Лекция 1.4 — "1.4 Метрические пространства"

Введение в нелинейный функциональный анализ

Ю. Э. Линке

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, г. Иркутск
email: linke@icc.ru

17 марта 2011 г.

1. Введение
2. Определение
3. Примеры
4. G_δ и F_σ множества
5. Компактность и полнота
6. Метризуемость декартовых произведений
7. Гильбертов куб
8. Локально компактные пространства

Класс метрических пространств стал первым классом абстрактных пространств, на который был успешно обобщен ряд понятий и результатов, открытых на заре общей топологии при изучении подмножеств вещественной прямой и евклидовых пространств.
Класс метрических пространств достаточно обширен и включает в себя много объектов, изучаемых в различных областях математики. Это позволяет описывать эти объекты на геометрическом языке.
В то же время пространства этого класса кажутся достаточно простыми, к ним применима геометрическая интуиция.
Понятие метрического пространства было введено Фреше в его диссертации [1906]. В течение многих лет внимание топологов было приковано к метрическим пространствам и, в частности, к сепарабельным метрическим пространствам. Несомненно, это наиболее изученный класс топологических пространств.
Двухтомная монография Куратовского [1966] и [1968] представляет собой настоящую энциклопедию по этому предмету. Монография Энгелькинга [1986] также достаточно подробно освещает эту тему.

Популярная литература

1. Васильев Н. Метрические пространства. — Квант. — 1990. — № 1.
2. Васильев Н. Метрические пространства. — Квант. — 1970. — № 10.
3. Скворцов В. А. Примеры метрических пространств // Библиотека «Математическое просвещение». — 2001. — Выпуск 9.
4. Шрейдер Ю. А. Что такое расстояние? // «Популярные лекции по математике». — М.: Физматгиз, 1963 г. — Выпуск 38. — 76 с

Analysis is primarily concerned with limit processes and continuity.
When defined in the context of real numbers and real functions, we see that these notions depend on the concept of the absolute value of the difference between two real numbers.
This absolute value is the distance between the numbers when viewed as points on the real line.
In analysis and geometry, it has been found very convenient to have available an analogous notion of distance, valid on abstract sets.
This leads to metric spaces, which are from the topological viewpoint the closest relatives of the real line and the Euclidean spaces and to which most of the results about convergent sequences and continuous functions can be generalized.
In this lecture we will develop the most basic facts about the metric spaces which will be indispensable tools in our considerations in the next lectures.

We start with the definition of the notion of metric (distance).

DEFINITION 1.4.1 A "metric" (or "distance function") on a set X is a function $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ which satisfies:

(a) for every $x, y \in X$, $d(x,y) \geq 0$;

(b) $d(x,y) = 0$ if and only if $x = y$;

(c) for all $x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$ (symmetry);

(d) for all $x, y, z \in X$ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (triangle inequality).

Заметим, что если условие (d) слегка изменить и вместо него рассмотреть следующее условие

(d') для всех $x, y, z \in X$ $d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y)$ (неравенство треугольника).

то, очевидно, что условия (a), (b), (c) и (d') зависимы.

Из условий (b) и (d') вытекают (a) и (c)

Действительно, $\forall x, y \in X$ имеем
$d(x, y) \leq d(y, x) + d(y, y) \Rightarrow d(x, y) \leq d(y, x)$. Аналогично, $d(y, x) \leq d(x, y)$. Следовательно, условие (c) выполнено.
Далее, $0 = d(y, y) \leq d(x, y) + d(x, y) = 2d(x, y)$. Поэтому условие (a) также выполнено.

В Математической Энциклопедии в томе 3 на стр. 658 утверждается, что из условий (b) и (d) вытекают (a) и (c).

Докажите или опровергните это утверждение.

REMARK 1.4.2 If requirement (b) is weakened to:
(b') for all $x, y \in X$ $x = y$ implies $d(x, y) = 0$
then d is said to be a "semimetric"(or "pseudometric"or "ecart").
A semimetric d on X always produces a metric on an appropriately defined quotient space.
Namely on X we consider the equivalence relation $\backsim$ defined by $x \backsim y$ if and only if $d(x, y) = 0$. Consider the quotient set $\widehat{X} = X/\backsim$, i.e. $\widehat{x} \in \widehat{X}$ if $\widehat{x} = \{y \in X \ : \ y \backsim x$.
If we set

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = d(x, y)$$

we easily see that $\widehat{d}$ is a metric on $\widehat{X} = X/\backsim$.
If the symmetry requirement is not present, then we can define

$$d_1(x, y) = d(x, y) + d(y, x)$$

and d_1 is now a metric.
If d is a metric (resp. semimetric) on X, then the pair (X, d) is called a "metric space" (resp. a "semimetric space").

Множество X на котором может быть введена метрика, называется метризуемым.

Множество X, наделенное некоторой метрикой d называется метрическим пространством и обозначается символом (X, d) или просто X, если ясно о какой метрике идет речь.

Полуметрики называются также псевдометриками или отклонениями.

