Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук
(ИДСТУ СО РАН)

На правах рукописи

Баркова Мария Владимировна

ПОИСК ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

09.06.01 — Информатика и вычислительная техника

05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации
(по отраслям)

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД
об основных результатах научно-квалификационной работы (диссертации)
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Иркутск — 2019

Работа выполнена в лаборатории 6.1. Невыпуклой оптимизации отделения 6. Методов невыпуклой и комбинаторной оптимизации ИДСТУ СО РАН.

Научный руководитель:	**Стрекаловский Александр Сергеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, зав. отделением 6 ИДСТУ СО РАН
Рецензенты:	**Лемперт Анна Ананьевна**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ИДСТУ СО РАН
	Массель Алексей Геннадьевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник ИСЭМ СО РАН

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Научно-квалификационная работа посвящена исследованию невыпуклых задач квадратичной оптимизации, в частности задач с квадратичной целевой функцией и квадратичными ограничениями-неравенствами. Такие задачи относятся к классу невыпуклых задач, который вызывает большой интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Теоретический интерес к подобным задачам объясняется тем, что они характеризуются многоэкстремальностью, т.е. обладают большим количеством локальных решений и стационарных точек, весьма далеких даже по значению целевой функции от глобального решения. Из-за этого классические методы выпуклой оптимизации (градиентные, квазиньютоновские, SQP-методы, метод внутренней точки, метод доверительных областей и др.) оказываются неэффективными и неоперабельными с точки зрения отыскания глобального решения. Поэтому разработка эффективных алгоритмов поиска оптимальных решений в невыпуклых задачах оптимизации является актуальной задачей современных теории и методов оптимизации.

Вместе с тем, актуальность исследования невыпуклых задач объясняется широким полем приложений в различных сферах человеческой деятельности (в технике, экологии, экономике), например, в таких современных областях как машинное обучение, интеллектуальный анализ данных, распознавание образов. В качестве такого приложения в работе рассмотрено решение систем нелинейных уравнений.

К настоящему моменту для задач невыпуклой оптимизации до сих пор не создано единой универсальной теории глобального экстремума, широко известной в литературе и используемой на практике. Несмотря на это, можно отметить множество специалистов, занимающихся разработкой теории и методов решения невыпуклых задач оптимизации. Среди них H. Tuy, J. Toland, J.-B. Hiriart-Urruty. Значительный вклад в развитие методов решения задач невыпуклой оптимизации внесли Le Thi Hoai An и Pham Dinh Tao, обосновавшие подход к решению невыпуклых задач оптимизации, предложеный H. Tuy, который на сегодняшний день применяется для решения множества практических задач. Среди отечественных ученых в области глобальной оптимизации можно упомянуть коллектив научной школы Р.Г. Стронгина (ННГУ, Нижний Новгород): Я.Д. Сергеева, В.П. Гергеля, и др.; а также В.П. Булатова, О.В. Хамисова (ИСЭМ СО РАН, Иркутск). Исследованиями невыпуклых постановок для задач дискретной оптимизации занимается несколько групп ученых из Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск) под руководством В.Л. Береснева, А.В. Ерзина, А.В. Кельманова, Ю.А. Кочетова и др.

Большинство представленных в литературе подходов для решения невыпуклых задач квадратичной оптимизации основаны на процедурах последовательных разбиений или методах ветвления, как, например, метод отсечений, метод ветвей и границ или метод внешней и внутренней аппроксимации. С одной стороны, они характеризуются простотой геометрических построений: ветвление в таких методах используется для разбиения допустимой области задачи на более мелкие области, а ограничения применяются для "удаления" неоптимальных ветвей. С другой стороны, геометрические построения для разбиения допустимой области ведут к тому, что такие методы страдают "проклятием размерности", когда объем вычислительных затрат растет экспоненциально с ростом размерности задачи. Вместе с тем, в этих подходах отсутствуют связи с классической теорией и методами оптимизации.

Таким образом, разработка новых эффективных численных методов решения квадратичных задач невыпуклой оптимизации, лишенных указанных недостатков, например, с использованием теории глобального поиска А.С. Стрекаловского, лежит на переднем крае исследований современной математической оптимизации.

