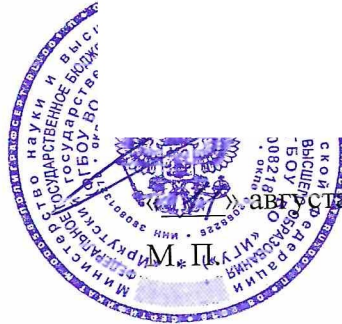


Ректор федерального государственного
бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Иркутский государственный
университет»
~~доктор~~ химических наук,

августа 2026 г.



федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Иркутский государственный университет»
на диссертационную работу Старицына Максима Владимировича
**«Вариационный анализ задач оптимального управления
в бесконечномерных пространствах»,**
представленную на соискание ученой степени доктора физико-
математических наук по специальности 1.1.2 – «Дифференциальные
уравнения и математическая физика»

Диссертационная работа М. В. Старицына посвящена вариационному анализу нелинейных задач оптимального управления, включая задачи с фазовыми переменными в бесконечномерных пространствах. Центральная проблема исследования состоит в получении необходимых условий оптимальности, способных дать содержательную информацию об исследуемом процессе в тех случаях, когда принцип максимума Понтрягина (ПМП) и известные условия высших порядков не позволяют исключить неоптимальные экстремали либо приводят к тривиальным соотношениям. Для решения этой задачи автор развивает подход, основанный на канонической

линеаризации управляемой системы и точных формулах приращения целевого функционала.

Актуальность темы исследования определяется как внутренними потребностями теории оптимального управления, так и задачами построения эффективных методов анализа и решения соответствующих задач: классические необходимые условия, как правило, характеризуют лишь локальную экстремальность процесса относительно отдельных классов малых вариаций управления, а соответствующие методы улучшения подразумевают решение задач параметрического поиска. Поэтому получение более сильных условий и соответствующих монотонных процедур спуска представляет существенный теоретический и прикладной интерес.

Другая группа изучаемых в работе вопросов связана с управлением уравнениями неразрывности и баланса на пространствах мер. Такие уравнения описывают эволюцию систем с распределенными параметрами и неопределенностью. Для нелокальных уравнений неразрывности известны формы принципа максимума и динамического программирования, однако условия высших порядков фактически неизвестны. Для нелокальных уравнений баланса до недавнего времени не был разработан даже базовый аппарат теории управления, включая результаты, соответствующие ПМП.

Наконец, актуальной является поставленная в диссертации задача импульсного управления в среднем поле. С ней связан широкий круг вопросов, выходящих за пределы классической теории: переход к импульсному управлению в среднем поле требует построения расширенного класса траекторий и строгого описания соответствующих пространственно-временных преобразований и топологий. Отдельную задачу составляет вывод необходимых условий оптимальности для полученной импульсной динамики.

Задачи диссертации и место работы в теории дифференциальных уравнений и оптимального управления

Развиваемый в работе подход наиболее наглядно описан для типовой задачи терминального управления без фазовых ограничений. Нелинейная

управляемая система погружается в линейную систему на пространстве мер, а целевой функционал представляется линейной формой. Классические соотношения двойственности в полученной линейной задаче дают специальную формулу приращения функционала. Эта формула верна для любой пары управлений, не включает каких-либо асимптотических разложений по параметрам варьирования и сохраняет точную нелинейную зависимость от траектории сравнения. Ту же формулу можно получить непосредственно, вычисляя полную производную целевой функции по начальному состоянию вдоль траектории сравнения.

Поточечная минимизация подынтегрального выражения приводит к позиционному правилу выбора управления. Совместно с управляемой динамикой это правило определяет процесс сравнения, а точная формула приращения позволяет установить, обеспечивает ли он уменьшение функционала. Невозможность такого уменьшения для оптимального процесса приводит к новому необходимому условию.

Предложенная схема реализована для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на банаховом пространстве, стохастических систем, а также локальных и нелокальных уравнений неразрывности и уравнений баланса. Поэтому ее значение не ограничивается одной частной постановкой.

Оценка структуры и основного содержания диссертации и автореферата

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 209 страниц. Список использованных источников включает 262 наименования.

Во введении сформулированы цели исследования; охарактеризованы актуальность и степень разработанности проблемы; приведены положения, выносимые на защиту; выделены научная новизна, теоретическая и практическая значимость, апробация и личный вклад автора.

