпунова (1.1.21), причем выполнено матричное неравенство*

$$\left(1 - 2\sqrt{\|H(B-AD)(B-AD)^*H\|}\sqrt{\|\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|}\right) I$$
$$+H(B-AD)D^*\widetilde{H} + \widetilde{H}D(B-AD)^*H > 0. \tag{1.5.8}$$

Тогда нулевое решение линейной системы из (1.1.4) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Для экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы из (1.1.4) достаточно выполнение условий (1.1.5)–(1.1.7).

Как уже отмечалось, условие (1.1.7) эквивалентно двум условиям (1.1.10), (1.1.11). В силу (1.5.1) и (1.5.7) условия (1.1.5) и (1.1.6) выполнены, а условия (1.1.10) и (1.1.11) перепишутся в виде

$$I - (1 - e^{-k\tau})\widetilde{H} > 0,$$

$$I - \mu\widetilde{H} - \mu^{-1}\Big(H(B - AD) - \mu\widetilde{H}D\Big)$$
$$\times\Big(I - (1 - e^{-k\tau})\widetilde{H}\Big)^{-1}\Big((B - AD)^*H - \mu D^*\widetilde{H}\Big) > 0.$$

Поскольку

$$I - (1 - e^{-k\tau})\widetilde{H} \geq \Big(1 - (1 - e^{-k\tau})\|\widetilde{H}\|\Big)I,$$

то достаточно проверить, что

$$\xi = 1 - (1 - e^{-k\tau})\|\widetilde{H}\| > 0, \tag{1.5.9}$$

$$I - \mu\widetilde{H} - \mu^{-1}\xi^{-1}\Big(H(B - AD) - \mu\widetilde{H}D\Big)\Big((B - AD)^*H - \mu D^*\widetilde{H}\Big) > 0.$$

При достаточно малом $k > 0$ первое неравенство выполнено. Второе неравенство эквивалентно следующему:

$$\xi I + H(B - AD)D^*\widetilde{H} + \widetilde{H}D(B - AD)^*H$$
$$> \mu^{-1}H(B - AD)(B - AD)^*H + \mu\left(\xi\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\right).$$

Для справедливости этого неравенства достаточно показать, что имеет место следующая оценка

$$\xi I + H(B - AD)D^*\widetilde{H} + \widetilde{H}D(B - AD)^*H$$
$$> \left(\mu^{-1}\|H(B - AD)(B - AD)^*H\| + \mu\|\xi\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|\right)I.$$

Если $B = AD$, то эта оценка будет выполнена при

$$0 < \mu < \frac{\xi}{\|\xi\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|}. \tag{1.5.10}$$

Если же $B \neq AD$, то, полагая

$$\mu = \sqrt{\frac{\|H(B - AD)(B - AD)^*H\|}{\|\xi\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|}}, \tag{1.5.11}$$

получим

$$\xi I + H(B-AD)D^*\widetilde{H} + \widetilde{H}D(B-AD)^*H$$

$$> 2\sqrt{\|H(B-AD)(B-AD)^*H\|}\sqrt{\|\xi\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|}\; I.$$

При $\xi = 1$, т. е. $k = 0$, это неравенство совпадает с (1.5.8). Значит при ξ, достаточно близком к 1, оно также будет выполнено. Таким образом, выполнены условия (1.1.5)–(1.1.7). Это означает, что нулевое решение системы из (1.1.4) экспоненциально устойчиво.

Теорема доказана.

Теперь приведем оценки решений системы (1.1.1) и оценки областей притяжения нулевого решения с использованием матриц из (1.5.1), (1.5.7).

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.5.3. Введем следующие обозначения.

Пусть $k > 0$ такое, что выполнено неравенство (1.5.9), и $\mu > 0$ определено в (1.5.10), (1.5.11). Предположим, что в условии (1.1.2) на вектор-функцию $F(t,u,v)$ показатели нелинейности ω_i, $i = 1, 2$, строго положительные, и пусть $\theta > 0$ удовлетворяет неравенству (1.1.14) с матрицами

$$M = \mu\xi I > 0,$$

$$L = I - \mu\widetilde{H} - \mu^{-1}\xi^{-1}\Big(H(B-AD) - \mu\widetilde{H}D\Big)\Big((B-AD)^*H - \mu D^*\widetilde{H}\Big) > 0,$$

$$N = \mu^{-2}\xi^{-2}\Big(H(B-AD) - \mu\widetilde{H}D\Big)\Big((B-AD)^*H - \mu D^*\widetilde{H}\Big).$$

Пусть

$$\varepsilon = \min\{\widetilde{c}, k\},$$

где $\widetilde{c} > 0$ из (1.1.16) с введенными матрицами L и N.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5.4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1.5.3. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$, где множество $\mathcal{E}_4$ из теоремы 1.1.4, решение начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка (1.1.23).*

Утверждение теоремы следует из теоремы 1.1.4, поскольку в силу условия (1.5.9) имеем

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\|\widetilde{H}\|}} < e^{-k\tau/2} \le e^{-\varepsilon\tau/2},$$

т. е. в силу (1.1.22) получим $\rho < e^{-\varepsilon\tau/2}$. Следовательно, все условия теоремы 1.1.4 выполнены.

Таким образом, используя матрицы H из (1.5.1) и $K(s)$ из (1.5.2) или (1.5.7), получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.1.1), указаны множества начальных вектор-функций $\varphi(t)$, при которых решение начальной задачи (1.1.8) определено при всех $t > 0$, и оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности. Очевидно, такой выбор матриц не является единственным. В связи с этим возникает следующий вопрос.

Вопрос. Каким образом следует выбирать матрицы H и $K(s)$, чтобы полученные оценки давали наибольшую скорость убывания решений системы (1.1.1) при $t \to \infty$?

В случае $n > 1$ (n — размерность системы) этот вопрос пока остается открытым. В настоящем параграфе мы дадим ответ на данный вопрос при $n = 1$ и $F(t, u, v) \equiv 0$.

Рассмотрим линейное уравнение нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}(y(t) + dy(t-\tau)) = ay(t) + by(t-\tau), \quad t > 0, \tag{1.5.12}$$

где $a, b, d \in \mathbb{R}$, и начальную задачу для этого уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + dy(t-\tau)) = ay(t) + by(t-\tau), \quad t > 0, \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{1.5.13}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$.

Как следует из первого параграфа, для того, чтобы гарантировать экспоненциальную устойчивость нулевого решения уравнения (1.5.12), достаточно найти константу $H > 0$ и функцию $K(s) \in C^1([0, \tau])$ такие, что

$$K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau], \tag{1.5.14}$$

$$M = K(\tau) - d^2K(0) > 0, \tag{1.5.15}$$

$$L = -2aH - K(0) - \frac{((b - ad)H - dK(0))^2}{K(\tau) - d^2K(0)} > 0. \tag{1.5.16}$$

Следующая лемма дает условия на величины $a, b, d \in \mathbb{R}$, эквивалентные условиям (1.5.14)–(1.5.16).

Лемма 1.5.1. *Условия (1.5.14)–(1.5.16) выполнены тогда и только тогда, когда*

$$|b| < -a, \quad |d| < 1. \tag{1.5.17}$$

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что для $H > 0$ и функции $K(s)$ выполнены условия (1.5.14)–(1.5.16). Поскольку $0 < K(\tau) < K(0)$, то из условия (1.5.15) следует, что $|d| < 1$, а поскольку $H > 0$ и $K(0) > 0$, то условие (1.5.16) дает $a < 0$.

Перепишем условие (1.5.16) в виде

$$(-2aH - K(0))(K(\tau) - d^2K(0)) - ((b - ad)H - dK(0))^2 > 0.$$

Поскольку $K(\tau) < K(0)$, то отсюда следует, что

$$(-2aH - K(0))(K(0) - d^2K(0)) - ((b - ad)H - dK(0))^2 > 0$$

или

$$(1 - d^2)(a^2 - b^2)H^2 > (K(0) - (-a + bd)H)^2.$$

Отсюда

$$(1 - d^2)(a^2 - b^2) > 0,$$

а поскольку $|d| < 1$ и $a < 0$, то получим $|b| < -a$.

Достаточность. Пусть теперь выполнены неравенства (1.5.17). Положим

$$H = 1, \quad K(s) = (-a + bd)e^{-ks}, \quad k > 0.$$

Очевидно, условие (1.5.14) выполнено, а величины M и L из (1.5.15), (1.5.16) будут иметь вид:

$$M = (-a + bd)(e^{-k\tau} - d^2),$$

$$L = -a - bd - \frac{b^2(1 - d^2)^2}{(-a + bd)(e^{-k\tau} - d^2)}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)(1 - d^2) - (a^2 - b^2d^2)(1 - e^{-k\tau})}{(-a + bd)(e^{-k\tau} - d^2)}.$$

Пусть $k > 0$ такое, что

$$e^{-k\tau} > d^2, \quad e^{-k\tau} > 1 - \frac{(a^2 - b^2)(1 - d^2)}{a^2 - b^2 d^2}.$$

Тогда получим $M > 0$, $L > 0$, т. е. условия (1.5.15), (1.5.16) также выполнены.

Лемма доказана.

Теперь приведем оценки решений уравнения (1.5.12). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5.5. *Предположим, что коэффициенты уравнения (1.5.12) удовлетворяют условиям (1.5.17), а величины H и гладкая функция $K(s)$ удовлетворяют условиям (1.5.14)–(1.5.16). Тогда для решения $y(t)$ начальной задачи (1.5.13) имеет место оценка*

$$|y(t)| \leq \sqrt{H^{-1} V(0, \varphi)} (1 - |d| e^{\varepsilon\tau/2})^{-1} e^{-\varepsilon t/2} + \Phi |d|^{t/\tau}, \tag{1.5.18}$$

где в силу (0.13)

$$V(0, \varphi) = H(\varphi(0) + d\varphi(-\tau))^2 + \int\limits_{-\tau}^{0} K(-s) \varphi^2(s) ds, \tag{1.5.19}$$

$$\Phi = \max_{t \in [-\tau, 0]} |\varphi(t)|, \tag{1.5.20}$$

$$\varepsilon = \min \left\{ -2a - H^{-1} K(0) - \frac{(b - ad - dH^{-1} K(0))^2}{H^{-1}(K(\tau) - d^2 K(0))}, \ k \right\}, \tag{1.5.21}$$

$k > 0$ — *максимальное число такое, что*

$$\frac{d}{ds} K(s) + kK(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau]. \tag{1.5.22}$$

Доказательство. Вначале покажем, что $|d| < e^{-\varepsilon\tau/2}$. Действительно, из условия (1.5.22) имеем

$$\frac{d}{ds}(K(s) e^{ks}) \leq 0,$$

откуда

$$K(\tau) e^{k\tau} \leq K(s) e^{ks} \leq K(0).$$

Значит
$$K(\tau) \le K(0)e^{-k\tau}. \tag{1.5.23}$$
Отсюда в силу условия (1.5.15) получим
$$d^2K(0) < K(\tau) \le K(0)e^{-k\tau}.$$
Поэтому, учитывая, что $\varepsilon \le k$, будем иметь
$$|d| < e^{-k\tau/2} \le e^{-\varepsilon\tau/2}.$$
Следовательно, наше утверждение вытекает из теоремы 1.1.1.

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает хорошо известный результат.

Следствие 1.5.1. *Предположим, что выполнены условия (1.5.17). Тогда нулевое решение уравнения (1.5.12) экспоненциально устойчиво.*

Неравенства (1.5.17) определяют область *абсолютной* асимптотической устойчивости, т. е. область асимптотической устойчивости при любом запаздывании $\tau > 0$.

Следующая наша цель — выбор числа H и функции $K(s)$. Эти величины мы будем выбирать так, чтобы полученная в теореме 1.5.5 оценка (1.5.18) давала наибольшую скорость убывания решения при $t \to \infty$.

В силу (1.5.18) оценка скорости убывания тем больше, чем больше величина ε из (1.5.21). Поскольку чем больше $K(\tau)$, тем больше ε, то, учитывая (1.5.23), положим
$$K(\tau) = K(0)e^{-k\tau}.$$
Отсюда, используя (1.5.22), (1.5.15) и (1.5.21), получим
$$K(s) = K(0)e^{-ks}, \quad s \in [0,\tau], \quad e^{-k\tau} > d^2,$$
$$\varepsilon = \min\left\{-2a - H^{-1}K(0) - \frac{(b - ad - dH^{-1}K(0))^2}{H^{-1}K(0)(e^{-k\tau} - d^2)},\ k\right\}.$$
Преобразуем величину ε:
$$\varepsilon = \min\left\{-2a - \frac{\left(H^{-1}K(0)e^{-k\tau} + \frac{(b-ad)^2}{H^{-1}K(0)} - 2(b-ad)d\right)}{(e^{-k\tau} - d^2)},\ k\right\}. \tag{1.5.24}$$

Вначале рассмотрим случай $b = ad$. Тогда

$$\varepsilon = \min\left\{-2a - \frac{H^{-1}K(0)}{(1-d^2e^{k\tau})},\ k\right\}.$$

Следовательно, должно выполняться неравенство

$$0 < K(0) < -2aH(1-d^2e^{k\tau}), \quad b = ad,$$

причем чем меньше $K(0)$, тем больше будет величина ε.

Пусть теперь $b \neq ad$. Из (1.5.24) заключаем, что величина ε будет максимальна, когда величина $\left(H^{-1}K(0)e^{-k\tau} + \frac{(b-ad)^2}{H^{-1}K(0)}\right)$ минимальна. Находя минимум этой величины, получим

$$K(0) = H|b-ad|e^{k\tau/2}, \quad b \neq ad.$$

Следовательно,

$$\varepsilon = \min\left\{-2a - \frac{2|b-ad|}{(e^{-k\tau/2} + d\ \mathrm{sign}(b-ad))},\ k\right\}, \tag{1.5.25}$$

где

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1,\ x > 0, \\ 0,\ x = 0, \\ -1,\ x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$f(k) = -2a - \frac{2|b-ad|}{(e^{-k\tau/2} + d\ \mathrm{sign}(b-ad))}.$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (1.5.17) имеем $f(0) > 0$. Действительно, при $|d| < 1$, если $b \geq ad$, то условие $f(0) > 0$ эквивалентно условию $b < -a$, а если $b \leq ad$, то условие $f(0) > 0$ эквивалентно условию $a < b$. Таким образом, при $|d| < 1$ условие $f(0) > 0$ эквивалентно объединению следующих условий: $ad \leq b < -a$ и $a < b \leq ad$, т. е. $a < b < -a$.

Таким образом, в силу (1.5.25) имеем $\varepsilon = \min\{f(k), k\}$, причем $f(0) > 0$ и $f(k)$ убывает. Следовательно, величина ε будет максимальна, когда $k = \widetilde{k}$, где $\widetilde{k} > 0$ — решение уравнения $f(\widetilde{k}) = \widetilde{k}$, или

$$-2a - \frac{2|b-ad|}{(e^{-\widetilde{k}\tau/2} + d\ \mathrm{sign}(b-ad))} = \widetilde{k}.$$

Тогда
$$\varepsilon = \min\{\widetilde{k}, k\}, \quad e^{-k\tau} > d^2.$$

Таким образом, максимальная оценка скорости убывания решений получается при
$$H > 0, \quad K(s) = K(0)e^{-ks}, \quad s \in [0, \tau], \tag{1.5.26}$$
где
$$e^{-k\tau} > d^2, \tag{1.5.27}$$
$$0 < H^{-1}K(0) = |b - ad|e^{k\tau/2} \quad \text{при } b \neq ad, \tag{1.5.28}$$
$$0 < H^{-1}K(0) < -2a(1 - d^2e^{k\tau}) \quad \text{при } b = ad, \tag{1.5.29}$$
причем в последнем случае чем меньше $K(0)$, тем скорость убывания будет больше.

