Лекция 1.3 — "1.3 Компактность и компактификации"

Введение в нелинейный функциональный анализ

Ю. Э. Линке

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск
email: linke@icc.ru

8 марта 2011 г.

1. Введение
2. Компактность
   - Компактные топологические пространства
   - Компакты
   - Релаксации
   - Счетная компактность и секвенциальная компактность
   - Снова о компактах
   - Финально компактные или линделёвские пространства
   - Локально компактные пространства
   - σ-компактные пространства
3. Компактификации
   - Компактификация по П.С. Александрову
4. Паракомпактность
5. Заключение

Компактность относится к числу центральных понятий математики. Особенно важны компактные хаусдорфовы пространства или компакты. Впервые компактность появилась в математике как одно из главных топологических свойств отрезка, квадрата, сферы и всех замкнутых ограниченных подмножеств конечномерных евклидовых пространств. Когда было осознано, что именно это свойство ответственно за ряд фундаментальных фактов, относящихся к замкнутым ограниченным множествам в евклидовых пространствах таких, в частности, как ограниченность и равномерная непрерывность непрерывных функций, компактность получила абстрактное определение на языке общей топологии, далеко выходящее за рамки класса метрических пространств.

Хорошо известно, что фундаментальные факты, лежащие в самих основах классического математического анализа, основаны на одном замечательном свойстве отрезка числовой прямой, известном под названием леммы Гейне—Бореля—Лебега и заключающемся в том, что из любого покрытия этого отрезка открытыми интервалами можно выбрать конечное подпокрытие.
По этой причине оказалось естественным в общих топологических пространствах особо выделять такие их подмножества, которые обладают аналогичным свойством, что и привело к одному из фундаментальных понятий топологии —– к понятию компактности.
Заслуга выделения этого замечательного класса пространств принадлежит П. С. Александрову.
Отметим также, что теория компактных пространств впервые была построена П. С. Александровым и П. С. Урысоном в работе "Мемуар о компактных топологических пространствах " — 3-е изд. М. Наука, 1971 (первое издание 1929).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3.1. Топологическое пространство X называется компактным, если оно удовлетворяет условию Бореля-Лебега: всякое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. При этом топологию пространства X называют компактной.

Ясно, что пространство с тривиальной топологией всегда компактно, тогда как пространство с дискретной топологией компактно в том и только в том случае, когда оно состоит из конечного числа точек. Компактное пространство может не быть хаусдорфовым!

ПРИМЕР 1.3.2. Топология Зарисского. Рассмотрим произвольное бесконечное множество X и семейство τ, состоящее из пустого подмножества $\emptyset$ и из всевозможных подмножеств U из X, дополнения которых $U^c = X \setminus U$ являются конечными подмножествами. Пустое подмножество также рассматривается как конечное подмножество. Легко проверить, что семейство τ задает в X топологию, которая носит название топологии Зарисского.

Бесконечное множество X, наделенное топологией Зарисского, является компактным пространством.

В самом деле, пусть $S = \{U_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ — произвольное открытое покрытие X, состоящее из бесконечного числа элементов, и пусть $U_{\alpha_0} \neq X$, а $F_{\alpha_0} = X \backslash U_{\alpha_0}$ состоит из конечного числа точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть, далее, $x_1 \in U_{\alpha_1}, x_2 \in U_{\alpha_2}, \ldots, x_n \in U_{\alpha_n}$, тогда система $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ очевидно, образует конечное подпокрытие исходного покрытия и, стало быть, X компактно.

В то же время топология Зарисского не является хаусдорфовой.

Действительно, ясно, что топология Зарисского является T_1 или в другой терминологии достижимой топологией. В топологии Зарисского любые два непустых открытых множества в X имеют непустое пересечение. Поэтому она не является хаусдорфовой.

Особое значение имеют компактные пространства, удовлетворяющие аксиоме Хаусдорфа, которые называются для краткости компактами.

From introductory analysis we know that closed and bounded sets in $\mathbb{R}^N$ play a special role. In this section we are going to study the topological abstraction of these sets, which are known as compact sets. Compact sets are the most well-behaved objects in analysis and are the cornerstone in most applications.

DEFINITION 1.3.1 A topological space (X, τ) is said to be "compact", if any open cover of X has a finite subcover, i.e. if $\mathcal{F} \subseteq \tau$ is any family such that

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U,$$

then there is a finite subset $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{F}$ such that $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.

A subset A of a topological space X is said to be compact, if it is a compact for the relative topology. We say that A is "relatively compact", if $\overline{A}$ is compact.

Еще раз подчеркнем, что компактами обычно называют хаусдорфовы компактные топологические пространства. У авторов аксиома Хаусдорфа не предполагается выполненной! Следующие условия равносильны для компактных топологических пространств:

1) X — компактное топологическое пространство;

2) пересечение любой центрированной системы замкнутых в X множеств не пусто;

3) пересечение любой максимальной центрированной системы замкнутых в X множеств не пусто;

4) пересечение произвольной убывающей вполне упорядоченной последовательности любой мощности непустых замкнутых в X множеств не пусто;

5) каждая центрированная система подмножеств подмножеств множества X имеет точку прикосновения;

6) каждый ультрафильтр на X сходится в X;

7) для каждого бесконечного подмножества подмножества M множества X в X существует точка полного накопления;

8) любое семейство замкнутых в X подмножеств с пустым пересечением содержит конечное подсемейство с пустым с пустым пересечением.