Цель научно-квалификационной работы заключается в разработке новых методов глобального поиска для невыпуклых задач квадратичной оптимизации с квадратичными ограничениями-неравенствами, основанных на условиях глобальной оптимальности А.С. Стрекаловского, в разработке специальных методов локального поиска, а также в применении разработанной теории для решения невыпуклых квадратичных задач оптимизации.

Основными задачами исследования являются:

1. Анализ современного состояния, существующих методов и программных средств для решения невыпуклых задач квадратичной оптимизации.

2. Разработка методики генерации тестовых примеров с известными глобальными решениями различной сложности и размерности.

3. Разработка, обоснование и программная реализация методов локального поиска в невыпуклых квадратичных задачах с квадратичными ограниче-

ниями-неравенствами, их тестирование и сравнение с современными коммерческими решателями.

4. Изучение нового подхода к проблеме глобального поиска в невыпуклых квадратичных задачах оптимизации, основанного на условиях глобальной оптимальности А.С. Стрекаловского. Обоснование схем глобального поиска и их тестирование в ходе решения систем нелинейных уравнений с квадратичными функциями.

Объект исследования. В работе были выбраны следующие объекты невыпуклой квадратичной оптимизации: задача минимизации невыпуклой квадратичной функции на некотором невыпуклом множестве, заданном квадратичными ограничениями-неравенствами и системы нелинейных уравнений (с квадратичными функциями).

Предмет исследования. Новые эффективные методы поиска локальных и глобальных решений в невыпуклых задачах квадратичной оптимизации.

Методы исследования. При выполнении работы использовался аппарат математического программирования, элементы выпуклого анализа, а также новейшие достижения теории глобального и локального экстремума, в частности теоремы сходимости методов оптимизации. Верификация разработанного теоретического фундамента осуществлялась посредством вычислительного эксперимента и анализа его результатов.

Научная новизна научно-квалификационной работы заключается в разработке двух новых методов локального поиска с обоснованием их сходимости. На основе условий глобальной оптимальности А.С. Стрекаловского для минимизирующих последовательностей вспомогательной (оштрафованной) задачи предложена и обоснована общая схема глобального поиска в исходной задаче d.c. оптимизации. Проведено тестирование новых методов локального поиска, продемонстрировавшее их сравнительную эффективность по отношению к известным пакетам прикладных программ. На основе построенной теории глобального поиска разработан и протестирован новый подход к решению систем нелинейных квадратичных уравнений, который доказал свою эффективность во время численного эксперимента.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретические результаты работы могут быть использованы при исследовании более сложных задач невыпуклой оптимизации, например, таких как задачи с ограничениямиравенствами, нелинейные задачи дополнительности, полиномиальные системы нелинейных уравнений. Разработанные комплексы программ могут использоваться для решения прикладных задач оптимизации. Так, например, с помощью разработанных программных средств была смоделирована и решена задача максимизации процента содержания меди в коллективном концентрате, возникающая во время процесса флотации медно-молибденовых руд на горно-обогатительном комбинате [1, 9, 12]. Также была исследована геометрическая задача упаковки кругов (шаров) максимального радиуса внутри некоторого выпуклого множества, имеющая приложения в экономике, технике и других областях [2–4, 6].

Соответствие специальности. В соответствии с паспортом и областью исследований специальности 05.13.01 в научно-квалификационной работе проведено теоретическое исследование сложных задач оптимизации — невыпуклых задач квадратичной оптимизации (п. 1), разработаны методы решения этих оптимизационных задач (п. 4), разработано специальное математическое и программное обеспечение для решения данных оптимизационных задач (п. 5).

Достоверность полученных результатов обусловлена строгостью математических доказательств теорем сходимости локальных и глобальных схем поиска, экспертной оценкой на стадии рецензирования публикаций в ведущих научных изданиях, а также апробацией и обсуждением результатов на научных конференциях. Кроме того, успешными результатами численного и сравнительного тестирования разработанных методов локального и глобального поисков.