В заключение сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1.5.6. *Предположим, что выполнены условия (1.5.17). Тогда для решения $y(t)$ начальной задачи (1.5.13) имеет место оценка (1.5.18):*
$$|y(t)| \leq \sqrt{H^{-1}V(0, \varphi)}(1 - |d|e^{\varepsilon\tau/2})^{-1}e^{-\varepsilon t/2} + \Phi|d|^{t/\tau},$$
где $V(0, \varphi)$ определено в (1.5.19) с функцией $K(s)$ из (1.5.26), Φ определено в (1.5.20),
$$\varepsilon = \min\{\widetilde{k}, k\},$$
$\widetilde{k} > 0$ — решение уравнения
$$-2a - \frac{2|b - ad|}{(e^{-\widetilde{k}\tau/2} + d \operatorname{sign}(b - ad))} = \widetilde{k}, \quad \text{если } b \neq ad,$$
и $\widetilde{k}$ определяется следующим образом
$$\widetilde{k} = -2a - \frac{H^{-1}K(0)}{(1 - d^2e^{k\tau})}, \quad \text{если } b = ad,$$
$k > 0$ из (1.5.27).

Замечание. Заметим, что величины H и $K(s)$ присутствуют в оценке (1.5.18) только в виде $H^{-1}K(s)$. Поэтому в силу (1.5.28), (1.5.29) без ограничения общности можно считать, например, что $H = 1$.

§ 1.6. Системы дифференциальных уравнений нейтрального типа с переменным запаздыванием

В данном параграфе мы рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений нейтрального типа с переменным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau(t))) = Ay(t)+By(t-\tau(t))$$
$$+F(t,y(t),y(t-\tau(t))), \quad t>0, \tag{1.6.1}$$

где A, B и D — вещественные постоянные матрицы размера $n \times n$, $F(t,u,v)$ — вещественнозначная вектор-функция, удовлетворяющая, как ранее, условиям:

$$F(t,u,v) \in C([0,\infty)\times \mathbb{R}^{2n}),$$
$$\|F(t,u^1,v)-F(t,u^2,v)\| \le L\|u^1-u^2\|, \quad L \ge 0,$$
$$\|F(t,u,v)\| \le q_1\|u\|^{1+\omega_1}+q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_1,q_2 \ge 0, \quad \omega_1,\omega_2 \ge 0, \tag{1.6.2}$$

$\tau(t)$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\tau(t) \in C^1([0,\infty)), \quad 0<\tau_1 \le \tau(t) \le \tau_2 < \infty, \quad \tau'(t) \le \alpha < 1.$$

Наша цель — указать некоторые обобщения полученных результатов на случай систем уравнений нейтрального типа с переменным запаздыванием.

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.6.1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t)+Dy(t-\tau(t))) = Ay(t)+By(t-\tau(t)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +F(t,y(t),y(t-\tau(t))), \quad t>0, \\ y(t)=\varphi(t), \quad t\in[-\tau_2,0], \quad y(+0)=\varphi(0). \end{cases} \tag{1.6.3}$$

Здесь $\varphi(t) \in C^1([-\tau_2,0])$ — вещественнозначная вектор-функция такая, что выполнено соотношение

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t)+D\varphi(t-\tau(t)))\Big|_{t=0}$$
$$= A\varphi(0)+B\varphi(-\tau(0))+F(0,\varphi(0),\varphi(-\tau(0))),$$

т. е. $\varphi(t)$ удовлетворяет системе (1.6.1) при $t = 0$. Данное условие гарантирует, что решение начальной задачи будет непрерывно дифференцируемым.

Для системы (1.6.1) мы, как и ранее, изучаем экспоненциальную устойчивость нулевого решения. Мы указываем множества начальных вектор-функций $\varphi(t)$, при которых начальная задача (1.6.3) разрешима при всех $t > 0$, и получаем оценки экспоненциального убывания решений, при этом мы не используем спектральные методы. При доказательстве результатов мы используем аналог модифицированного функционала Ляпунова–Красовского (1.1.3):

$$V(t,y) = \langle H(y(t) + Dy(t-\tau(t))), (y(t) + Dy(t-\tau(t)))\rangle$$
$$+ \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Вначале рассмотрим линейную систему

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau(t))) = Ay(t) + By(t-\tau(t)), \quad t > 0,$$

и приведем аналоги условий (1.1.5)–(1.1.7), которые в случае $\tau(t) \equiv \tau$ гарантируют экспоненциальную устойчивость нулевого решения: пусть существуют матрицы

$$H = H^* > 0, \quad K(s) \in C^1([0,\tau_2]) \tag{1.6.4}$$

такие, что

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau_2], \tag{1.6.5}$$

при этом

$$\mathbf{C} = -\begin{pmatrix} HA + A^*H + K(0) & HB + A^*HD \\ B^*H + D^*HA & D^*HB + B^*HD - (1-\alpha)K(\tau_2) \end{pmatrix} > 0. \tag{1.6.6}$$

Теперь сформулируем основные результаты настоящего параграфа. Предположим, что показатели нелинейности ω_i, $i = 1,2$ в (1.6.2) строго положительные.

Для формулировки утверждений нам потребуется ввести некоторые обозначения. Вначале перепишем условие (1.6.6). Рассуждая как в первом параграфе, нетрудно установить, что условие $\mathbf{C} > 0$ эквивалентно следующим двум условиям:

$$M = (1-\alpha)K(\tau_2) - D^*K(0)D > 0, \tag{1.6.7}$$

$$L = -HA - A^*H - K(0) - \Big(H(B-AD) - K(0)D\Big)$$
$$\times M^{-1}\Big((B-AD)^*H - D^*K(0)\Big) > 0.$$

Определим еще одну эрмитову матрицу

$$N = \Big(H(B-AD) - K(0)D\Big)M^{-2}\Big((B-AD)^*H - D^*K(0)\Big).$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau_2,0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\bar{q}_1 = q_1\|H\|\|H^{-1}\|^{1+\omega_1/2}(1+\|D\|)^{\omega_1}.$$

Пусть $\theta > 0$ такое, что

$$\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\Big]\|H\| < \min\left\{\frac{l_{\min}}{1+2\|N\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\},$$

где $l_{\min} > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц L и M соответственно. Обозначим

$$\varepsilon = \min\{\widetilde{c}, k\},$$

где

$$\widetilde{c} = \frac{l_{\min}}{\|H\|} - \Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2}\Big](1+2\|N\|),$$

$k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0, \tau_2].$$

Отметим, что в силу выбора чисел θ и k число ε строго положительно.

В дальнейшем введенные параметры θ, ε, $\bar{q}_1$ будут использоваться при описании множества для начальных данных, при которых решение начальной задачи (1.6.3) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$, и при указании равномерных оценок решения.

Вначале мы сформулируем результаты для случая, когда $\|D\| < 1$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.6.1. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.6.4)–(1.6.6) и*

$$\|D\| < e^{-\varepsilon\tau_2/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, где

$$\mathcal{E}_1 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau_2, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \|D\|e^{\varepsilon\tau_2/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta\Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (1.6.3) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \|D\|e^{\varepsilon\tau_2/2}\right)^{-1} e^{-\varepsilon t/2} + \Phi\|D\|^{t/\tau_2}.$$

Теорема 1.6.2. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.6.4)–(1.6.6) и*

$$\|D\| = e^{-\varepsilon\tau_2/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, где

$$\mathcal{E}_2 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau_2, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau_1/2}}{\varepsilon\tau_1/2}\right) + \|D\|\Phi < \theta\Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (1.6.3) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(\frac{t}{\tau_1} + 1\right) + \Phi\right) e^{-\varepsilon t/2}.$$

Теорема 1.6.3. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.6.4)–(1.6.6) и*

$$e^{-\varepsilon\tau_2/2} < \|D\| < e^{-\varepsilon(\tau_2-\tau_1)/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$, где

$$\mathcal{E}_3 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau_2, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - (\|D\|e^{\varepsilon\tau_2/2})^{-1}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta\Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (1.6.3) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times \left(1 - (\|D\|e^{\varepsilon\tau_2/2})^{-1}\right)^{-1} (\|D\|e^{\varepsilon(\tau_2-\tau_1)/2})^{t/\tau_1} + \Phi\|D\|^{t/\tau_2}.$$

Из этих теорем непосредственно вытекает

Следствие 1.6.1. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.6.4)–(1.6.6) и $\|D\| < e^{-\varepsilon(\tau_2-\tau_1)/2}$. Тогда нулевое решение системы (1.6.1) экспоненциально устойчиво.*

Теперь приведем формулировки утверждений для случая, когда спектр матрицы D принадлежит кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \sqrt{1-\alpha}\}$. Нетрудно видеть, что данное условие эквивалентно условиям (1.6.5), (1.6.7).

Действительно, пусть выполнены условия (1.6.5), (1.6.7). Тогда в силу $\frac{d}{ds}K(s) < 0$ имеем $K(0) > K(\tau_2)$. Следовательно,

$$K(0) - \frac{1}{1-\alpha}D^*K(0)D = K(0) - K(\tau_2) + \frac{1}{1-\alpha}M > 0.$$

Поскольку $K(0) = K^*(0) > 0$, то по теореме о разрешимости дискретного матричного уравнения Ляпунова спектр матрицы D лежит в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \sqrt{1-\alpha}\}$.

Пусть теперь спектр матрицы D лежит в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \sqrt{1-\alpha}\}$. Значит, существует единственное решение $\widetilde{H} = \widetilde{H}^* > 0$ дискретного матричного уравнения Ляпунова

$$\widetilde{H} - \frac{1}{1-\alpha} D^* \widetilde{H} D = I.$$

Возьмем в качестве $K(s)$ матрицу

$$K(s) = \mu e^{-ks} \widetilde{H}, \quad \mu > 0, \quad k > 0.$$

Тогда условие (1.6.5) будет выполнено, а условие (1.6.7) перепишется в виде:

$$M = \mu(1-\alpha) \left(e^{-k\tau_2} \widetilde{H} - \frac{1}{1-\alpha} D^* \widetilde{H} D \right) > 0.$$

При достаточно малом $k > 0$ это условие будет также выполнено.

По аналогии с первым параграфом введем следующее обозначение:

$$\rho = \sqrt{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{\|\widetilde{H}\|} \right)^{1/2}.$$

Как и в случае, когда $\|D\| < e^{-\varepsilon(\tau_2 - \tau_1)/2}$, при формулировке результатов возникают три случая:

$$\rho < e^{-\varepsilon\tau_2/2}, \quad \rho = e^{-\varepsilon\tau_2/2}, \quad e^{-\varepsilon\tau_2/2} < \rho < e^{-\varepsilon(\tau_2-\tau_1)/2}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1.6.4. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.6.4)–(1.6.6) и*

$$\rho < e^{-\varepsilon\tau_2/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$, где

$$\mathcal{E}_4 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau_2, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1 (V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\| \|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\| V(0,\varphi)}}{\left(1 - \frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon} (V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \rho e^{\varepsilon\tau_2/2}\right)^{-1} + \rho\Phi \right) < \theta \Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (1.6.3) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Bigg(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\big(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\big)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\left(1-\rho e^{\varepsilon\tau_2/2}\right)^{-1}e^{-\varepsilon t/2}+\Phi\rho^{t/\tau_2}\Bigg).$$

Теорема 1.6.5. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.6.4)–(1.6.6) и*

$$\rho = e^{-\varepsilon\tau_2/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$, где

$$\mathcal{E}_5 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau_2, 0]): \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\big(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\big)^{1/\omega_1}}\left(\frac{e^{-1+\varepsilon\tau_1/2}}{\varepsilon\tau_1/2}\right)+\rho\Phi\right) < \theta\Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (1.6.3) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\big(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\big)^{1/\omega_1}}\left(\frac{t}{\tau_1}+1\right)+\Phi\right)e^{-\varepsilon t/2}.$$

Теорема 1.6.6. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.6.4)–(1.6.6) и*

$$e^{-\varepsilon\tau_2/2} < \rho < e^{-\varepsilon(\tau_2-\tau_1)/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$, где

$$\mathcal{E}_6 = \Bigg\{\varphi(t) \in C^1([-\tau_2, 0]): \quad \Phi < \theta, \quad 2\bar{q}_1(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} < \varepsilon,$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-(\rho e^{\varepsilon\tau_2/2})^{-1}\right)^{-1}+\rho\Phi\right)<\theta\Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (1.6.3) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\leq\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Bigg(\frac{\sqrt{\|H^{-1}\|V(0,\varphi)}}{\left(1-\frac{2\bar{q}_1}{\varepsilon}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\left(1-(\rho e^{\varepsilon\tau_2/2})^{-1}\right)^{-1}(\rho e^{\varepsilon(\tau_2-\tau_1)/2})^{t/\tau_1}+\Phi\rho^{t/\tau_2}\Bigg).$$

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.6.2. *Предположим, что существуют матрицы H и $K(s)$ такие, что выполнены условия (1.6.4)–(1.6.6) и $\rho<e^{-\varepsilon(\tau_2-\tau_1)/2}$. Тогда нулевое решение системы (1.6.1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства теорем 1.6.1–1.6.6 проводятся по той же схеме, что и доказательства теорем 1.1.1–1.1.6.

Отметим, что в случае $\omega_1\omega_2=0$ также можно получить некоторые результаты об экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.6.1).

Глава 2. Системы дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах

§ 2.1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Во второй главе мы рассмотрим системы нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа следующего вида

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau)$$
$$+F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0. \tag{2.1.1}$$

Здесь $\tau > 0$ — постоянный параметр запаздывания, $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с вещественнозначными непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad T > \tau,$$

D — вещественная постоянная матрица, $F(t, u, v)$ — вещественнозначная вектор-функция, удовлетворяющая, как ранее, следующим условиям:

$$F(t, u, v) \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^{2n}),$$
$$\|F(t, u^1, v) - F(t, u^2, v)\| \le L\|u^1 - u^2\|,$$
$$\|F(t, u, v)\| \le q_1\|u\|^{1+\omega_1} + q_2\|v\|^{1+\omega_2}, \quad q_1, q_2 \ge 0, \quad \omega_1, \omega_2 \ge 0. \tag{2.1.2}$$

Основная цель — изучение экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.1.1) в случае, когда D — ненулевая матрица, и ее спектр принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Мы будем предполагать, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия вида (0.29)–(0.31), гарантирующие экспоненциальную устойчивость решений линейной системы уравнений нейтрального типа

$$\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0. \tag{2.1.3}$$

При этих условиях мы находим область допустимых начальных данных, при которых решение системы уравнений (2.1.1) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$ и стремится к нулю на бесконечности, а также устанавливаем оценки решений системы, характеризующие экспоненциальное убывание при $t \to \infty$.

Как отмечалось во введении, существуют различные методы исследования экспоненциальной устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами в линейных членах. Однако при решении конкретных задач, как правило, возникают большие трудности при проверке условий устойчивости, а также при описании областей притяжения и при получении асимптотических оценок решений на бесконечности. Отметим, что аналоги оценок Крейна для решений систем линейных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами впервые были получены в работах [26], [27], [31]. В этих работах авторы использовали некоторые модифицированные функционалы Ляпунова–Красовского. В частности, при изучении экспоненциальной устойчивости решений систем линейных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в [31] был предложен модифицированный функционал Ляпунова–Красовского следующего вида

$$V(t,y) = \langle H(t)(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds. \tag{2.1.4}$$

С использованием этого функционала были получены оценки решений систем линейных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами вида (2.1.3), являющиеся аналогами неравенства Крейна. Приведем один из результатов работы [31].

Теорема (Г.В. Демиденко, И.И. Матвеева). *Предположим, что существуют матрицы*

$$H(t) = H^*(t) \in C^1([0,T]) \quad \text{и} \quad K(s) = K^*(s) \in C^1([0,\tau]) \tag{2.1.5}$$

такие, что

$$H(0) = H(T) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{2.1.6}$$

при этом

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11}(t) & \mathbf{C}_{12}(t) \\ \mathbf{C}_{12}^*(t) & \mathbf{C}_{22}(t) \end{pmatrix} > 0, \quad t \in [0,T], \tag{2.1.7}$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0), \\ \\ \mathbf{C}_{12}(t) = -H(t)B(t) - A^*(t)H(t)D, \\ \\ \mathbf{C}_{22}(t) = K(\tau) - D^*H(t)B(t) - B^*(t)H(t)D. \end{cases}$$

Тогда нулевое решение системы линейных дифференциальных уравнений (2.1.3) экспоненциально устойчиво.

