

Минобрнауки России  
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова  
Сибирского отделения Российской академии наук  
(ИДСТУ СО РАН)

*На правах рукописи*

**Сороковиков Павел Сергеевич**

**Алгоритмы идентификации нелинейных динамических моделей  
на основе методик обучения с подкреплением**

09.06.01 – Информатика и вычислительная техника

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации  
(космические и информационные технологии)

**НАУЧНЫЙ ДОКЛАД**

об основных результатах научно-квалификационной работы (диссертации)  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Иркутск – 2021

Работа выполнена в лаборатории 1.2 Оптимального управления отделения 1 Эволюционных уравнений и управляемых динамических систем ИДСТУ СО РАН.

Научный руководитель:

**Горнов Александр Юрьевич,**

доктор технических наук,

главный научный сотрудник лаборатории 1.2

ИДСТУ СО РАН

Рецензенты:

**Максимкин Николай Николаевич,**

кандидат технических наук, доцент,

ведущий научный сотрудник лаборатории 5.2

Информационно-управляющих систем

ИДСТУ СО РАН

**Хамисов Олег Валерьевич,**

доктор физико-математических наук, доцент,

заведующий отделом прикладной математики

ИСЭМ СО РАН

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Известные методы и программные средства решения задач параметрической идентификации нелинейных динамических моделей во многих ситуациях не позволяют проводить эффективные исследования сложных прикладных задач из различных научно-технических областей в связи с невыпуклостью и многоэкстремальностью формулируемых в таких задачах функционалов. Проблема построения эффективных и надежных алгоритмов и методик исследования прикладных задач параметрической идентификации продолжает оставаться актуальной.

Исследования по разработке численных методов нелокальной оптимизации в последние годы ведутся очень активно во многих научных организациях, как российских, так и зарубежных. К настоящему времени специалистами представлено большое количество методов и алгоритмов различного происхождения<sup>1</sup>, отличающихся друг от друга вычислительными характеристиками.

Проблема поиска глобального экстремума в невыпуклых задачах оптимального управления остается одной из наиболее сложных оптимизационных задач и к настоящему времени не имеет удовлетворительного решения. Разработка теоретических подходов к исследованию указанных задач проводилась множеством специалистов, среди которых Р. Беллман, В.А. Батулин, В.И. Гурман, В.А. Дыхта, Ю.Г. Евтушенко, В.Ф. Кротов, В.А. Срочко, А.С. Стрекаловский, Р.П. Федоренко, Ф.Л. Черноусько, С.А. Floudas, С.Ј. Goh, I.L. Lopez Cruz, E. Polak, A. Schwartz, K.L. Teo, K.H. Wong и другие. Созданию численных методов оптимизации динамических систем посвящено значительное число публикаций, как в России, так и за рубежом. В большинстве работ российских авторов основное внимание уделяется разработке алгоритмов, основанных на теории оптимального управления – принципе максимума Понтрягина и достаточных условиях оптимальности. В зарубежных работах основные усилия направлены на редукции задач оптимального управления к конечномерным задачам оптимизации и применение развитых программных средств для задач математического программирования. К настоящему времени известны, например, следующие эвристические алгоритмы поиска глобального

---

<sup>1</sup> Floudas, С.А. Encyclopedia of optimization / С.А. Floudas, Р.М. Pardalos. Springer Science & Business Media, 2008. 4626 p.

экстремума в нелинейных задачах оптимального управления: методы генетического поиска<sup>2</sup>, случайного мультистарта<sup>3</sup>, стохастических аппроксимаций множества достижимости<sup>3</sup>, овыпуклений<sup>4</sup>, криволинейного поиска<sup>5</sup>, случайных покрытий<sup>6</sup> и другие.

Методология обучения с подкреплением (reinforcement learning) является относительно новым и активно развивающимся разделом теории машинного обучения. Современные результаты, достигнутые в указанной области, пока не получили должного осмысления специалистами, но могут послужить существенному продвижению в исследуемой проблематике – в развитии теории и создании алгоритмов нелокальной оптимизации.

Анализ конструкций и свойств известных алгоритмов оптимизации позволяет сделать заключение о том, что степень обучаемости алгоритмов зачастую не слишком велика. Для задач локальной оптимизации это обстоятельство, как правило, не является критичным – алгоритм может работать долго, но, в конце концов, достигает экстремума. Совершенно другая ситуация в невыпуклой (глобальной) оптимизации. Задача достаточно полного сканирования варибельного множества может оказаться весьма сложной даже для задач небольших размерностей – до десятков переменных. В многомерных задачах математического программирования и задачах оптимизации динамических систем, формально бесконечномерных, малообучаемые алгоритмы могут оказаться совершенно неэффективными, что влечет выдачу неверных результатов – решений, не являющихся оптимальными. Можно утверждать, что в основе любой успешной поисковой стратегии лежит баланс между глобальным сканированием допустимого множества («разведкой») и локальным уточнением полученных приближений («эксплуатацией»). Как известно, методология обучения с подкреплением нацелена на нахождение подобных балансов.

---

<sup>2</sup> Cruz, I.L.L. Efficient evolutionary algorithms for optimal control / I.L.L. Cruz. Wageningen University, 2002. 122 p.

<sup>3</sup> Горнов, А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления / А.Ю. Горнов. Новосибирск: Наука, 2009. 278 с.

<sup>4</sup> Толстоногов, А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А.А. Толстоногов. Новосибирск: Наука, 1986. 295 с.

<sup>5</sup> Горнов, А.Ю. Метод криволинейного поиска глобального экстремума в задаче оптимального управления / А.Ю. Горнов, Т.С. Зароднюк // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. № 3. С. 19–27.

<sup>6</sup> Горнов, А.Ю. Метод случайных покрытий для задачи оптимального управления / А.Ю. Горнов, Т.С. Зароднюк // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17, № 2. С. 31–42.

В диссертационной работе обсуждается подход, основанный на использовании методик обучения с подкреплением, проверяется гипотеза о том, что на их основе возможно построить конкурентоспособные алгоритмы идентификации нелинейных динамических моделей. Исследуется возможность применения методик обучения с подкреплением для конструирования алгоритмов невыпуклой оптимизации различного происхождения.

**Цель работы** заключается в разработке алгоритмов и вычислительных технологий решения задач параметрической идентификации нелинейных динамических моделей на основе методик обучения с подкреплением. Под вычислительной технологией в работе понимается совокупность методов и алгоритмов, структур данных, расчетных методик и программных реализаций математической модели.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Разработка и программная реализация методов нелокального одномерного поиска, основанных на условии Гёльдера, эвристической идеологии и методиках обучения с подкреплением.

2. Разработка и программная реализация алгоритмов решения многомерных задач невыпуклой оптимизации с использованием поисковых методов различного происхождения и теории машинного обучения.

3. Создание вычислительных технологий решения задач параметрической идентификации нелинейных динамических моделей на основе разработанных обучающихся алгоритмов.

4. Разработка специализированного программного обеспечения, реализующего широкие возможности предлагаемых вычислительных технологий.

5. Исследование работоспособности разработанных алгоритмов, программных средств и вычислительных технологий на тестовых, содержательных и прикладных задачах оптимизации.

**Объект исследования.** В работе рассматривается ряд задач:

1. Конечномерные задачи невыпуклой оптимизации, включающие как гладкие, так и недифференцируемые функции.

2. Задачи параметрической идентификации – поиск значений параметров модели, позволяющих обеспечить ее близость к экспериментальным данным.

3. Задачи оптимального управления, направленные на оптимизацию функционалов, определенных на траекториях системы обыкновенных

дифференциальных уравнений с учетом как ограничений на управляющие воздействия, так и ограничений на траектории системы – терминальных и фазовых.

**Предмет исследования.** Новые алгоритмы параметрической идентификации нелинейных моделей, построенные с применением методик обучения с подкреплением.

**Методы исследования.** При выполнении работы использовались методы теории математического программирования, оптимального управления, машинного обучения, анализа данных, а также технологии проектирования программных комплексов, методики тестирования алгоритмов, верификации и визуализации.