Очевидно, если метрика введена в данное множество X, то введена она во всякое подмножество X_0 (как ограничение функции d). Другими словами, всякое множество, лежащее в метрическом пространстве, также является (вполне определенным) метрическим пространством.

Это же замечание относиться и к полуметричеким пространствам.

Симметрика на множестве X — неотрицательная действительная функция d, определенная на множестве пар всех элементов множества X и удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $d(x,y) = 0$ в том и только в том случае, если $x = y$;

2) для всех $x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$.

В отличии от метрики и полуметрики симметрика может не удовлетворять аксиоме треугольника. По симметрике d на множестве X определяется топология на X:

Множество $A \subseteq X$ замкнуто (относительно симметрики d) в том и только том случае, если $d(x,A) > 0$ для каждого $x \in X \backslash A$. При этом

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) \ : \ y \in A\}.$$

Замыкание множества A в так определенном топологическом пространстве содержит множество всех точек $x \in X$ для которых $d(x,A) = 0$, но может этим множеством и не исчерпываться.

Соответственно, ε-шары вокруг точек множества X могут иметь пустую внутренность. Топологическое пространство называется *симметризуемым*, если топология его порождается по указанному правилу некоторой симметрикой. Класс симметризуемых пространств гораздо шире класса метризуемых пространств:

Симметризуемое пространство может не быть ни паракомпактным, ни нормальным, ни хаусдорфрвым. Кроме того, симметризуемое пространство может не удовлетворять первой аксиоме счетности.

Но каждое семметризуемое пространство X секвенциально, т.е. его топология определяется сходящими последовательностями по правилу: множество A замкнуто в том и только том случае, когда предел каждой каждой сходящейся в X последовательности точек множества A принадлежит A.
Для компактных хаусдорфовых пространств симметризуемость равносильна метризуемости.

Понятие метрического пространства приводит к важному то- топологическому понятию, а именно к понятию метризуемого про- пространства.

Топологическое пространство X метризуемо, если существует такая метрика d на множестве X, что индуцированная этой метрикой топология совпадает с исходной топологией пространства X. Те метрики, которые индуцируют исходную топологию пространства X, называются метриками на пространстве X.

Мы уделяем такое внимание метрическим и метризуемым пространствам потому, что многие важные топологические пространства, используемые в разных областях математики, метризуемы и, более того, их топология часто индуцирована естественной метрикой.

Заметим, что метризуемость есть топологическое свойство, однако приведенное здесь определение класса метризуемых пространств не является внутренним определением.

Возникает вопрос, существует ли внутренняя характеристика метризуемых пространств. Как мы увидим в дальнейшем, ответ на этот вопрос положителен. Теоремы, дающие необходимые и достаточные внутренние условия метризуемости топологических пространств, сформулированные в терминах топологических инвариантов, называются метризационными теоремами.

Две метрики d_1 и d_2 на множестве X называются эквивалент-эквивалентными, если они индуцируют на нем одну и ту же топологию. Очевидно, что определенное таким образом отношение является отношением эквивалентности.

Мы рассматриваем две метрики, индуцирующие одну и ту же топологию как эквивалентные объекты по той причине, что в нас интересуют в первую очередь топологии, а метрики играют только вспомогательную роль, подобную той, которую играют системы координат при изучении евклидовых пространств.

Дискретная метрика: $d(x, y) = 0$, если $x = y$, и $d(x, y) = 1$ во всех остальных случаях.

Вещественные числа с функцией расстояния $d(x, y) = |y - x|$ и евклидово пространство являются полными метрическими пространствами.

Манхеттенская, или городская метрика: координатная плоскость, на которой расстояние определено как сумма расстояний между координатами.

Более общий пример: любое нормированное пространство можно превратить в метрическое, определив функцию расстояния $d(x, y) = ||y - x||$, в случае конечной размерности это называется пространством Минковского (не надо путать с другим пространством Минковского).

Так называемая Французская железнодорожная метрика является примером, который нередко приводят в качестве примера метрики, не порожденной нормой.

Любое связное риманово многообразие M можно превратить в метрическое пространство, определив расстояние как точную нижнюю грань длин путей, соединяющих пару точек.
Множество вершин любого связного графа G можно превратить в метрическое пространство, определив расстояние как минимальное число рёбер в пути, соединяющем вершины.
Множество компактных подмножеств $K(M)$ любого метрического пространства M можно превратить в метрическое пространство, определив расстояние с помощью так называемой метрики Хаусдорфа. В этой метрике два подмножества близки друг к другу, если для любой точки одного множества можно найти близкую точку в другом подмножестве. Вот точное определение:
$D(X,Y) = \inf\{r \ : \ $ для всех $x \in X$ существует $y \in Y$ $d(x,y) < r$ и для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такое, что $d(x,y) < r)\}$.
Множество всех компактных метрических пространств (с точностью до изометрии) можно превратить в метрическое пространство, определив расстояние с помощью так называемой метрики Громова — Хаусдорффа.