Первая глава имеет методологический характер и служит концептуальной основой последующих разделов. Здесь на абстрактном уровне изложен общий подход к вариационному анализу задач динамической оптимизации без фазовых ограничений. Вводятся управляемые потоки на метрическом пространстве, классы допустимых управлений, внешний генератор потока и принцип погружения нелинейной системы в двойственную пару линейных систем. Обосновываются дифференциальные представления фазовой и сопряженной систем, формулируется каноническая линейная задача и выводятся точные формулы приращения функционала. Далее формулируется и анализируется необходимое условие оптимальности, интерпретируемое автором как условие «бесконечного порядка». Основная ценность главы состоит в объединении довольно общих функционально-аналитических приемов в единую схему вывода точных формул приращения и позиционных условий экстремума без предположения о линейной структуре фазового пространства, что обеспечивает возможность переноса разрабатываемого аппарата на существенно различные классы управляемых систем, включая динамические системы на метрическом пространстве мер.

Вторая глава посвящена задачам управления обыкновенными и стохастическими системами, а также ансамблями траекторий. Сначала изучаются аналитические свойства потоков решений ОДУ на банаховом пространстве. Затем полученные ранее точная формула приращения и позиционное условие уточняются для задачи управления ОДУ. Показана связь с классическими малыми вариациями функционала, условиями высших порядков и позиционным принципом минимума. Приведенные примеры демонстрируют случаи, в которых новое условие исключает особые процессы, удовлетворяющие ПМП и другим известным принципам экстремума. Завершается глава переносом предложенной схемы на стохастические дифференциальные уравнения и соответствующие уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Основную ценность главы представляют строгая реализация общего подхода для базового класса ОДУ на банаховом

пространстве, а также примеры, показывающие, что новое необходимое условие не сводится к ПМП и позволяет исключать особые экстремали, удовлетворяющие известным условиям высших порядков.

В третьей главе исследуются нелокальные уравнения переноса и баланса на пространствах мер. Воспроизводится необходимый аппарат анализа функций от меры и нелокальных потоков. Уравнение неразрывности рассматривается как динамическая система на пространстве вероятностных мер и одновременно как ОДУ на подходящем банаховом пространстве отображений. Показано, что управляемые уравнения баланса специального типа на пространстве неотрицательных мер сводятся к уравнению неразрывности на расширенном пространстве вероятностных мер. Редукция основана на барицентрическом представлении и позволяет перенести на исходную задачу формулы приращения и позиционные условия оптимальности. Эта глава является одной из ключевых в диссертации, поскольку именно здесь общий вариационный аппарат применяется к задаче управления нелинейной системой на метрическом пространстве, не обладающем векторной структурой.

Четвертая глава посвящена импульсному управлению в среднем поле. Для вырожденной задачи управления нелокальным уравнением неразрывности строится импульсно-траекторное расширение в классе функций ограниченной вариации. Приводится известная формулировка ПМП в терминах гамильтоновой системы на кокасательном расслоении евклидова пространства и эквивалентная новая форма того же результата с выделенной сопряженной системой, удобной для численного анализа и сопоставления с позиционными условиями минимума. Выделение сопряженной траектории представляет собой весьма нетривиальный шаг и опирается на выявленную автором барицентрическую структуру динамики по сопряженной компоненте; подобный прием не встречался в предшествующих работах по теории управления в пространствах мер. Этот раздел отражает самостоятельное направление исследования, логически связанное с результатами третьей

главы. Пространственно-временное преобразование и явное выделение сопряженной системы принципа максимума создают основу для разработки численных методов оптимального импульсного управления в условиях неопределенности и случайных возмущений.

Диссертация имеет логически выстроенную структуру и представляет собой завершенное научное исследование. Автореферат соответствует содержанию диссертации, последовательно отражает ее основные положения и результаты и дает достаточное представление о личном вкладе соискателя. Основные результаты диссертации достаточно полно отражены в опубликованных работах соискателя.

Научная новизна и основные результаты

Научная новизна работы определяется совокупностью взаимосвязанных результатов. К основным из них относятся следующие.

1. Разработан общий подход к вариационному анализу нелинейных задач оптимального управления без фазовых ограничений, основанный на канонической линеаризации и точных представлениях приращения целевого функционала. Подход формулируется для управляемых потоков на метрическом пространстве и не требует априорной линейной структуры фазового пространства.

2. Для задач управления ОДУ на банаховом пространстве и нелокальными уравнениями неразрывности получены точные формулы приращения функционала и позиционные необходимые условия оптимальности. Установлена их связь с принципом максимума Понтрягина, вариациями фиксированного порядка и известным позиционным принципом минимума.

3. Для нелокальных уравнений баланса на пространстве неотрицательных мер с полулинейным источником предложена редукция к уравнению неразрывности на пространстве вероятностных мер. Эта редукция

сохраняет управляемую динамику в форме, достаточной для переноса аппарата вариационного анализа.