**Научная новизна** проведенного исследования заключается в следующем:

1. Разработаны алгоритмы поиска глобального минимума невыпуклой функции одной переменной на основе методик обучения с подкреплением, применение которых при построении указанных алгоритмов ранее не исследовалось. Реализованные алгоритмы были разделены на четыре подмножества:

- алгоритмы, основанные на условии Гёльдера;
- алгоритмы, основанные на условии Липшица производной функции;
- алгоритмы, основанные на эвристической идеологии;
- семейство вероятностных Р-алгоритмов Жиглявского–Жилинскаса.

Алгоритмы одномерного глобального поиска, основанные на условии Гёльдера, должным образом ранее не исследовались. Анализ выполненных автором вычислительных экспериментов показал, что обобщение алгоритмов на основе условия Гёльдера дает в ряде случаев значительный эффект ускорения перед алгоритмами, основанными на условии Липшица. В ходе тестирования выявлены наиболее предпочтительные значения показателя Гёльдера и лидирующие алгоритмы.

2. Разработаны алгоритмы невыпуклой оптимизации, в которых решаются вспомогательные задачи одномерного глобального поиска с помощью вышеприведенных методов. При построении указанных алгоритмов использовалась теория машинного обучения с подкреплением.

3. Предложены алгоритмы нелокального многомерного поиска, не использующие методы одномерной оптимизации в качестве вспомогательных.

Теория обучения с подкреплением также применялась при конструировании данных алгоритмов.

4. Реализованы поисковые биоинспирированные алгоритмы с применением методик обучения с подкреплением. Указанные алгоритмы были разделены на три подмножества:

– алгоритмы, вдохновленные живой природой, в том числе методы роевого интеллекта;

– эволюционные алгоритмы, моделирующие процессы естественного отбора;

– алгоритмы, инспирированные неживой природой и человеческим сообществом.

5. Разработаны двухметодные вычислительные схемы решения задач невыпуклой оптимизации на основе биоинспирированных алгоритмов и методов локального спуска.

6. Разработаны вычислительные технологии решения задач невыпуклой оптимизации нескольких классов: математического программирования, параметрической идентификации и оптимального управления.

**Теоретическая значимость** результатов диссертационной работы состоит в разработке новых алгоритмов невыпуклой оптимизации, основанных на поисковых методах различного происхождения и применении методик обучения с подкреплением.

**Практическая значимость** научно-квалификационной работы обусловлена возможностью применения предложенных алгоритмов и вычислительных технологий для решения прикладных оптимизационных задач нескольких классов: безусловной минимизации, параметрической идентификации, оптимизации динамических систем. Решены три известные прикладные задачи оптимального управления в робототехнических системах: управления мобильным роботом, управления манипулятором промышленного робота, оптимальной ориентации летательного аппарата в пространстве. Проведено исследование моделей атомно-молекулярных потенциалов сверхбольших размерностей.

**Реализация результатов работы.** Большая часть диссертационного исследования была проведена при поддержке гранта РФФИ № 19-37-90065 «Алгоритмы идентификации нелинейных динамических моделей на основе методик обучения с подкреплением». Результаты, полученные в ходе выполнения

работы, частично были использованы в двух других проектах, поддержанных РФФИ: № 18-07-00587 «Вычислительные технологии оптимизации для задач атомно-молекулярного моделирования и молекулярной динамики», № 17-07-00627 «Разработка алгоритмов поиска глобального экстремума функционалов на основе технологии машинного обучения с подкреплением».

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Алгоритмы одномерного нелокального поиска, основанные на условии Гёльдера и эвристической идеологии, построенные с применением методик обучения с подкреплением.

2. Алгоритмы невыпуклой оптимизации, основанные на предложенных методах одномерного нелокального поиска и сконструированные при помощи методик обучения с подкреплением.

3. Алгоритмы невыпуклой оптимизации, не использующие методы одномерного поиска и построенные с использованием теории машинного обучения.

4. Поисковые многоагентные алгоритмы оптимизации, инспирированные природой, основанные на методиках обучения с подкреплением и комбинированные с методами локального поиска.

5. Вычислительные технологии решения задач параметрической идентификации нелинейных динамических моделей, построенные на основе разработанных алгоритмов.

**Соответствие диссертации паспорту специальности.** В соответствии с паспортом и областью исследований специальности 05.13.01 в научно-квалификационной работе предложены численные методы решения многоэкстремальных задач оптимизации (п. 4), на основе которых разработаны вычислительные технологии исследования задач параметрической идентификации нелинейных динамических моделей (п. 7). Создано специализированное алгоритмическое и программное обеспечение для решения указанных оптимизационных задач (п. 5).

**Достоверность** результатов научно-квалификационной работы подтверждена многовариантными вычислительными экспериментами, проведенными на коллекции тестовых задач, включающей как модельные, так и содержательные задачи, сопоставлением результатов тестирования с публикациями известных специалистов, экспертизой статей в научных журналах,



апробацией на научных конференциях и семинарах.

**Апробация результатов работы.** Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях:

8th, 9th International Workshop on Mathematical Models and their Applications (IWMA) (Красноярск, Россия, 2019, 2020 гг.);

9th, 11th International Conference on Optimization Methods and Applications (OPTIMA) (Петровац, Черногория, 2018, 2020 гг.);

14th International Conference on Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control (EUROGEN-2021) (Афины, Греция, 2021 г.);

International Conference «Geometric and Quantum Control» (Сочи, Россия, 2021 г.);

17th Baikal International School-Seminar «Methods of Optimization and Their Applications» (Максимиха, Бурятия, Россия, 2017 г.);

6th, 7th, 8th International Workshop «Critical Infrastructures in the Digital World» (IWCI) (Байкальск, Россия, 2019–2021 гг.);

Joint Science and Education Conference «Arctic Dialogue in the Global World» (Улан-Удэ, Россия, 2015 г.);

Multidisciplinary Youth Academic Research Conference «Science Present and Future: Research Landscape in the 21st century» (Иркутск, Россия, 2019 г.);

LXIII Всероссийской научной конференции МФТИ (Москва, Россия, 2020 г.);

VIII, X, XII Всероссийской научно-образовательной школе-конференции «Управление. Информация. Оптимизация» (Санкт-Петербург, Москва, Сочи, Россия, 2016, 2018, 2020 гг.);

XIII Международной конференции «Интеллектуализация обработки информации» (ИОИ-2020) (Москва, Россия, 2020 г.);

LI Всероссийской молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, Россия, 2020 г.);

XXII Международном молодежном научном форуме «Ломоносов-2015» (Москва, Россия, 2015 г.);

VIII Международной конференции «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ-2019) (Иркутск, Россия, 2019 г.);

VI Международной школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (NLA-2018) (Иркутск, Россия, 2018 г.);

X Международной молодежной научно-практической конференции с элементами научной школы «Прикладная математика и фундаментальная информатика» (Омск, Россия, 2020 г.);

XXV Байкальской Всероссийской конференции с международным участием «Информационные и математические технологии в науке и управлении» (Иркутск, Россия, 2020 г.);

XIII Международной молодежной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (Новосибирск, Россия, 2021 г.);

XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Иркутск, Россия, 2017 г.);

XIII, XIV Всероссийской конференции по фундаментальным и прикладным проблемам физики (Улан-Удэ, Россия, 2016, 2017 гг.);

XXXIII–XXXVI Всероссийской конференции «Ляпуновские чтения» (Иркутск, Россия, 2017–2020 гг.).

Результаты работы также обсуждались на семинаре в ФИЦ «Информатика и управление» РАН (Москва, рук. М.А. Посыпкин), семинаре лаборатории «Математические модели в геоэкологии» Сибирского федерального университета (Красноярск, рук. К.В. Симонов), семинарах ИДСТУ СО РАН.

**Публикации.** По материалам научно-квалификационной работы опубликовано 55 работ, список которых приведен в конце научного доклада. В число указанных работ входят две статьи, опубликованные в журналах из перечня ВАК, шесть статей в изданиях, индексируемых в международных системах научного цитирования (Web of Science, Scopus).