Апробация результатов работы. Результаты научно-квалификационной работы докладывались и обсуждались на X Международной конференции по оптимизации “Techniques and Applications” (ICOTA) (Монголия, Улан-Батор, 2016), XVII Байкальской международной школе-семинаре “Методы оптимизации и их приложения” (Бурятия, с. Максимиха, 2017), V Международной школе-семинаре “Нелинейный анализ и экстремальные задачи” (Иркутск, 2016), XIII Всероссийской конференции молодых ученых “Моделирование, оптимизация и информационные технологии – 2017” (Иркутск – Старая Ангасолка, 2017), ежегодных конференциях ИДСТУ СО РАН “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 2016–2018).

Положения, выносимые на защиту:

1. Разработка и обоснование двух новых методов локального поиска и исследование их сходимости.

2. Реализация программных комплексов для методов локального поиска и их сравнительное тестирование с известными пакетами прикладных программ.

3. Разработка программного комплекса решения систем нелинейных квадратичных уравнений на основе вариационного подхода и теории глобального поиска. Сравнительный вычислительный эксперимент по численному решению систем нелинейных квадратичных уравнений.

Публикации и личный вклад автора. По материалам научно-квалификационной работы (диссертации) опубликовано 13 работ, список которых приведен в конце научного доклада. В число указанных работ входят статьи [1–4], опубликованные в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертаций.

Постановка исследуемых в работе задач осуществлена А.С. Стрекаловским, им же доказаны условия глобальной оптимальности для оштрафованой задачи. Разработка, исследование сходимости и программная реализация новых методов локального поиска в невыпуклой задаче квадратичной оптимизации, а также разработка методики генерации тестовых задач различной сложности с известными глобальными решениями проведены автором лично.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведена постановка исследуемой задачи, представлена классификация задач с d.c. функциями, приведен обзор актуальных приложений подобного рода задач, обоснована актуальность исследований, показана научная новизна работы и приведена информация об апробации результатов. Коротко излагается содержание диссертационной работы.

Первая глава посвящена теоретическому исследованию невыпуклой квадратичной задачи с квадратичными ограничениями-неравенствами и вспомогательной оштрафованной задачи d.c. минимизации.

В разделе 1.1 представлены некоторые сведения о задачах с d.c. функциями и описаны основные свойства пространства d.c. функций.

Далее, в разделе 1.2 рассмотрен класс квадратичных невыпуклых задач с d.c. функциями. Представлены примеры прикладных задач исследуемого класса, и получено d.c. разложение в виде разности двух сильно выпуклых функций.

В разделе 1.3 с помощью теории точного штрафа произведена редукция рассматриваемой общей задачи d.c. оптимизации

$$\left.\begin{aligned} &f_0(x) := g_0(x) - h_0(x) \downarrow \min_x, \quad x \in S, \\ &f_i(x) := g_i(x) - h_i(x) \le 0, \quad i \in \mathcal{I} \triangleq \{1, ..., m\}, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{P})$$

где $g_i(\cdot)$, $h_i(\cdot)$ — выпуклые, квадратичные функции, $S \subset I\!R^n$ — выпуклое и замкнутое множество, к вспомогательной (оштрафованой) задаче d.c. минимизации без ограничений

$$\Theta_\sigma(x) := f_0(x) + \sigma \max\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\} \downarrow \min_x, \quad x \in S. \qquad (\mathcal{P}_\sigma)$$

Показано, что целевая функция $\Theta_\sigma(\cdot)$ представима в виде разности двух выпуклых функций, т.е. является d.c. функцией, так что

$$\Theta_\sigma(x) = G_\sigma(x) - H_\sigma(x),$$

где функции

$$G_\sigma(x) = g_0(x) + \sigma \max\left\{\sum_{p\in\mathcal{I}} h_p(x); \ \left[g_i(x) + \sum_{p\in\mathcal{I}}^{p\neq i} h_p(x)\right], \ i \in \mathcal{I}\right\},$$

$$H_\sigma(x) = h_0(x) + \sigma \sum_{p\in\mathcal{I}} h_i(x)$$

являются выпуклыми функциями.