Французская железнодорожная метрика является необычным примером метрики. Название этой метрики произошло из-за очень централизованно проложенной (особенно раньше) железнодорожной сети Франции, в которой чуть ли не все пути сходились в Париже. Последствия этого были таковы, что, например, чтобы добраться по железной дороге из Страсбурга в Лион, нужно сделать крюк в 400 км через Париж — приходилось мириться с тем, что нет прямого сообщения.

Это побудило одного неизвестного математика определить следующую метрику: если X есть некоторое множество точек плоскости (города Франции с железнодорожным сообщением через Париж) и p — фиксированная выбранная точка (Париж), то можно определить на X метрику следующим образом:

$$d(x,y) = \begin{cases} ||x-y||, & x-p=\lambda(y-p) \\ ||x-p||+||y-p||, & x-p\neq\lambda(y-p), \end{cases}$$

где $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Здесь $d(x,y)$ следует понимать как расстояние по железнодорожному пути от города x до города y.

Эта конструкция допускает элементарное обобщение на любое нормированное пространство. В невырожденном случае, то есть когда существуют неколлинеарные векторы, французская железнодорожная метрика — простейший пример метрики, которая не порождается нормой. Действительно, возьмём два неколлинеарных вектора a и b, для которых $|a| \leq |b|$. Тогда векторы $a+b$ и b также неколлинеарны, и выполняется

$$d(p+a,p) \leq d(p,p+b) < d(p+a,p+b).$$

Для метрики D, порожденной нормой:

$$D(p+a,p) = |p+a-p| = |a| \leq D(p,p+b) = |p-p-b| = |-b| =$$

$$= |b| < D(p+a+b,p+b) = |p+a+b-p-b| = |a|.$$

Таким образом нарушается топологическая эквивалентность.

Метрика обитателей джунглей

Пусть $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; положим

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} |y_1 - y_2||, & \text{если } x_1 = x_2 \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|, & \text{если } x_1 \neq {}_2, \end{cases}$$

для каждой пары точек $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ плоскости X. Легко проверить, что d — метрика на X.

Каким метрикам она эквивалентна?

А каким, наоборот, не эквивалентна?

Такой метрикой могли бы пользоваться обитатели джунглей, по которым протекает река $y = 0$: чтобы иметь доступ к воде, они про- прорубили тропы, ведущие к реке, и путь от точки (x_1, y_1) к (x_2, y_2) проходит сначала по такой тропе к реке, затем по реке до точки, ближайшей к (x_2, y_2), и снова по тропе.

EXAMPLES 1.4.3

(a) Let X be any set and for any $x, y \in X$, set

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } \; x \neq y \\ 0, & \text{if } \; x = y \end{cases}$$

Then d is a metric on X known as the "discrete metric".

(b) Let $X = \mathbb{R}$ and for any $x, y \in \mathbb{R}$, let $d(x,y) = |x - y|$. This is a metric on $\mathbb{R}$. Another metric on $\mathbb{R}$ is given by

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|, \;\; x, y \in \mathbb{R}$$

(c) Let $X = \mathbb{R}^N$ and for every $x = (x_k)_{k=1}^N, y = (y_k)_{k=1}^N \in \mathbb{R}^N$ and $1 \le p \le \infty$ set

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p} \quad \text{if } 1 \le p < \infty$$

and

$$d_\infty = \max\{|x_k - y_k| \ : 1 \le k \le N\} \text{ if } p = \infty.$$

For the cases $p = 1$ and $p = \infty$, it is easy to check that d_1 and d_∞ define metrics on $\mathbb{R}^N$.
It is less clear that this is the case when $1 < p < \infty$.

The difficulty arises in verifying the triangle inequality. This follows from the so-called "Minkowski inequality" which says

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

and can be most easily obtained from a related inequality, known as "Hölder's inequality" which says that

$$\sum_{k=1}^{N} |x_k y_k|^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^q\right)^{1/q}$$

where $1 < p, q < \infty$ and $1/p + 1/q = 1$. Note that if $p = 2$, then d_2 is the usual Euclidean metric and Hölder's inequality reduces to the celebrated "Cauchy-Schwarz inequality".

(d) Let X be a set and let $C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \ \ f \text{ is continuous and bounded}\}$. For any $f, g \in C_b(X)$ set $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \ : \ x \in X\}$. This is a metric on $C_b(X)$.

Now we are going to associate a definite topology on a metric space (X, d).

DEFINITION 1.4.4 Let (X, d) be a metric space. For any $\in X$ and $r > 0$, the "open ball" centered at $x \in X$ and of radius $r > 0$, is the set

$$B_r(x) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < r\}.$$

Предложение 1.4.3. Отображение f пространства X с топологией, индуцированной метрикой d_1, в пространство Y с топологией, индуцированной метрикой d_2, непрерывно в том и только том случае, если для каждого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon$, как только $d_1(x, x') < \delta$.

Метрические пространства позволяют также ввести понятие равномерно непрерывных отображений. Понятие равномерной непрерывности не является топологическим; оно относится к конкретным метрикам на пространствах X и Y. Отображение $f\colon X \to Y$ может быть равномерно непрерывным относительно одних метрик и не быть таковым относительно других метрик.

