

Лекция "Введение"

Введение в нелинейный функциональный анализ

д.ф.-м.н., проф. Ю. Э. Линке

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск
email: linke@icc.ru

16 февраля 2011 г.

- 1 Введение
 - Функциональный анализ
 - Нелинейный функциональный анализ
- 2 Основной путеводитель
 - Библиография
- 3 Содержание книги — Теория
 - Содержание Главы 1
 - Содержание Главы 2
 - Содержание Главы 3
 - Содержание Главы 4
 - Содержание Главы 5
- 4 Содержание книги — Приложения
 - Содержание Главы 1
 - Содержание Главы 2
 - Содержание Главы 3
 - Содержание Главы 4
 - Содержание Главы 5
- 5 Заключение

Функциональный анализ

Функциональный анализ, часть современной математики, главной задачей которой является изучение бесконечномерных пространств и их отображений. Наиболее изучены линейные пространства и линейные отображения. Для Функционального анализа характерно сочетание методов классического анализа, топологии и алгебры.

Абстрагируясь от конкретных ситуаций, удаётся выделить аксиомы и на их основе построить теории, включающие в себя классические задачи как частный случай и дающие возможность решать новые задачи. Сам процесс абстрагирования имеет самостоятельное значение, проясняя ситуацию, отбрасывая лишнее и открывая неожиданные связи. В результате удаётся глубже проникнуть в сущность математических понятий и проложить новые пути исследования.

Функциональный анализ и физика

Развитие Функционального анализа происходило параллельно с развитием современной теоретической физики, при этом выяснилось, что язык Функционального анализа наиболее адекватно отражает закономерности квантовой механики, квантовой теории поля и т.п. В свою очередь эти физические теории оказали существенное влияние на проблематику и методы Функционального анализа.

Возникновение функционального анализа

Функциональный анализ как самостоятельный раздел математики сложился на рубеже 19 и 20 вв. Большую роль в формировании общих понятий сыграла созданная Г. Кантором теория множеств. Развитие этой теории, а также аксиоматической геометрии привело к возникновению в работах М. Фреше и Ф. Хаусдорфа метрической и более общей т. н. теоретико-множественной топологии, изучающей абстрактные пространства, т. е. множества произвольных элементов, для которых установлено тем или иным способом понятие близости.

Нелинейный функциональный анализ

Одновременно с развитием и углублением понятия пространства шло развитие и обобщение понятия функции. В конечном счёте оказалось необходимым рассматривать отображения (не обязательно линейные) одного пространства в другое (часто - в исходное). Одной из центральных задач нелинейного Функционального анализа является изучение таких отображений. Как и в линейном случае, отображение пространства X в $\mathbb{R}$ называется функционалом. Для нелинейных отображений (в частности, нелинейных функционалов) можно различными способами определить дифференциал, производную по направлению и т.д. аналогично соответствующим понятиям классического анализа. Выделение из отображения квадратичного и т.д. членов приводит к формуле, аналогичной формуле Тейлора.

Неподвижные точки

Важной задачей нелинейного Функционального анализа является задача отыскания неподвижных точек отображения (точка x называется неподвижной для отображения F , если $Fx = x$). К отысканию неподвижных точек сводятся многие задачи о разрешимости операторных уравнений, а также задачи отыскания собственных значений и собственных векторов нелинейных операторов. При исследовании неподвижных точек и точек ветвления используются топологические методы: обобщения на бесконечномерные пространства теоремы Брауэра о существовании неподвижных точек отображений конечномерных пространств, степени отображений и т.п. Топологические методы Функционального анализа развивались польским математиком Ю. Шаудером, французским математиком Ж. Лере, советскими математиками М.А. Красносельским, Л.А. Люстерником и др.

Взгляд Люстерника

"Термин нелинейный содержит в своём определении лишь отрицание. Многочисленные нелинейные задачи анализа всё время возникают в разных разделах физики, механики, геометрии и т. д., и для их решения применяются самые разнообразные методы. Выражаясь образно, материк линейности окружён океаном нелинейности, в котором возникают всё новые и новые изолированные острова, в редких случаях образующие архипелаги."

Библиография

Люстерник Л. А. Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа // УМН, 11:6(1956), 145-168.

В предлагаемом цикле лекций будут рассмотрены лишь некоторые части "океана нелинейности", о котором говорил Лазарь Аронович Люстерник.