Скажем (П. С. Александров), что точка x пространства X является точкой полного накопления для множества $M \subset X$, если каждая окрестность $O(x)$ точки x пересекается с M по множеству, равномощному M. Понятно, что всякая точка полного накопления является предельной точкой, между тем как предельная точка далеко не всегда является точкой полного накопления.

Ультрафильтр — это фильтр, являющийся максимальным в том смысле, что всякий содержащий его фильтр совпадает с ним. Ультрафильтр можно определить как систему подмножеств, удовлетворяющей трем условиям: 1) пустое множество ей не принадлежит; 2) пересечение двух принадлежащих ей множеств также ей принадлежит; 3) для любого подмножества либо оно само, либо его дополнение принадлежит этой системе.

Точка топологического пространства называется пределом фильтра, если каждая ее окрестность есть элемент фильтра.

REMARK 1.3.2 Prom the definition of the relative topology (see Example 1.1.3(e)), we see that a subset A of a topological space (X, τ) is compact if and only if for any $\mathcal{F} \subseteq \tau$ such that $A \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{F}} U$, there is a finite set $\{U_1, \ldots, U_n\} \subset \mathcal{F}$ such that $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.
For the discrete topology only finite sets are compact. On the other hand for the trivial topology every set is compact.

Здесь также не предполагается, что выполнена аксиома Хаусдорфа.

The next proposition, after some preparation will lead to the "Heine-Borel theorem which asserts that every closed and bounded set in $\mathbb{R}^N$ is compact.

PROPOSITION 1.3.3 Every closed interval $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, is compact.

Next we will reformulate the not ion of compactness by taking complements of open sets. For this we need the following notion.

DEFINITION 1.3.4 A topological space X is said to have the "finite intersection property"(f.i.p. in short), if any family $\mathcal{F}$ of closed sets with

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$$

for any finite subfamily $\{C_1, \ldots, C_n\} \subseteq \mathcal{F}$ satisfies

$$\bigcap_{C \in \mathcal{F}} C \neq \emptyset.$$

Семейство $\mathcal{F}$ — это центрированная система замкнутых множеств. Центрированная система называется максимальной, если она содержится в любой центрированной системе.

PROPOSITION 1.3.5 A topological space X is compact if and only if it has the f.i.p.

Здесь также не предполагается, что выполнена аксиома Хаусдорфа. Смотрите также остальные эквивалентные условия, перечисленные выше.

PROPOSITION 1.3.6 A topological space X is compact if and only if every net has a convergent subnet.

Здесь также не предполагается, что выполнена аксиома Хаусдорфа.

The next two propositions are easy consequences of the definition of compactness.

PROPOSITION 1.3.7 If (X, τ) is a compact topological space and $C \subseteq X$ is a closed subset, then C is compact.

Этот результат также верен без предположения аксиомы Хаусдорфа. Лучше написать в PROPOSITION 1.3.7, что then C is compact topological space.

PROPOSITION 1.3.8 If X, Y are topological spaces, $f: X \to Y$ is continuous and $K \subseteq X$ is compact, then $f(K)$ is compact.

И этот результат также верен без предположения аксиомы Хаусдорфа. Часто его формулируют в следующем виде.
Непрерывный образ компактного пространства есть компактное пространство.

PROPOSITION 1.3.9 If X is a Hausdorff topological space and $K \subseteq X$ is compact, then K is closed.

В не хаусдорфовых компактных пространствах этот результат не верен. Укажите примеры таких пространств.

Using this proposition 1.3.9, we can prove the following theorem which is often useful.

THEOREM 1.3.10 A continuous bijection f from a compact space X onto a Hausdorff space Y is a homeomorphism.

Эту теорему можно получить как следствие такого интересного результата.

ТЕОРЕМА 1.3.3 Непрерывное отображение f компактного пространства X в хаусдорфово пространство Y есть отображение замкнутое.

СЛЕДСТВИЕ 1.3.4. Если (X, τ) — хаусдорфово, (X, σ)—компактное и топология σ не слабее топологии τ, то эти топологии совпадают; иначе говоря, в данном множестве невозможно задать хаусдорфову топологию существенно слабее компактной.

В самом деле, легко убедиться, что тождественное отображение

$$1_X : (X, \sigma) \to (X, \tau)$$

есть отображение непрерывное, поэтому всякое множество A, замкнутое в топологии τ, является замкнутым и в топологии σ. Вместе с тем из теоремы 1.3.3 следует, что если A замкнуто в топологии σ, то оно замкнуто и в топологии τ, т.е. эти топологии совпадают.

The next theorem is behind a11 major existence results in the calculus of variations, optimization and optimal control. It is often known as "Weierstrass theorem".

THEOREM 1.3.11 If X is a compact topological space and $f : X \to \mathbb{R}^*$ is lower semicontinuous (resp. upper semicontinuous), then f attains its infimum (resp. supremum) on X.

Здесь не нужна аксиома Хаусдорфа.

COROLLARY 1.3.12 If X is e compact topological space and $f : X \to \mathbb{R}$ is continuous, then f attains its infimum and supremum on X.