Отметим, что экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы уравнений (2.1.3) в теореме доказывается без использования результатов из теории Флоке.

В этой главе при изучении экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы нелинейных уравнений нейтрального типа (2.1.1) мы будем рассматривать начальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \\ \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad y(+0) = \varphi(0), \end{cases} \tag{2.1.8}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — вещественнозначная вектор-функция. Будем предполагать, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). При доказательстве теорем о разрешимости "в целом" и при получении оценок решений мы также будем использовать модифицированный функционал Ляпунова–Красовского (2.1.4). Из доказанных теорем будет вытекать экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (2.1.1).

Перейдем к изложению основных результатов настоящей главы.

Вначале рассмотрим случай, когда показатели нелинейности ω_i, $i = 1, 2$ в (2.1.2) строго положительные.

Для формулировки утверждений нам потребуется ввести некоторые обозначения.

Вначале по аналогии с главой 1 перепишем условие (2.1.7). Для этого представим матрицу $\mathbf{C}(t)$ в виде

$$\mathbf{C}(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^* & I \end{pmatrix} C(t) \begin{pmatrix} I & D \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где

$$C(t) = \begin{pmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) \\ C_{12}^*(t) & C_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.1.9}$$

$$\begin{cases} C_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0), \\[2ex] C_{12}(t) = -H(t)(B(t) - A(t)D) + K(0)D, \\[2ex] C_{22} = K(\tau) - D^*K(0)D. \end{cases}$$

Поэтому неравенство (2.1.7) эквивалентно неравенству $C(t) > 0$. Отсюда, в частности, вытекает

$$C_{22} = K(\tau) - D^*K(0)D > 0.$$

Тогда матрицу $C(t)$ можно представить в виде

$$C(t) = \begin{pmatrix} I & C_{12}(t)C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}(t) - C_{12}(t)C_{22}^{-1}C_{12}^*(t) & 0 \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^*(t) & I \end{pmatrix}.$$

Следовательно, условие (2.1.7) эквивалентно следующим неравенствам:

$$M = C_{22} > 0, \quad L(t) = C_{11}(t) - C_{12}(t)C_{22}^{-1}C_{12}^*(t) > 0$$

или

$$M = K(\tau) - D^*K(0)D > 0, \tag{2.1.10}$$

$$\begin{aligned} L(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) \\ -\Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - K(0)D\Big)M^{-1} \\ \times\Big((B(t) - A(t)D)^*H(t) - D^*K(0)\Big) > 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Определим еще одну эрмитову матрицу

$$\begin{aligned} N(t) = \Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - K(0)D\Big)M^{-2} \\ \times\Big((B(t) - A(t)D)^*H(t) - D^*K(0)\Big). \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|,$$

$$\bar{q}_1 = q_1(1 + \|D\|)^{\omega_1} \max_{t\in[0,T]} \left\{ \|H(t)\| \|H^{-1}(t)\|^{1+\omega_1/2} \right\}, \tag{2.1.13}$$

$$h_{\min} = \min_{t\in[0,T]} \|H^{-1}(t)\|^{-1}.$$

Пусть $\theta > 0$ такое, что

$$\left[q_1\|D\|(1 + \|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2} \right] \|H(t)\|$$

$$< \min \left\{ \frac{l_{\min}(t)}{1 + 2\|N(t)\|}, \frac{m_{\min}}{2} \right\}, \tag{2.1.14}$$

где $l_{\min}(t) > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц $L(t)$ и M соответственно. Обозначим

$$\varepsilon(t) = \min\{\widetilde{c}(t), k\}, \tag{2.1.15}$$

где

$$\widetilde{c}(t) = \frac{l_{\min}(t)}{\|H(t)\|} - \left[q_1\|D\|(1 + \|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\theta^{\omega_2} \right] (1 + 2\|N(t)\|), \tag{2.1.16}$$

$k > 0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0, \tau]. \tag{2.1.17}$$

Отметим, что в силу выбора чисел θ и k функция $\varepsilon(t)$ строго положительна. Обозначим

$$r^{-\omega_1/2} = \bar{q}_1\omega_1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2} \int_0^T \varepsilon(\xi)d\xi \right) \right]^{-1}$$

$$\times \int_0^T \exp\left(-\frac{\omega_1}{2} \int_0^\eta \varepsilon(\xi)d\xi \right) d\eta, \tag{2.1.18}$$

$$\varepsilon_{\max} = \max_{t\in[0,T]} \varepsilon(t), \quad \varepsilon_{\min} = \min_{t\in[0,T]} \varepsilon(t).$$

В дальнейшем введенные величины будут использоваться при описании множества для начальных данных, при которых решение начальной задачи (2.1.8) существует на всей полуоси $\{t > 0\}$, и при указании равномерных оценок решения.

Вначале мы сформулируем результаты для случая, когда $\|D\| < 1$. Как и в случае постоянных матриц $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$ результаты существенным образом зависят от матрицы D.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1.1. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7) и*

$$\|D\| < e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, где

$$\mathcal{E}_1 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau,0]) : \quad \Phi < \theta, \quad V(0,\varphi) < r,$$

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\Big(1 - \big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{1/\omega_1}} \Big(1 - \|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\Big)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta \Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\Big(1 - \big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{1/\omega_1}}$$

$$\times \Big(1 - \|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\Big)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right) + \Phi\|D\|^{t/\tau}. \qquad (2.1.19)$$

Теорема 2.1.2. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7), и существует точка $t_* \in [0,T]$ такая, что*

$$\|D\| = e^{-\varepsilon(t_*)\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, где

$$\mathcal{E}_2 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau,0]) : \quad \Phi < \theta, \quad V(0,\varphi) < r,$$

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{e^{-1+\gamma_{\min}\tau/2}}{\gamma_{\min}\tau/2}\right)+\|D\|\Phi<\theta\Bigg\},$$

$$\gamma(t)=\min\left\{\varepsilon(t),\frac{2}{\tau}\ln\frac{1}{\|D\|}\right\},\quad \gamma_{\min}=\min_{t\in[0,T]}\gamma(t), \tag{2.1.20}$$

решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\le\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\left(\frac{t}{\tau}+1\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\gamma(\xi)d\xi\right)+\Phi\|D\|^{t/\tau}. \tag{2.1.21}$$

Теорема 2.1.3. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7) и*

$$e^{-\varepsilon_{\min}\tau/2}<\|D\|<1.$$

Тогда при $\varphi(t)\in\mathcal{E}_3$, где

$$\mathcal{E}_3=\Bigg\{\varphi(t)\in C^1([-\tau,0]):\quad \Phi<\theta,\quad V(0,\varphi)<r,$$

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\|D\|\Phi<\theta\Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\le\left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\Phi\right)\|D\|^{t/\tau}. \tag{2.1.22}$$

Из этих теорем непосредственно вытекает

Следствие 2.1.1. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (2.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства теорем 2.1.1–2.1.3 приведены во втором параграфе.

Приведем теперь формулировки утверждений для случая, когда $\|D\| \geq 1$, и спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Для этого, как в главе 1, мы будем использовать решение $\widetilde{H} = \widetilde{H}^* > 0$ дискретного матричного уравнения Ляпунова (1.1.21). По аналогии с предыдущим при формулировке результатов возникают три случая:

$$\rho < e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}, \qquad \exists\, t_* \in [0,T] :\ \rho = e^{-\varepsilon(t_*)\tau/2}, \qquad e^{-\varepsilon_{\min}\tau/2} < \rho < 1,$$

где ρ определено в (1.1.22):

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{1}{\|\widetilde{H}\|}}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1.4. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7) и*

$$\rho < e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$, где

$$\mathcal{E}_4 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \theta, \quad V(0,\varphi) < r,$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1 - \rho e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\right)^{-1} + \rho\Phi \right) < \theta \Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|} \Bigg(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times \left(1-\rho e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right)+\Phi\rho^{t/\tau}\Bigg). \qquad (2.1.23)$$

Теорема 2.1.5. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7), и существует точка $t_* \in [0,T]$ такая, что*

$$\rho = e^{-\varepsilon(t_*)\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t)\in\mathcal{E}_5$, где

$$\mathcal{E}_5 = \Bigg\{\varphi(t)\in C^1([-\tau,0]): \quad \Phi<\theta, \quad V(0,\varphi)<r,$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{e^{-1+\widetilde{\gamma}_{\min}\tau/2}}{\widetilde{\gamma}_{\min}\tau/2}\right)+\rho\Phi\right)<\theta\Bigg\},$$

$$\widetilde{\gamma}(t)=\min\left\{\varepsilon(t),\frac{2}{\tau}\ln\frac{1}{\rho}\right\}, \quad \widetilde{\gamma}_{\min}=\min_{t\in[0,T]}\widetilde{\gamma}(t), \qquad (2.1.24)$$

решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\le\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Bigg(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\left(\frac{t}{\tau}+1\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\widetilde{\gamma}(\xi)d\xi\right)+\Phi\rho^{t/\tau}\Bigg). \qquad (2.1.25)$$

Теорема 2.1.6. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7) и*

$$e^{-\varepsilon_{\min}\tau/2}<\rho<1.$$

Тогда при $\varphi(t)\in\mathcal{E}_6$, где

$$\mathcal{E}_6 = \Bigg\{\varphi(t)\in C^1([-\tau,0]): \quad \Phi<\theta, \quad V(0,\varphi)<r,$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(1-(\rho e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\rho\Phi\right)<\theta\Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\leq\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\right.$$

$$\left.\times\left(1-(\rho e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}+\Phi\right)\rho^{t/\tau}. \qquad (2.1.26)$$

Из приведенных результатов непосредственно вытекает

Следствие 2.1.2. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Тогда нулевое решение системы (2.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства данных утверждений приведены в третьем параграфе.

Таким образом, достаточными условиями экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.1.1) являются условия существования матриц $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющих (2.1.5)–(2.1.7). В пятом параграфе рассматривается вопрос о том, как можно построить данные матрицы.

В четвертом параграфе рассматривается случай, когда хотя бы один из показателей нелинейности в (2.1.2) равен нулю, т. е. $\omega_1\omega_2=0$. При этом, если $\omega_1=0$ (или $\omega_2=0$), то на коэффициент q_1 из (2.1.2) (соответственно q_2) возникают условия вида $q_1\leq q^*$ (или $q_2\leq q^*$). Во всех случаях доказаны теоремы существования на всей полуоси $\{t>0\}$ и получены оценки решений системы (2.1.1).

§ 2.2. Доказательства теорем 2.1.1–2.1.3

Доказательство теоремы 2.1.1.

Вначале заметим, что из условий (2.1.5)–(2.1.7) следует положительная определенность матрицы $H(t)$ на всем отрезке $[0,T]$. Действительно, поскольку матрица $\mathbf{C}(t)$ является положительно определенной, то, в частности, отсюда следует, что $\mathbf{C}_{11}(t) > 0$. Это означает, что выполнено неравенство

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) = -K(0) - \mathbf{C}_{11}(t) < 0.$$

Принимая во внимание условия $H(0) = H(T) > 0$, $H(t) = H^*(t)$ и используя теорему [23] о разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова (см. краевую задачу (0.22) во введении), получим, что $H(t) = H^*(t) > 0$ при всех $t \in [0,T]$. Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t > 0\}$, сохраняя то же обозначение.

Пусть теперь $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$. Рассмотрим функционал (2.1.4):

$$V(t,y) = \langle H(t)(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\rangle$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Нетрудно видеть, что этот функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$, получим

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv \left\langle \frac{d}{dt}H(t)(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\right\rangle$$

$$+ \left\langle H(t)\frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau)), (y(t) + Dy(t-\tau))\right\rangle$$

$$+ \left\langle H(t)(y(t) + Dy(t-\tau)), \frac{d}{dt}(y(t) + Dy(t-\tau))\right\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Поскольку $y(t)$ — решение системы (2.1.1), то полученное тождество переписывается в виде

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv \left\langle \frac{d}{dt}H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\right\rangle$$

$$\Big\langle H(t)\big[A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+F(t,y(t),y(t-\tau))\big],(y(t)+Dy(t-\tau))\Big\rangle$$

$$+\Big\langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),\big[A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+F(t,y(t),y(t-\tau))\big]\Big\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t),y(t)\rangle-\langle K(\tau)y(t-\tau),y(t-\tau)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Преобразуем данное тождество. Имеем:

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)+K(0)\right)y(t),y(t)\right\rangle$$

$$+\Big\langle (B^*(t)H(t)+D^*H(t)A(t))y(t),y(t-\tau)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle (H(t)B(t)+A^*(t)H(t)D)y(t-\tau),y(t)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle (D^*H(t)B(t)+B^*(t)H(t)D-K(\tau))y(t-\tau),y(t-\tau)\Big\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+2\left\langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),F(t,y(t),y(t-\tau))\right\rangle$$

$$\equiv \left\langle \mathbf{C}(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+2\left\langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),F(t,y(t),y(t-\tau))\right\rangle,$$

где матрица $\mathbf{C}(t)$ определена в (2.1.7). В дальнейшем нам будет удобнее переписать полученное тождество в эквивалентном виде. Поскольку

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix},$$

то

$$\left\langle \mathbf{C}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \mathbf{C}(t) \begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & -D \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle C(t) \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где матрица $C(t)$ определена в (2.1.9). Отсюда нетрудно получить

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \left\langle C(t) \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$- \int_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds$$

$$\equiv 2 \left\langle H(t)(y(t) + Dy(t-\tau)), F(t, y(t), y(t-\tau)) \right\rangle. \tag{2.2.1}$$

Вначале приведем оценку на матрицу $C(t)$. Используя обозначения (2.1.9)–(2.1.11), имеем

$$C(t) = \begin{pmatrix} I & C_{12}(t)C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(t) & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^*(t) & I \end{pmatrix}.$$

Как отмечалось ранее, условие (2.1.7) равносильно двум условиям (2.1.10), (2.1.11). В силу условий (2.1.10), (2.1.11) матрицы $L(t)$ и M эрмитовы и положительно определенные. Значит минимальные собственные значения $l_{\min}(t)$ и $m_{\min}$ данных матриц положительны. Отсюда получим неравенство

$$C(t) \geq \begin{pmatrix} I & C_{12}(t)C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\min}(t)I & 0 \\ 0 & m_{\min}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^*(t) & I \end{pmatrix}. \tag{2.2.2}$$

Теперь в тождестве (2.2.1) оценим интегральное слагаемое. Используя неравенство (2.1.17), получим

$$\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds \le -k \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds. \quad (2.2.3)$$

Наконец, оценим величину, стоящую в правой части тождества (2.2.1). Проводя те же самые рассуждения, что и в теореме 1.1.1, нетрудно получить аналог неравенства (1.2.4):

$$2\langle H(t)(u+Dv), F(t,u,v)\rangle \le 2q_1\|H(t)\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|u+Dv\|^{2+\omega_1}$$
$$+\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|v\|^{\omega_1} + q_2\|v\|^{\omega_2}\Big]\|H(t)\|\Big[\|u+Dv\|^2+\|v\|^2\Big]. \quad (2.2.4)$$

Положим в данном неравенстве $u = y(t)$, $v = y(t-\tau)$ и оценим первое слагаемое. В силу положительной определенности функционала $V(t,y)$ имеем оценку

$$\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^2 \le \|H^{-1}(t)\|V(t,y).$$