Библиография

Часть 1 — Теория

Denkowski Z., Migórski S., Papageorgiou N. S. An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory, Boston–Dordrecht–London: Kluwer Academic Publisher, 2003, 689 p.

Часть 2 — Приложения

Denkowski Z., Migórski S., Papageorgiou N. S. An Introduction to Nonlinear Analysis: Applications, Boston–Dordrecht–London: Kluwer Academic Publisher, 2003, 823 p.

По главам:

1. ELEMENTS OF TOPOLOGY.....	1
2. ELEMENTS OF MEASURE THEORY.....	103
3. BANACH SPACES	255
4. SET-VALUED ANALYSIS	405
5. NONSMOOTH ANALYSIS	517
References	665
Index	683

Глава 1

1 ELEMENTS OF TOPOLOGY	1
1.1 Topological Concepts	3
1.2 Weak, Product and Quotient Topologies	19
1.3 Compactness and Compactification	28
1.4 Metrizable Spaces	41
1.5 Uniform Continuity and Connectedness	58
1.6 Function Spaces	68
1.7 Remarks	77
1.8 Exercises	84
1.9 Solutions to Exercises	88

Глава 2

2. ELEMENTS OF MEASURE THEORY	103
2.1 Measures and Measurable Functions	104
2.2 Integration and Convergence Theorems	133
2.3 Signed Measures and the Radon-Nikodym Theorem	154
2.4 Product Measures	168
2.5 Measures and Topology	182
2.6 Polish and Souslin Spaces	206
2.7 Remarks	217
2.8 Exercises	224
2.9 Solutions to Exercises	231

Глава 3

3 BANACH SPACES	255
3.1 Hahn-Banach Theorem	256
3.2 The Three Basic Theorems of Linear Analysis	265
3.3 Separation of Convex Sets	273
3.4 Weak and Weak* Topologies	281
3.5 Weak Compactness	291
3.6 Reflexive and Separable Banach Spaces	301
3.7 Hilbert Spaces and Compact Linear Operators	309
3.8 Classical Banach Spaces	326
3.9 Sobolev Spaces	337
3.10 Vector-Valued Functions and Bochner Integral	364
3.11 Remarks	374
3.12 Exercises	383
3.13 Solutions to Exercises	387

Глава 4

4 SET-VALUED ANALYSIS	405
4.1 Continuity of Multifunctions	407
4.2 Measurability of Multifunctions	424
4.3 Measurable Selectors	429
4.4 Continuous Selectors	436
4.5 Decomposable Sets	452
4.6 Set-Valued Integration	466
4.7 Convergence of Sets and Functions	474
4.8 Remarks	491
4.9 Exercises	498
4.10 Solutions to Exercises	503

Глава 5

5 NONSMOOTH ANALYSIS	517
5.1 Smooth Calculus in Banach Spaces	518
5.2 Convex, Lower Semicontinuous Functions	528
5.3 Conjugate Functions and Subdifferentials	536
5.4 Optimization and Minimax Theorems	562
5.5 Normal Integrands	579
5.6 Generalized Subdifferential	600
5.7 Tangent and Normal Cones	619
5.8 Remarks	630
5.9 Exercises	635
5.10 Solutions to Exercises	641

По главам:

1. NONLINEAR OPERATORS AND FIXED POINTS.....	1
2. ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS.....	169
3. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS.....	313
4. OPTIMAL CONTROL AND CALCULUS OF VARIATIONS...	541
5. MATHEMATICAL ECONOMICS.....	691
References.....	797
Index.....	819

Глава 1

1. NONLINEAR OPERATORS AND FIXED POINTS.....	1
1.1 Compact Operators.....	2
1.2 Measures of Noncompactness and Set-Contractions.....	14
1.3 Monotone Operators.....	31
1.4 Accretive Operators and Nonlinear Semigroups.....	65
1.5 Nemitsky Operators.....	84
1.6 The Ekeland Variational Principle.....	92
1.7 Fixed Points Theorems and Inequalities.....	99
1.8 Remarks.....	130
1.9 Exercises.....	138
1.10 Solutions to Exercises.....	144

Глава 2

2. ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS.....	169
2.1 Critical Point Theory.....	170
2.2 Degree Theory.....	189
2.3 Initial and Boundary Value Problems for ODEs.....	214
2.4 Differential Inclusions.....	256
2.5 Hamiltonian Systems.....	270
2.6 Remarks.....	284
2.7 Exercises.....	290
2.8 Solutions to Exercises.....	294