Этот результат обобщение теоремы Вейерштрасса. Часто его формулируют в такой редакции.

ТЕОРЕМА 1.3.5. Пусть A — компактное подмножество топологического пространства X, а f — непрерывная на A вещественная функция, тогда f ограничена и достигает своих точной нижней и точной верхней граней.

In the next definition we introduce two alternative definitions of compactness.

DEFINITION 1.3.13 (a) A topological space (X, τ) is said to be "countably compact if every countable open cover has a finite subcover.

(b) A topological space (X, τ) is said to be "sequentially compact if every sequence in X has a convergent subsequence.

Непосредственно из определения ясно, что каждое компактное пространство счетно-компактно, между тем как счетно-компактное пространство может и не быть компактным, как это видно из следующего примера.

ПРИМЕР 1.3.6. Пусть X — множество всех порядковых чисел α, меньших первого несчетного порядкового числа Ω и пусть τ —– топология в X, базой которой служат всевозможные интервалы в X. Нетрудно проверить, что получаемое при этом пространство (X, τ) хаусдорфово, обладает в каждой точке локальной счетной базой, является счетно-компактным, но не компактным.

Понятие компактного пространства явилось первоначально усилением введенного М. Фреше понятия счетно компактного, как теперь говорят, пространства, если в нем имеет место какое-либо из следующих эквивалентных между собой предложений:

1) в каждом счетном открытом покрытии этого пространства содержится его конечное подпокрытие;

2) пересечение любой счетной центрированной системы непустых замкнутых его подмножеств не пусто;

3) пересечение любой счетной убывающей последовательности непустых замкнутых множеств не пусто;

4) для каждого счетного подмножества в нем существует точка полного накопления;

5) всякая счетная система замкнутых в нем множеств с пустым пересечением обладает конечной подсистемой с пустым пересечением;

6) каждое его бесконечное подмножество обладает обладает обладает хотя бы одной предельной точкой.

Приведем еще один критерий счетной компактности, представляющий собой также и полное описание класса пространств, удовлетворяющих классическому условию Больцано-Вейерштрасса.

Для счетной компактности T_1-пространства X необходимо и достаточно, чтобы любая бесконечная последовательность точек из X имела хотя бы одну предельную точку.

Пространство X называется секвенциально компактным, если оно удовлетворяет условию Больцано-Вейерштрасса, а именно: любая бесконечная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

Ясно, что в классе T_1-пространств секвенциальная компактность влечет за собой счетную компактность; если же пространство к тому же удовлетворяет первой аксиоме счетности, то из его счетной компактности следует его секвенциальная компактность.

В самом деле, если $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная бесконечная последовательность в X, а x^* —– существующая в силу счетной компактности X предельная точка, то, рассмотрев счетную фундаментальную систему окрестностей $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ точки x^* такую, что $U_{k+1} \subset U_k$, можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к x^*.

Примером секвенциально компактного, но не компактного пространства (в силу сказанного выше) может служить ПРИМЕР 1.3.6.

Следующие два утверждения свидетельствуют, что в классе пространств, обладающих счетной базой, все рассмотренные выше типы компактности по существу равносильны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.7. Для пространств со счетной базой компактность равносильна счетной компактности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.8. Для T_1-пространств со счетной базой компактность, секвенциальная компактность и счетная компакт-компактность равносильны.

REMARK 1.3.14 Clearly X is countably compact if and only if every sequence in X has at least one cluster point.

So a sequentially compact space is countably compact, while the converse is true if X is first countable (Theorem 1.1.44(a)).

Also every compact space is clearly countably compact.

In Section 1.4 wi will see that for metric spaces the notions of compactness, countable compactness and sequential compactness coincide (Corollary 1.4.27).

Arguing as in the proof of Proposition 1.3.8, we can show that the continuous image of a countably compact set is countably compact.

Motivated from these sequential versions of compactness, we also introduce a corresponding sequential version of lower semicontinuity.

DEFINITION 1.3.15 A function $f: X \to \mathbb{R}^*$ is "sequentially lower semicontinuous at" X, if for every sequence $x_n \to x$ in X, we have that $f(x) \leq \liminf f(x_n)$.

We say that f is "sequentially lower semicontinuious if it is sequentially lower semicontinuous at every $x \in X$.

REMARK 1.3.16 Every lower semicontinuous function, is sequentially lower semicontinuous.

The converse is true if X is first countable, but it fails for general topological spaces. To see this let $A \subseteq X$. Then the indicator function (see Example 1.1.42), i_A is lower semicontinuous (resp. sequentially 1ower semicontinuous) if and only if A is closed (resp. sequentially closed, i.e. $x \in A$ if and only if there exists a sequence in A converging to x).

In many important topological spaces (for example Banach spaces with the weak topology, see Chapter 3), there are sequentially closed sets which are not closed.

DEFINITION 1.3.17 Let X be a topological space. A function $f : X \to \mathbb{R}^*$ is said to be "coercive"(resp. "sequentially coercive"), if for every $\lambda \in \mathbb{R}$, the set $\overline{L_\lambda} = \overline{\{x \in X \ : \ f(x) \leq \lambda\}}$ is countably compact (resp. sequentially compact) in X.