**Личный вклад автора.** Все результаты научно-квалификационной работы получены автором самостоятельно. Программные реализации предложенных алгоритмов и методик выполнены диссертантом лично. Из совместных работ, опубликованных в соавторстве, в диссертации использованы результаты, полученные автором.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В **первой главе** произведены обзор и классификация оптимизационных задач и методов их решения, сформулирована постановка задачи идентификации нелинейных динамических моделей, проанализировано современное состояние исследований в данной области, описаны методики тестирования алгоритмов.

В п. 1.1 приведена классификация конечномерных задач оптимизации и численных методов, предназначенных для их решения.

В п. 1.2 произведен обзор существующих на сегодняшний день численных методов локального поиска.

В п. 1.3 описаны существующие подходы к решению задач глобальной оптимизации. Рассматривается проблема поиска глобального минимума невыпуклой функции с параллелепипедными ограничениями

$$f(x) \rightarrow \min_x, x \in B, B = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Выполнен обзор алгоритмов одномерной ( $n=1$ ) и многомерной ( $n>1$ ) оптимизации с систематическим разделением на несколько подмножеств, исходя из происхождения алгоритма.

В п. 1.4 сформулирована математическая постановка задачи параметрической идентификации нелинейных динамических моделей. Управляемый процесс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями:  $\dot{x} = \tilde{f}(x(t), u(t), t)$ ,  $x(t_0) = x^0$ , где  $t \in [t_0, t_1]$  – время,  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  – вектор фазовых координат,  $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$  – вектор управляющих воздействий. Вектор-функция  $\tilde{f}(x(t), u(t), t)$  предполагается непрерывно дифференцируемой по всем аргументам, кроме  $t$ . Допустимыми будем называть кусочно-непрерывные управляющие функции  $u(t)$  для любых значений времени  $t$ , принадлежащие множеству  $U = \{u(t) \in R^r : u_l \leq u(t) \leq u_g\}$ , где  $u_l, u_g \in R^r$  – векторы нижнего и верхнего ограничений на управление. Задача оптимального управления в стандартной постановке состоит в поиске допустимого управления  $u^*(t)$ , доставляющего минимум терминальному функционалу

$$I_0(u) = \varphi_0(x(t_1)) \rightarrow \min.$$

Присутствуют также терминальные ограничения

$$I_j(u) = \varphi_j(x(t_1)) \leq 0, j = \overline{1, m},$$

и фазовые ограничения в виде неравенств

$$I_j(u) = g_j(x(t), u(t), t) \leq 0, j = \overline{m+1, mt}.$$

Все функции  $\varphi_j(x(t_1))$ ,  $j = \overline{0, m}$ , и  $g_j(x(t), u(t), t)$ ,  $j = \overline{m+1, mt}$ , предполагаются непрерывно дифференцируемыми по всем аргументам.

Проанализировано современное состояние исследований в области оптимизации динамических систем, как теоретических результатов, так и методов поиска глобального экстремума в невыпуклых задачах оптимального управления.

В п. 1.5 произведен обзор российского и зарубежного программного обеспечения, предназначенного для решения задач оптимального управления.

В п. 1.6 представлено описание методик обучения с подкреплением, применяемых для конструирования алгоритмов невыпуклой оптимизации различного генезиса. Выдвигается гипотеза о том, что на их основе возможно построить конкурентоспособные алгоритмы идентификации нелинейных динамических моделей.

В п. 1.7 даны описания методик численного исследования оптимизационных алгоритмов и требований к тестовым задачам.

**Вторая глава** посвящена разработке и тестированию модификаций алгоритмов поиска глобального экстремума невыпуклой функции одной переменной.

В п. 2.1 представлена общая схема реализации алгоритмов одномерного глобального поиска, имеющая следующий вид:

0. *Инициализация.* Выбираются начальные точки  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$ , число проб  $k = 1$ .

1. *Сортировка.* Обозначим  $\bar{x}_k = (x'_0, x'_1, \dots, x'_k)$  – вектор отсортированных точек, т.е.  $\{x_0, x_1, \dots, x_k\} = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_k\}$ ,  $a = x'_0 \leq x'_1 \leq \dots \leq x'_k = b$ ,  $\bar{f}_k = (f'_0, f'_1, \dots, f'_k)$  – вектор значений функции в отсортированных точках.

2. *Оценка интервалов.* Для каждого интервала  $(x'_{i-1}, x'_i)$  вычисляется характеристика  $R(i) = R(i, \bar{x}_k, \bar{f}_k)$ .

3. *Выбор интервала.* Выбирается интервал  $(x'_{i-1}, x'_i)$ , которому соответствует максимальная характеристика  $R(t) = \max \{R(i), 1 \leq i \leq k\}$ . Если таковых интервалов несколько, то выбирается один из них.

4. *Выбор точки.* Если выполняется критерий останова (например,  $x_t - x_{t-1} \leq \varepsilon_x$ , где  $\varepsilon_x$  – заданная точность), то алгоритм прекращает работу,

в противном случае в интервале  $(x'_{i-1}, x'_i)$  выбирается точка  $x_{k+1} = S(t) = S(t, \bar{x}_k, \bar{f}_k) \in (x'_{i-1}, x'_i)$ ,  $k = k + 1$ , осуществляется переход к шагу 1.

В п. 2.2 дано описание предложенных модификаций алгоритмов, основанных на эвристической идеологии и построенных с применением методик обучения с подкреплением, – методов парабол и «сжимающего перебора».

В п. 2.3 рассмотрено подмножество алгоритмов одномерного глобального поиска, в которых целевая функция должна удовлетворять условию Липшица

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad (1)$$

где  $x_1, x_2$  – любые точки в интервале поиска,  $L$  – константа Липшица,  $0 < L < \infty$ .

В работе предложены модификации алгоритмов, основанные на условии Гёльдера

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq G|x_1 - x_2|^{\frac{1}{N}}, \quad (2)$$

где  $G$  – константа Гёльдера,  $N \geq 1$  – показатель Гёльдера. Выдвинута гипотеза, заключающаяся в том, что обобщение (2) позволяет улучшить качество работы алгоритмов, основанных на условии (1).

В пп. 2.3.1–2.3.4 содержится подробное описание разработанных модификаций методов Ю.Г. Евтушенко, С.А. Пиявского, Р.Г. Стронгина, а также комбинированного алгоритма с использованием методов парабол и Стронгина в качестве базовых.

В п. 2.4 рассматривается подмножество алгоритмов, основанных на условии Липшица производной функции

$$|f'(x_1) - f'(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|, |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

где  $M$  – константа Липшица производной функции,  $0 < M < \infty$ . Предложена модификация метода Брента с автоматической оценкой максимума производной.

В п. 2.5 описаны разработанные модификации вероятностных Р-алгоритмов, основанные на применении методик обучения с подкреплением.

В п. 2.6 приведены выполненные многовариантные вычислительные эксперименты на коллекции тестовых одномерных задач. В ходе тестирования подтвердилась гипотеза о том, что обобщение алгоритмов на основе условия Гёльдера может дать существенный эффект ускорения перед алгоритмами, основанными на традиционном условии Липшица. Выявлены наиболее предпочтительные значения показателя Гёльдера для каждого алгоритма. Выполнено численное сравнение указанных алгоритмов. В результате

проведенного сравнительного анализа комбинированный алгоритм на основе методов Стронгина и парабол и модификация метода Стронгина продемонстрировали наилучшие результаты, опережая модификации методов Пиявского и Евтушенко по эффективности и надежности. Проведенные экспериментальные исследования свидетельствуют о перспективности реализованных модификаций для решения задач нелокального одномерного поиска, которые часто возникают в качестве вспомогательных при решении многомерных задач оптимизации.

В **третьей главе** приводится описание предложенных алгоритмов многомерной нелокальной оптимизации различного происхождения, построенных на основе методик обучения с подкреплением, и результаты численного исследования их свойств.

В **п. 3.1** представлены разработанные модификации алгоритмов, в которых методы одномерной оптимизации, описанные во **второй главе**, используются в качестве вспомогательных.