4. Для вырожденной задачи управления нелокальным уравнением неразрывности построено импульсно-траекторное расширение и поставлена задача оптимального импульсного управления в среднем поле.

5. Для импульсной задачи получены явная сопряженная система и новая форма принципа максимума Понтрягина, в которой фазовая и сопряженная подсистемы записаны отдельно.

Результаты первых трех глав объединены общим способом вывода точных формул приращения и позиционных условий. Сведение уравнений баланса к уравнению неразрывности расширяет область применения этого подхода. Результаты четвертой главы образуют самостоятельное направление, логически связанное с остальными. В совокупности полученные результаты образуют завершенное научное исследование.

Степень обоснованности и достоверности результатов

Результаты диссертации сформулированы в виде определений, лемм, утверждений и теорем с подробными доказательствами. Доказательства опираются на аппарат функционального анализа, теории меры, обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений, транспортных уравнений на пространствах мер и математической теории оптимального управления. Для каждого класса моделей отдельно проверяются существование и единственность потоков, измеримость и интегрируемость используемых отображений, непрерывность относительно управления и правомерность применения соотношений двойственности.

Особое значение имеет то, что точные формулы приращения выводятся из тождеств двойственности, а не из формальных разложений. При переходе к пространствам мер автор последовательно различает слабую и слабую* топологии, использует характеристические представления решений и обосновывает корректность производных функций от меры. В разделах,

посвященных импульсному управлению, отдельно проверяются эквивалентность преобразованных постановок и согласованность пространственно-временной параметризации.

Достоверность результатов подтверждается также их согласованностью с известными частными случаями. В линейных по состоянию задачах полученные формулы воспроизводят известные представления такого типа; первая вариация приводит к принципу максимума Понтрягина; в гладких моделях прослеживается связь с условиями высших порядков. Теоретические выводы иллюстрируются примерами и численными реализациями в опубликованных работах автора.

Теоретическая и практическая значимость

Теоретическая значимость диссертации состоит в построении единого вариационного аппарата для ряда нелинейных задач управления в бесконечномерных пространствах. Работа уточняет взаимосвязь между точными формулами приращения, классическими и позиционными условиями экстремума. Полученные результаты расширяют теорию управления уравнениями на пространствах мер и создают основу для дальнейшего исследования задач с ограничениями, дифференциальных игр и систем более общего типа.

Практическая значимость определяется конструктивным характером полученных условий оптимальности. Позиционное правило выбора управления задает способ построения траектории сравнения и может быть непосредственно использовано в процедурах последовательного улучшения управлений. В диссертации и связанных с ней публикациях этот подход доведен до алгоритмических схем для задач управления ОДУ, уравнениями неразрывности и импульсными системами. Результаты могут применяться при разработке численных методов управления ансамблями траекторий, распределениями и уравнениями в частных производных.

Рекомендации по использованию результатов диссертации

Результаты первых трех глав рекомендуется использовать при разработке и теоретическом обосновании алгоритмов последовательного улучшения управления для ОДУ на банаховых пространствах, нелокальных уравнений неразрывности и уравнений баланса, а также в исследованиях по управлению распределениями и ансамблями траекторий. Результаты четвертой главы могут служить основой для дальнейшей разработки численных методов анализа импульсных процессов в условиях неопределенности и случайных возмущений.

С учетом научной тематики результаты диссертации рекомендуются к использованию в исследованиях Института проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН и Института программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, в частности, по направлениям математической теории управления, динамических систем и дифференциальных уравнений.

Ряд результатов диссертации может быть использован при подготовке учебных дисциплин и специальных курсов в организациях высшего образования, в которых читаются курсы по теории оптимального управления и вариационному исчислению, в частности, в Иркутском государственном университете, Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы и Новосибирском государственном университете.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в научных журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций, либо индексируемых в международных базах Scopus и Web of Science. Среди изданий – «Математический сборник», «Сибирский математический журнал», «Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика», Journal of Differential Equations, Applied Mathematics & Optimization, Journal of

Global Optimization, Systems & Control Letters, Optimization Letters и IEEE Control Systems Letters.

Результаты докладывались на представительных российских и международных конференциях, а также на семинарах различных научных центров.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

Содержание диссертации соответствует научной специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика». Результаты о необходимых условиях оптимальности, принципе максимума Понтрягина, позиционных условиях экстремума и импульсно-траекторных расширениях относятся к направлению «дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений в задачах оптимального управления и вариационного исчисления». Результаты об уравнениях неразрывности и баланса на пространствах мер соответствуют направлениям «общая теория дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений» и «нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений».