Using Remark 1.1.11, we see that the family $\{B_r(x)\}_{x \in X,\, r>0}$ can serve as the base for a topology.

DEFINITION 1.4.5 Let (X, d) be a metric space. The topology $\tau(d)$ having as base the family

$$\{B_r(x) \ : x \in X, \ r > 0\}$$

is called the "metric topology" on X generated (or induced or determinated) by the metric d.

Метризуемое пространство — пространство, топология которого порождается некоторой метрикой по правилу (как выше с помощью базы топологии) или как в симметризуемых пространствах:

точка принадлежит замыканию множества в том и только том случае, когда она лежит на нулевом расстоянии от множества.

Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек метрического пространства (X, d) сходится к точке $x \in X$, если последовательность вещественных чисел $d(, {}_1), d(, {}_2), \ldots$ сходится к нулю.
Точка в этом случае называется пределом последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и обозначается $\lim x_n$.
Из условий (b) и (c) вытекает, что всякая последовательность точек метрического пространства имеет не более одного предела.

Ниже, в теореме 1.4.1. мы приведем удобный критерий эквивалентности метрик.

Теорема 1.4.1

Две метрики d_1 и d_2 на множестве X эквивалентны тогда и только тогда, когда они индуцируют одну и ту же сходимость, т. е. для каждой точки $x \in X$ и каждой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ точек множества X условия $\lim d_1(, {}_i) = 0$ и $\lim d_2(, {}_i) = 0$ эквивалентны.

Диаметр непустого множества в метрическом пространстве (X, d) определяется как точная верхняя грань всех расстояний между

Если такая метрика существует, то она не единственна — за исключением того случая, когда пространство пусто или состоит из одной точки.

В частности, топология каждого метризуемого пространства порождается некоторой ограниченной метрикой.

В метризуемом пространстве выполняются аксиомы отделимости: они хаусдорфовы, они нормальны и даже коллективно нормальны, т.е.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4.2 (БИНГ). Хаусдорфово пространство X называется коллективно нормальным, если всякая его дискретная система $\{F_\alpha\}$ замкнутых подмножеств обладает дизъюнктной систе-системой открытых окрестностей $\{U_\alpha\}$.

Так как пара дизъюнктных замкнутых множеств, очевидно, образует дискретную систему, то коллективная нормальность влечет за собой нормальность, но не наоборот.

Каждое метризуемое пространство паракомпактно (Теорема А. Стоун).

Все метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности.

Но ни одно из названных условий, ни их совокупность недостаточны для метризуемости топологического пространства.

Достаточное условие метризуемости было найдено П. С. Урысоном (1923):
каждое нормальное пространство (и даже каждое регулярное пространство — А. Н. Тихонов, 1925) со счетной базой метризуемо.

REMARK 1.4.6 A subset A of X is d-open (or $\tau(d)$-open or simply open), if for all $x \in A$ we can find $r > 0$ such that $B_r(x) \subseteq A$. It is easy to check that $\tau(d)$ is a Hausdorff topology (this is no longer true if d is only a semimetric).
Clearly by choosing $r > 0$, rational, we see that $\tau(d)$ is first countable. So every metric topology is first countable and thus sequences suffice to describe the topology. Note that $x_n \stackrel{\tau(d)}{\to} x$ if and only if $d(x_n, x) \to 0$.
Using the triangle inequality, we can easily check that the distance function satisfies

$$|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v).$$

In particular, if $y = v$, then

$$|d(x,y) - d(u,v) \leq d(x,u)$$

and so d is continuous on $X \times X$.
The metric topology generated by the discrete metric (Example 1.4.3(a)) is the discrete topology (Example 1.1.3(b)).

Заметим, что в отличии от метризуемых пространств пространство X с топологией, индуцированной псевдометрикой d, является T_0-пространством тогда и только тогда, когда d —– метрика.

В самом деле, если $d(x_1, x_2) = 0$ для $x_1 \neq x_2$, то каждая окрестность точки x_1 содержит точку x_2, и наоборот, так что X не является T_0-пространством.

Легко также установить следующее: если X — множество, состоящее более чем из одной точки, то, полагая $d(x, y) = 0$ для любых $x, y \in X$, мы получим псевдометрику на множестве X, которая индуцирует на нем антидискретную топологию. Хотя мы и не изучаем псевдометрики ради них самих, мы пользуемся ими в дальнейшем как удобным техническим средством.

So far we have seen that a metric generates a topology. Is the converse true?
Namely, given a topological space (X, τ) does there exist a metric d such that $\tau(d)$?
Clearly the answer to this question is negative.
Every topology which is not first countable can not be generated by a metric.
But even a first countable topology need not be generated by a metric.

DEFINITION 1.4.7 Let (X, τ) be a topological space. A metric d on X is "consistent" (or "compatible") with the topology τ, if $\tau = \tau(d)$.

The space (X, τ) is said to be "metrizable", if such a metric exists.