В **п. 3.1.1** описаны три модификации метода парабол, основанного на комбинации алгоритмов многомерного покоординатного спуска и одномерного поиска на случайных сетках минимумов парабол, образованных «выпуклыми тройками». В первой модификации при одномерном поиске осуществляется селекция «выпуклых троек», т.е. ищется минимум не всех парабол, а только определенного процента наилучших (по значению в средней точке) от общего количества. Во второй модификации метода применяется алгоритм, основанный на комбинации надежного метода Стронгина и варианта эвристического метода парабол, в основу которого положена процедура обучения, направленная на оценку скорости роста исследуемой функции, оцениваемой с помощью условия (2). Третий вариант алгоритма заключается в использовании методики обучения, основанной на стохастическом выборе координат точки на каждой итерации. Приведены результаты тестирования указанных модификаций на коллекции тестовых задач.

В **п. 3.1.2** предложены модификации туннельного алгоритма на основе методов одномерного нелокального поиска и теории обучения с подкреплением. Алгоритмы туннельного поиска основаны на различных методах «выхода» из локальных экстремумов. После нахождения локального экстремума (локальный этап алгоритма) ищется точка, в которой значение критерия качества меньше

известного наилучшего значения итерации (туннельный этап алгоритма). Найденная точка выбирается как стартовая для следующего локального спуска. В предложенных вариантах туннельного алгоритма из начального приближения выбирается случайным образом направление поиска, и по этому направлению запускается процедура одномерной нелокальной оптимизации с помощью одного из разработанных поисковых алгоритмов. Из найденного в ходе указанной процедуры приближения снова выбирается случайное направление и производится одномерный поиск. Шаги алгоритма повторяются до выполнения критерия останова. Модификации туннельного алгоритма протестированы с применением библиотеки тестовых задач.

В п. 3.1.3 представлены разработанные модификации метода Пауэлла, построенные с применением методик обучения с подкреплением. На итерациях рассматриваемых алгоритмов конструируются сопряженные направления спуска за счет решения многочисленных вспомогательных задач поиска глобального минимума функции одной переменной. Разработанные модификации устраняют недостаток базового метода, связанный с локальным характером спуска, являя собой в итоге глобализованные алгоритмы. Выполнено численное исследование свойств алгоритмов по методикам сравнительного тестирования.

В п. 3.1.4 описана предложенная с применением теории машинного обучения модификация метода Розенброка, основная идея которого заключается во вращении системы координат в соответствии с изменением скорости убывания целевой функции. Новые направления координатных осей выбираются таким образом, чтобы одна из них соответствовала направлению наибо́льшего убывания целевой функции, а остальные определяются из условия ортогональности. Представлены вычислительные эксперименты численного исследования модификации метода Розенброка на коллекции тестовых задач.

В п. 3.1.5 приводится описание модификации метода криволинейного поиска, сконструированной при помощи методик обучения с подкреплением и позволяющей на каждой итерации глобально исследовать допустимую область и находить в окрестности рекордной точки новые приближения, которые реализуют локальное улучшение целевой функции. В указанном алгоритме на каждой итерации решается вспомогательная задача поиска глобального минимума функции одной переменной, определяемой вдоль сканирующих кривых. Представлены результаты тестирования данной модификации алгоритма.

В п. 3.2 описаны предложенные модификации поисковых алгоритмов невыпуклой оптимизации, в которых, в отличие от алгоритмов, представленных в п. 3.1, не решается вспомогательная задача одномерного нелокального поиска. Разработаны пять модификаций следующих методов: Растригина (п. 3.2.1), Лууса-Яаколы (п. 3.2.2), поиска с запретами (п. 3.2.3), случайных покрытий (п. 3.2.4), экспертного метода (п. 3.2.5). Приведены пошаговые схемы данных алгоритмов, при построении которых применялась теория обучения с подкреплением.

В п. 3.2.6 представлены вычислительные эксперименты численного исследования свойств указанных алгоритмов с использованием библиотеки тестовых задач.

В п. 3.3 приведено описание разработанных модификаций многоагентных биоинспирированных алгоритмов, которые заключаются в использовании методик обучения с подкреплением, гибридизации с градиентными методами локального поиска и оценивании на каждой итерации «меры биоразнообразия». В качестве алгоритмов локального поиска применяются квазиньютоновские методы BFGS и L-BFGS. Предложены десять модификаций алгоритмов, разделенных на три подмножества.

В п. 3.3.1 описаны алгоритмы первого подмножества, вдохновленные живой природой, в том числе методы роевого интеллекта. Даны пошаговые схемы четырех разработанных модификаций следующих методов: биогеографии (BBO), роя частиц (PSO), роя светлячков (Firefly) и опыления цветков (FPA).

В п. 3.3.2 представлены реализованные эволюционные алгоритмы, моделирующие процессы естественного отбора. В работе предложены три модификации эволюционных алгоритмов: модификации генетического алгоритма (GA), метода дифференциальной эволюции (DE), а также комбинированный алгоритм на основе методов генетического поиска и роя частиц (GA-PSO).

В п. 3.3.3 даны описания алгоритмов, инспирированных неживой природой и человеческим сообществом, составляющих третье подмножество. Разработаны модификации метода гармонического поиска (HS), метода оптимизации по принципу «учитель-ученик» (TLBO) и культурного алгоритма (CA).

В п. 3.3.4 представлены результаты численного исследования свойств предложенных модификаций биоинспирированных алгоритмов на коллекции тестовых задач. Для каждого алгоритма произведен экспериментальный подбор оптимальных значений параметров, обеспечены одинаковые условия



тестирования. Вследствие стохастичности методов запуск алгоритмов производился многократно из одних и тех же равномерно распределенных в области определения функции стартовых точек. Число запусков принято равным 50. Количество агентов для всех алгоритмов равно 10. Единым критерием останова для всех алгоритмов является превышение 10000 вызовов целевой функции.

В целях сравнительного анализа тестируемых алгоритмов были посчитаны основные статистики по запускам: минимальное, максимальное и среднее значения, стандартное отклонение. В таблице 1 представлены результаты вычислительных экспериментов сравнения алгоритмов в виде статистик по средним значениям функции популяции на одной из тестовых задач из коллекции – функции Растригина

$$f(x) = 10 \cdot n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cdot \cos(2\pi x_i)), B = [-5, 12, 5, 12]^n, n = 100.$$

На основе посчитанных статистик были построены коробчатые диаграммы, чтобы продемонстрировать результаты сравнения алгоритмов (рисунок 1).

Таблица 1 – Результаты вычислительных экспериментов сравнения алгоритмов

№	Алгоритм	Мин.	Макс.	Среднее	Отклонение
1	GA	163,7490	230,6874	191,9841	18,6217
2	DE	214,2624	327,9105	280,9270	27,0435
3	GA-PSO	341,7341	746,4325	538,8604	80,2558
4	HS	487,5723	622,4511	549,472	28,9096
5	CA	521,3641	670,6469	603,8406	41,205
6	TLBO	399,5344	960,5646	746,3521	142,738
7	Firefly	683,3173	1016,688	818,9893	69,126
8	FPA	707,2599	935,6094	856,665	44,5432
9	BBO	721,4379	1079,054	937,153	76,5281
10	PSO	800,6267	1046,2	937,3794	53,785