Значит, используя обозначение (2.1.13), получим

$$\begin{aligned}
&2q_1\|H(t)\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t)+Dy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}\\
&\le 2q_1(1+\|D\|)^{\omega_1}\|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|^{1+\omega_1/2}V^{1+\omega_1/2}(t,y)\\
&\le 2q_1(1+\|D\|)^{\omega_1}\max_{t\in[0,T]}\left\{\|H(t)\|\|H^{-1}(t)\|^{1+\omega_1/2}\right\}V^{1+\omega_1/2}(t,y)\\
&= 2\bar{q}_1V^{1+\omega_1/2}(t,y). \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

Теперь оценим второе слагаемое в (2.2.4). Поскольку

$$\|u+Dv\|^2+\|v\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u+Dv\\ v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+Dv\\ v\end{pmatrix}\right\rangle$$

и имеет место неравенство

$$\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} I & C_{12}(t)C_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I+2C_{12}(t)C_{22}^{-2}C_{12}^*(t) & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0\\ C_{22}^{-1}C_{12}^*(t) & I\end{pmatrix},$$

то

$$\|u+Dv\|^2+\|v\|^2 \le \left\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}(t)C_{22}^{-1}\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I+2C_{12}(t)C_{22}^{-2}C_{12}^*(t) & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}\right.$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*}(t) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix} \Big\rangle.$$

Принимая во внимание обозначение (2.1.12) матрицы $N(t)$, отсюда нетрудно получить оценку

$$\|u+Dv\|^2 + \|v\|^2 \le \Big\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}(t)C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+2\|N(t)\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*}(t) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix} \Big\rangle. \qquad (2.2.6)$$

Полагая в неравенстве (2.2.4) $u = y(t)$, $v = y(t-\tau)$ и используя (2.2.5), (2.2.6), получим неравенство

$$2\left\langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)), F(t,y(t),y(t-\tau))\right\rangle \le 2\bar{q}_1 V^{1+\omega_1/2}(t,y)$$

$$+\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{\omega_1} + q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big]\|H(t)\|$$

$$\times \Big\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}(t)C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+2\|N(t)\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*}(t) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \Big\rangle. \qquad (2.2.7)$$

Итак, в силу полученных неравенств (2.2.2), (2.2.3) и (2.2.7) из тождества (2.2.1) имеем оценку

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \Big\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}(t)C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\min}(t)I & 0 \\ 0 & m_{\min}I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*}(t) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \Big\rangle$$

$$+k\int_{t-\tau}^{t} \left\langle K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds \le 2\bar{q}_1 V^{1+\omega_1/2}(t,y)$$

$$+\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{\omega_1} + q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big]\|H(t)\|$$

$$\times \Big\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}(t)C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+2\|N(t)\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix}$$

$$\times \left(\begin{matrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*}(t) & I \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{matrix} \right) \Big\rangle.$$

Преобразуем полученную оценку. Поскольку

$$\left(\begin{matrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*}(t) & I \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{matrix} \right)$$

$$= \left(\begin{matrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ C_{22}^{-1}C_{12}^{*}(t)(y(t) + Dy(t-\tau)) + y(t-\tau) \end{matrix} \right),$$

то, обозначая

$$z(t) = C_{22}^{-1}C_{12}^{*}(t)(y(t) + Dy(t-\tau)) + y(t-\tau), \tag{2.2.8}$$

получим неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \Big\langle \left(\begin{matrix} l_{\min}(t)I & 0 \\ 0 & m_{\min}I \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{matrix} \right) \Big\rangle$$

$$- \Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{\omega_1} + q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2} \Big] \|H(t)\|$$

$$\times \Big\langle \left(\begin{matrix} (1+2\|N(t)\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} y(t) + Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{matrix} \right) \Big\rangle$$

$$+ k \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle \, ds \le 2\bar{q}_1 V^{1+\omega_1/2}(t,y). \tag{2.2.9}$$

Следующая наша цель — доказать разрешимость начальной задачи (2.1.8) на всей полуоси $\{t > 0\}$ при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$. Более того, мы докажем, что на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка

$$\|y(t)\| \le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\Big(1 - \big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{1/\omega_1}}$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \|D\|^j \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^{t-j\tau} \varepsilon(\xi)d\xi \right) + \|D\|^m \Phi. \tag{2.2.10}$$

Пусть $t \in [0,\tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, то $\Phi < \theta$. Используя (2.2.9), нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\left\langle \begin{pmatrix} l_{\min}(t)I & 0 \\ 0 & m_{\min}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$-\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1}+q_2\theta^{\omega_2}\Big]\|H(t)\|$$

$$\times\left\langle \begin{pmatrix} (1+2\|N(t)\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\, ds \le 2\bar{q}_1 V^{1+\omega_1/2}(t,y). \qquad (2.2.11)$$

Используя условие (2.1.14) на величину θ и обозначение (2.1.16) величины $\widetilde{c}(t)$, получим

$$\begin{pmatrix} l_{\min}(t)I & 0 \\ 0 & m_{\min}I \end{pmatrix} - \Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1}+q_2\theta^{\omega_2}\Big]\|H(t)\|$$

$$\times\begin{pmatrix} (1+2\|N(t)\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} \widetilde{c}(t)\|H(t)\|I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ge \widetilde{c}(t)\begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\widetilde{c}(t)\,\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\rangle$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\, ds \le 2\bar{q}_1 V^{1+\omega_1/2}(t,y).$$

В силу определения (2.1.15) величины $\varepsilon(t)$ отсюда получим неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\varepsilon(t)V(t,y) \le 2\bar{q}_1 V^{1+\omega_1/2}(t,y). \qquad (2.2.12)$$

Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, то $V(0,\varphi) < r$, r определено в (2.1.18). Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t,y) \le \frac{V(0,\varphi)}{\Big(1-\big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{2/\omega_1}} \exp\left(-\int\limits_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right),$$

откуда имеем неравенство

$$\|y(t)+Dy(t-\tau)\| \le \sqrt{\|H^{-1}(t)\|V(t,y)}$$

$$\le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right). \qquad (2.2.13)$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \le \|y(t)+Dy(t-\tau)\| + \|D\|\|y(t-\tau)\|$$

$$\le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right)+\|D\|\Phi.$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0,\tau]$, и при $m=1$ неравенство (2.2.10) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (2.1.8) установлено на отрезке $[0,(m-1)\tau]$, $m\ge 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau,(m-1)\tau)$ имеет место оценка (2.2.10), т. е. при $t'\in[(m-2)\tau,$ $(m-1)\tau)$ выполнено

$$\|y(t')\| \le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\sum_{j=0}^{m-2}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$+\|D\|^{m-1}\Phi, \quad t'\in[(m-2)\tau,(m-1)\tau). \qquad (2.2.14)$$

Поскольку по условию теоремы $\|D\|<e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}$, то

$$\sum_{j=0}^{m-2}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{m-2}\|D\|^j\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{t'-j\tau}^{t'}\varepsilon(\xi)d\xi\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'}\varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m-2} \|D\|^j \exp\left(\frac{1}{2} \int\limits_{t'-j\tau}^{t'} \varepsilon_{\max} d\xi\right) = \sum_{j=0}^{m-2} \big(\|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\big)^j$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \big(\|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\big)^j = \Big(1 - \|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\Big)^{-1}.$$

Используя это неравенство и оценку $\|D\|^{m-1} \leq \|D\|$, из (2.2.14) получим неравенство

$$\|y(t')\| \leq \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\Big(1 - \big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{1/\omega_1}} \Big(1 - \|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\Big)^{-1} + \|D\|\Phi.$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\Big(1 - \big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{1/\omega_1}} \Big(1 - \|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\Big)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta$$

из определения множества $\mathcal{E}_1$, имеем оценку

$$\|y(t')\| \leq \theta, \quad t' \in [(m-2)\tau, (m-1)\tau). \tag{2.2.15}$$

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (2.2.15) из неравенства (2.2.9) получим оценку (2.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m = 1$, нетрудно отсюда получить неравенство (2.2.13). Используя это неравенство и неравенство (2.2.14) при $t' = t - \tau$, получим оценку

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\Big(1 - \big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{1/\omega_1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$+\|D\|\left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\Big(1 - \big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{1/\omega_1}}\right.$$

$$\left.\times \sum_{j=0}^{m-2} \|D\|^j \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^{t-(j+1)\tau} \varepsilon(\xi)d\xi\right) + \|D\|^{m-1}\Phi\right)$$

$$= \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1} V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times \sum_{j=0}^{m-1} \|D\|^j \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^{t-j\tau} \varepsilon(\xi) d\xi \right) + \|D\|^m \Phi.$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$ решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0, m\tau]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (2.2.10).

Теперь уже нетрудно получить оценку (2.1.19). Действительно, используя неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|D\|^j \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^{t-j\tau} \varepsilon(\xi) d\xi \right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|D\|^j \exp\left(\frac{1}{2} \int\limits_{t-j\tau}^{t} \varepsilon(\xi) d\xi \right) \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^t \varepsilon(\xi) d\xi \right)$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{m-1} \left(\|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2} \right)^j \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^t \varepsilon(\xi) d\xi \right)$$

$$\leq \left(1 - \|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2} \right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^t \varepsilon(\xi) d\xi \right)$$

и оценку

$$\|D\|^m \leq \|D\|^{t/\tau},$$

из (2.2.10) получим

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1} V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times \left(1 - \|D\| e^{\varepsilon_{\max}\tau/2} \right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^t \varepsilon(\xi) d\xi \right) + \Phi \|D\|^{t/\tau},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.1.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.1.2.

Доказательство данной теоремы проведем по аналогии с доказательством теоремы 2.1.1. Проводя те же рассуждения, что и в теореме 2.1.1, из условий (2.1.5)–(2.1.7) имеем $H(t) = H^*(t) > 0$ при всех $t \in [0, T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t > 0\}$, сохраняя то же обозначение.

Пусть теперь $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$. Рассмотрим функционал (2.1.4). Данный функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 2.1.1, получим неравенство (2.2.9).

Покажем, что решение начальной задачи (2.1.8) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$ будет определено на всей полуоси $\{t > 0\}$, при этом на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка (2.2.10).

Пусть $t \in [0, \tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, то $\Phi < \theta$. Используя (2.2.9), нетрудно получить неравенство (2.2.11). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.1.1, из этого неравенства получим оценку (2.2.12). Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, то $V(0, \varphi) < r$, r определено в (2.1.18). Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t, y) \leq \frac{V(0, \varphi)}{\left(1 - \left(r^{-1} V(0, \varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}} \exp\left(-\int\limits_0^t \varepsilon(\xi) d\xi\right),$$

откуда имеем неравенство (2.2.13). Следовательно,

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0, \varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1} V(0, \varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varepsilon(\xi) d\xi\right) + \|D\|\Phi.$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0, \tau]$, и при $m = 1$ неравенство (2.2.10) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (2.1.8) установлено на отрезке $[0, (m-1)\tau]$, $m \geq 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau, (m-1)\tau)$ имеет место оценка (2.2.10), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau,$

$(m-1)\tau)$ выполнено (2.2.14). Используя обозначения (2.1.20) величин $\gamma(t)$ и $\gamma_{\min}$, получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-2} \|D\|^j \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau} \varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m-2} \exp\left(-\frac{1}{\tau}\int\limits_{t'-j\tau}^{t'} \ln\frac{1}{\|D\|}d\xi\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau} \varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m-2} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'} \gamma(\xi)d\xi\right) \leq \sum_{j=0}^{m-2} e^{-\gamma_{\min}t'/2} = (m-1)e^{-\gamma_{\min}t'/2}$$

$$\leq \left(\frac{t'}{\tau}+1\right)e^{-\gamma_{\min}t'/2} \leq \max_{\xi\geq 0}\left\{\left(\frac{\xi}{\tau}+1\right)e^{-\gamma_{\min}\xi/2}\right\} \leq \left(\frac{e^{-1+\gamma_{\min}\tau/2}}{\gamma_{\min}\tau/2}\right).$$

Используя это неравенство и оценку $\|D\|^{m-1} \leq \|D\|$, из (2.2.14) получим неравенство

$$\|y(t')\| \leq \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{e^{-1+\gamma_{\min}\tau/2}}{\gamma_{\min}\tau/2}\right) + \|D\|\Phi.$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{e^{-1+\gamma_{\min}\tau/2}}{\gamma_{\min}\tau/2}\right) + \|D\|\Phi < \theta$$

из определения множества $\mathcal{E}_2$, имеем оценку (2.2.15).

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (2.2.15) из неравенства (2.2.9) получим оценку (2.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m=1$, нетрудно отсюда получить неравенство (2.2.13). Используя это неравенство и неравенство (2.2.14) при $t'=t-\tau$, получим оценку

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t} \varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$+\|D\|\left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^{m-2}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-(j+1)\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)+\|D\|^{m-1}\Phi\right)$$

$$=\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\sum_{j=0}^{m-1}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)+\|D\|^{m}\Phi.$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что при $\varphi(t)\in\mathcal{E}_2$ решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0,m\tau]$ для любого $m\in\mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (2.2.10).

Теперь уже нетрудно получить оценку (2.1.21). Действительно, используя неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{m-1}\exp\left(-\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-j\tau}^{t}\ln\frac{1}{\|D\|}d\xi\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$\le\sum_{j=0}^{m-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t}\gamma(\xi)d\xi\right)=m\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t}\gamma(\xi)d\xi\right)$$

$$\le\left(\frac{t}{\tau}+1\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t}\gamma(\xi)d\xi\right)$$

и оценку

$$\|D\|^m\le\|D\|^{t/\tau},$$

из (2.2.10) получим требуемую оценку.

Теорема 2.1.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.1.3.

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1.1. Подробно остановимся лишь на отличительных моментах. В теореме 2.1.1 было показано, что из условий (2.1.5)–(2.1.7) следует, что $H(t) = H^*(t) > 0$ при всех $t \in [0, T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t > 0\}$, сохраняя то же обозначение.

Пусть теперь $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$. Рассмотрим функционал (2.1.4). Данный функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 2.1.1, получим неравенство (2.2.9).

Покажем, что решение начальной задачи (2.1.8) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ будет определено на всей полуоси $\{t > 0\}$, при этом на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка (2.2.10).

Пусть $t \in [0, \tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$, то $\Phi < \theta$. Используя (2.2.9), нетрудно получить неравенство (2.2.11). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.1.1, из этого неравенства получим оценку (2.2.12). Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$, то $V(0, \varphi) < r$, где r определено в (2.1.18). Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t, y) \leq \frac{V(0, \varphi)}{\left(1 - \left(r^{-1} V(0, \varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}} \exp\left(-\int_0^t \varepsilon(\xi) d\xi\right),$$

откуда имеем неравенство (2.2.13). Следовательно,

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0, \varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1} V(0, \varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \varepsilon(\xi) d\xi\right) + \|D\|\Phi.$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0, \tau]$, и при $m = 1$ неравенство (2.2.10) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (2.1.8) установлено на отрезке $[0, (m-1)\tau]$, $m \geq 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau, (m-1)\tau)$ имеет место оценка (2.2.10), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau,$

$(m-1)\tau)$ выполнено (2.2.14). Поскольку по условию теоремы $e^{-\varepsilon_{\min}\tau/2} < \|D\| < 1$, то

$$\sum_{j=0}^{m-2} \|D\|^j \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau} \varepsilon(\xi)d\xi\right) \le \sum_{j=0}^{m-2} \|D\|^j \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau} \varepsilon_{\min}d\xi\right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{m-2}(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^j\right) e^{-\varepsilon_{\min}t'/2} = \left(\sum_{j=0}^{m-2}(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{m-2-j}\right) e^{-\varepsilon_{\min}t'/2}$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^{m-2}(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{t'/\tau-j}\right) e^{-\varepsilon_{\min}t'/2} = \left(\sum_{j=0}^{m-2}(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-j}\right) \|D\|^{t'/\tau}$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty}(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-j} = \left(1-(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}.$$

Используя это неравенство и оценку $\|D\|^{m-1} \le \|D\|$, из (2.2.14) получим неравенство

$$\|y(t')\| \le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1-(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \|D\|\Phi.$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \left(1-(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \theta$$

из определения множества $\mathcal{E}_3$, имеем оценку (2.2.15).