Далее, в разделе 1.4 представлены полученные А.С. Стрекаловским необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности (УГО) для оштрафованной задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$, а в разделе 1.5 эти условия обобщаются на минимизирующие последовательности.

В разделе 1.6 на основе УГО предлагается стратегия глобального поиска в задаче $(\mathcal{P}_\sigma)$, сходимость которой изучена в разделе 1.7.

Вторая глава посвящена разработке численных методов локального поиска для решения невыпуклых квадратичных задач.

В разделе 2.1 рассмотрены два метода локального поиска в задаче $(\mathcal{P})$: МЛП1 — метод последовательного решения линеаризованной исходной задачи $(\mathcal{P})$ и МЛП2 — метод итеративного решения линеаризованной вспомогательной оштрафованной задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$.

Первый метод использует идею линеаризации по базовой невыпуклости не только целевой функции, но и функций ограничений исходной задачи.

Пусть в задаче $(\mathcal{P})$ задано некоторое начальное приближение $x^0 \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — допустимое множество задачи $(\mathcal{P})$:

$$\mathcal{F} := \{x \in S \mid f_i(x) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I}\}.$$

Далее, если известна допустимая точка $x^s \in \mathcal{F}$, то следующую итерацию x^{s+1} будем искать как приближенное решение линеаризованной в точке x^s задачи:

$$\left\{\begin{array}{c} \Phi_{0s}(x) := g_0(x) - \langle \nabla h_0(x^s), x\rangle \downarrow \min\limits_x, \quad x \in S, \\ \Phi_{is}(x) := g_i(x) - \langle \nabla h_i(x^s), x - x^s\rangle - h_i(x^s) \leq 0, \quad i \in \mathcal{I}. \end{array}\right. \tag{$\mathcal{P}L_s$}$$

Кроме того, каждая новая сгенерированная точка $x^{s+1} \in Sol(\mathcal{P}L_s)$ является допустимой не только в линеаризованной задаче $(\mathcal{P}L_s)$, но и в исходной задаче: $x^{s+1} \in \mathcal{F}$.

Таким образом, допустимая точка x^{s+1} удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Phi_{0s}(x^{s+1}) := g_0(x^{s+1}) - \langle \nabla h_0(x^s), x^{s+1}\rangle \leq \mathcal{V}(\mathcal{P}L_s) + \delta_s, \tag{1}$$

где $\mathcal{V}(\mathcal{P}L_s)$ — оптимальное значение задачи $(\mathcal{P}L_s)$:

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}L_s) := \inf_x \{g_0(x) - \langle \nabla h_0(x^s), x\rangle \mid x \in \mathcal{F}_s\},$$

и последовательность δ_s такова, что

$$\delta_s \geq 0, \quad s = 1, 2, \ldots, \sum^{\infty} \delta_s < \infty.$$

Теорема 1. *Последовательность $\{x^s\}$, сгенерированная по правилу (1), удовлетворяет следующим условиям:*

i) $\{x^s\} \subset \mathcal{F}$, x^{s+1}, $x^s \in \mathcal{F}_s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$;

ii) числовые последовательности $\{f_{0s} := f_0(x^s)\}$ *и* $\{\Delta\Phi_{0s}\}$, *где*

$$\Delta\Phi_{0s} := \Phi_{0s}(x^s) - \Phi_{0s}(x^{s+1}),$$

сходятся в следующем смысле:

$$\begin{cases} \textit{а)} \ \lim\limits_{s\to\infty} f_{0s} = f_{0*} \geq \mathcal{V}(\mathcal{P}); \\ \textit{б)} \ \lim\limits_{s\to\infty} \Delta\Phi_{0s} = 0; \\ \textit{в)} \ \lim\limits_{s\to\infty} \Big[\mathcal{V}(\mathcal{P}\mathcal{L}_s) - \Phi_{0s}(x^{s+1})\Big] = 0. \end{cases}$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что в качестве критерия останова МЛП1 можно использовать одно из следующих неравенств:

$$\begin{cases} \text{а)} \ f_0(x^s) - f_0(x^{s+1}) \leq \dfrac{\tau}{2}; \\ \text{б)} \ \Phi_{0s}(x^s) - \Phi_{0s}(x^{s+1}) := g_0(x^s) - g_0(x^{s+1}) - \langle \nabla h_0(x^s), x^s - x^{s+1}\rangle \leq \dfrac{\tau}{2}, \end{cases}$$

где τ — заданная точность.