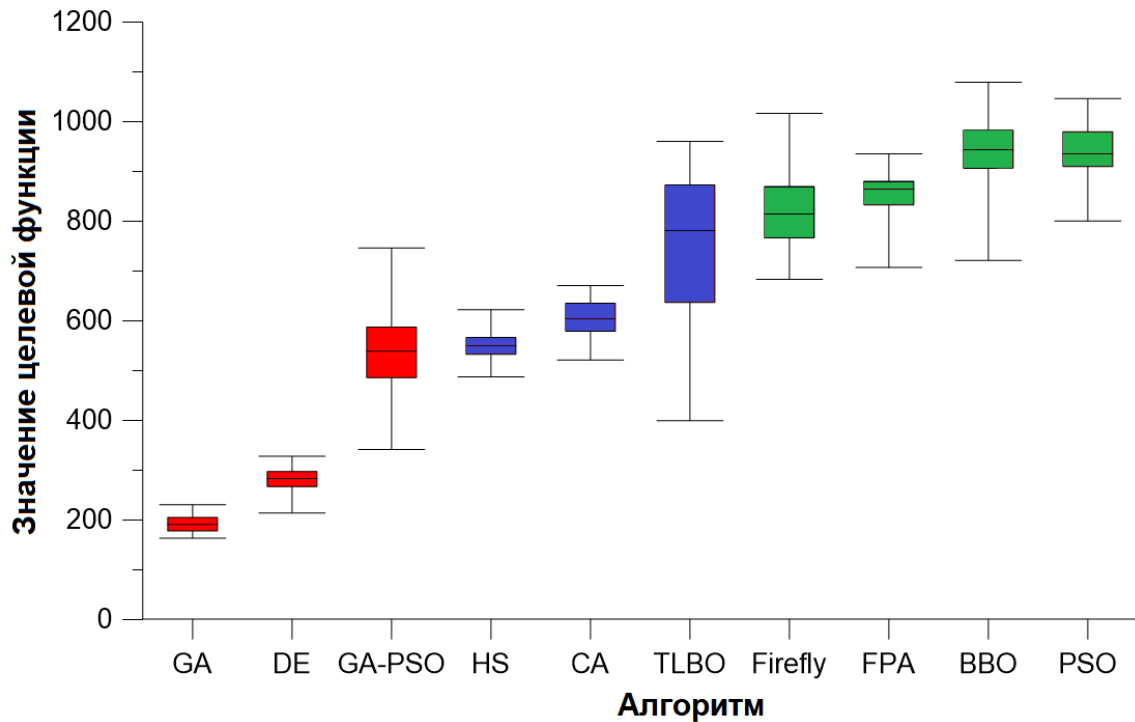


Рисунок 1 – Диаграмма сравнения предложенных биоинспирированных алгоритмов

На основе проведенных вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что среди алгоритмов нет явного лидера, который продемонстрировал бы наилучшие результаты по всем тестовым задачам. Рейтинги алгоритмов существенно различались в зависимости от задачи, что говорит о целесообразности иметь в арсенале множество алгоритмов, а не какой-либо один. Однако можно заметить, что алгоритмы эволюционного типа лидировали чаще остальных. Во всех рассмотренных случаях комбинированные алгоритмы, основанные на биоинспирированных методах и методах локального поиска, показали значительные улучшения по сравнению с базовыми многоагентными методами.

Результаты численного исследования свойств алгоритмов, построенных с применением теории обучения с подкреплением, продемонстрировали их работоспособность для решения задач нелокальной оптимизации.

В **четвертой главе** приведено описание разработанного пакета программ МЕОРТ, предназначенного для решения многоэкстремальных задач параметрической идентификации нелинейных моделей.

В **п. 4.1** сформулирован формат технологической постановки задачи. Описаны функциональные подсистемы пакета программ и режимы его работы.

Представленные в **главах 2, 3** оптимизационные алгоритмы были реализованы с применением единых программных стандартов и интегрированы в

пакет программ МЕОРТ. Специализированное программное обеспечение включает в себя следующие функциональные подсистемы (компоненты):

1. *Программный каркас*, обеспечивающий единообразный подход к реализации алгоритмов и включающий базовый функционал (организация процесса численных исследований, оценочные средства, модули случайных вычислений и т.п.). Пакет программ разработан с использованием языка С и компилятора GCC, функционирует под операционными системами семейств Linux, Windows и Mac OS.

2. *Библиотеки алгоритмов оптимизации*. В состав реализованных библиотек оптимизационных алгоритмов включены как методы многомерной невыпуклой оптимизации, так и алгоритмы решения вспомогательных задач одномерного глобального поиска.

3. *Коллекцию тестовых задач* с известными решениями. Библиотека тестовых задач включает в себя как задачи математического программирования, так и проблемы оптимизации динамических систем. Некоторые из модельных примеров представлены в **приложении**.

4. *Сервисные и инструментальные модули* (средства протоколирования вычислительного процесса, табличные и графические средства визуализации результатов расчетов, алгоритмы разностной оценки производных, средства конструирования субоптимальной сетки дискретизации и т.п.).

5. *Метакомпоненты* (диалоговая система, реализующая интерфейс для пользователя, средства автоматизации и контроля постановки задачи, алгоритмы планирования и автоматизации расчетов и т.п.).

Логическая структура пакета программ представлена на рисунке 2.

Далее подробно описаны основные функциональные подсистемы разработанного программного обеспечения с указанием их файловых составов, а также режимы работы, в которых может функционировать пакет программ.

В **п. 4.2** содержится описание разработанного вероятностного динамического планировщика расчетов для задачи глобального поиска, реализованного на основе предложенных алгоритмов оптимизации.

Методика обучения планировщика основана на поочередном запуске всех базовых глобализованных алгоритмов из одинаковых стартовых точек, вычислении оценок эффективности, определяемых как разность между рекордным и найденным алгоритмом значением целевой функции, и

вероятностном перезапуске алгоритмов, имеющих наилучшие оценки. При этом для любого из базовых алгоритмов сохраняется ненулевая вероятность перезапуска, зависящая от суммируемого на итерациях вектора его оценок, в данном случае выступающего в качестве обучаемой модели. Алгоритмы локального поиска используются для периодического уточнения рекордного значения целевой функции методом, выбор которого также зависит недетерминированным образом от его успешности на предыдущих итерациях. Критерием останова работы планировщика является превышение заданного лимита времени. Работа динамического планировщика протестирована на модельных и содержательных задачах невыпуклой оптимизации. Приведены результаты вычислительных экспериментов, которые подтвердили способность планировщика генерировать в автоматическом режиме многометодные алгоритмы, успешно конкурирующие со всеми базовыми методами.

