Математический институт им. В. А. Стеклова
Российский фонд фундаментальных исследований

Международная конференция

“Современные проблемы механики сплошной среды”

посвященная памяти академика

Леонида Ивановича Седова

в связи со стодесятилетием со дня его рождения

Тезисы докладов

МИАН, Москва, 13–15 ноября 2017 г.

Председатели программного комитета:

В. П. Карликов, В. В. Козлов, А. Г. Куликовский, В. А.Левин, В. А. Садовничий.

Организационный комитет:

А. Г. Куликовский, А. Т. Ильичев, В. В. Марков, А. В. Аксенов, Н. Е. Афонина, А. Н. Богданов, П. Ю. Георгиевский, Ю. И. Димитриенко, Т. А. Журавская, А. Г. Калугин, М. С. Макарова, И. С. Мануйлович, А. В. Марченко, А. С. Савин, Н. И. Сидняев, А. М. Чайка

Программный комитет:

С. В. Болотин, А. Н. Голубятников, М. В. Гордин, И. Г. Горячева, Д. А. Губайдуллин, Д. М. Климов, А. Н. Крайко, К. .В. Краснобаев, И. И. Липатов, Г. А. Любимов, О. Э. Мельник, Н. Ф. Морозов, Р. И. Нигматулин, Ю. М. Окунев, Ю. С. Осипов, А. Н. Осипцов, В. А. Полянский, С. Т. Суржиков, Г. А. Тирский, Д. В. Трещёв, В. Е. Фортов, С. Л. Чернышов, В. Н. Чубариков, М. Э. Эглит

В организации конференции принимают участие:

– Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет,
– Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
– Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского.

E-mail: sedov-110@mi.ras.ru
Web site: http://www.mi.ras.ru/index.php?c=conf

Построение специальных точных решений квазилинейного уравнения теплопроводности

[1]**А. Л. Казаков**, [2]**Св. С. Орлов**
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск
[1]s.orlov@icc.ru
[2]kazakov@icc.ru

Рассматривается квазилинейное параболическое уравнение

$$T_t = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (k(T)\nabla_{\mathbf{x}} T), \quad k(T) = k_0 T^{\sigma}, \tag{1}$$

которое, как известно, встречается при описании процессов горения, тепло- и массопереноса, фильтрации в сплошных нелинейных средах [1]. В литературе (1) именуется *нелинейным уравнением теплопроводности* (*фильтрации*) [2,3], а также *уравнением пористой среды* (*the porous medium equation*) [4].

Будем считать, что $T \triangleq T(t, \mathbf{x})\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^{\nu+1} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu \in \{0, 1, 2\}$, $k_0, \sigma \in \mathbb{R}_+$. В предположении наличия пространственных (плоской, осевой и сферической) симметрий уравнение (1) серией невырожденных преобразований приводится к одномерному виду

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \frac{\nu u}{\rho}\, u_\rho, \tag{2}$$

в котором u — новая искомая функция времени $t \geqslant 0$ и неотрицательной скалярной переменной $\rho = ||\mathbf{x}||_\nu \triangleq (\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2)^{1/2}$.

Авторами исследуется проблема поиска точных решений типа тепловой волны уравнения (2), удовлетворяющих специальному краевому условию

$$u(t, \rho)|_{\rho = f(t)} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\rho = f(t)$ — некоторая функция, обладающая достаточной степенью гладкости. Ее график определяет в плоскости переменных (t, ρ) *фронт тепловой волны*.

Настоящая работа включает в себя три основных этапа.

А. Поиск точных решений уравнения (2) в виде

$$u(t, \rho) = \psi(t, \rho) v(\xi), \quad \xi \triangleq \xi(t, \rho), \quad \psi\, \xi_t \xi_\rho \not\equiv 0 \tag{4}$$

(прямой метод Кларксона–Крускала) [5]. Структура анзаца [4] предполагает редукцию к ОДУ относительно $v(\xi)$. В формулу

[4], в частности, укладываются такие важные для приложений классы точных решений, как автомодельные, типа бегущей волны [6,7].

B. Согласование найденных семейств решений с краевым условием (3). Выделение решений типа тепловой волны. Переход к задачам Коши для ОДУ 2-го порядка.

C. Качественное исследование свойств решений задач Коши. Идентификация поведения решений типа тепловой волны.

Итак, авторами получены новые классы точных решений нелинейного уравнения теплопроводности (2), имеющих вид тепловой волны. Проводится подробный качественный анализ, позволяющий определить поведение и свойства этих решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00608, № 16-31-00291).

Литература

1. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
3. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
4. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Claredon Press, 2007.
5. Olver P. J. Direct reduction and differential constraints // Proc. Roy. Soc. (London). 1994. Ser. A, V. 444. P. 509-523.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
7. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978.