Второй метод (МЛП2) базируется на сведении исходной задачи $(\mathcal{P})$ к вспомогательной задаче d.c. минимизации посредством теории точного штрафа, линеаризации целевой функции $\Theta_\sigma(x)$ задачи $(\mathcal{P}_\sigma)$ по базовой невыпуклости, а также последовательном решении линеаризованных в текущей точке вспомогательных задач.

С этой целью рассматривается следующая линеаризованная задача:

$$\Phi_s(x) := G_\sigma(x) - \langle \nabla H_\sigma(x^s), x\rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S, \tag{$\mathcal{P}_\sigma L_s$}$$

где $\nabla H_\sigma(x^s) = \nabla h_0(x^s) + \sigma \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} \nabla h_i(x^s)$.

Таким образом, допустимая точка $x^{s+1} = x(\sigma)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Phi_s(x(\sigma)) \triangleq G_\sigma(x(\sigma)) - \langle \nabla H_\sigma(x(\sigma)), x(\sigma)\rangle \leq \mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma L_s) + \delta_s,$$

где $\mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma L_s)$ — оптимальное значение задачи $(\mathcal{P}_\sigma L_s)$:

$$\mathcal{V}(\mathcal{P}_\sigma L_s) := \inf_x \{G_\sigma(x) - \langle \nabla H_\sigma(x(\sigma)), x\rangle \mid x \in S\}.$$

При этом последовательность δ_s такова, что

$$\delta_s \geq 0, \quad s = 1, 2, \ldots, \sum^{\infty} \delta_s < \infty. \tag{2}$$

Предложение 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и функция* $f_0(x)$ *ограничена снизу на множестве* S. *Тогда последовательность* $\{x^s\} \subset S$, *генерируемая вторым методом локального поиска, удовлетворяет следующим условиям: последовательности* $\{\vartheta_s \triangleq \Theta_s(x^s)\}$ *и* $\{\Delta\Phi_{s+1}\}$, *где*

$$\Delta\Phi_{s+1} := \Phi_{s+1}(x^s) - \Phi_{s+1}(x^{s+1}) \triangleq$$
$$\triangleq G_{s+1}(x^s) - G_{s+1}(x^{s+1}) + \langle \nabla H_{s+1}(x^{s+1}), x^{s+1} - x^s \rangle,$$

сходятся в следующем смысле:

$$\lim_{s\to\infty} \vartheta_s = \lim_{s\to\infty} \Theta_s(x^s) =: \Theta_* > -\infty;$$
$$\lim_{s\to\infty} \Delta\Phi_{s+1} = 0.$$

Далее в разделе 2.2 предложена техника генерации тестовых примеров для невыпуклой квадратичной задачи, базирующаяся на идее P. Calamai и L. Vicente и состоящая из трех этапов. Первый этап заключается в построении квадратичных задач-ядер небольшой размерности и в аналитическом отыскании всех их локальных и глобальных решений. На втором этапе путем объединения конечного числа задач-ядер различных классов конструируется "большая" сепарабельная задача. На заключительном этапе генерации для того чтобы избавиться от сепарабельности, производится невырожденное преобразование полученных задач. В конце раздела для демонстрации работы техники генерации рассмотрен небольшой пример.

В разделе 2.3 приведены результаты тестирования двух методов локального поиска, представленных в разделе 2.1, на задачах небольшой размерности из литературы и на задачах, сгенерированных с помощью методики из раздела 2.2.

Результаты численного эксперимента на задачах небольшой размерности показали работоспособность МЛП1 и МЛП2. В результате экспериментов был определен наиболее эффективный из встроенных в Matlab-функцию "fmincon" метод выпуклой оптимизации для решения вспомогательных линеаризованных задач.