Two metrics d_1, d_2 are said to be "equivalent" if

$$\tau(d_1) = \tau(d_2).$$

REMARK 1.4.8 The distinction between metric and metrizable spaces is a fine one.
In the metric space, we have fixed a metric, while in a metrizable space the choice is still open.
There are always several metrics that generate the same topology on X.
For example d and kd, $(k > 0)$ generate the same topology. A more interesting example is the following. If d is a metric compatible with the topology τ, then so is the metric

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{for all} \quad x, y \in X$$

Note that $d_1 \leq 1$. Other equivalent metrics are given by:

$$d_2(x, y) = \sqrt{d(x, y)}, d_3(x, y) = ln(1+d(x, y)), d_4(x, y) = \min\{\, 1, d(x, y)\}.$$

Again note that $d_4 \leq 1$.
Смотрите продолжение на следующем слайде.

REMARK 1.4.8 — Окончание

In general, if $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is a function such that $\varphi(0) = 0$ and φ is increasing, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$ (subadditive) and there exists $r > 0$ such that φ is bijective and bicontinuous from $[0, r]$ onto $[0, \varphi(r)]$, then if $\overline{d} = \varphi(d(x, y))$ for all $x, y \in X$, the metrics $\hat{d}$ and d are equivalent.
If d_1, d_2 are two metrics on X and there exists $M > 0$ such that

$$d_2(x, y) \leq M d_1(x, y) \ \text{ for all } \ x, y \in X,$$

then $\tau(d_2) \subseteq \tau(d_1)$. So if there exist $0 < m < M$ such that

$$m d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq M d_1(x, y) \text{ for all } \ x, y \in X,$$

then $\tau(d_1) = \tau(d_2)$.

DEFINITION 1.4.9 Let X be a topological space. A set $A \subseteq X$ which is the intersection of countably many open sets is called a G_δ (from German Gebiet-Durchschnitt).

A set which is the union of countably many closed sets (i.e. the complement of a G_δ), i s called F_σ (from French fermé-somme).

PROPOSITION 1.4.10 If X is a metrizable space, then every closed set of X is a G_δ and every open set of X is an F_σ.

We know that a second countable space is separable (Proposition 1.1.47) and that the converse in general fails (Example 1.1.48). However, for metric spaces these two notions are equivalent and are also equivalent to the Lindelöf property (Definition 1.3.25(a)).

PROPOSITION 1.4.11 For metrizable spaces the properties of second countability, separability and Lindelöf , are all equivalent.

Характерным свойством метризуемых пространств является совпадение для них ряда мощностных характеристик.
В частности, для метризуемых пространств совпадают число Суслина, число Линделёфа, плотность, протяженность и вес.
Несовпадение этих чисел свидетельствует о неметризуемости соответствующих пространств.

For general topological spaces separability is not a hereditary property.
Only open subsets of a separable space are separable.
However, second countability is clearly a hereditary property.
So every subspace of a second countable space is separable.
In particular then we have:

COROLLARY 1.4.12 Any subset of a separable metrizable space, is itself separable.

The next theorem determines the position of metric spaces among the classes of topological spaces discussed thus far.
For a proof of it we refer to Dugundji (1966), p. 186
or Munkres (1975), p. 256.

THEOREM 1.4.13 Every metrizable space is paracompact .

Это теорема А. Стоуна, доказанная им в 1944 году.

All of the deep properties of real sequences and real functions depend on the fact that $\mathbb{R}$ is complete. Many of these properties can be carried over to general metric spaces.

DEFINITION 1.4.14 Let (X, d) be a metric space.

(a) A sequence $\{x_n\}_{n\geq 1} \subseteq X$ is said to be "d-Cauchy" (or simply "Cauchy"), if for every $\varepsilon > 0$ there exists $N \geq 1$ such that for $n, m \geq N$, we have $d(x_n, x_m) < \varepsilon$; this is equivalent to the requirement that

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

(b) The space X (or the associated metric d) is said to be "complete", if every Cauchy sequence in X converges to a point in the space.

Если X является полным подпространством метрического пространства M, тогда X замкнуто в M. Действительно, метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто в любом объемлющем его метрическом пространстве.

REMARK 1.4.15

REMARK 1.4.15 Clearly every Cauchy sequence is bounded, i.e.

$$\sup_{n,m\geq 1} d(x_n, x_m) < \infty.$$

Also a convergent sequence is Cauchy. The converse is not true in general. For example the sequence

$$\left\{ x_n = \frac{1}{n} \right\}_{n\geq 1}$$

is Cauchy in the space $X = (0, 1)$ but does not converge in X.

Note that a useful equivalent definition of completeness is that every Cauchy sequence has a convergent subsequence, since this is easily seen to imply that every Cauchy sequence converges in X.

REMARK 1.4.15 — продолжение и окончание

It should be emphasized here that completeness is not a topological notion. It is quite possible that a space having two metrics compatible with its topology, is a complete metric space with one, but is not a complete metric space with the other.

For example, let

$$X = \left\{ \frac{1}{k} \right\}_{k \geq 1}$$

with the discrete topology. On X consider two metrics d_1 and d_2 with d_1 being the discrete metric (Example 1.4.3(a)) and $d_2(x, y) = |x - y|$. Then (X, d_1) is complete, but (X, d_2) is not.