REMARK 1.3.18 Every sequentially coercive function is coercive (see Remark 1.3.14) .

Also if f is coercive (resp. sequentially coercive) and $f \leq g$, then g is coercive (resp. sequentially coercive) .

If f is coercive (resp. sequentially coercive), then every sequence $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ such that $\limsup f(x_n) < +\infty$, has a cluster point (resp. a convergent subsequence) in X. Then converse is true if f is lower semicontinuous or X is metrizable.

The next theorem extends Theorem 1.3.11 and essentially summarizes the so-called "direct met hod of the calculus of variations".

THEOREM 1.3.19 If X is a topological space and $f : X \to \mathbb{R}^*$ is coercive and lower semicontinuous (resp. sequential coercive and sequentially lower semicontinuous), then

(a) f has a minimum point in X;

(b) if $\{x_n\}_{n \geq 1}$ is a minimizing sequence of f in X and x is a cluster point of $\{x_n\}_{n \geq 1}$ (resp. x is the limit of a subsequence of $(\{x_n\}_{n \geq 1})$, then x is a minimum point of f on X;

(c) if f is not identically $+\infty$, then every minimizing sequence for f has a cluster point (resp. convergent subsequence).

In Definition 1.1.39 we introduced the not ion of relaxed function $\overline{f}$ (or lower semicontinuous envelope). Now we will consider the connection between the minimum problem $\inf f$ and the relaxed minimization problem $\inf_X \overline{f}$. In particular in the next theorem, which can be seen as o the starting point of the relaxation theory of the calculus of variations, we describe the behavior of the minimizing sequences of f in terms of the minimizers of $\overline{f}$.

THEOREM 1.3 .20 If X is a topological space and $f : X \to \mathbb{R}^*$ is coercive, then the following hold
(a) $\overline{f}$ is coercive and lower semicontinuous;
(b) $\overline{f}$ has a minimum point in X;
(c) $\min_X \overline{f} = \inf_X f$;
(d) every cluster point of a minimizing sequence for f is a minimum point for $\overline{f}$ in X;
(e) if X is first countable, then every minimum point for $\overline{f}$ is the limit of a minimizing sequence for f in X.

REMARK 1.3.21 The above theorem can be used to find minimizers of a coercive functional f, provided we know $\overline{f}$ explicitly.

More precisely, first we determine the set of all minimizers of the relaxed functional $\overline{f}$, which by Theorem 1.3.20(b) is nonempty. Then we evaluate the function f and $\overline{f}$ on each minimizer of $\overline{f}$. Then by virtue of Theorem 1.3.20(c), the minimizers of f are exactly those minimizers $\overline{f}$ for which we have $\overline{f} = f(x)$.

The next result is in the spirit of Theorem 1.1.28 ((a) $\Leftrightarrow$ (d))) and is known as "Alexander lemma". For a proof we refer to Kelley (1955), p. 139.

LEMMA 1.3.22 If X is a topological space and $\mathcal{F}$ is a subbase for the topology of X, then X is compact if and only if every open cover of X consisting of elements of $\mathcal{F}$ has a finite subcover.

Ниже более точная формулировка, в которой утверждается существование некоторой предбазы, а не для всякой, как у авторов.

ТЕОРЕМА 1.3.9 (ДЖ. АЛЕКСАНДЕР). Для того чтобы топология пространства X была компактной, необходимо и достаточно, чтобы она обладала такой предбазой α, что любое покрытие пространства X элементами из α содержало конечное подпокрытие.

The Alexander lemma enables us to prove the following theorem, which is one of the most important compactness results in mathematics and is known as "Tychonov theorem".

THEOREM 1.3.23 The product of a family of topological spaces is compact in the product topology if and only if each factor of the product is compact.

Здесь компакт в смысле компактное топологическое пространство. Аксиома Хаусдорфа не нужна!

PROPOSITION 1.3.24 Every compact Hausdorff topological space is normal.

Заметим, что верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.10. Замкнутое подмножество компактного топологического пространства является компактным топологическим пространством.

Обратное утверждение не верно, ибо если A собственное непустое подмножество антидискретного пространства X (в нем только само X и пустое множество открыты), то A заведомо компактно, хотя и не замкнута в X. Такая ситуация исключена в случае хаусдорфовых пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.11. Компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства является замкнутым.

Компактное и хаусдорфово пространство принято называть компактом.

Из предложений 1.3.10 и 1.3.11 следует, что подмножество M компакта X компактно в том и только в том случае, если оно замкнуто, т. е. в компактах понятия замкнутости и компактности равносильны.

Хаусдорфовы пространства, замкнутые в любом объемлющем хаусдорфовом пространстве, называются H-замкнутыми или абсолютно замкнутыми.

Не всякое H-замкнутое пространство компактно, однако имеет место принадлежащая П. С. Александрову и П. G. Урысону.

Теорема (1922). Регулярное T_1-пространство H-замкнуто в том и только том случае, если оно компактно.

Приведенные результаты и дают основания воспринимать компактность, как абсолютную замкнутость.

We can improve this proposition. For this purpose we need to introduce the following definition.

DEFINITION 1.3.25 (a) A topological space X is said to be "Lindelöf if every open cover of XS has a countable subcover;

(b) A topological space X is said to be "hereditarily Lindelof if every subspace of X is a Lindelöf space.