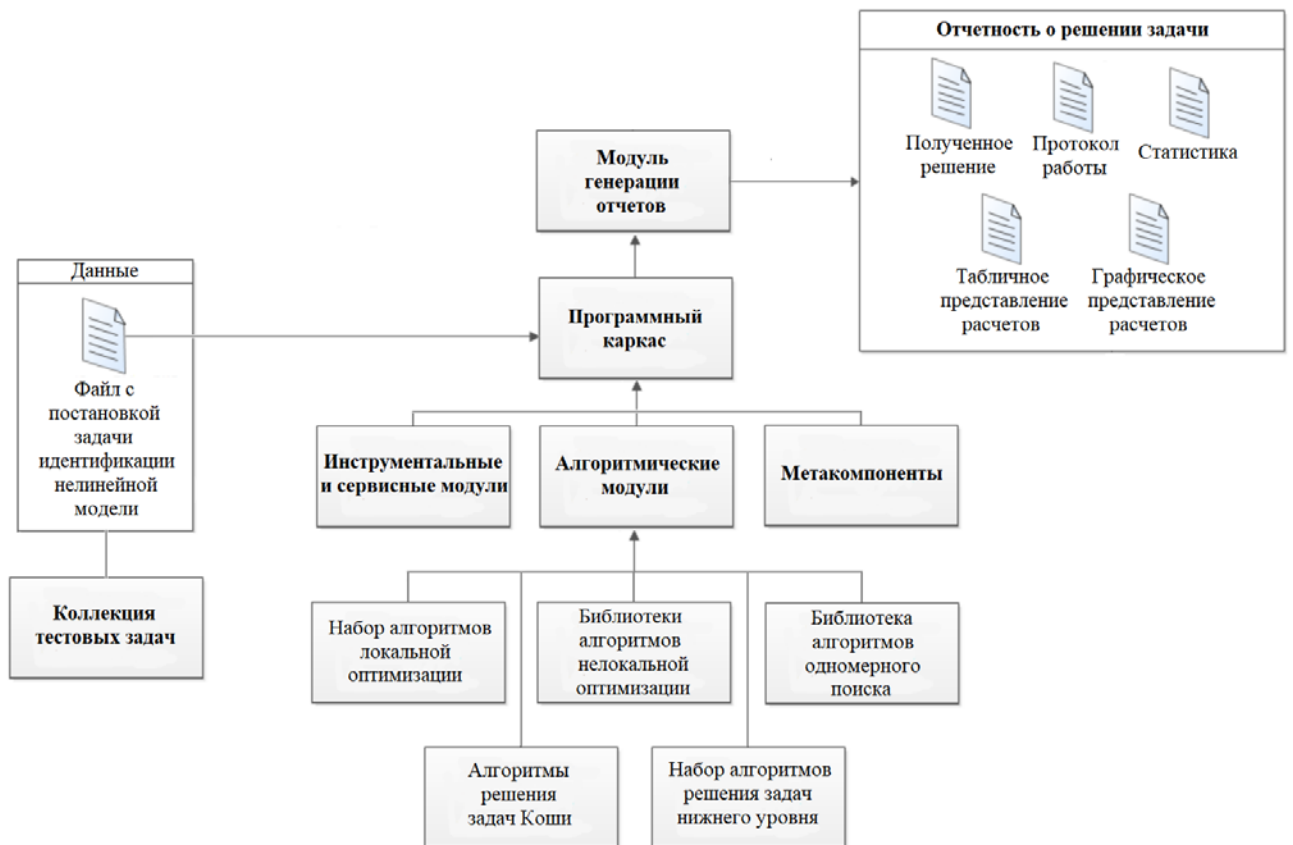


Рисунок 2 – Логическая структура разработанного пакета программ

В пятой главе исследованы возможности применения предложенных алгоритмов и вычислительных технологий к решению прикладных и содержательных задач.

В п. 5.1 рассмотрены модели из области управления роботами.

В п. 5.1.1 описаны специфические особенности задач оптимального управления в робототехнических системах. Для численного решения задач используется дискретизация системы дифференциальных уравнений и приближенные методы решения задачи Коши. Отрезок изменения времени делится на  $n_u - 1$  частей, т.е. строится равномерная сетка  $\{t_0 + ih, i = \overline{0, n_u - 1}\} \cup t_1$ , в узлах которой запоминаются управления и траектории ( $n_u$  – число точек дискретизации).

В п. 5.1.2 дано описание методов учета фазовых ограничений.

В п. 5.1.3 рассматривается задача оптимальной ориентации летательного аппарата в пространстве. Математическая модель летательного аппарата описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = -x_4 + u_1 \sin u_2, \\ \dot{x}_4 = x_3 + u_1 \cos u_2. \end{cases}$$

На управления накладываются ограничения:  $0 \leq u_1(t) \leq 1$ ,  $-\pi \leq u_2(t) \leq \pi$ . Задача заключается в переводе системы из точки  $x(t_0) = (10, 0, 0, 0)$  в точку  $x(t_1) = (0, 0, 0, 0)$  за минимально возможное время  $t_1$ ,  $t \in [0, t_1]$ . Целевой функционал имеет следующий вид:  $I_0(u) = t_1 \rightarrow \min$ . Найденное значение функционала:  $I_0^*(u) = 10,286$ . На рисунке 3 приведены графики оптимального управления и соответствующих ему фазовых координат.

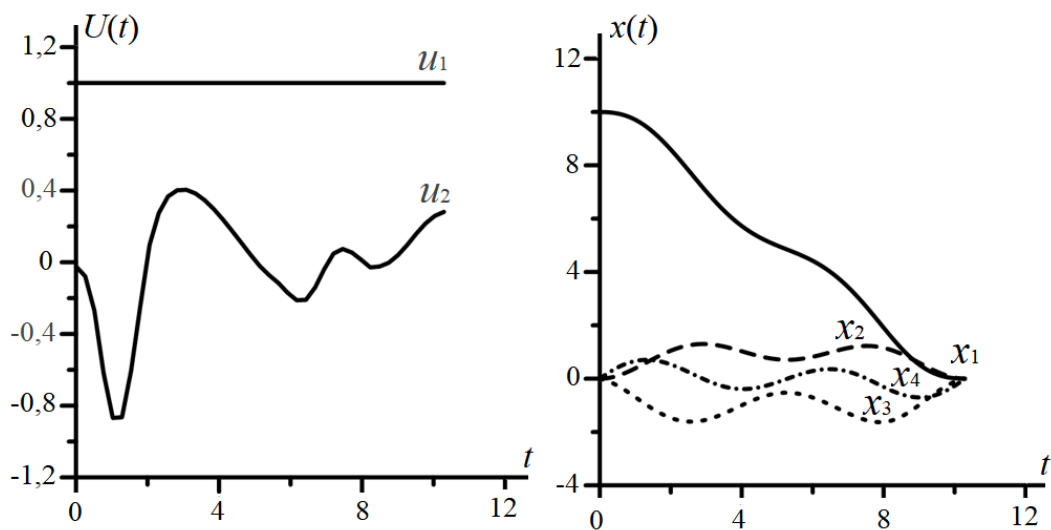


Рисунок 3 – Графики управлений и фазовых переменных для задачи ориентации летательного аппарата в пространстве

В п. 5.1.4 рассматривается задача оптимального управления мобильным роботом. Математическая модель мобильного робота описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,5(u_1 + u_2)\cos(x_3), \\ \dot{x}_2 = 0,5(u_1 + u_2)\sin(x_3), \\ \dot{x}_3 = 0,5(u_1 - u_2). \end{cases}$$

На управления накладываются ограничения  $|u_i(t)| \leq 10, i = \overline{1,2}$ . Фазовые координаты должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$g_1(x) = 1,5 - \sqrt{(x_1 - 2,5)^2 + (x_2 - 2,5)^2} \leq 0,$$

$$g_2(x) = 1,5 - \sqrt{(x_1 - 7,5)^2 + (x_2 - 7,5)^2} \leq 0,$$

$$g_3(x) = 3 - \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 8)^2} \leq 0,$$

$$g_4(x) = 3 - \sqrt{(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 2)^2} \leq 0.$$

Задача заключается в переводе системы из точки  $x(t_0) = (10, 10, 0)$  в точку  $x(t_1) = (0, 0, 0)$  при выполнении всех ограничений за минимально возможное время  $t_1, t \in [0, t_1]$ . Целевой функционал имеет следующий вид:  $I_0(u) = t_1 \rightarrow \min$ .

В ходе решения удалось получить оптимальное значение функционала  $I_0^*(u) = 2,48$ . На рисунке 4 представлены оптимальные траектории движения мобильного робота для найденного решения.

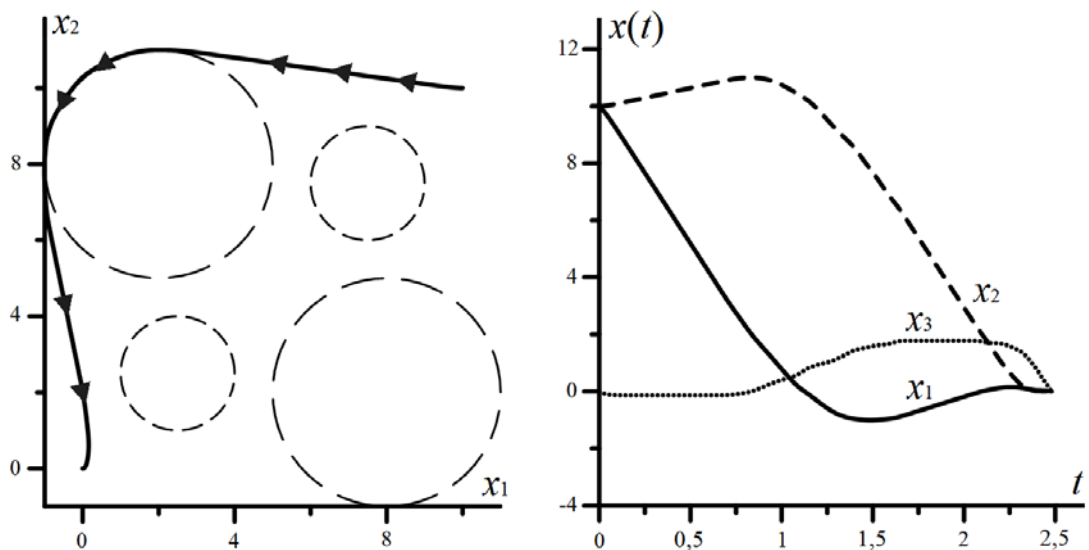


Рисунок 4 – Оптимальные траектории движения мобильного робота: на плоскости (слева), в зависимости от времени (справа)

В п. 5.1.5 приведены описание и результаты решения задачи оптимального управления манипулятором промышленного робота.