The next theorem (known as a Cantor's intersection theorem), gives us a complete characterization of complete metric spaces.

THEOREM 1.4.16 A metric space (X, d) is complete if and only if for every decreasing sequence $\{C_n\}_{n\geq 1}$ (i.e. $C_{n+1} \subseteq C_n$ for all $n \geq 1$ of closed sets with

$$\operatorname{diam} C_n \to 0 \tag{1}$$

$$(\operatorname{diam} C_n = \sup_{x,y\in C_n} d(x,y) \text{ being the diameter of } C_n)$$

as $n \to \infty$, we have that

$$\bigcap_{n\geq 1} C_n$$

is a singleton.

Вместе с тем существует убывающая последовательность непустых замкнутых множеств с пустым пересечением в полном метрическом пространстве.

Возьмём $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой. Положим

$$C_n = [n, +\infty).$$

Тогда

$$\bigcap_{n \geq 1} C_n = \emptyset.$$

Следовательно, условие (1) в теореме 1.4.16 существенно.

The next proposition guarantees the completeness of many metric spaces which arise as subspaces of complete metric spaces.

PROPOSITION 1.4.17 If (X, d) is a complete metric space and $A \subseteq X$, then (A, d) is complete if and only if A is closed.

In the case of metric spaces the definition of continuity of a function takes the following familiar ($\varepsilon - \delta$-formulation.

DEFINITION 1.4.18 Let (X, d) and (Y, ρ) be metric spaces and $f\colon X \to Y$ be a function.

We say that f is "continuous at" $x \in X$, if for every $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta = \delta(\varepsilon)$ such that $d(x, z) < \delta$ implies that

$$\rho(f(z), f(x)) < \varepsilon.$$

We say that f is "continuous", if it is continuous at every $x \in X$.

REMARK 1.4.19 Since a metric space is first countable, then we can use sequences and the above definition takes the following form:

A function $f\colon X \to Y$ is continuous (at x) if and only if for every $x_n \xrightarrow{d} x$ have

$$f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x).$$

In Section 1.1 we said that the topological properties are preserved by homeomorphisms. The metric-specific properties (such as completeness, see Remark 1.4.15) are preserved under isometrics.

DEFINITION 1.4.20 Let (X, d) and (Y, ρ) be metric spaces. A mapping $f : X \to Y$ is said to be an "isometry", if

$$d(x, z) = \rho(f(x), f(z))$$

for all $x, z \in X$.

In this case we say that the metric spaces (X, d) and $(f(X), \rho)$ are "isometric spaces".

REMARK 1.4.21 If $((X, d)$ and (Y, ρ) are metric spaces as in Definition 1.4.20, then we may regard the former as a subspaces of the latter and the distances between points in X are unaffected by this embedding.
So two isometric spaces are, from the metric point of view, the same except for such things as labeling and notation. Clearly then an isometry is a metric-preserving homeomorphism.
An important special case of an isometry is the following. Suppose that we are given two different metrics on the same space X.
The two are equivalent if and only if the identity map is a homeomorphism from (X, d) to (X, ρ).
Using this fact we can see that all the metrics on $\mathbb{R}^N$ introduced in Example 1.4.3(c) are equivalent.

PROPOSITION 1.4.22 Given a metric space (X, d), there exists a complete metric space (X_d, ρ) called "completion "of (X, d) and an isometry $\varphi\colon \to X_d$ such that $\varphi(x)$ is dense in X_d.

PROPOSITION 1.4.23 The completion of a separable metric space is itself separable.

Now we will examine the notion of compactness in the context of metric spaces. In this case compactness and completeness are closely related notions.

DEFINITION 1.4.24 Let (X, d) be a metric space and $A \subseteq X$.

(a) We say that A is "bounded", if

$$diam\, A = \sup\{d(a, a') \ : \ a, a' \in A\} < \infty;$$

(b) We say that A is "totally bounded" (or "precompact"), if for every $\varepsilon > 0$ there exist a finite set set $F_\varepsilon \subseteq X$ such that

$$X = \bigcup_{x \in F_\varepsilon} B_\varepsilon(x).$$

REMARK 1.4.25 A totally bounded set is bounded.

Boundedness and total boundedness are not topological properties.

Приведите соответствующие примеры.

Using the notion of total boundedness, we can give a complete characterization of compact sets in metric spaces.

THEOREM 1.4.26 For a metric space (X, d) the following properties are equivalent:

(a) The space X is compact;

(b) The space X is complete and totally bounded;

(c) The space X is sequentially compact.

COROLLARY 1.4.27 For a metric space compactness, countable compactness and sequential compactness are equivalent notions.

Also since the completion of a totally bounded metric space is still totally bounded, we obtain:

COROLLARY 1.4.28 A metric space is totally bounded if and only if its completion is compact.

From Definition 1.4.24(b) it is clear that a totally bounded metric space is separable. Indeed let

$$D = \bigcup_{n \geq 1} F_{1/n}.$$

Then D is dense in X.
So we have

COROLLARY 1.4.29 A compact metric space is complete and separable.