В российской литературе наиболее употребителен термин Финально компактные (линделёфские или линделёфовы) пространства.

Наряду с компактными, счетно-компактными и секвенциально компактными пространствами важную роль играют также так называемые финально компактные пространства.

Пространство называется финально компактным (линдслёфовым), если всякое его открытое покрытие содержит не более чем счетное подпокрытие.

Непосредственно из определения следует, что всякое компактное пространство финально компактно, однако, евклидовы пространства любой размерности, а также сепарабельные гильбертовы пространства служат примерами не компактных, но финально компактных пространств.

Вместе с тем, очевидно, что если пространство одновременно финально компактно и счетно компактно, то оно компактно.

Подмножество A пространства X называется финально компактным, если оно как подпространство пространства X является финально компактным.

Легко убедиться, что подмножество A пространства X финально компактно тогда и только тогда, когда из любого его покрытия открытыми в X множествами можно выбрать но более чем счетную подсистему, тоже покрывающую множество A.
Приведем некоторые результаты о финально компактных пространствах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.12. Объединение не более чем счетного числа финально компактных подмножеств пространства X является финально компактным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.13. Всякое замкнутое подмножество финально компактного пространства финально компактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.14. Непрерывный образ финально компактного пространства финально компактен.

REMARK 1.3.26 It is easy to check that the Lindelöf property is F-hereditary (see Remark 1.1.54).

Поскольку финальная компактность не является свойством на-наследственным, то представляет интерес и следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.14. Пространство наследственно финально компактно тогда а только тогда, когда оно обладает свойством Линделефа.

PROPOSITION 1.3.27 Every second countable topological space X is Lindelöf.

Понятие линделёфова пространства ввели П.С. Александров и П.С. Урысон в 1929 г. (Линделёв доказал в 1903 г., что произвольное семейство открытых в $\mathbb{R}^N$ множеств содержит счетное подсемейство с тем же объединением).

Как это часто бывает: хорошая теорема превращается в определение.

REMARK 1.3.28 In fact we can improve this proposition and prove that every second countable topological apace is hereditarily Lindelöf.

We have the following stronger version of Proposition 1.3.24.

PROPOSITION 1.3.29 Every regular Lindelöf space X is normal.

Удивительно, что здесь в условии предложения отсутствует аксиома Хаусдорфа. Сравните с Proposition 1.3.24.

From Definitions 1.3.13(a) and 1.3.25(a), we have:

PROPOSITION 1.3.30 A countably compact and Lindelöf topological space is compact.

Many of the important spaces in analysis are not compact , but instead have a local version of compactness (typical example is the space $\mathbb{R}^N$). This leads us to the following definition.

DEFINITION 1.3.31 A Hauadorff space X is "locally compact" , if each point has a relatively compact neighborhood.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (П. С. АЛЕКСАНДРОВ). Пространство X называется локально компактным в точке $x_0 \in X$, если существует такая ее открытая окрестность U_0, что $\overline{U_0}$ компактно.
Пространство X называется локально компактным, если оно локально компактно в каждой своей точке.
Ясно, что всякий компакт является локально компактным пространством.
Вот некоторые свойства локально компактных пространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.15. Замкнутое подмножество локально компактного пространства само локально компактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.16. Всякое открытое подмножество G компактного хаусдорфова пространства X локально компактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.17. Хаусдорфово пространство, являющееся образом локально компактного пространства при открытом отображении, локально компактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.18. В классе хаусдорфовых пространств для лекальной компактности тихоновского произведения X любого семейства непустых топологических пространств $\{_\alpha, \alpha \in A\}$ необходимо и достаточно, чтобы все сомножители X_α, за исключением конечного их числа, были компактами, причем некомпактные сомножители были локально компактными.

PROPOSITION 1.3.32 If X is a Hauadorff topological space, then the following properties are equivalent:
(a) X ia locally compact;
(b) for every $x \in X$ and $U \in \mathcal{N}(x)$, there is a relatively compact $V \in \mathcal{N}(x)$ such that $V \subseteq \overline{V} \subseteq U$;
(c) if K is compact, U is open and $K \subseteq U$, there is a relatively compact open set V such that $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

REMARK 1.3.33 From the equivalence of (a) and (b), it follows that a locally compact space is regular (see Proposition 1.1.49) . Also from the same equivalence it follows that X is locally compact if and only if it has a basis consisting of relatively compact open sets.

The next proposition gives a useful property of locally compact spaces.

PROPOSITION 1.3.34 If X is a locally compact space, $K \subseteq X$ is compact, $U \subseteq X$ is open and $K \subseteq U \subseteq X$, then there is a continuous function $f\colon X \to [0,1]$ such that $f|_K = 0$ and $f|_{U^c} = 1$.

REMARK 1.3.35 In particular, Proposition 1.3.34 implies that a locally compact space is completely regular.

DEFINITION 1.3.36 A locally compact space X is said to be "σ-compact ", if $X = \bigcup_{n\geq 1} C_n$ with C_n compact, $n \geq 1$.

Наряду с локальной компактиостыо еще одним важным обобщением компактности является так называемая σ-компактность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X называется σ-компактным или счетным в бесконечности, если оно представимо в виде объединения не более чем счетного числа своих компактных подмножеств.