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (2.2.15) из неравенства (2.2.9) получим оценку (2.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m=1$, нетрудно отсюда получить неравенство (2.2.13). Используя это неравенство и неравенство (2.2.14) при $t' = t-\tau$, получим оценку

$$\|y(t)\| \le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t} \varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$+\|D\|\left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\right.$$

$$\left.\times\sum_{j=0}^{m-2}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-(j+1)\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)+\|D\|^{m-1}\Phi\right)$$

$$=\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\sum_{j=0}^{m-1}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)+\|D\|^{m}\Phi.$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что при $\varphi(t)\in\mathcal{E}_3$ решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0,m\tau]$ для любого $m\in\mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (2.2.10).

Теперь уже нетрудно получить оценку (2.1.22). Действительно, используя неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)\le\sum_{j=0}^{m-1}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau}\varepsilon_{\min}d\xi\right)$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^j\right)e^{-\varepsilon_{\min}t/2}=\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{m-1-j}\right)e^{-\varepsilon_{\min}t/2}$$

$$\le\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{t/\tau-j}\right)e^{-\varepsilon_{\min}t/2}=\left(\sum_{j=0}^{m-1}(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-j}\right)\|D\|^{t/\tau}$$

$$\le\left(\sum_{j=0}^{\infty}(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-j}\right)\|D\|^{t/\tau}=\left(1-(\|D\|e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}\|D\|^{t/\tau}$$

и оценку

$$\|D\|^m\le\|D\|^{t/\tau},$$

из (2.2.10) получим требуемую оценку.

Теорема 2.1.3 доказана.

§ 2.3. Доказательства теорем 2.1.4–2.1.6

Цель настоящего параграфа — доказать теоремы 2.1.4–2.1.6. Для этого, как в главе 1, нам понадобится аналог неравенства М.Г. Крейна (1.3.1).

Отметим, что доказательство теорем 2.1.4–2.1.6 проводится по аналогии с доказательством теорем 2.1.1–2.1.3.

Доказательство теоремы 2.1.4.

Доказательство теоремы повторяет схему рассуждений теоремы 2.1.1. Подробно остановимся лишь на отличительных моментах. В доказательстве теоремы 2.1.1 было показано, что из условий (2.1.5)–(2.1.7) следует $H(t) = H^*(t) > 0$ при $t \in [0, T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t > 0\}$, сохраняя то же обозначение.

Пусть теперь $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$. Рассмотрим функционал (2.1.4). Данный функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 2.1.1, получим неравенство (2.2.9).

Покажем, что решение начальной задачи (2.1.8) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$ будет определено на всей полуоси $\{t > 0\}$, при этом на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\|\widetilde{H}\| \|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1} V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \right.$$

$$\left. \times \sum_{j=0}^{m-1} \rho^j \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^{t-j\tau} \varepsilon(\xi) d\xi \right) + \rho^m \Phi \right). \qquad (2.3.1)$$

Пусть $t \in [0, \tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$, то $\Phi < \theta$. Используя (2.2.9), нетрудно получить неравенство (2.2.11). Используя условие (2.1.14) на величину θ и обозначение (2.1.16) величины $\widetilde{c}(t)$, получим

$$\begin{pmatrix} l_{\min}(t) I & 0 \\ 0 & m_{\min} I \end{pmatrix} - \left[q_1 \|D\| (1 + \|D\|)^{\omega_1} \theta^{\omega_1} + q_2 \theta^{\omega_2} \right] \|H(t)\|$$

$$\times \begin{pmatrix} (1 + 2\|N(t)\|) I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} \widetilde{c}(t) \|H(t)\| I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ge \widetilde{c}(t) \begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \widetilde{c}(t)\left\langle H(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\right\rangle$$

$$+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds \le 2\bar{q}_1 V^{1+\omega_1/2}(t,y).$$

В силу определения (2.1.15) величины $\varepsilon(t)$ отсюда получим неравенство (2.2.12). Поскольку $\varphi(t)\in\mathcal{E}_4$, то $V(0,\varphi)<r$, где r определено в (2.1.18). Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t,y)\le \frac{V(0,\varphi)}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}}\exp\left(-\int\limits_0^t\varepsilon(\xi)d\xi\right),$$

откуда имеем неравенство (2.2.13). Следовательно,

$$\|y(t)\|\le \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\varepsilon(\xi)d\xi\right)+\|D\|\Phi.$$

Из этого неравенства, используя оценку (1.3.1) при $j=1$ и учитывая, что $\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|\ge 1$, получим

$$\|y(t)\|\le\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\varepsilon(\xi)d\xi\right)+\rho\Phi\right). \qquad (2.3.2)$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0,\tau]$, и при $m=1$ неравенство (2.3.1) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (2.1.8) установлено на отрезке $[0,(m-1)\tau]$, $m\ge 2$, при этом на промежутке

$[(m-2)\tau,(m-1)\tau)$ имеет место оценка (2.3.1), т. е. при $t'\in[(m-2)\tau,$ $(m-1)\tau)$ выполнено

$$\|y(t')\|\le\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Bigg(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\Big(1-\big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\sum_{j=0}^{m-2}\rho^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)+\rho^{m-1}\Phi\Bigg). \qquad (2.3.3)$$

Поскольку по условию теоремы $\rho<e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}$, то, используя оценку (2.3.3) и повторяя аналогичные рассуждения из доказательства теоремы 2.1.1, а также учитывая определение множества $\mathcal{E}_4$, имеем оценку (2.2.15).

Пусть теперь $t\in[(m-1)\tau,m\tau)$. Тогда в силу оценки (2.2.15) из неравенства (2.2.9) получим оценку (2.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m=1$, нетрудно отсюда получить неравенство (2.2.13). Следовательно, по аналогии с предыдущим получим неравенство

$$\|y(t)\|\le\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Bigg(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\Big(1-\big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\sum_{j=0}^{m-1}\rho^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right)+\rho^{m}\Phi\Bigg). \qquad (2.3.4)$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что при $\varphi(t)\in\mathcal{E}_4$ решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0,m\tau]$ для любого $m\in\mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (2.3.1).

Теперь уже нетрудно получить оценку (2.1.23). Действительно, повторяя аналогичные рассуждения из доказательства теоремы 2.1.1 и используя неравенство (2.3.1), получим

$$\|y(t)\|\le\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Bigg(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\Big(1-\big(r^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{1/\omega_1}}$$

$$\times\left(1-\rho e^{\varepsilon_{\max}\tau/2}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t}\varepsilon(\xi)d\xi\right)+\rho^{t/\tau}\Phi\Bigg),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.1.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.1.5.

Доказательство теоремы повторяет схему рассуждений теоремы 2.1.1. Подробно остановимся лишь на отличительных моментах. В доказательстве теоремы 2.1.1 было показано, что из условий (2.1.5)–(2.1.7) следует $H(t) = H^*(t) > 0$ при $t \in [0, T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t > 0\}$, сохраняя то же обозначение.

Пусть теперь $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$. Рассмотрим функционал (2.1.4). Данный функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 2.1.1, получим неравенство (2.2.9).

Покажем, что решение начальной задачи (2.1.8) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$ будет определено на всей полуоси $\{t > 0\}$, при этом на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка (2.3.1).

Пусть $t \in [0, \tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$, то $\Phi < \theta$. Отсюда и из (2.2.9) нетрудно получить неравенство (2.2.11). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.1.4, из этого неравенства получим оценку (2.2.12). Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$, то $V(0, \varphi) < r$, где r определено в (2.1.18). Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t, y) \leq \frac{V(0, \varphi)}{\left(1 - \left(r^{-1} V(0, \varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}} \exp\left(-\int\limits_0^t \varepsilon(\xi) d\xi\right),$$

откуда имеем неравенство (2.2.13). Из этого неравенства, как при доказательстве теоремы 2.1.4, получим оценку (2.3.2). Отсюда, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0, \tau]$, и при $m = 1$ неравенство (2.3.1) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (2.1.8) установлено на отрезке $[0, (m-1)\tau]$, $m \geq 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau, (m-1)\tau)$ имеет место оценка (2.3.1), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau, (m-1)\tau)$ выполнено (2.3.3). Используя обозначения (2.1.24) величин

$\widetilde{\gamma}(t)$ и $\widetilde{\gamma}_{\min}$, получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-2} \rho^j \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau} \varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m-2} \exp\left(-\frac{1}{\tau}\int\limits_{t'-j\tau}^{t'} \ln\frac{1}{\rho}d\xi\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau} \varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$\le \sum_{j=0}^{m-2} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'} \widetilde{\gamma}(\xi)d\xi\right) \le \sum_{j=0}^{m-2} e^{-\widetilde{\gamma}_{\min}t'/2} = (m-1)e^{-\widetilde{\gamma}_{\min}t'/2}$$

$$\le \left(\frac{t'}{\tau}+1\right)e^{-\widetilde{\gamma}_{\min}t'/2} \le \max_{\xi\ge 0}\left\{\left(\frac{\xi}{\tau}+1\right)e^{-\widetilde{\gamma}_{\min}\xi/2}\right\} \le \left(\frac{e^{-1+\widetilde{\gamma}_{\min}\tau/2}}{\widetilde{\gamma}_{\min}\tau/2}\right).$$

Используя это неравенство и оценку $\rho^{m-1} \le \rho$, из (2.3.3) получим неравенство

$$\|y(t')\| \le \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{e^{-1+\widetilde{\gamma}_{\min}\tau/2}}{\widetilde{\gamma}_{\min}\tau/2}\right)+\rho\Phi\right).$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}\left(\frac{e^{-1+\widetilde{\gamma}_{\min}\tau/2}}{\widetilde{\gamma}_{\min}\tau/2}\right)+\rho\Phi\right) < \theta$$

из определения множества $\mathcal{E}_5$, имеем оценку (2.2.15).

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (2.2.15) из неравенства (2.2.9) получим оценку (2.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m = 1$, нетрудно отсюда получить неравенство (2.2.13). Поэтому, как при доказательстве теоремы 2.1.4, получим, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$ решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0, m\tau]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (2.3.1).

Теперь уже нетрудно получить оценку (2.1.25). Действительно, используя неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1} \rho^j \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau} \varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \exp\left(-\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-j\tau}^{t} \ln\frac{1}{\rho}d\xi\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau} \varepsilon(\xi)d\xi\right)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \widetilde{\gamma}(\xi)d\xi\right) = m\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \widetilde{\gamma}(\xi)d\xi\right)$$

$$\leq \left(\frac{t}{\tau}+1\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \widetilde{\gamma}(\xi)d\xi\right)$$

и оценку

$$\rho^m \leq \rho^{t/\tau},$$

из (2.3.1) получим требуемую оценку.

Теорема 2.1.5 доказана.

Доказательство теоремы 2.1.6.

Доказательство теоремы повторяет схему рассуждений теоремы 2.1.1. Подробно остановимся лишь на отличительных моментах. В доказательстве теоремы 2.1.1 было показано, что из условий (2.1.5)–(2.1.7) следует $H(t) = H^*(t) > 0$ при $t \in [0,T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t > 0\}$, сохраняя то же обозначение.

Пусть теперь $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$. Рассмотрим функционал (2.1.4). Данный функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 2.1.1, получим неравенство (2.2.9).

Покажем, что решение начальной задачи (2.1.8) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$ будет определено на всей полуоси $\{t > 0\}$, при этом на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка (2.3.1).

Пусть $t \in [0,\tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$, то $\Phi < \theta$. Отсюда и из (2.2.9) нетрудно получить неравенство (2.2.11). Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.1.4, из этого неравенства получим оценку (2.2.12).

Поскольку $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$, то $V(0,\varphi) < r$, где r определено в (2.1.18). Тогда, используя неравенство Гронуолла (см., например, [88]), получим оценку

$$V(t,y) \leq \frac{V(0,\varphi)}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}} \exp\left(-\int\limits_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right),$$

откуда имеем неравенство (2.2.13). Следовательно,

$$\|y(t)\| \leq \frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right) + \|D\|\Phi.$$

Из этого неравенства, используя оценку (1.3.1) при $j = 1$ и учитывая, что $\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\| \geq 1$, получим

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Biggl(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}}{\left(1-\left(r^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \varepsilon(\xi)d\xi\right) + \rho\Phi\Biggr).$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0,\tau]$, и при $m = 1$ неравенство (2.3.1) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (2.1.8) установлено на отрезке $[0,(m-1)\tau]$, $m \geq 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau,(m-1)\tau)$ имеет место оценка (2.3.1), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau, (m-1)\tau)$ выполнено (2.3.3). Поскольку по условию теоремы $e^{-\varepsilon_{\min}\tau/2} < \rho < 1$, то

$$\sum_{j=0}^{m-2}\rho^j \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau}\varepsilon(\xi)d\xi\right) \leq \sum_{j=0}^{m-2}\rho^j \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau}\varepsilon_{\min}d\xi\right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{m-2}(\rho e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^j\right) e^{-\varepsilon_{\min}t'/2} = \left(\sum_{j=0}^{m-2}(\rho e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{m-2-j}\right) e^{-\varepsilon_{\min}t'/2}$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{m-2} (\rho e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{t'/\tau - j} \right) e^{-\varepsilon_{\min} t'/2} = \left(\sum_{j=0}^{m-2} (\rho e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-j} \right) \rho^{t'/\tau}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (\rho e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-j} = \left(1 - (\rho e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1}.$$

Используя это неравенство и оценку $\rho^{m-1} \leq \rho$, из (2.3.3) получим неравенство

$$\|y(t')\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\| \|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1} V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \right.$$

$$\left. \times \left(1 - (\rho e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \rho \Phi \right).$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\| \|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\frac{\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)}}{\left(1 - \left(r^{-1} V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{1/\omega_1}} \right.$$

$$\left. \times \left(1 - (\rho e^{\varepsilon_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \rho \Phi \right) < \theta$$

из определения множества $\mathcal{E}_6$, имеем оценку (2.2.15).

Пусть теперь $t \in [(m-1)\tau, m\tau)$. Тогда в силу оценки (2.2.15) из неравенства (2.2.9) получим оценку (2.2.11). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m = 1$, нетрудно отсюда получить неравенство (2.2.13). Следовательно, по аналогии с предыдущим получим оценку (2.3.4). Отсюда непосредственно вытекает, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$ решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0, m\tau]$ для любого $m \in \mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (2.3.1).

Повторяя аналогичные рассуждения из доказательства теоремы 2.1.3, из (2.3.1) получим оценку (2.1.26).

Теорема 2.1.6 доказана.

§ 2.4. Случай $\omega_1\omega_2 = 0$

В данном параграфе мы рассмотрим случай, когда в оценке (2.1.2) на вектор-функцию $F(t,u,v)$
$$\omega_1\omega_2 = 0.$$

Вначале рассмотрим случай
$$\omega_1 > 0, \quad \omega_2 = 0.$$

Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7), гарантирующие экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы (2.1.3). Пусть также выполнено неравенство
$$q_2\|H(t)\| < \min\left\{\frac{l_{\min}(t)}{1+2\|N(t)\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}, \tag{2.4.1}$$
где $l_{\min}(t) > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц $L(t)$, M из (2.1.11) и (2.1.10) соответственно, $N(t)$ определено в (2.1.12). Данное условие гарантирует, что существует величина $\theta > 0$, удовлетворяющая неравенству (2.1.14) при $\omega_2 = 0$:
$$\Big[q_1\|D\|(1+\|D\|)^{\omega_1}\theta^{\omega_1} + q_2\Big]\|H(t)\| < \min\left\{\frac{l_{\min}(t)}{1+2\|N(t)\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}.$$
Это в свою очередь означает, что величина $\varepsilon(t)$, определенная в (2.1.15), положительна.

Из теорем 2.1.1–2.1.3 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 2.4.1. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (2.4.1) и*
$$\|D\| < e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}, \quad \varepsilon_{\max} = \max_{t\in[0,T]} \varepsilon(t),$$
где $\varepsilon(t)$ определено в (2.1.15). Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$ решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (2.1.19).