We already mentioned that total boundedness is not a topological property and the same is true for completeness.

EXAMPLE 1.4.30 Let $X = (-1, 1)$ and $Y = \mathbb{R}$ with the usual metric.

We know that X and Y are homeomorphic

(use $f : X \to Y$ defined by

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}.)$$

However X is totally bounded but not complete, while Y is not totally bounded but it is complete.

DEFINITION 1.4.31 Let (X, τ) be a topological space.

(a) The space X is "topologically complete", if there is a metric d on X consistent with its topology,
i.e. $\tau = \tau(d)$ and the metric space (X, d) is complete.

(b) A separable topological space which is topologically complete, is said to be a "Polish space".

EXAMPLE 1.4.32 The set $X = (-1, 1)$ with the usual topology, is topologically complete (hence a Polish space).

Note that $(-1, 1)$ with the usual metric is not complete, but it is complete for the equivalent metric

$$\rho(x, y) = \left| \tanh \frac{\pi x}{2} - \tanh \frac{\pi y}{2} \right|$$

Here is a characterization of topologically complete metric spaces.

THEOREM 1.4.33 A metric apace (X, d) is topologically complete

if and only if

X is a G_δ set in its completion for d.

Combining Theorems 1.4.33 and 1.3.39, we obtain:

COROLLARY 1.4.34 Every locally compact metric space is topologically complete.

REMARK 1.4.35 Topological completeness is a topological property, i.e. it is preserved by homeomorphisms.

Indeed let $f : X \to Y$ be a homeomorphism and assume that X is d-complete.
Define a metric ρ on Y, by setting

$$\rho(y, y') = d(f^{-1}(y), f^{-1}(y')).$$

It is straightforward to verify that ρ is a metric on Y and that (Y, ρ) is complete.

Компактность — это тоже топологическое свойство.

Next we will see that topologically complete spaces belong to a larger class of spaces, the so-called Baire spaces.

DEFINITION 1.4.36 Let (X, τ) be a topological space.

(a) A set $A \subseteq X$ is said to be "nowhere dense", *int* $\hat{A} = \emptyset$ (i.e. $(\hat{A})^c$ is dense in X).

(b) A set $A \subseteq X$ is said to be of "first (Baire) category", if

$$A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

with A_n nowhere dense for every $n \geq 1$. A set $A \subseteq X$ which is not of first category is said to be of "second (Baire) category".

(c) The topological space is said to be a "Baire space", if the intersection of a countable family of open dense sets of X is still dense.

REMARK 1.4.37 A set of first category is also called "meager", while the complement of a set of first category is said to be "residual".

In $[0, 1]$ for example, any finite set is nowhere dense and a countable union of finite sets is countable.

The union may be dense, but it has a dense complement.

This is a particular case of the following more general result:

THEOREM 1.4.38 A topologically complete space X is a Baire space.

Напоминаю, что хаусдорфовы компакты также обладают свойством Бэра.

Смотрите предыдущую лекцию.

Аксиома Хаусдорфа существенна.

Компактные топологические пространства свойством Бэра могут, вообще говоря, не обладать.

The same result is also true for locally compact spaces.

THEOREM 1.4.39 A locally compact space X is a Baire space.

Напоминаю, что локально компактные пространства хаусдорфовы по определению.

COROLLARY 1.4.40 If X is a topologically complete or locally compact space and

$$X = \bigcup_{n \geq 1} C_n$$

with C_n closed, then there exists $n_0 \geq 1$ such that

$$int\ C_{n_0} \neq \emptyset.$$

PROPOSITION 1.4.41 The set $\mathbb{Q}$ of rationals is not topologically complete.

REMARK 1.4.42 In fact $\mathbb{Q}$ is not a Baire space.

PROPOSITION 1.4.43 The set $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ of irrationals is topologically complete.

Now we pass to Cartesian products of metrizable spaces.

PROPOSITION 1.4.44 If $\{X_n\}_{n\geq 1}$ a sequence of metrizable spaces and

$$Y_n = \prod_{n\geq 1}^{n} X_k, \quad Y = \prod_{n\geq 1} X_k,$$

then

Y and each Y_n is metrizable.

Moreover if each X_k is separable or topologically complete or Polish,

then

Y and each Y_n is separable or topologically complete or Polish, respectively.

REMARK 1.4.45 A product of uncountably many metric spaces (each with more that one point) is not metrizable.

Consider $X = \{0,1\}^I$ with I an uncountable index set.

In fact this is the set of all indicator functions of subsets of I.

Let $\mathcal{F}$ be the family of finite subsets of I directed by inclusion.

Then $\{\chi_F\}_{F\in\mathcal{F}}$ is a net in X and $\chi_F \to 1$ for the product topology on X.

However, no sequence $\{\chi_{F_n}\}_{n\geq 1}$ of indicator functions of finite sets, can converge to 1, since

$$\bigcup_{n\geq 1} F_n$$

is countable and by hypothesis I is uncountable.