Легко понять, что σ-компактность наследуется по замкнутым множествам, ибо след компактного множества на замкнутом множестве компактен.

Примеры. Любое открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^N$ при всяком $N \in \mathbb{N}$ есть не компактное, но σ-компактное пространство.
Всякое несчетное дискретное пространство, как легко понять, не является σ-компактным, хотя оно (как уже отмечалось выше) локально компактно.

Можно доказать, что бесконечномерное гильбертово пространство в своей слабой топологии является σ-компактным, но не локально компактным пространством.
This definition 1.3.36 has other equivalent formulations.

PROPOSITION 1.3.37 If X is a Hausdorff topological space, then the following properties are equivalent:

(a) X is locally compact Lindelöf;

(b) X can be expressed as $\bigcup_{n\geq 1} U_n$, where $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$ and U_n is relatively compact open set;

(c) X is σ-compact.

Now we will see under what conditions a topological space X is homeomorphic to a subset of a compact Hausdorf topological space.

DEFINITION 1.3.38 Let (X, τ) be a topological space. If $X*$ is a compact Hausdorff space and f is a homeomorphism of X onto a dense subset of $X*$, then $X*$ or $(X*, f)$ is said to be a "compactification" of X or (X, τ).

Компактификация по П. С. Александрову или еще говорят одноточечная компактиифкация Александрова. Она позволяет топологически вложить (т. с. гомеоморфно отобразить) любое локально компактное хаусдорфово пространство в компактное путем "присоединения" к нему лишь одной "бесконечно удаленной" точки. Эта компактификация нашла и продолжает находить важные приложения в самых различных разделах математики. Здесь мы формулируем, ставшую классической теорему П. С. Александрова, а также приводим некоторые ее следствия.

Next we show that locally compact spaces have an easy compactification.

THEOREM 1.3.39 If (X, τ) is a noncompact, locally compact Hausdorff space, then X has a compactification $(X*, f)$, where the range of f contains all but one point of the space $X*$.

ТЕОРЕМА 1.3.19. Всякое локально компактное (но не компактное) хаусдорфово пространство (X, τ) можно топологически вложить в некоторый бикомпакт (X^*, τ^*) и причем так, чтобы дополнение образа X в X^* было одноточечным. При этом если $f\colon X \to X^*$ и $g\colon X \to Y^*$ суть два таких вложения, то существует единственный гомеоморфизм $h\colon X^* \to Y^*$ такой, что $h \circ f = g$ или иначе коммутативна диаграмма.

Одноточечная компактификация Александрова получается при таком построении:

Рассмотрим множество $X^* = X \cup \{\omega\}$, получаемое присоединением к множеству X некоторого не принадлежащего ему элемента ω какой-либо природы, условно называемого бесконечно удаленной точкой. Зададим в X^* топологию τ^*, считая открытыми все подмножества из X, открытые в топологии τ, а также все подмножества из X^*, являющие дополнениями к компактным подмножествам в X.

REMARK 1.3.40 The compactification X^* of Theorem 1.3.39 is called the "A1exandrov one-point compactification"of X. If $X = \mathbb{R}$ with the usual topology, then the one-point compactification of $\mathbb{R}$ is homeomorphic to a circle. If we denote the added point of the compactification by ω, then if $n \to \infty$ (i.e. the integers become large), $n \to \omega$ and $-n \to \omega$ (in the topology of the one-point compactification).
Actually for $\mathbb{R}$, another compactification is more often useful. We adjoin to $\mathbb{R}$ the two points $+\infty$ and $-\infty$. The neighborhoods of $-\infty$ contain a set of the form $[-\infty, n)$ and the neighborhoods of $+\infty$ contain a set of the form $(n, +\infty]$, $n \in \{1, 2, \dots\}$. The result is the extended real line $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. The one-point compactification of $\mathbb{R}^2$ is the sphere with homeomorphism the stereographic projection, well known to mapmakers.
Finally from the definition of the compactification topology τ_c, for a set $A \subseteq X$, $A \cup \{+\infty\}$ is closed in $(X*, \tau_c)$ if and only if A is closed in (X, τ).

The notion of paracompactness that we are about to introduce, is another very useful generalization of compactness. The main reason that paracompactness is so important, is that it is closely related to the concept of a partition of unity. Partitions of unity define "moving"convex combinations and are a basic tool for proving selection theorems (Chapter 4) and fixed point theorems (Chapter 1).

DEFINITION 1.3.41 (a) $\mathcal{F}_1 = \{U_i\}_{i\in I}$ and $\mathcal{F}_2 = \{V_j\}_{j\in J}$ are two covers of a set X, we say that $\mathcal{F}_2$ is a "refinement "of $\mathcal{F}_1$, if for each $j \in J$, there is some $i \in I$ with $V_j \subseteq U_i$.

(b) A collection $\mathcal{F}_1 = \{U_i\}_{i\in I}$ of subsets of a topological space X is said to be "locally finite if every point of X has a neighborhood which intersects at most finitely many U_i;

(c) A Hausdorff topological space X, is said to be "paracompact if every open cover of the space has an open locally finite refinement.