Теорема 2.4.2. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (2.4.1) и существует точка $t_* \in [0,T]$ такая, что*

$$\|D\| = e^{-\varepsilon(t_*)\tau/2},$$

где $\varepsilon(t)$ определено в (2.1.15). Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$ решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (2.1.21).

Теорема 2.4.3. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (2.4.1) и*

$$e^{-\varepsilon_{\min}\tau/2} < \|D\| < 1, \quad \varepsilon_{\min} = \min_{t\in[0,T]} \varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t)$ определено в (2.1.15). Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (2.1.22).

Доказательства данных утверждений дословно повторяют доказательства теорем 2.1.1–2.1.3, только в соответствующих местах вместо ω_2 нужно поставить 0 (см. § 2.2).

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.4.1. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (2.4.1) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (2.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Сформулированные утверждения также нетрудно обобщить на случай, когда $\|D\| \geq 1$, а спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

Приведем соответствующие результаты.

Теорема 2.4.4. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (2.4.1) и*

$$\rho < e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}, \quad \varepsilon_{\max} = \max_{t\in[0,T]} \varepsilon(t),$$

где ρ, $\varepsilon(t)$ определены в (1.1.22), (2.1.15) соответственно. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$ решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (2.1.23).

Теорема 2.4.5. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (2.4.1) и существует точка $t_* \in [0, T]$ такая, что*

$$\rho = e^{-\varepsilon(t_*)\tau/2},$$

где ρ, $\varepsilon(t)$ определены в (1.1.22), (2.1.15) соответственно. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_5$ решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (2.1.25).

Теорема 2.4.6. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (2.4.1) и*

$$e^{-\varepsilon_{\min}\tau/2} < \rho < 1, \quad \varepsilon_{\min} = \min_{t\in[0,T]} \varepsilon(t),$$

где ρ, $\varepsilon(t)$ определены в (1.1.22), (2.1.15) соответственно. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_6$ решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$, при этом справедлива оценка (2.1.26).

Доказательства теорем 2.4.4–2.4.6 в точности повторяют доказательства теорем 2.1.4–2.1.6, только в соответствующих местах вместо ω_2 нужно поставить 0 (см. § 2.3).

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.4.2. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_2 удовлетворяет неравенству (2.4.1). Тогда нулевое решение системы (2.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Теперь рассмотрим случай, когда в оценке (2.1.2)

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 > 0.$$

Будем предполагать, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7), гарантирующие экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы (2.1.3). Предположим также, что выполнено условие

$$q_1\left[1+\sqrt{1+\|D\|^2}\right]\|H(t)\|<\min\left\{\frac{l_{\min}(t)}{1+2\|N(t)\|},\frac{m_{\min}}{2}\right\}, \tag{2.4.2}$$

где $l_{\min}(t)>0$ и $m_{\min}>0$ — минимальные собственные значения матриц $L(t)$, M из (2.1.11) и (2.1.10) соответственно, $N(t)$ определено в (2.1.12).

Введем следующие обозначения. Пусть $\bar\theta>0$ такое, что

$$\left[q_1+\sqrt{q_1^2+\left(q_1\|D\|+q_2\bar\theta^{\omega_2}\right)^2}\right]\|H(t)\|$$

$$<\min\left\{\frac{l_{\min}(t)}{1+2\|N(t)\|},\frac{m_{\min}}{2}\right\}. \tag{2.4.3}$$

Отметим, что условие (2.4.2) гарантирует существование величины $\bar\theta>0$. Обозначим

$$\bar\varepsilon(t)=\min\{\bar c(t),k\},\quad \bar\varepsilon_{\max}=\max_{t\in[0,T]}\bar\varepsilon(t),\quad \bar\varepsilon_{\min}=\min_{t\in[0,T]}\bar\varepsilon(t), \tag{2.4.4}$$

где

$$\bar c(t)=\frac{l_{\min}(t)}{\|H(t)\|}-\left[q_1+\sqrt{q_1^2+\left(q_1\|D\|+q_2\bar\theta^{\omega_2}\right)^2}\right](1+2\|N(t)\|), \tag{2.4.5}$$

$k>0$ определено в (2.1.17). Отметим, что в силу условия (2.4.3) на параметр $\bar\theta$ имеем $\bar c(t)>0$, т. е. величина $\bar\varepsilon(t)$ строго положительна. Обозначим

$$h_{\min}=\min_{t\in[0,T]}\|H^{-1}(t)\|^{-1}.$$

В дальнейшем введенные параметры будут использоваться при описании множества для начальных данных, при которых решение начальной задачи (2.1.8) существует на всей полуоси $\{t>0\}$, и при указании равномерных оценок решения.

Вначале мы сформулируем результаты для случая, когда $\|D\|<1$. Как и ранее, $\Phi=\max\limits_{t\in[-\tau,0]}\|\varphi(t)\|$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.4.7. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (2.4.2) и*

$$\|D\|<e^{-\bar\varepsilon_{\max}\tau/2}.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_1$, *где*

$$\bar{\mathcal{E}}_1 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)} \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \bar{\theta} \Bigg\},$$

решение $y(t)$ *начальной задачи (2.1.8) определено при всех* $t > 0$. *При этом справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)} \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^{-1}$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^t \bar{\varepsilon}(\xi) d\xi \right) + \Phi \|D\|^{t/\tau}. \tag{2.4.6}$$

Теорема 2.4.8. *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$ *и* $K(s)$ *такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть* q_1 *удовлетворяет неравенству (2.4.2) и существует точка* $t_* \in [0, T]$ *такая, что*

$$\|D\| = e^{-\bar{\varepsilon}(t_*)\tau/2},$$

где $\bar{\varepsilon}(t)$ *определено в (2.4.4). Тогда при* $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_2$, *где*

$$\bar{\mathcal{E}}_2 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)} \left(\frac{e^{-1+\bar{\gamma}_{\min}\tau/2}}{\bar{\gamma}_{\min}\tau/2} \right) + \|D\|\Phi < \bar{\theta} \Bigg\},$$

$$\bar{\gamma}(t) = \min\left\{ \bar{\varepsilon}(t), \frac{2}{\tau} \ln \frac{1}{\|D\|} \right\}, \quad \bar{\gamma}_{\min} = \min_{t \in [0,T]} \bar{\gamma}(t),$$

решение $y(t)$ *начальной задачи (2.1.8) определено при всех* $t > 0$. *При этом справедлива оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)} \left(\frac{t}{\tau} + 1 \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^t \bar{\gamma}(\xi) d\xi \right) + \Phi \|D\|^{t/\tau}. \tag{2.4.7}$$

Теорема 2.4.9. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (2.4.2) и*

$$e^{-\bar{\varepsilon}_{\min}\tau/2} < \|D\| < 1.$$

Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_3$, где

$$\bar{\mathcal{E}}_3 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)} \left(1 - (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \bar{\theta} \Bigg\},$$

решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \left(\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)} \left(1 - (\|D\| e^{\bar{\varepsilon}_{\min}\tau/2})^{-1}\right)^{-1} + \Phi \right) \|D\|^{t/\tau}. \quad (2.4.8)$$

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.4.3. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (2.4.2) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (2.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Приведем теперь формулировки утверждений для случая, когда $\|D\| \ge 1$, а спектр принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.4.10. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (2.4.2) и*

$$\rho < e^{-\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2},$$

где ρ определено в (1.1.22). Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_4$, где

$$\bar{\mathcal{E}}_4 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}\left(1-\rho e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^{-1}+\rho\Phi\right)<\bar{\theta}\Biggr\},$$

$\widetilde{H}$ определено в (1.1.21), решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\le\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Biggl(\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}$$

$$\times\left(1-\rho e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)+\Phi\rho^{t/\tau}\Biggr). \tag{2.4.9}$$

Теорема 2.4.11. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (2.4.2) и существует точка $t_*\in[0,T]$ такая, что*

$$\rho=e^{-\bar{\varepsilon}(t_*)\tau/2},$$

где ρ, $\bar{\varepsilon}(t)$ определены в (1.1.22) и (2.4.4) соответственно. Тогда при $\varphi(t)\in\bar{\mathcal{E}}_5$, где

$$\bar{\mathcal{E}}_5=\Biggl\{\varphi(t)\in C^1([-\tau,0]):\quad\Phi<\bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\left(\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}\left(\frac{e^{-1+\hat{\gamma}_{\min}\tau/2}}{\hat{\gamma}_{\min}\tau/2}\right)+\rho\Phi\right)<\bar{\theta}\Biggr\},$$

$$\hat{\gamma}(t)=\min\left\{\bar{\varepsilon}(t),\frac{2}{\tau}\ln\frac{1}{\rho}\right\},\quad\hat{\gamma}_{\min}=\min_{t\in[0,T]}\hat{\gamma}(t),$$

$\widetilde{H}$ определено в (1.1.21), решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t>0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|\le\sqrt{\|\widetilde{H}\|\|\widetilde{H}^{-1}\|}\Biggl(\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}$$

$$\times\left(\frac{t}{\tau}+1\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\hat{\gamma}(\xi)d\xi\right)+\Phi\rho^{t/\tau}\Biggr). \tag{2.4.10}$$

Теорема 2.4.12. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (2.4.2) и*

$$e^{-\bar{\varepsilon}_{\min}\tau/2} < \rho < 1,$$

где ρ определено в (1.1.22). Тогда при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_6$, где

$$\bar{\mathcal{E}}_6 = \Bigg\{ \varphi(t) \in C^1([-\tau, 0]) : \quad \Phi < \bar{\theta},$$

$$\sqrt{\|\widetilde{H}\| \|\widetilde{H}^{-1}\|} \left(\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0, \varphi)} \left(1 - (\rho e^{\bar{\varepsilon}_{\min}\tau/2})^{-1} \right)^{-1} + \rho \Phi \right) < \bar{\theta} \Bigg\},$$

$\widetilde{H}$ определено в (1.1.21), решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\|\widetilde{H}\| \|\widetilde{H}^{-1}\|} \Bigg(\sqrt{h_{\min}^{-1} V(0, \varphi)}$$

$$\times \left(1 - (\rho e^{\bar{\varepsilon}_{\min}\tau/2})^{-1} \right)^{-1} + \Phi \Bigg) \rho^{t/\tau}. \qquad (2.4.11)$$

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.4.4. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1 удовлетворяет неравенству (2.4.2). Тогда нулевое решение системы (2.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства теорем 2.4.7–2.4.12 проводятся по той же схеме, что и доказательства теорем 2.1.1–2.1.6. Приведем, например, доказательство теоремы 2.4.7. Остальные теоремы доказываются аналогично.

Доказательство теоремы 2.4.7. В теореме 2.1.1 было показано, что из условий (2.1.5)–(2.1.7) следует $H(t) = H^*(t) > 0$ при $t \in [0, T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t > 0\}$, сохраняя то же обозначение.

Пусть теперь $y(t)$ — решение начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_1$. Рассмотрим функционал (2.1.4). Данный функционал является положительно определенным. Дифференцируя его вдоль решения $y(t)$ и проводя рассуждения как в теореме 2.1.1, получим тождество (2.2.1).

Оценим величину, стоящую в правой части данного тождества. Рассуждая как в теореме 1.4.7, получим аналог неравенства (1.4.12):

$$2\langle H(t)(u+Dv), F(t,u,v)\rangle \le \left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + (q_1\|D\| + q_2\|v\|^{\omega_2})^2}\right]\|H(t)\|$$
$$\times\left\langle \begin{pmatrix} I & C_{12}(t)C_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+2\|N(t)\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix}\right.$$
$$\left.\times\begin{pmatrix} I & 0 \\ C_{22}^{-1}C_{12}^*(t) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+Dv \\ v \end{pmatrix}\right\rangle. \qquad (2.4.12)$$

В силу неравенств (2.2.2), (2.2.3) и (2.4.12) из тождества (2.2.1) имеем аналог оценки (1.4.13):

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \left\langle \begin{pmatrix} l_{\min}(t)I & 0 \\ 0 & m_{\min}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}\right\rangle$$
$$- \left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + (q_1\|D\| + q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2})^2}\right]\|H(t)\|$$
$$\times\left\langle \begin{pmatrix} (1+2\|N(t)\|)I & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}\right\rangle$$
$$+k\int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds \le 0, \qquad (2.4.13)$$

где $z(t)$ определено в (2.2.8).

Следующая наша цель — доказать разрешимость начальной задачи (2.1.8) на всей полуоси $\{t>0\}$ при $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_1$. Более того, мы докажем, что на любом промежутке $[(m-1)\tau, m\tau)$, $m \in \mathbb{N}$, имеет место оценка

$$\|y(t)\| \le \sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)} \sum_{j=0}^{m-1} \|D\|^j \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{t-j\tau} \bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right) + \|D\|^m\Phi. \quad (2.4.14)$$

Пусть $t \in [0,\tau)$. Поскольку $\varphi(t) \in \bar{\mathcal{E}}_1$, то $\Phi < \bar{\theta}$. Используя (2.4.13), нетрудно получить неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \left\langle \begin{pmatrix} l_{\min}(t)I & 0 \\ 0 & m_{\min}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)+Dy(t-\tau) \\ z(t) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$
-\left[q_1+\sqrt{q_1^2+\left(q_1\|D\|+q_2\bar{\theta}^{\omega_2}\right)^2}\right]\|H(t)\|
$$

$$
\times\left\langle\begin{pmatrix}(1+2\|N(t)\|)I & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(t)+Dy(t-\tau)\\ z(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)+Dy(t-\tau)\\ z(t)\end{pmatrix}\right\rangle
$$

$$
+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds\le 0. \tag{2.4.15}
$$

Используя условие (2.4.3) на величину $\bar{\theta}$ и обозначение (2.4.5) величины $\bar{c}(t)$, получим

$$
\begin{pmatrix}l_{\min}(t)I & 0\\ 0 & m_{\min}I\end{pmatrix}-\left[q_1+\sqrt{q_1^2+\left(q_1\|D\|+q_2\bar{\theta}^{\omega_2}\right)^2}\right]\|H(t)\|
$$

$$
\times\begin{pmatrix}(1+2\|N(t)\|)I & 0\\ 0 & 2I\end{pmatrix}\ge\begin{pmatrix}\bar{c}(t)\|H(t)\|I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ge\bar{c}(t)\begin{pmatrix}H(t) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},
$$

откуда

$$
\frac{d}{dt}V(t,y)+\bar{c}(t)\left\langle H(t)(y(t)+Dy(t-\tau)),(y(t)+Dy(t-\tau))\right\rangle
$$

$$
+k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds\le 0.
$$

В силу определения (2.4.4) величины $\bar{\varepsilon}(t)$ отсюда получим неравенство

$$
\frac{d}{dt}V(t,y)+\bar{\varepsilon}(t)V(t,y)\le 0.
$$

Из этого неравенства получим оценку

$$
V(t,y)\le V(0,\varphi)\exp\left(-\int\limits_0^t\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right),
$$

откуда имеем неравенство

$$
\|y(t)+Dy(t-\tau)\|\le\sqrt{\|H^{-1}(t)\|V(t,y)}
$$

$$
\le\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right). \tag{2.4.16}
$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \le \sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right) + \|D\|\Phi.$$

Из полученной оценки, очевидно, вытекает, что решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0,\tau]$, и при $m=1$ неравенство (2.4.14) доказано.