Замечания по содержанию и оформлению работы

Высокая общая оценка диссертационной работы не исключает ряда замечаний и вопросов, которые представляются полезными для обсуждения.

1. Применительно к ОДУ главные результаты диссертации связаны с точной (без остаточных членов) формулой приращения функционала (оригинальная конструкция) и нелокальным (позиционным) условием оптимальности для общей задачи терминального управления.

Новые результаты требуют для научного признания разносторонней характеристики, что в недостаточной мере проведено в работе. Прежде всего это касается формы представления полученного условия оптимальности. Классический ПМП необходимо связан с сопряженной вектор-функцией. В

диссертации, конечно, указывается, что эта вектор-функция есть градиент «функции цены», однако конечный результат формулируется и используется в примерах без сопряженной переменной (за счет сужения функции Понтрягина), что весьма затрудняет его восприятие и оценку с позиций ПМП.

Более того, с формулировкой результата непосредственно связана его численная реализация (применение). Использование сопряженной системы органично вписывается в традиционную схему реализации ПМП и позволяет существенно уменьшить вычислительную трудоемкость процедуры нелокального улучшения за счет замены вычисления фундаментальной матрицы фазовой системы решением сопряженного уравнения. Кроме того, не совсем понятно, где именно фигурируют позиционные управления в рамках позиционного условия оптимальности.

Наконец, желательно выделить и обсудить нетривиальную ситуацию, когда задача на минимум функции Понтрягина имеет единственное решение (сильно выпуклая функция на выпуклом множестве).

2. В диссертации заявляется в качестве одной из целей исследования сокращение разрыва между необходимыми и достаточными условиями оптимальности. Тем не менее в работе почти не обсуждается проблематика достаточных условий в сравнении, например, с динамическим программированием.

Как известно, ПМП является критерием оптимальности в линейно-выпуклых задачах, что выводит их на уровень глобального решения. Полученная формула приращения позволяет без труда сформулировать и обсудить достаточное условие в общей задаче. Более важно было бы выделить явным образом класс задач, для которых позиционное условие является достаточным. Пока такое свойство имеет место только для простейшей задачи (линейная система, линейный функционал), применительно к которой ПМП и позиционное условие совпадают.

3. В диссертации практически не обозначен исторический контекст, связанный с многочисленными публикациями и незаурядными результатами

представителей Иркутской школы оптимального управления, основателем которой является заслуженный профессор Иркутского государственного университета О.В.Васильев. Целесообразно было бы более подробно показать соотношение полученных результатов с известными ранее точными формулами приращения в линейно-квадратичных задачах, нелокальными методами улучшения, позиционными условиями оптимальности и т. д. Это позволило бы, сохраняя преемственность исследований, точнее отделить использованные ранее идеи и подходы от их новой реализации в диссертации.

4. Геометрическая интерпретация общего принципа изложена достаточно кратко по сравнению с аналитической частью. Ее можно было бы усилить явным описанием геометрии множеств уровня и подуровня функции цены и условий их инвариантности.

Указанные замечания не ставят под сомнение корректность доказанных результатов и не снижают общей положительной оценки диссертации.

Заключение

На основании анализа диссертации, автореферата и публикаций автора считаем, что диссертационная работа Старицына Максима Владимировича «Вариационный анализ задач оптимального управления в бесконечномерных пространствах» представляет собой завершенное самостоятельное научно-квалификационное исследование. В ней разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение, и получены новые результаты, имеющие существенное значение для развития теории дифференциальных уравнений и оптимального управления.

С точки зрения актуальности, научной новизны, степени обоснованности, теоретической и практической значимости диссертация соответствует требованиям пунктов 9–14 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на

соискание ученой степени доктора наук. Автор диссертации Старицын Максим Владимирович заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.2 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

Настоящий отзыв обсужден и одобрен на заседании научно-методического семинара кафедры вычислительной математики и оптимизации Института математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» 25 июня 2026 г., протокол № 6.

Заведующий кафедрой вычислительной математики и оптимизации Института математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «ИГУ», доктор физико-математических наук, профессор А 2 А. В. Аргучинцев

Профессор кафедры вычислительной математики и оптимизации Института математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «ИГУ», доктор физико-математических наук, профессор В 1 В. А. Срочко

Аргучинцев Александр Валерьевич, e-mail: arguch@math.isu.ru
Срочко Владимир Андреевич, e-mail: srochko@math.isu.ru

Контактная информация организации:

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет». Адрес: 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, д. 1; телефон: (3952) 521-900. Сайт: <https://isu.ru>; e-mail: rector@isu.ru.