Семейство подмножеств $\{A_s\}_{s \in S}$ топологического пространства X называется локально конечным, если для каждой точки $x \in X$ существует такая окрестность U, что множество $\{s \in S \ : \ U \cap A_s \neq \emptyset\}$ конечно.

Для каждого локально конечного семейства $\{A_s\}_{s \in S}$ имеет место равенство (см. Энгелькинг, стр. 40, Теорема 1.1.11).

$$\overline{\bigcup_{s \in S} A_s} = \bigcup_{s \in S} \overline{A_s}.$$

Кроме того, семейство $\{\overline{A_s}\}_{s \in S}$, состоящее из замыканий в X, тоже является локально конечным.

Определение. Топологическое пространство называется паракомпактным, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие.

Ясно, что всякое компактное пространство заведомо паракомпактно, ибо конечное подпокрытие является как вписанным, так и локально конечным. Примеры показывают, что паракомпактные пространства совсем не обязаны быть компактными. Нетрудно проверить, что пространство полуоткрытых слева интервалов паракомпактно, по не компактно.

Пример. Топология полуоткрытых интервалов. Пусть $(X, \leq)$ — произвольное линейно упорядоченное множество, а $\beta^{(-)}$ — система всех полуоткрытых слева интервалов, т.е. множеств вида $(a, b] = \{x \in X \ : \ a < x \leq b\}$. Нетрудно проверить, что система $\beta^{(-)}$ служит базой некоторй топологии, называемой топологией полуоткрытых слева интервалов. Аналогично, система $\beta^{(+)}$ всех полуоткрытых справа интервалов служит базой топологии, называемом топологией полуоткрытых справа интервалов.

Вместе с тем имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.20 Если паракомпактное пространство X секвенциально компактно, то оно бикомпактно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.21. Всякое замкнутое подпространство паракомпактного пространства паракомпактно (иными словами, паракомпактность наследуется по замкнутым множествам).

Согласно теореме Майкла паракомпактность наследуется не только по замкнутым, но и по любым множествам типа F_σ, если исходное пространство регулярно.

Произведение любого семейства компактных пространств компактно, однако, оказывается, что произведение даже двух паракомпактных пространств может не быть паракомпактным. Тем не менее имеет место нижеследующее утверждение, которое часто оказывается полезным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Произведение паракомпактного пространства на компактное паракомпактно.

Следующий нетривиальный признак паракомпактности принадлежит Э. Майклу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.22. Если в любое открытое покрытие про-пространства X можно вписать локально конечное замкнутое покрытие, то X паракомпактно.

EXAMPLE 1.3.42 It is evident that any compact Hausdorff space is paracompact.

In Theorem 1.4.13, we will see that every metrizable space is paracompact.

Paracompactness is an F-hereditary property and it is invariant under continuous surjections which map closed sets to closed sets.

The cartesian product of paracompact spaces, need not be paracompact for the product topology.

However, if we know that the product with the product topology is paracompact, then each factor space is paracompact.

PROPOSITION 1.3.43 Every paracompact space X is normal.

Эта теорема доказана Дьедонне в 1943 г.

Это предложение вытекает из следующего

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3.23. Хаусдорфово паракомпактное пространство регулярно.

СЛЕДСТВИЕ 1.3.24. Хаусдорфово паракомпактное пространство X не только нормально, но и бинормально, т. е. цилиндр $X \times I$ тоже нормален.

REMARK 1.3.44 In general a normal space need not be paracompact.

Before establishing the existence of a continuous partition of unity for paracompact spaces, we will state a few more useful facts about coverings of a space. We start with the following nontopological version of Definition 1.3.41(b).

DEFINITION 1.3.45 A covering $\{A_i\}_{i\in I}$ of a set X is said to be "pointfinite if for each $x \in X$, there are at most finitely many indices $i \in I$ such that $\in A_i$.

Здесь уместно остановиться на так называемой сильной и слабой паракомпактности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Покрытие $S = \{A_i\}_{i\in I}$ множества X называется звездно конечным, если каждый его элемент пересекается лишь с конечным числом элементов из S, и называется точечно конечным, если любая точка из X принадлежит лишь конечному числу элементов покрытия S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X называется сильно (соответственно слабо) паракомпактным, если во всякое его открытое покрытие можно вписать звездно конечное (соответственно точечно конечное) открытое покрытие.

Слабо паракомпактные пространства иногда называются метакомпактными.

Так как звездная конечность покрытия влечет за собой ею локальную конечность, то всякое сильно паракомпактное пространство, очевидно, паракомпактно.

Далее, поскольку, как легко убедиться, каждое локально конечное покрытие точечно конечно, то всякое паракомпактное пространство заведомо слабо паракомпактно.
Однако следует иметь в виду, что существуют слабо паракомпактные, но не паракомпактные пространства, а также пространства, которые хоть и паракомпактны, но не сильно паракомпактны.

For normal spaces such open coverings have a shrinkability property. For a proof of the proposition, we refer to Dugundji (1966), Theorem VII .6.1, p. 152.

PROPOSITION 1.3.46 A topological space X is normal if and only if for every point-finite open cover $\mathcal{F} = \{U_i\}_{i \in I}$ of X, there exists an open cover $\mathcal{F}_1 = \{V_i\}_{i \in I}$ of X such that $\overline{V_i} \subseteq U_i$ and $V_i \neq \emptyset$ whenever $U_i \neq \emptyset$.