Далее все рассуждения можно провести по индукции. Действительно, предположим, что существование решения начальной задачи (2.1.8) установлено на отрезке $[0,(m-1)\tau]$, $m \ge 2$, при этом на промежутке $[(m-2)\tau,(m-1)\tau)$ имеет место оценка (2.4.14), т. е. при $t' \in [(m-2)\tau,$ $(m-1)\tau)$ выполнено

$$\|y(t')\| \le \sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}\sum_{j=0}^{m-2}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau}\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)$$
$$+\|D\|^{m-1}\Phi, \quad t' \in [(m-2)\tau,(m-1)\tau). \tag{2.4.17}$$

Поскольку по условию теоремы $\|D\| < e^{-\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}$, то

$$\sum_{j=0}^{m-2}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'-j\tau}\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)$$
$$= \left(\sum_{j=0}^{m-2}\|D\|^j\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{t'-j\tau}^{t'}\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t'}\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)$$
$$\le \sum_{j=0}^{m-2}\|D\|^j\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{t'-j\tau}^{t'}\bar{\varepsilon}_{\max}d\xi\right) = \sum_{j=0}^{m-2}\left(\|D\|e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^j$$
$$\le \sum_{j=0}^{\infty}\left(\|D\|e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^j = \left(1-\|D\|e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^{-1}.$$

Используя это неравенство и оценку $\|D\|^{m-1} \le \|D\|$, из (2.4.17) получим неравенство

$$\|y(t')\| \le \sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}\left(1-\|D\|e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi.$$

Отсюда, учитывая неравенство

$$\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}\left(1-\|D\|e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^{-1}+\|D\|\Phi<\bar{\theta}$$

из определения множества $\bar{\mathcal{E}}_1$, имеем оценку

$$\|y(t')\|\le\bar{\theta},\quad t'\in[(m-2)\tau,(m-1)\tau). \tag{2.4.18}$$

Пусть теперь $t\in[(m-1)\tau,m\tau)$. Тогда в силу оценки (2.4.18) из неравенства (2.4.13) получим оценку (2.4.15). Проводя те же самые рассуждения, что и в случае $m=1$, нетрудно отсюда получить неравенство (2.4.16). Используя это неравенство и неравенство (2.4.18) при $t'=t-\tau$, получим оценку

$$\|y(t)\|\le\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)$$

$$+\|D\|\left(\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}\sum_{j=0}^{m-2}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-(j+1)\tau}\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)+\|D\|^{m-1}\Phi\right)$$

$$=\sqrt{h_{\min}^{-1}V(0,\varphi)}\sum_{j=0}^{m-1}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau}\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)+\|D\|^m\Phi.$$

Из полученной оценки непосредственно вытекает, что при $\varphi(t)\in\bar{\mathcal{E}}_1$ решение начальной задачи (2.1.8) определено на всем отрезке $[0,m\tau]$ для любого $m\in\mathbb{N}$, при этом справедливо неравенство (2.4.14).

Теперь уже нетрудно получить оценку (2.4.6). Действительно, используя неравенство

$$\sum_{j=0}^{m-1}\|D\|^j\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-j\tau}\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{m-1}\|D\|^j\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{t-j\tau}^{t}\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)$$

$$\le\left(\sum_{j=0}^{m-1}\left(\|D\|e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^j\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)$$

$$\le\left(1-\|D\|e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\bar{\varepsilon}(\xi)d\xi\right)$$

и оценку

$$\|D\|^m \leq \|D\|^{t/\tau},$$

из (2.4.14) получим

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)} \sum_{j=0}^{m-1} \|D\|^j \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^{t-j\tau} \bar{\varepsilon}(\xi) d\xi\right) + \|D\|^m \Phi$$

$$\leq \sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)} \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^{t} \bar{\varepsilon}(\xi) d\xi\right) + \|D\|^{t/\tau} \Phi,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2.4.7 доказана.

Наконец, рассмотрим случай, когда в оценке (2.1.2) на вектор-функцию $F(t,u,v)$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0.$$

Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7), гарантирующие экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы (2.1.3). Пусть также выполнено неравенство

$$\left[q_1 + \sqrt{q_1^2 + (q_1\|D\| + q_2)^2}\right] \|H(t)\|$$
$$< \min\left\{\frac{l_{\min}(t)}{1 + 2\|N(t)\|}, \frac{m_{\min}}{2}\right\}, \tag{2.4.19}$$

где $l_{\min}(t) > 0$ и $m_{\min} > 0$ — минимальные собственные значения матриц $L(t)$, M из (2.1.11) и (2.1.10) соответственно, $N(t)$ определено в (2.1.12). Данное условие совпадает с условием (2.4.3) при $\omega_2 = 0$ и гарантирует, что величина $\bar{\varepsilon}(t)$, определенная в (2.4.4), положительна. Также заметим, что при $\omega_1 = \omega_2 = 0$ из (2.4.3) следует, что величина $\bar{\theta}$ может быть совершенно произвольной.

Из теорем 2.4.7–2.4.12 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 2.4.13. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1, q_2 удовлетворяют неравенству (2.4.19) и*

$$\|D\| < e^{-\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (2.4.6).

Теорема 2.4.14. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1, q_2 удовлетворяют неравенству (2.4.19) и существует точка $t_* \in [0, T]$ такая, что*

$$\|D\| = e^{-\bar{\varepsilon}(t_*)\tau/2},$$

где $\bar{\varepsilon}(t)$ определено в (2.4.4). Тогда для решения начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (2.4.7).

Теорема 2.4.15. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1, q_2 удовлетворяют неравенству (2.4.19) и*

$$e^{-\bar{\varepsilon}_{\min}\tau/2} < \|D\| < 1.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (2.4.8).

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.4.5. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1, q_2 удовлетворяют неравенству (2.4.19) и $\|D\| < 1$. Тогда нулевое решение системы (2.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Сформулированные утверждения также нетрудно обобщить на случай, когда $\|D\| \geq 1$, а спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

Приведем соответствующие результаты.

Теорема 2.4.16. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1, q_2 удовлетворяют неравенству (2.4.19) и*

$$\rho < e^{-\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2},$$

где ρ определено в (1.1.22). Тогда для решения начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ имеет место оценка (2.4.9).

Теорема 2.4.17. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1, q_2 удовлетворяют неравенству (2.4.19) и существует точка $t_* \in [0,T]$ такая, что*

$$\rho = e^{-\bar{\varepsilon}(t_*)\tau/2},$$

где ρ, $\bar{\varepsilon}(t)$ определены в (1.1.22) и (2.4.4) соответственно. Тогда для решения начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau,0])$ имеет место оценка (2.4.10).

Теорема 2.4.18. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1, q_2 удовлетворяют неравенству (2.4.19) и*

$$e^{-\bar{\varepsilon}_{\min}\tau/2} < \rho < 1,$$

где ρ определено в (1.1.22). Тогда для решения начальной задачи (2.1.8) с начальной вектор-функцией $\varphi(t) \in C^1([-\tau,0])$ имеет место оценка (2.4.11).

Из приведенных результатов очевидным образом вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.4.6. *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$ такие, что выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). Пусть q_1, q_2 удовлетворяют неравенству (2.4.19). Тогда нулевое решение системы (2.1.1) экспоненциально устойчиво.*

Доказательства сформулированных теорем легко вытекают из доказательств теорем 2.4.7–2.4.12. Действительно, поясним это на примере теоремы 2.4.13. Пусть $\varphi(t) \in C^1([-\tau,0])$. Поскольку величина $\bar{\theta}$ может быть совершенно произвольной, то возьмем в качестве $\bar{\theta}$ такое число, чтобы были выполнены неравенства

$$\Phi < \bar{\theta}, \quad \sqrt{h_{\min}^{-1} V(0,\varphi)} \left(1 - \|D\| e^{\bar{\varepsilon}_{\max}\tau/2}\right)^{-1} + \|D\|\Phi < \bar{\theta},$$

т. е. чтобы вектор-функция $\varphi(t)$ принадлежала множеству $\bar{\mathcal{E}}_1$. Все дальнейшие рассуждения дословно повторяют доказательство теоремы 2.4.7.

§ 2.5. О выборе матриц $H(t)$ и $K(s)$

В настоящем параграфе рассматривается вопрос о выборе матриц $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющих условиям (2.1.5)–(2.1.7), которые гарантируют экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы (2.1.3). Приведем один из вариантов построения матриц $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющих данным условиям.

Вначале рассмотрим случай, когда $\|D\| < 1$.

Мы будем предполагать, что T-периодическая матрица $A(t)$ такая, что нулевое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t > 0,$$

асимптотически устойчиво. Тогда согласно критерию из работы [23] существует единственное решение $H(t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -I, \quad t \in [0,T], \\ \\ H(0) = H(T) > 0, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

при этом $H(t) > 0$, $t \in [0,T]$. Мы будем использовать это решение. Далее, в качестве $K(s)$ возьмем матрицу

$$K(s) = \mu e^{-ks} I, \quad \mu > 0, \quad k > 0. \tag{2.5.2}$$

Используя введенные матрицы, из утверждений, сформулированных в § 2.1, нетрудно получить следующий результат об экспоненциальной устойчивости.

Теорема 2.5.1. *Предположим, что $\|D\| < 1$ и существует $H(t) = H^*(t)$ — решение краевой задачи (2.5.1), причем при $t \in [0,T]$ выполнено матричное неравенство*

$$\begin{aligned}(1 - \|D\|^2)I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^* + D(B(t) - A(t)D)^*H(t) \\ > 2 \max_{t\in[0,T]} \sqrt{\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|}\ I.\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Тогда нулевое решение системы (2.1.3) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. В силу теоремы [31] для экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.1.3) достаточно выполнение условий

(2.1.5)–(2.1.7). В § 2.1 было установлено, что условие (2.1.7) эквивалентно двум условиям (2.1.10), (2.1.11). В силу определений (2.5.1) и (2.5.2) условия (2.1.5) и (2.1.6) выполнены, а условия (2.1.10) и (2.1.11) перепишутся в виде

$$e^{-k\tau}I - D^*D > 0,$$

$$I - \mu I - \mu^{-1}\Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - \mu D\Big)$$

$$\times\Big(e^{-k\tau}I - D^*D\Big)^{-1}\Big((B(t) - A(t)D)^*H(t) - \mu D^*\Big) > 0.$$

Как в теореме 1.5.1, нетрудно получить, что для справедливости этих неравенств достаточно показать, что имеют место следующие оценки

$$e^{-k\tau} - \|D\|^2 > 0, \tag{2.5.4}$$

$$(e^{-k\tau} - \|D\|^2)I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^* + D(B(t) - A(t)D)^*H(t)$$
$$> \big(\mu^{-1}\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\| + \mu e^{-k\tau}\big)\, I.$$

В силу условия $\|D\| < 1$ при достаточно малом $k > 0$ первое неравенство выполнено. Для справедливости второго неравенства достаточно получить

$$(e^{-k\tau} - \|D\|^2)I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^* + D(B(t) - A(t)D)^*H(t)$$

$$> \left(\mu^{-1}\max_{t\in[0,T]}\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\| + \mu e^{-k\tau}\right) I.$$

Если $B(t) \equiv A(t)D$, то это неравенство будет выполнено при

$$0 < \mu < 1 - \|D\|^2 e^{k\tau}. \tag{2.5.5}$$

Если же $B(t) \not\equiv A(t)D$, то, полагая

$$\mu = \max_{t\in[0,T]}\sqrt{\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|}\; e^{k\tau/2}, \tag{2.5.6}$$

получим

$$(e^{-k\tau} - \|D\|^2)I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^* + D(B(t) - A(t)D)^*H(t)$$

$$> 2\max_{t\in[0,T]}\sqrt{\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|}\; e^{-k\tau/2} I.$$

При $k = 0$ это неравенство совпадает с (2.5.3). Значит при k, достаточно близком к 0, оно также будет выполнено. Таким образом, выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). В силу теоремы [31] это означает, что нулевое решение системы (2.1.3) экспоненциально устойчиво.

Теорема доказана.

Теперь приведем оценки решений системы (2.1.1) и оценки областей притяжения нулевого решения с использованием матриц из (2.5.1), (2.5.2).

Предположим, что выполнены условия теоремы 2.5.1. Введем следующие обозначения.

Пусть $k > 0$ такое, что выполнено неравенство (2.5.4), и $\mu > 0$ определено в (2.5.5), (2.5.6). Предположим, что в условии (2.1.2) на вектор-функцию $F(t, u, v)$ показатели нелинейности ω_j, $j = 1, 2$, положительны. Пусть $\theta > 0$ удовлетворяет неравенству (2.1.14) с матрицами

$$M = \mu(e^{-k\tau} - \|D\|^2)I > 0,$$

$$L(t) = I - \mu I - \mu^{-1}(e^{-k\tau} - \|D\|^2)^{-1}\Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - \mu D\Big)$$

$$\times\Big((B(t) - A(t)D)^* H(t) - \mu D^*\Big) > 0,$$

$$N(t) = \mu^{-2}(e^{-k\tau} - \|D\|^2)^{-2}\Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - \mu D\Big)$$

$$\times\Big((B(t) - A(t)D)^* H(t) - \mu D^*\Big).$$

Пусть

$$\varepsilon(t) = \min\{\widetilde{c}(t), k\}, \quad \varepsilon_{\max} = \max_{t\in[0,T]} \varepsilon(t),$$

где $\widetilde{c}(t) > 0$ из (2.1.16) с введенными матрицами $L(t)$ и $N(t)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.5.1. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, где множество $\mathcal{E}_1$ определено в теореме 2.1.1, решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка (2.1.19).*

Утверждение теоремы следует из теоремы 2.1.1, поскольку в силу условия (2.5.4) имеем

$$\|D\| < e^{-k\tau/2} \le e^{-\varepsilon(t)\tau/2}, \quad t \in [0, T].$$

Значит, $\|D\| < e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}$ и все условия теоремы 2.1.1 выполнены.

Теперь приведем результаты в случае, когда спектр матрицы D принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Пусть $\widetilde{H} = \widetilde{H}^* > 0$ — решение дискретного матричного уравнения Ляпунова:

$$\widetilde{H} - D^*\widetilde{H}D = I. \tag{2.5.7}$$

Возьмем в качестве $K(s)$ матрицу

$$K(s) = \mu e^{-ks}\widetilde{H}, \quad \mu > 0, \quad k > 0. \tag{2.5.8}$$

Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$ из (2.5.1) и (2.5.8), также, как и в случае $\|D\| < 1$, нетрудно получить результат об экспоненциальной устойчивости.

Теорема 2.5.3. *Предположим, что существует $H(t) = H^*(t)$ — решение краевой задачи (2.5.1) и $\widetilde{H} = \widetilde{H}^* > 0$ — решение дискретного матричного уравнения Ляпунова (2.5.7), причем при $t \in [0,T]$ выполнено матричное неравенство*

$$I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^*\widetilde{H} + \widetilde{H}D(B(t) - A(t)D)^*H(t)$$
$$> 2\sqrt{\max_{t\in[0,T]} \|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|}$$
$$\times\sqrt{\|\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|}\ I. \tag{2.5.9}$$

Тогда нулевое решение системы (2.1.3) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. В силу теоремы [31] для экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.1.3) достаточно выполнение условий (2.1.5)–(2.1.7). В § 2.1 было установлено, что условие (2.1.7) эквивалентно двум условиям (2.1.10), (2.1.11). В силу (2.5.1) и (2.5.8) условия (2.1.5) и (2.1.6) выполнены, а условия (2.1.10) и (2.1.11) перепишутся в виде

$$I - (1 - e^{-k\tau})\widetilde{H} > 0,$$

$$I - \mu\widetilde{H} - \mu^{-1}\Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - \mu\widetilde{H}D\Big)$$
$$\times\Big(I - (1 - e^{-k\tau})\widetilde{H}\Big)^{-1}\Big((B(t) - A(t)D)^*H(t) - \mu D^*\widetilde{H}\Big) > 0.$$

Как в теореме 1.5.3, нетрудно получить, что для справедливости этих неравенств достаточно показать, что имеют место следующие оценки

$$\xi = 1 - (1 - e^{-k\tau})\|\widetilde{H}\| > 0, \tag{2.5.10}$$

$$\xi I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^*\widetilde{H} + \widetilde{H}D(B(t) - A(t)D)^*H(t)$$
$$> \Bigg(\mu^{-1}\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|$$
$$+\mu\|\xi\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|\Bigg)I.$$

При достаточно малом $k > 0$ первое неравенство выполнено. Для справедливости второго неравенства достаточно получить

$$\xi I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^*\widetilde{H} + \widetilde{H}D(B(t) - A(t)D)^*H(t)$$
$$> \Bigg(\mu^{-1}\max_{t\in[0,T]}\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|$$
$$+\mu\|\xi\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|\Bigg)I.$$

Если $B(t) \equiv A(t)D$, то это неравенство будет выполнено при

$$0 < \mu < \frac{\xi}{\|\xi\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|}. \tag{2.5.11}$$

Если же $B(t) \not\equiv A(t)D$, то, полагая

$$\mu = \sqrt{\frac{\max\limits_{t\in[0,T]}\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|}{\|\xi\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|}}, \tag{2.5.12}$$

получим

$$\xi I + H(t)(B(t) - A(t)D)D^*\widetilde{H} + \widetilde{H}D(B(t) - A(t)D)^*H(t)$$
$$> 2\sqrt{\max_{t\in[0,T]}\|H(t)(B(t) - A(t)D)(B(t) - A(t)D)^*H(t)\|}$$
$$\times\sqrt{\|\xi\widetilde{H} + \widetilde{H}DD^*\widetilde{H}\|}\ I.$$

При $\xi = 1$, т. е. $k = 0$, это неравенство совпадает с (2.5.9). Значит при ξ, достаточно близком к 1, оно также будет выполнено. Таким образом, выполнены условия (2.1.5)–(2.1.7). В силу теоремы из [31] это означает, что нулевое решение системы (2.1.3) экспоненциально устойчиво.