Далее представлены результаты тестирования методов локального поиска на сгенерированных задачах. Некоторые результаты этого эксперимента представлены в таблице 1, где № — номер задачи, n — размерность задачи, m — количество невыпуклых ограничений, x_0 — стартовая точка, $f_0(x_0)$ и $f_0(x_*)$ — значение целевой функции задачи $(\mathcal{P})$ в стартовой точке и в полученной (критической) точке соответственно, PL — число решенных линеаризованных задач, Time — время решения (в секундах). Жирным шрифтом выделены случаи, когда уже на этапе локального поиска было получено глобальное решение с точностью $\tau = 10^{-4}$.

Таблица 1 — Тестирование МЛП1 и МЛП2 на сгенерированных задачах

					МЛП1			МЛП2		
№	n	m	x_0	$f_0(x_0)$	$f_0(x_*)$	PL	Time	$f_0(x_*)$	PL	Time
1	10	5	1	3.75	−8.6	9	0.29	**−9.6**	346	3.84
			2	12.84	−8.8	19	0.52	**−9.6**	234	3.24
			3	11.46	**−9.6**	17	0.57	**−9.6**	354	4.25
2	10	5	1	3.575	−8.0375	20	0.77	**−9.0375**	278	5.09
			2	1.775	−7.2375	55	1.63	**−9.0375**	306	6.82
			3	18.19	−8.6375	71	2.33	**−9.0375**	286	5.72
3	20	10	1	3.74	−17.5374	110	9.04	**−19.9375**	1362	48.76
			2	7.46	−18.3375	183	15.03	−19.5375	1046	43.64
			3	−0.65	−16.9375	209	17.46	**−19.9375**	1396	54.96
4	20	10	1	5.64	−17.5749	51	6.82	**−19.375**	1792	57.03
			2	3.18	−17.7749	128	15.0	**−19.375**	2118	77.25
			3	5.19	−16.7749	178	16.55	**−19.375**	1800	60.54
5	30	15	1	8.63	−25.1	12	8.58	**−30.1**	714	52.82
			2	34.28	−27.7	18	7.97	**−30.1**	784	54.13
			3	42.13	−26.3	21	8.28	**−30.1**	810	59.04
6	30	15	1	13.05	−26.7375	444	72.42	**−29.5375**	1698	270.98
			2	14.95	−26.3375	505	88.79	**−29.5375**	1748	293.50
			3	−3050.35	−27.1375	528	125.32	**−29.5375**	1758	277.0
7	40	20	1	6.15	−32.1375	135	56.37	−33.08	3160	1553.65
			2	5.75	−35.5375	695	194.33	−31.04	1878	773.16
			3	−2690.59	−33.1373	1109	373.31	**−39.14**	4794	1691.55
8	50	25	1	11.6139	−43.8447	17	34.85	**−49.3**	4345	2327.53
			2	30.4595	−43.597	14	23.3228	**−49.3**	4307	2115.11
			3	−3073.65	−43.0446	68	156.4754	**−49.3**	4507	2923.64

По итогам данного вычислительного эксперимента можно видеть принципиальные отличия в работе двух методов локального поиска. С одной стороны, МЛП1 во всех задачах значительно выигрывает у МЛП2 по количеству решенных линеаризованных задач и, соответственно, по времени. С другой стороны, МЛП2 для всех задач приходит в глобальное решение.

Кроме того, оба метода локального поиска успешно конкурируют с коммерческими решателями. Так, например, МЛП2 стабильно приходит в критическую точку, в которой значение целевой функции не хуже, а в задачах под номерами 3, 4 и 6 лучше, чем полученное солверами Conopt v.317I, Couenne 25.1.1, LINDOGlobal 25.1.1, MINOS 5.6 и SCIP 25.1.1. Результаты работы коммерческих решателей представлены в таблице 2.