In general a refinement of a cover may contain more sets than the given cover. For this reason we make the following definition.

DEFINITION 1.3.47 A refinement $\{V_j\}_{j\in J}$ of $\{U_i\}_{i\in I}$ is said to be "precise if $J = I$ and $V_j \subseteq U_j$ for each $j \in J = I$.

The next proposition is very convenient in many situations. Its proof can be found in Dugundji (1966), Theorem VIII.1.4, p. 162.

PROPOSITION 1.3.48 If the cover $\{U_i\}_{i\in I}$ of X has a locally (respectively point)-finite refinement. $\{V_j\}_{j\in J}$, then it also has a precise locally (respectively point)-finite refinement $\{W_i\}_{i\in I}$. Moreover, if $\{U_i\}_{i\in I}$ is an open cover, $\{W_i\}_{i\in I}$ can be chosen to be open too.

DEFINITION 1.3.49 (a) For any topological space X, the "support"of $f : X \to \mathbb{R}$ is the set $supp\, f = \overline{\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}}$.

(b) Let X be a Hausdorff topological space. A family $\{q_i\}_{i \in I}$ of functions $q_i : X \to [0, 1]$ is said to be a "partition of unity on X", if

(b1) the family $\{supp\, q_i\}_{i \in I}$ is a locally finite closed cover of X;

(b2) for every $x \in X$ $\sum_{i \in I} q_i(x) = 1$ (this sum is well defined because each $x \in X$ lies in the support of finitely many q_i).

(c) If $\{U_i\}_{i \in I}$ is an open cover of the Hausdorff topological space X, we say that a partition of unity $\{q_i\}_{i \in I}$ on X is "subordinated" to $(\{U_i\}_{i \in I}$ if for each $i \in I$, we have $supp\, q_i \subseteq U_i$.

(d) A partition of unity $\{q_i\}_{i \in I}$ on a Hausdorff topological space X is said to be "continuous if each function q_i is continuous.

THEOREM 1.3.50 A Hausdorff topological space is paracompact if and only if every open cover $\{U_i\}_{i\in I}$ of X has a continuous partition of unity subordinated to it.

Как уже упоминалось, в самых различных вопросах математики и её приложений оказывается необходимым распространять установленные в некотором пространстве X локальные свойства или конструкции на все X. Во всех такого рода задачах весьма плодотворной оказалась идея, основанная на представлении функции на X, тождественно равной единице, в виде суммы семейства (вообще говоря любой мощности) непрерывных функций с достаточно малыми носителями. Эту процедуру кратко называют непрерывным разбиением единицы.

ТЕОРЕМА 1.3.24 (СУЩЕСТВОВАНИЕ РАЗБИЕНИЯ ЕДИНИЦЫ). Пусть X — нормальное пространство, а $\{U_i\}_{i\in I}$ произвольное локально конечное открытое покрытие, тогда на X существует непрерывное разбиение единицы, подчиненное покрытию S.

Об исключительной удачи выделения класса паракомпактных пространств свидетельствует также и нижеследующий замечательный факт.

ТЕОРЕМА 1.3.25. Для любого открытого покрытия $\{U_i\}_{i\in I}$ хаусдорфова пространства X существует подчиненное ему непрерывное разбиение единицы тогда и только тогда, когда X паракомпактно.

REMARK 1.3.51 If $\{q_i\}_{i\in I}$ is a partition of unity on X and if $\{u_i\}_{i\in I}$ is a family of continuous $\mathbb{R}$-valued functions, then the map

$$g(x) = \sum_{i\in I} q_i(x)u_i(x)$$

from X to $\mathbb{R}$ is continuous too.

Далее кратко перечисляются свойства компактов, которые не имеют места для произвольных компактных топологических пространств.

Каждый компакт является нормальным и, тем более, вполне регулярным пространством.

Пересечение любого счетного семейства открытых всюду плотных в компакте множеств всюду плотно в нем.

Равносильное утверждение: никакой компакт нельзя представить в виде объединения счетного семейства нигде не плотных множеств.

Компакты характеризуются как регулярные пространства, замкнутые в любом объемлющем их хаусдорфовом пространстве.

В компакте предел фильтра, направленности или последовательности является единственным.

Дополнительную информацию можно почерпнуть в рекомендованной литературе и обзорных статьях:

1. А. В. Архангельский, “Компактность”, Общая топология – 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 50, ВИНИТИ, М., 1989, 5—128,

2. А. В. Архангельский, “Некоторые последние достижения и открытые проблемы в общей топологии”, УМН, 52:5(317) (1997), 45–70

Аннотация: Рассматриваются как главные топологические аспекты теории компактных пространств, так и важнейшие факты и принципы этой теории, связанные с ее применениями в функциональном анализе, как, в частности, теоремы Стоуна–Вейерштрасса, Крейна–Мильмана, Ала-Оглу и др.

Уделено внимание компактам Милютина и Дугунжди, операторам усреднения и продолжения, компактам Эберлейна и Радона–Никодима. Освящена фундаментальная роль компактности в топологической алгебре, в частности, в теории характеров и в понтрягинской теории двойственности, в вопросах строения компактных групп, в исследовании спектра алгебраических колец. Библ. 200.

Спасибо за внимание!