Теорема доказана.

Теперь приведем оценки решений системы (2.1.1) и оценки областей притяжения нулевого решения с использованием матриц из (2.5.1), (2.5.8).

Предположим, что выполнены условия теоремы 2.5.3. Введем следующие обозначения.

Пусть $k > 0$ такое, что выполнено неравенство (2.5.10), и $\mu > 0$ определено в (2.5.11), (2.5.12). Предположим, что в условии (2.1.2) на вектор-функцию $F(t, u, v)$ показатели нелинейности ω_j, $j = 1, 2$, положительны. Пусть $\theta > 0$ удовлетворяет неравенству (2.1.14) с матрицами

$$M = \mu \xi I > 0,$$

$$L(t) = I - \mu \widetilde{H} - \mu^{-1} \xi^{-1} \Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - \mu \widetilde{H} D \Big)$$

$$\times \Big((B(t) - A(t)D)^* H(t) - \mu D^* \widetilde{H} \Big) > 0,$$

$$N(t) = \mu^{-2} \xi^{-2} \Big(H(t)(B(t) - A(t)D) - \mu \widetilde{H} D \Big)$$

$$\times \Big((B(t) - A(t)D)^* H(t) - \mu D^* \widetilde{H} \Big).$$

Пусть

$$\varepsilon(t) = \min\{\widetilde{c}(t), k\}, \quad \varepsilon_{\max} = \max_{t \in [0,T]} \varepsilon(t),$$

где $\widetilde{c}(t) > 0$ из (2.1.16) с введенными матрицами $L(t)$ и $N(t)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.5.4. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.5.3. Тогда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_4$, где множество $\mathcal{E}_4$ определено в теореме 2.1.4, решение $y(t)$ начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$. При этом справедлива оценка (2.1.23).*

Утверждение теоремы следует из теоремы 2.1.4, поскольку в силу условия (2.5.10) имеем

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\|\widetilde{H}\|}} < e^{-k\tau/2} \le e^{-\varepsilon(t)\tau/2}, \quad t \in [0, T].$$

Принимая во внимание обозначение (1.1.22), получим $\rho < e^{-\varepsilon(t)\tau/2}$, $t \in [0, T]$. Значит, $\rho < e^{-\varepsilon_{\max}\tau/2}$ и все условия теоремы 2.1.4 выполнены.

Таким образом, используя матрицы $H(t)$ из (2.5.1) и $K(s)$ из (2.5.2) или (2.5.8), получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.1.1), множества начальных вектор-функций $\varphi(t)$, при которых решение начальной задачи (2.1.8) определено при всех $t > 0$, и оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности.

Вопрос о выборе матриц $H(t)$ и $K(s)$, при которых полученные оценки дают наибольшую скорость убывания решений системы (2.1.1), пока остается открытым.

Заключение

Сформулируем кратко основные результаты диссертации.

1. Указаны множества начальных данных, при которых решение начальных задач для класса систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с постоянными коэффициентами в линейных членах существует на всей полупрямой $\{t > 0\}$, и получены оценки, характеризующие скорость убывания решений систем на бесконечности. Установленные оценки решений являются аналогами оценок Крейна для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Указаны множества начальных данных, при которых решение начальных задач для класса систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах существует на всей полупрямой $\{t > 0\}$, и получены оценки, характеризующие скорость убывания решений систем на бесконечности.

3. Из полученных результатов вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения рассматриваемых классов систем нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа.

При получении основных результатов применялся подход, основанный на использовании функционалов типа Ляпунова–Красовского, предложенных в работах Г.В. Демиденко и И.И. Матвеевой. В диссертации дается описание алгоритма построения функционалов такого типа.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

2. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. I // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 5. С. 745–754.

3. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. II // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 555–562.

4. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.

5. Алексенко Н.В., Романовский Р.К. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 2. С. 147–153.

6. Андреев А.С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автомат. и телемех. 2009. № 9. С. 4–55.

7. Андронов А.А., Майер А.Г. Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7, № 2–3. С. 95–106.

8. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983.

9. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.

10. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

11. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980.

12. Белых Л.Н. Анализ математических моделей в иммунологии. М.: Наука, 1988.

13. Березанский Л.М. Развитие W-метода Н.В. Азбелева в задачах устойчивости решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 739–750.

14. Ванг К.-Ш., Ву Дж. Периодические системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и динамика птичьего гриппа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 32–42.

15. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.

16. Гасилов Г.Л. О характеристическом уравнении системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздываниями // Изв. вузов. Матем. 1972. № 4. С. 60–66.

17. Германович О.П. Линейные периодические уравнения нейтрального типа и их приложения. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986.

18. Годунов С.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. 1994.

19. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.

20. Горяченко В.Д. Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1977.

21. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение, 1974.

22. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

23. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

24. Демиденко Г.В., Колчанов Н.А., Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Фадеев С.И. Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. выч. матем. матем. физ. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.

25. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284.

26. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

27. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

28. Демиденко Г.В. Матричные уравнения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2009.

29. Демиденко Г.В., Котова Т.В., Скворцова М.А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений нейтрального типа // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 3. С. 17–29.

30. Демиденко Г.В., Водопьянов Е.С., Скворцова М.А. Оценки решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими отклонениями аргумента // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 3. С. 53–60.

31. Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. (в печати).

32. Долгий Ю.Ф., Ким А.В. К методу функционалов Ляпунова для систем с последействием // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 8. С. 1313–1318.

33. Долгий Ю.Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1996.

34. Дэй У.А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974.

35. Зверкин А.М. Дифференциально-разностные уравнения с периодическими коэффициентами // В кн.: Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. С. 498–535.

36. Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1983.

37. Казаков А.Л., Лемперт А.А., Фунг Т.Б. Математическая модель управления запасами (поставками) с учетом запаздывания // Вестник ИрГТУ. 2012. № 4. С. 131–137.

38. Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1992.

39. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.

40. Комленко Ю.В., Тонков Е.Л. Представление Ляпунова–Флоке для дифференциальных уравнений с последействием // Изв. вузов. Матем. 1995. № 10. С. 40–45.

41. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наукова думка, 1989.

42. Кореневский Д.Г. Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах: авториз. пер. с укр. / НАН Украины, Институт математики. Киев: Академпериодика, 2008.

43. Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. мат. мех. 1956. Т. 20, № 3. С. 315–327.

44. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1959.

45. Крупнова Н.И., Шиманов С.Н. Признак устойчивости линейных систем с переменными коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. мат. мех. 1972. Т. 36, вып. 3. С. 533–536.

46. Любич Ю.И., Ткаченко В.А. К теории Флоке для уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 4. С. 648–656.

47. Мазко А.Г. Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Труды Института математики НАН Украины. Т. 28. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999.

48. Малыгина В.В. Об устойчивости уравнений с периодическими параметрами // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, 1987. С. 41–43.

49. Малыгина В.В. Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 10. С. 1716–1723.

50. Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I, II, III // Изв. вузов. Матем. 2013. № 6. С. 25–36; № 7. С. 3–15; № 8. С. 44–56.

51. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

52. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1980.

53. Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. Киев: Вища школа, 1979.

54. Михалевич В.С., Козорез В.В., Рашкован В.М., Хусаинов Д.Я., Чеборин О.Г. “Магнитная потенциальная яма” — эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем. Киев: Наукова думка, 1991.

55. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.-Л.: Гостехиздат, 1951; 2-е изд. М.: Наука, 1972.

56. Мышкис А.Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Матем. сб. 1951. Т. 28, № 3. С. 641–658.

57. Новожилова Ю.В., Рыскин Н.М., Усачева С.А. Нестационарные процессы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки // Журн. техн. физ. 2011. Т. 81, вып. 9. С. 16–22.

58. Перцев Н.В. Применение монотонного метода и М-матриц к анализу поведения решений некоторых моделей биологических процессов // Сиб. журн. индустр. матем. 2002. Т. 5, № 4. С. 110–122.

59. Перцев Н.В., Пичугин Б.Ю., Пичугина А.Н. Исследование асимптотического поведения решений некоторых моделей эпидемических процессов // Матем. биология и биоинформ. 2013. Т. 8, № 1. С. 21–48.

60. Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: ИЛ, 1961.

61. Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1942. Т. 6, № 3. С. 115–134.

62. Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. мат. мех. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512.

63. Разумихин Б.С. Прямой метод исследования устойчивости систем с последействием. Препринт. М.: ВНИИ системных исследований, 1984. 75 с.

64. Репин Ю.М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикл. мат. мех. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 564–566.

65. Рехлицкий З.И. Об устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Изв. АН СССР. 1966. Т. 30, № 5. С. 981–992.

66. Романовский Р.К., Троценко Г.А. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 444–453.

67. Романюха А.А., Руднев С.Г. Вариационный принцип в исследовании противоинфекционного иммунитета на примере пневмонии // Мат. мод. 2001. Т. 13, № 8. С. 65–84.

68. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969.

69. Свирежев Ю.М., Пасеков В.П. Основы математической генетики. М.: Наука, 1982.

70. Скворцова М.А. Асимптотическая устойчивость нулевого решения квазилинейных систем нейтрального типа // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2010. Т. 40. С. 307–311.

71. Скворцова М.А. Квазилинейные системы дифференциальных уравнений нейтрального типа // Материалы XLVIII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010. С. 64.

72. Скворцова М.А. Оценки решений и области притяжения нулевого решения систем квазилинейных уравнений нейтрального типа // Вестник ЮУрГУ. Серия: математическое моделирование и программирование. 2011. № 37 (254), вып. 10. С. 30–39.

73. Скворцова М.А. Об оценках решений систем квазилинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Материалы IV Международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование". Ч. 2. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2011. С. 149–153.

74. Скворцова М.А. Оценки решений уравнений нейтрального типа в области асимптотической устойчивости // Материалы XLIX Меж-

дународной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2011. С. 63.

75. Скворцова М.А. Оценки решений систем квазилинейных уравнений нейтрального типа // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тезисы докладов Международной научной конференции. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. С. 168–169.

76. Скворцова М.А. Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу. Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2012. С. 45–46.

77. Скворцова М.А. Асимптотические свойства решений систем квазилинейных уравнений нейтрального типа // IV Международная конференция молодых ученых “Дифференциальные уравнения и их приложения”, посвященная Я.Б. Лопатинскому. Тезисы докладов. Донецк: ДонНУ, 2012. С. 74.

78. Скворцова М.А. Асимптотические свойства решений систем уравнений нейтрального типа с переменным запаздыванием // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, вып. 4. С. 143–152.

79. Скворцова М.А. Асимптотическая устойчивость решений нелинейных систем уравнений нейтрального типа с переменным запаздыванием // Материалы 51-й Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013. С. 105.

80. Скворцова М.А. Об асимптотической устойчивости решений уравнений нейтрального типа // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов Международной научной конференции. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2013. С. 149–150.

81. Скворцова М.А. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа // Дифференциальные

уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Международная конференция, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева: Тезисы докладов. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2013. С. 254.

82. Скворцова М.А. Оценки решений уравнений нейтрального типа с переменным запаздыванием // Крымская Международная математическая конференция. Тезисы докладов. Т. 2. Симферополь: Изд-во КНЦ НАНУ, 2013. С. 15–16.

83. Солодов А.В., Солодова Е.А. Системы с переменным запаздыванием. М.: Наука, 1980.

84. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

85. Фунг Т.Б., Лемперт А.А. О моделировании процесса управления запасами с учетом запаздывания для двух видов товаров // Вестник ИрГТУ. 2013. № 9. С. 43–52.

86. Халанай А. Теория устойчивости линейных периодических систем с запаздыванием // Acad. Répub. Popul. Roum., Rev. Math. Pures Appl. 1961. V. 6. P. 633–653.

87. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

88. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

89. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

90. Хусаинов Д.Я., Иванов А.Ф., Кожаметов А.Т. Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.

91. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т. Сходимость решений неавтономных систем нейтрального типа // Изв. вузов. Матем. 2006. № 1. С. 68–72.

92. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963.

93. Чеботарёв Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. МИАН СССР. 1949. Т. 26. С. 3–331.

94. Шильман С.В. Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.

95. Шиманов С.Н. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1983.

96. Эльсгольц Л.Э. Качественные методы в математическом анализе. М.: ГИТТЛ, 1955.

97. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964.

98. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

99. Baštinec J., Diblík J., Khusainov D.Ya., Ryvolová A. Exponential stability and estimation of solutions of linear differential systems of neutral type with constant coefficients // Bound. Value Probl. 2010, Art. ID 956121, 20 pp.

100. Bulgak A., Bulgak H. Linear algebra. Konya: Selcuk University, 2001.

101. Demidenko G.V., Matveeva I.I. On asymptotic stability of solutions to nonlinear systems of differential equations with periodic coefficients // Selcuk J. Appl. Math. 2002. V. 3, No. 2. P. 37–48.

102. Demidenko G.V. Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, No. 3. P. 119–130.

103. Erneux T. Applied delay differential equations. Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, V. 3. New York: Springer, 2009.

104. Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Mathematics and its Applications, V. 74. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

105. Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. Stability of time-delay systems. Control Engineering. Boston: Birkhäuser, 2003.

106. Hahn W. On difference differential equations with periodic coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1961. V. 3, No. 1. P. 70–101.

107. Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. V. 39, No. 1. P. 15–20.

108. Kharitonov V.L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems // Systems Control Lett. 2004. V. 53, No. 5. P. 395–405.

109. Kharitonov V., Mondié S., Collado J. Exponential estimates for neutral time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50, No. 5. P. 666–670.

110. Kharitonov V.L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Control Engineering. New York: Birkhäuser/Springer, 2013.

111. Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D. Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. Mathematics and its Applications, V. 463. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

112. Krisztin T. On stability properties for one-dimensional functional differential equations // Funkc. Ekvacioj. 1991. V. 34, No. 2. P. 241–256.

113. Kuang Y. Delay differential equations with applications in population dynamics. Mathematics in Science and Engineering, V. 191. Boston: Academic Press, 1993.

114. MacDonald N. Biological delay systems: linear stability theory. Cambridge Studies in Mathematical Biology, V. 8. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

115. Mondié S., Kharitonov V.L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50, No. 2. P. 268–273.

116. Richard J.P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. 2003. V. 39. P. 1667–1694.

117. Stokes A.P. A Floquet theory for functional differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V. 48, No. 8. P. 1330–1334.

118. Vielle B., Chauvet G. Delay equation analysis of human respiratory stability // Math. Biosci. 1998. V. 152. P. 105–122.

119. Wolkowicz G.S.K., Xia H. Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays // SIAM J. Appl. Math. 1997. V. 57, No. 4. P. 1019–1043.

120. Yorke J.A. Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations // J. Differ. Equations. 1970. V. 7. P. 189–202.