ОБРАЩЕНИЕ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА ДЛЯ ЭКСТЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ*

В.А. Дыхта
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
dykhta@icc.ru

Рассматривается экстремальная задача

$$f_0(x,u) \to \min,\ F(x,u)=0,\ x\in S,\ u\in U(x), \qquad \text{(P)}$$

где S – непустое множество, U – многозначное отображение с непустыми значениями, $F: S\times U(S)\to Y$ – оператор со значениями в вещественном векторном пространстве Y (никаких топологических предположений на данном этапе не делается). Хорошо известно, что если задача (P) выпукла, в смысле [1], т.е. выпукло множество

$$C=\left\{(\alpha,y)\in R\times Y \,\middle|\, \exists x\in S,\, u\in U(x): \alpha\ge f_0(x,u),\, F(x,u)=y\right\},$$

то выполнение для допустимой точки $(\bar{x},\bar{u})$ принципа Лагранже $(\Pi\Lambda)$ – $\exists\lambda=(\alpha_0,\, y')\ne 0: \mathcal{L}(\bar{x},\,\bar{u},\,\lambda)=\min\left\{\mathcal{L}(x,\,u,\,\lambda)\middle|\, x\in S,\quad u\in U(x)\right\}$, где $y'\in Y'$, $\mathcal{L}(x,u,\lambda)=\alpha_0 f_0(x,\,u)+y'F(x,\,u)$ – необходимо для минимума, а при условии нормальности $\alpha_0>0$ – достаточно.

Заметим, что утверждение о достаточности справедливо без предположения выпуклости задачи (P), но все же является слишком жестким, так как формулируется с помощью одного (нормированного) набора множителей Лагранжа λ с условием нормальности (эквивалентным равенству $\alpha_0=1$). Между тем, общий запас Λ нормированных наборов λ, обеспечивающих экстремальность точки $(\bar{x},\,\bar{u})$, может оказаться бесконечным, и естественные достаточные условия должны учитывать эту неединственность. Следующие обращение $(\Pi\Lambda)$ учитывает это требование.

Пусть E – любое множество, содержащее допустимое множество D задачи (P), т.е. $E\supseteq D$, а $Y'_+(F,\,E)$ – множество функционалов $y'\in Y'$, удовлетворяющее следующему условию монотонности на E: $y'F(x,u)\le 0\ \ \forall(x,u)\in E$. Заметим, что в каждом нормальном наборе $\lambda\in\Lambda$ непременно $y'\in Y_+(F,D)$. Если множество $Y'_+(F,\,E)\ne\varnothing$, то рассмотрим следующую задачу $(P_+(E))$:

$$\begin{cases} f_0(x,u)\to\min,\ x\in S,\ u\in U(x), \\ y'F(x,u)\le 0\ \ \forall(x,u)\in E,\ y'\in Y'_+(F,E). \end{cases}$$

Без труда доказывается

Предложение. Если множество $Y'_+(F,\,E)\ne\varnothing$ и точка $(\bar{x},\,\bar{u})$ оптимальна в соответствующей задаче (P_+), то она оптимальна и в задаче (P).

1. Магерил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 176 с.
2. Дыхта В.А. Неравенство Ляпунова–Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 110. С. 76-108.

* Работа поддержана РФФИ, проекты 07-01-00741, 05-01-00187.