В п. 5.2 рассмотрена перспективная проблема математического программирования из прикладной области атомно-молекулярного моделирования – задача оптимизации потенциалов атомно-молекулярных кластеров. Выполнены системные вычислительные эксперименты по поиску низкопотенциальных состояний кластеров Морса, Саттона-Чена, Гупты и Z1 сверхбольших размерностей. Сравнительный анализ результатов экспериментов не выявил резких отклонений от наблюдаемой закономерности найденных значений потенциалов, описывающей их рост в зависимости от числа атомов.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты диссертационной работы.

В приложениях описана коллекция тестовых задач.

## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Выполненная работа посвящена разработке алгоритмов и вычислительных технологий решения задач параметрической идентификации нелинейных динамических моделей с использованием методик и принципов обучения с подкреплением. В рамках проведенного исследования были получены следующие результаты:

1. Разработаны и реализованы алгоритмы нелокального одномерного поиска, основанные на условии Гёльдера, эвристической идеологии и теории обучения с подкреплением.

2. Разработаны и реализованы алгоритмы решения невыпуклых многомерных задач оптимизации с использованием поисковых методов различного происхождения и методик обучения с подкреплением:

- алгоритмы, основанные на методах глобального одномерного поиска;
- алгоритмы, не использующие методы одномерной оптимизации;
- биоинспирированные алгоритмы;
- двухметодные вычислительные схемы на основе биоинспирированных алгоритмов и методов локального поиска.

3. Разработаны вычислительные технологии решения задач параметрической идентификации нелинейных динамических моделей на основе предложенных алгоритмов.

4. Выполнена интеграция разработанных алгоритмов и вычислительных технологий в рамках специализированного программного обеспечения, реализованного на языке С.

5. Исследована работоспособность предложенных алгоритмов, программных средств и вычислительных технологий на коллекции задач, включающей в себя содержательные и прикладные задачи из научно-технических областей управления роботами и атомно-молекулярного моделирования.

В диссертационной работе поставленная цель была достигнута, сформулированные задачи решены. Основным результатом исследования являются разработанные алгоритмы идентификации нелинейных динамических моделей на основе методик обучения с подкреплением, которые позволяют решать задачи невыпуклой оптимизации нескольких классов: безусловной минимизации, параметрической идентификации, оптимального управления. Предложенные алгоритмы были протестированы на тестовых, содержательных и прикладных задачах. На основе проведенного исследования можно сделать вывод о работоспособности методик обучения с подкреплением применительно к построению конкурентоспособных алгоритмов идентификации нелинейных динамических моделей.

#### ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*Статьи в журналах из перечня ВАК:*

1. Сороковиков, П.С. Модификации алгоритмов нелокального одномерного поиска, основанные на условии Гёльдера / П.С. Сороковиков // Вестник Бурятского гос. ун-та. Математика, информатика. – 2019. – № 4. – С. 40–56.

2. Хабитуев, Б.В. Выбор оператора мутации в эволюционных алгоритмах / Б.В. Хабитуев, Н.Б. Хаптахаева, П.С. Сороковиков, О.В. Кононова, А.В. Лиджеев // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 6. – URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=15732> (дата доступа: 26.03.2021).

*Статьи в изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus:*

3. Gornov, A. Computational technology for global search based on modified algorithm of the univariate nonlocal optimization / A. Gornov, P. Sorokovikov, T. Zarodnyuk // Advances in Intelligent Systems Research: Proc. of the VI Intern.



Workshop «Critical Infrastructures: Contingency Management, Intelligent, Agent-Based, Cloud Computing and Cyber Security» (IWCI 2019). – Atlantis Press, 2019. – P. 189–193.

4. Gornov, A. The approach to solving the problem of legacy systems on the examples of INTEC and OPTCON software / A. Gornov, L. Massel, P. Sorokovikov, A. Anikin, T. Zarodnyuk // Advances in Intelligent Systems Research: Proc. of the VI Intern. Workshop «Critical Infrastructures: Contingency Management, Intelligent, Agent-Based, Cloud Computing and Cyber Security» (IWCI 2019). – Atlantis Press, 2019. – P. 229–233.

5. Gornov, A. The stochastic coverings algorithm for solving applied optimal control problems / A. Gornov, T. Zarodnyuk, A. Anikin, P. Sorokovikov // Communications in Computer and Information Science: 18th Intern. Conf. on Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019). – Springer, 2019. – P. 486–496.

6. Sorokovikov, P. Combined non-convex optimization algorithms based on differential evolution, harmony search, firefly, and L-BFGS methods / P. Sorokovikov, A. Gornov // IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering. – IOP Publ., 2021. – Vol. 1047, № 1. – P. 012077.

7. Sorokovikov, P. Computational technology for the study of atomic-molecular Morse clusters of extremely large dimensions / P. Sorokovikov, A. Gornov, A. Anikin // IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering. – IOP Publ., 2020. – Vol. 734, № 1. – P. 012092.

8. Zarodnyuk, T. Numerical technologies for investigating optimal control problems with free right-hand end of trajectories / T. Zarodnyuk, A. Gornov, A. Anikin, P. Sorokovikov // Advanced Computational Methods for Knowledge Engineering: Proc. of the 6th Intern. Conf. on Computer Science, Applied Mathematics and Applications (ICCSAMA 2019). – Springer, 2019. – P. 99–105.

*Статьи в других изданиях:*

9. Anikin, A. Algorithms for global minimum search of atomic molecular clusters of extremely large dimensions / A. Anikin, A. Gornov, P. Sorokovikov // Системный анализ: моделирование и управление: Материалы Междунар. конф., посвященной памяти академика А.В. Кряжимского (Москва, 31 мая – 1 июня 2018 г.). – М.: МАКС Пресс, 2018. – С. 9–10.

10. Gornov, A. Algorithms for search of best-of-known solutions for Morse clusters / A. Gornov, A. Anikin, P. Sorokovikov, T. Zarodnyuk // Proc. of Intern. Workshop «Critical Infrastructures in the Digital World» (IWCI-2020) (Baikalsk, March 10–15, 2020). – Irkutsk: ESI SB RAS, 2020. – P. 68–69.

11. Gornov, A. Collection of reachable sets for dynamical systems with linear controls / A. Gornov, T. Zarodnyuk, A. Anikin, P. Sorokovikov, E. Finkelshtein // Proc. of Intern. Workshop «Critical Infrastructures in the Digital World» (IWCI-2019) (Baikalsk, March 17–24, 2019). – Irkutsk: ESI SB RAS, 2019. – P. 92–93.

12. Gornov, A. Experience in solving applied optimization problems / A. Gornov, A. Tyatyushkin, T. Zarodnyuk, A. Anikin, P. Sorokovikov, T. Madjara // Proc. of Intern. Workshop «Critical Infrastructures in the Digital World» (IWCI-2021) (Baikalsk, March 26 – April 2, 2021). – Irkutsk: ESI SB RAS, 2021. – P. 68.

13. Gornov, A. Low-potential Morse clusters of dimensions from 281 to 300 atoms / A. Gornov, P. Sorokovikov // Book of Abstracts of the X Intern. Conf. «Optimization and Applications» (OPTIMA-2019) (Petrovac, Montenegro, September 30 – October 4, 2019). – Moscow: DCC RAS, 2019. – P. 47.

14. Gornov, A. Multi-stage technology for constructing mathematical models / A. Gornov, P. Sorokovikov // Proc. of Intern. Workshop «Critical Infrastructures in the Digital World» (IWCI-2021) (Baikalsk, March 26 – April 2, 2021). – Irkutsk: ESI SB RAS, 2021. – P. 66–67.

15. Khandarov, F. Numerical study of bioinspired methods for solving global optimization problems / F. Khandarov, P. Sorokovikov // Abstracts of the 17th Baikal Intern. school-seminar «Methods of Optimization and Their Applications» (Maksimikha, Buryatia, July 31 – August 6, 2017). – Irkutsk: ESI SB RAS, 2017. – P. 45.