Таблица 2 — Тестирование современных пакетов прикладных программ

	CONOPT		COUENNE		LINDOGL		MINOS		SCIP	
№	$fval$	Time	$fval$	Time	$fval$	Time	$fval$	Time	$fval$	Time
1	−7.6	0.2	−7.6	> 900	−7.6	0.7	−7.6	0.2	**−9.6**	> 900
2	−8.0375	0.5	−6.88	> 900	−8.0375	0.7	−8.0375	18.2	**−9.0375**	86.2
3	−14.94	0.3	−17.74	> 900	−14.94	0.3	−14.94	0.2	−15.54	> 900
4	−15.38	0.3	−15.38	> 900	−15.38	0.3	−18.98	0.2	−16.58	96.3
5	−22.1	0.2	**−30.1**	0.4	−22.1	0.3	−22.1	0.1	−28.7	87.3
6	−22.537	1.2	–	–	−22.537	1.1	−22.537	0.3	−26.69	129.8
7	−30.138	1.26	**−39.137**	> 900	−30.138	0.77	−30.138	0.31	−32.786	> 900
8	−37.3	5.86	**−49.3**	1.14	−37.29	2.72	−37.3	0.9	−43.76	93.74

Третья глава посвящена численному решению нелинейных систем уравнений (с квадратичными функциями).

В разделе 3.1 рассматривается следующая система уравнений:

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

в которой $x \in I\!R^n$, а $f_i(\cdot)$ являются d.c. функциями:

$$f_i(x) = g_i(x) - h_i(x) \quad \forall x \in I\!R^n.$$

Данная система сводится к задаче d.c. минимизации следующим образом:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| = G(x) - H(x) \downarrow \min, \quad x \in I\!R^n, \qquad (\mathcal{DC})$$

где функции $G(x) = 2\sum\limits_{i=1}^{m} \max\{g_i(x), h_i(x)\}$, $H(x) = \sum\limits_{i=1}^{m}(g_i(x) + h_i(x))$ являются выпуклыми.

Для систем квадратичных уравнений вида

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\langle x, C_i x\rangle + \langle b^i, x\rangle + d_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $n \times n$-матрицы C_i, $i = 1, \dots, m$, являются знаконеопределенными, приведено d.c. разложение целевой функции $F(\cdot)$ в задаче $(\mathcal{DC})$ в виде разности двух сильно выпуклых функций:

$$G(x) = \sum_{i=1}^{m} \max\left\{\langle x, C_{1i}x\rangle + \langle b^i, x\rangle + d_i, \langle x, C_{2i}x\rangle - \langle b^i, x\rangle - d_i\right\},$$
$$H(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\langle x, (C_{1i} + C_{2i})x\rangle,$$

где

$$C_i = C_{1i} - C_{2i}, \quad C_{1i}, C_{2i} > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Далее в разделах 3.2 и 3.3 для решения задачи $(\mathcal{DC})$ применяется теория глобального поиска, основанная на необходимых и достаточных условиях глобальной оптимальности для задач d.c. минимизации, проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого исследована эффективность работы методов локального и глобального поисков на различных тестовых задачах отыскания решения систем нелинейных уравнений с квадратичными функциями. В ходе эксперимента также проведено сравнение алгоритма глобального поиска для решения нелинейных систем уравнений с известным Matlab-солвером STRSCNE и стандартной встроенной Matlab-функцией “fsolve”.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Настоящая работа посвящена исследованию невыпуклых задач квадратичной оптимизации. Разработана и обоснована методика решения таких задач, которая была протестирована при проведении вычислительных экспериментов. Разработанный программный комплекс может использоваться для решения широкого круга прикладных задач из экономики, экологии, техники и прочих отраслей.

Результаты изучения теории глобального поиска для невыпуклых задач оптимизации, а также результаты проведенных исследований представлены ниже и заключаются в следующем:

1. Рассмотрены современные подходы к решению невыпуклых задач квадратичной оптимизации. Протестированы современные пакеты прикладных программ для решения невыпуклых задач.

2. На основе идеи P. Calamai и L. Vicente разработана методика генерации тестовых задач с известными глобальными решениями. Сгенерировано поле тестовых примеров различной сложности и размерности для проведения вычислительного эксперимента.

3. Программно реализованы два метода локального поиска в невыпуклых квадратичных задачах с квадратичными ограничениями-неравенствами. Проведено тестирование методов на известных примерах из литературы и сгенерированных задачах различной сложности. Проведено сравнение результатов работы разработанных методов с современными коммерческими решателями.