Глава 3

3. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS.....	313
3.1 Eigenvalue Problems and Maximum Principles.....	314
3.2 Semilinear and Nonlinear Elliptic Problems.....	345
3.3 Elliptic Variational Inequalities.....	374
3.4 Evolution Triples.....	391
3.5 Evolution Equations I - Parabolic Problems.....	404
3.6 Evolution Equations II - Hyperbolic Problems.....	433
3.7 Γ -Convergence of Functions.....	453
3.8 G-Convergence of Operators.....	473
3.9 Remarks.....	490
3.10 Exercises.....	496
3.11 Solutions to Exercises.....	506

Глава 4

4. OPTIMAL CONTROL AND CALCULUS OF VARIATIONS.....	541
4.1 Existence and Relaxation.....	543
4.2 Sensitivity Analysis.....	577
4.3 Maximum Principle.....	595
4.4 Hamilton-Jacobi-Belmann Equation and Viscosity Solutions...	613
4.5 Controllability and Observability.....	631
4.6 Calculus of Variations and Applications.....	654
4.7 Remarks.....	683

Глава 5

5. MATHEMATICAL ECONOMICS.....	691
5.1 Equilibria in Exchange Economies.....	692
5.2 Multisector Optimal Growth Models: Discrete Time.....	706
5.3 Continuous Time Models.....	730
5.4 Growth Models Under Uncertainty.....	749
5.5 Stochastic Games.....	774
5.6 Remarks.....	797

НЕЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ (НФА) один из разделов функционального анализа, изучающий нелинейные отображения (нелинейные операторы) бесконечномерных векторных пространств, а также некоторые классы нелинейных пространств и их отображения. Основными разделами НФА являются следующие.

Раздел 1

1) Дифференциальное исчисление нелинейных отображений банаховых, топологических векторных и некоторых других более общих пространств, включая теоремы о локальном обращении дифференцируемого отображения и теорему о неявной функции.

Раздел 2

2) Нахождение условий действия, непрерывности, компактности нелинейного оператора, действующего из одного бесконечномерного конкретного пространства в другое.

Раздел 3 и 4

Раздел 3

3) Принципы неподвижной точки для различных классов нелинейных операторов (сжимающих, компактных, уплотняющих, монотонных и др.); применение этих принципов для доказательства существования решений различных нелинейных уравнений.

Раздел 4

4) Изучение нелинейных монотонных, вогнутых, выпуклых, имеющих монотонную миноранту и др. операторов в пространствах, наделенных структурой упорядоченного векторного пространства.

Раздел 5 и 6

Раздел 5

5) Исследование спектральных свойств нелинейных операторов (точки бифуркации, непрерывные ветви собственных элементов и пр.) в бесконечномерных векторных пространствах.

Раздел 6

6) Приближенное решение нелинейных операторных уравнений.

Раздел 7 и 8

Раздел 7

7) Изучение пространств, линейных в малом, и банаховых многообразий - глобальный анализ.

Раздел 8

8) Исследование на экстремум нелинейных функционалов и вариационные методы изучения нелинейных операторов.

Библиография

- [1] Вайнберг М. М., Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений, М., 1972;
- [2] Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К., Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения, пер. с нем., М., 1978;
- [3] Иллс Дж., Основания глобального анализа //Успехи матем. наук, 1969, т. 24, в. 3, с. 157-210;
- [4] Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, М., 1962;
- [5] Красносельский М. А., Забрейко П. П., Геометрические методы нелинейного анализа, М., 1975;
- [6] Ленг С., Введение в теорию дифференцируемых многообразий, пер. с англ., т. 1, М., 1967;

Библиография — продолжение

- [7] Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965;
- [8] Ниренберг Л., Лекции по нелинейному функциональному анализу, пер. с англ., М., 1977;
- [9] Хилле Э., Филлипс Р., Функциональный анализ и полугруппы, пер. с англ., 2 изд., М., 1962.

Zeidler's Books

Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Vol. 1–5, New York: Springer-Verlag, 1985–1990.

Две книги Кутателадзе и Кусраева

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциальное исчисления: теория и приложения, М.: Наука, 2007, 559 с.

Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы М.: Наука, 2003, 619 с.

Спасибо за внимание!