DEFINITION 1.4.46 The "Hilbert cube" $\mathcal{H}$, is the product of countably many copies of the closed unit interval, with the product topology, i.e. $\mathcal{H} = [0,1]^{\mathbb{N}}$ with the product topology.

REMARK 1.4.47 From Theorem 1.3.23 (Tychnov's theorem) and Proposition 1.4.44, we have that $\mathcal{H}$ is a compact, metrizable space, hence a Polish space.

In the next theorem, known as "Urysohn's theorem", we show that in a sense, $\mathcal{H}$ is the canonical separable metrizable space.

THEOREM 1.4.48 Every separable metrizable space X is homeomorphic to a subset of the Hilbert cube $\mathcal{H}$.

Гильбертов куб является метризуемым и сепарабельным компактом, поэтому он является универсальным, т.е. содержащим гомеоморфные образы всех сепарабельных метризуемых пространств. Позднее П.С. Урысон нашел универсальное пространство U — сепарабельное полное метризуемое пространство, содержащее изометрические образы всех сепарабельных полных метризуемых пространств. Это пространство единственно, если дополнительно выполнено еще одно условие. Гильбертов куб, очевидно, не единственное универсальное пространство. Хорошо известно, что банахово пространство $C([0,1])$ универсально в следующем смысле — оно содержит линейно изометрические копии всех сепарабельных банаховых пространств. Оно не единственно. Кстати, задачу об универсальных пространствах поставил в 1922 году М. Фреше.

REMARK 1.4.49 By virtue of Theorem 1.4.48, we can regard X as a topological subspace of $\mathcal{H}$.

Note however, that although X is both open and closed in itself, $f(X)$ may be neither open nor closed in $\mathcal{H}$.

In fact, it may have no topological characterization at all.

In fact , we can strengthen Theorem 1.4.48 as follows.

THEOREM 1.4.50 For a Hausdorff topological space (X, τ) the following properties are equivalent:

(a) X is second countable and regular;

(b) X is separable metrizable;

(c) X is homeomorphic to a subset of the Hilbert cube $\mathcal{H}$.

REMARK 1.4.51 The equivalence $(a) \Leftrightarrow (b)$ is known as as "Urysohn's metrizable theorem".
For a proof, we refer to Munkres (1975), Theorem 4.1, p. 217 or Dugundji (1966), Corollary IX.9.2, p. 195.

Здесь уместно привести и современные критерии метризуемости компактов.
Для метризуемости компакта X любое из следующих четырех условий необходимо и достаточно:
1. X обладает счетной базой;
2. X обладает точечно-счетной базой;
3. в X есть счетная сеть (определение сети смотрите на следующем слайде);
4. диагональ в $X \times X$ имеет тип G_δ.

Замечание. Более широким понятием, чем база пространства X, является понятие сети, введенное А.В. Архангельским, а именно: система γ произвольных подмножеств из X называется сетью (в смысле Архангельского) пространства X, если всякое открытое в X множество представимо в виде объединения некоторых множеств из системы γ. Таким образом, каждая база является сетью, тогда как сеть является базой лишь в том случае, когда она состоит исключительно из открытых в X множеств. Простым примером сети в $\mathbb{R}^N$, не являющейся базой, может служить совокупность всех его замкнутых подмножеств.

This theorem leads us to the metrizability of the Alexandrov one-point compactification X^* of a locally compact space X.

PROPOSITION 1.4.52 If X is a noncompact, locally compact space and X^* is its one-point compactification (see Theorem 1.3.39),

then

X^* is metrizable

if and only if

X is second countable.

COROLLARY 1.4.53 If X is a noncompact, locally compact, separable metrizable space, then the one-point compactificatiion X^* is metrizable too.

In metrizable spaces we can often infer properties of semicontinuous functions from properties of continuous functions, by means of the next proposition.

PROPOSITION 1.4.54 If X is a metrizable space and $f : X \to \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$,

then

(a) f is lower semicontinuous and bounded below

if and only if

there exists a sequence $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq C_b(X)$ such that $f_n \uparrow f$.

(b) f is upper semicontinuous and bounded above

if and only if

there exists a sequence $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq C_b(X)$ such that $f_n \downarrow f$.

REMARK 1.4.55 If f is $\mathbb{R}$-valued, then from the above proof it is clear that the members of the approximating sequence $\{f_n\}_{n\geq 1}$ are Lipschitz continuous functions,
i.e. for all $x, y \in X$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq nd(x, y)$.
Also from Example 1.1.42 we know that if $C \subseteq X$ is closed, then χ_C is upper semicontinuous and so we can find a sequence of (Lipschitz) continuous functions f_n such that $f_n(x) \downarrow \chi_C(x)$ for all $x \in X$.
Finally if $f \in C_b(X)$, we can find two sequence $\{u_n\}_{n\geq 1}$ and $\{v_n\}_{n\geq 1}$ of bounded (Lipschitz) continuous functions such that $u_n \uparrow f$ and $v_n \downarrow f$ (for the definition of Lipschitz continuity, see Definition 1.5.6).