4. Изучен подход к решению невыпуклых задач оптимизации, базирующийся на условиях глобальной оптимальности А.С. Стрекаловского. Обоснованы схемы локального и глобального поиска и проведено их тестирование на системах нелинейных уравнений с квадратичными функциями.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах из перечня ВАК:

1. Enkhbat, R. D.c. programming approach for solving an applied ore-processing problem / R. Enkhbat, T.V. Gruzdeva, M.V. Barkova // Journal of Industrial and Management Optimization. — 2018. — Vol. 14, № 2. — P. 613–623.

2. Enkhbat, R. D.C. Programming Approach to Malfatti's Problem / R. Enkhbat, M.V. Barkova, B. Sukhee // Вестник Бурятского гос. ун-та. Математика, информатика. — 2018. — № 4.— С. 72–83.

3. Enkhbat, R. Solving Malfatti's Hight Dimentional Problem by Global Optimization / R. Enkhbat, M.V. Barkova, A.S. Strekalovsky // Numerical Algebra, Control and Optimization. — 2016. — Vol. 6, № 2. — P. 153–160.

4. Enkhbat, R. Global search method for solving Malfatti's four-circle problem / R. Enkhbat, M. Barkova // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. — 2016. — Т. 15. — С. 38–49.

Статьи в других изданиях:

5. Баркова, М.В. Численное тестирование алгоритма локального поиска с обновлением штрафного параметра / М.В. Баркова, А.С. Стрекаловский // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 3–5 декабря 2018 г.). — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2018. — С. 17.

6. Enkhbat, R. D.c. programming approach to Malfatti's problem / R. Enkhbat, M. Barkova // Тез. докл. XVII Байкальской междунар. школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения" (с. Максимиха, Бурятия, 31 июля – 6 августа 2017 г.). — Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2017. — С. 38.

7. Баркова, М.В. Один метод локального поиска в задачах оптимизации с невыпуклыми ограничениями / М.В. Баркова, А.С. Стрекаловский // Тез. XIII Всерос. конф. молодых ученых "Моделирование, оптимизация и информационные технологии — 2017" (г. Иркутск – Старая Ангасолка, 13–18 марта 2017 г.). — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. — С. 10.

8. Баркова, М.В. Численная эффективность метода локального поиска на тестовых задачах оптимизации / М.В. Баркова, А.С. Стрекаловский // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 5–8 декабря 2017 г.). — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. — С. 51.

9. Gruzdeva, T. D.c. programming approach for solving an optimization problem at ore-dressing plant / T. Gruzdeva, R. Enkhbat, M. Barkova // Abstracts of 10th Intern. Conf. on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 10), UlaanBaatar, Mongolia, July 23–26, 2016. — National University of Mongolia, 2016. — P. 80.

10. Strekalovskiy, A. Optimization approach for solving nonlinear equation systems: numerical method / A. Strekalovskiy, M. Yanulevich, M. Barkova // Abstracts of 10th Intern. Conf. on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 10), UlaanBaatar, Mongolia. — National University of Mongolia, July 23–26, 2016. — P. 93.

11. Strekalovsky, A.S. Solving quadratic equation systems via nonconvex optimization methods / A.S. Strekalovskiy, M.V. Yanulevich, M.V. Barkova // Труды VIII Московской междунар. конф. по исследованию операций (ORM 2016) (г. Москва, 17—22 октября 2016 г.) / отв. ред. А.А. Васин, А.Ф. Измаилов. — М.: МАКС Пресс, 2016. — Т. 1. — С. 65–68.

12. Энхбат, Р. О решении задачи обогащения руды / Р. Энхбат, Т.В. Груздева, М.В. Баркова // Тезисы V междунар. школы-семинара "Нелинейный анализ и экстремальные задачи" (г. Иркутск, 20–25 июня 2016 г.). — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2016. — С. 57.

13. Баркова, М.В. Тестирование метода локального поиска для задач с невыпуклыми квадратичными ограничениями / М.В. Баркова, А.С. Стрекаловский // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 21–23 ноября 2016 г.). — Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2016. — С. 10.