16. Sorokovikov, P. Application of reinforcement learning techniques for the construction of non-convex optimization algorithms / P. Sorokovikov // Proc. of Intern. Workshop «Critical Infrastructures in the Digital World» (IWCI-2020) (Baikalsk, March 10–15, 2020). – Irkutsk: ESI SB RAS, 2020. – P. 70–71.

17. Sorokovikov, P. Computational technology for the study of low-potential Gupta clusters of extremely large dimensions / P. Sorokovikov, A. Gornov, A. Anikin, T. Zarodnyuk // Book of Abstracts of the X Intern. Conf. «Optimization and Applications» (OPTIMA-2019) (Petrovac, Montenegro, September 30 – October 4, 2019). – Moscow: DCC RAS, 2019. – P. 114.

18. Sorokovikov, P. Low-energy Z1 clusters of dimensions from 81 to 110 atoms / P. Sorokovikov, A. Gornov // Book of Abstracts of the XI Intern. Conf. «Optimization and Applications» (OPTIMA-2020) (Petrovac, Montenegro, September 28 – October 2, 2020). – Moscow: DCC RAS, 2020. – P. 77.

19. Sorokovikov, P. Low-potential states of atomic-molecular Dzugutov clusters of large dimensions / P. Sorokovikov // The 6th Intern. Conf. on Optimization, Simulation and Control (COSC2019) (Ulaanbaatar, Mongolia, June 21–23, 2019). – Ulaanbaatar: National University of Mongolia, 2019. – P. 62–63.

20. Sorokovikov, P. Metallic Gupta clusters of extremely large dimensions / P. Sorokovikov, A. Gornov // Proc. of Intern. Workshop «Critical Infrastructures in the Digital World» (IWCI-2019) (Baikalsk, March 17–24, 2019). – Irkutsk: ESI SB RAS, 2019. – P. 71–72.

21. Sorokovikov, P. Nonlocal algorithms for one-dimensional search based on the Holder condition / P. Sorokovikov // Proc. of the 6th Intern. Conf. on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018) (Irkutsk, June 25–30, 2018). – Irkutsk: ISDCT SB RAS, 2018. – P. 128–129.

22. Sorokovikov, P. Numerical investigation of non-convex optimization algorithms based on reinforcement learning techniques / P. Sorokovikov // Book of Abstracts of the XI Intern. Conf. «Optimization and Applications» (OPTIMA-2020) (Petrovac, Montenegro, September 28 – October 2, 2020). – Moscow: DCC RAS, 2020. – P. 76.

23. Sorokovikov, P. Software implementation of algorithms for global minimum search based on nonlocal methods for one-dimensional optimization / P. Sorokovikov // Book of Abstracts of the IX Intern. Conf. «Optimization and Applications» (OPTIMA-2018) (Petrovac, Montenegro, October 1–5, 2018). – Moscow: DCC RAS, 2018. – P. 158.

24. Sorokovikov, P. Software implementation of nonlocal one-dimensional search algorithms based on the Holder condition / P. Sorokovikov // Book of Abstracts of the X Intern. Conf. «Optimization and Applications» (OPTIMA-2019) (Petrovac, Montenegro, September 30 – October 4, 2019). – Moscow: DCC RAS, 2019. – P. 113.

25. Sorokovikov, P. The comparison of evolutionary algorithm with other methods of unconstrained optimization / P. Sorokovikov, O. Kononova // Arctic Dialogue in the Global World: Proc. of the Joint Science and Education Conf. (Ulan-

Ude, June 16–17, 2015). – Ulan-Ude: Buryat State Univ. Publ. Department, 2015. – P. 469–472.

26. Zanaeva, B. Towards a hybrid algorithm of swarm intelligence / B. Zanaeva, P. Sorokovikov, F. Khandarov // Proc. of the 6th Intern. Conf. on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018) (Irkutsk, June 25–30, 2018). – Irkutsk: ISDCT SB RAS, 2018. – P. 152–153.

27. Zarodnyuk, T. Techniques for software performance and reliability testing / T. Zarodnyuk, P. Sorokovikov, A. Anikin, F. Khandarov // Proc. of Intern. Workshop «Critical Infrastructures in the Digital World» (IWCI-2019) (Baikalsk, March 17–24, 2019). – Irkutsk: ESI SB RAS, 2019. – P. 11–12.

28. Аникин, А.С. Алгоритм аппроксимации множества достижимости управляемой алгебро-дифференциальной системы / А.С. Аникин, А.Ю. Горнов, Т.С. Зароднюк, П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 3–5 декабря 2018 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2018. – С. 8.

29. Зароднюк, Т.С. Использование технологий обучения с подкреплением для построения модификаций алгоритмов глобальной оптимизации / Т.С. Зароднюк, П.С. Сороковиков // Тез. XIX Всерос. конф. молодых ученых по мат. моделированию и информ. технологиям (Кемерово, 29 октября – 2 ноября 2018 г.). – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2018. – С. 22.

30. Сороковиков, П.С. Алгоритм одномерного поиска Евтушенко с автоматической оценкой константы Липшица / П.С. Сороковиков, А.Ю. Горнов // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 5–8 декабря 2017 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 50.

31. Сороковиков, П.С. Библиотека алгоритмов невыпуклой оптимизации различного происхождения / П.С. Сороковиков // Тр. 63-й Всерос. науч. конф. МФТИ (Москва, 23–29 ноября 2020 г.). Прикладная математика и информатика. – М.: МФТИ, 2020. – С. 131–133.

32. Сороковиков, П.С. Вероятностный одноуровневый динамический планировщик расчетов для задачи глобального поиска / П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 3–5 декабря 2018 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2018. – С. 76.

33. Сороковиков, П.С. Вычислительная технология исследования атомно-молекулярных кластеров Саттона–Чена сверхбольших размерностей / П.С. Сороковиков, А.Ю. Горнов, А.С. Аникин // VIII Междунар. конф.

«Системный анализ и информационные технологии», САИТ–2019 (Иркутск – Листвянка, 8–14 июля 2019 г.): Тр. конф. – М.: ФИЦ ИУ РАН, 2019. – С. 86–94.

34. Сороковиков, П.С. Задача оптимального управления мобильным роботом с фазовыми ограничениями / П.С. Сороковиков, Т.С. Зароднюк // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2019. – С. 78–79.

35. Сороковиков, П.С. Металлические кластеры Саттона–Чена размерностей от 81 до 130 атомов / П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2019. – С. 75.

36. Сороковиков, П.С. Низкопотенциальные атомно-молекулярные кластеры Морса размерностей от 330 до 460 атомов / П.С. Сороковиков, А.Ю. Горнов // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. – С. 69.

37. Сороковиков, П.С. Низкопотенциальные кластеры Гупта размерностей от 126 до 156 атомов / П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 3–5 декабря 2018 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2018. – С. 79.

38. Сороковиков, П.С. Низкопотенциальные кластеры Морса размерностей от 261 до 280 атомов / П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 3–5 декабря 2018 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2018. – С. 78.

39. Сороковиков, П.С. Об одном способе гибридизации эволюционного алгоритма и метода роя частиц / П.С. Сороковиков, С.И. Козырев, И.А. Кривонос // Материалы 54-й Междунар. науч. студенческой конф. «МНСК-2016». Математика (Новосибирск, 16–20 апреля 2016 г.). – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2016. – С. 145.

40. Сороковиков, П.С. Пакет программ для численного решения задач многоэкстремальной оптимизации / П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. – С. 67.

41. Сороковиков, П.С. Программная реализация алгоритмов невыпуклой оптимизации с систематическим разделением на несколько множеств /

П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2019. – С. 76–77.

42. Сороковиков, П.С. Программная реализация метода Брента для мономерной задачи оптимизации с автоматической оценкой константы Липшица / П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 3–5 декабря 2018 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2018. – С. 77.

43. Сороковиков, П.С. Статистическое тестирование вычислительной технологии оптимизации потенциалов атомно-молекулярных кластеров / П.С. Сороковиков, А.Ю. Горнов // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. – С. 68.

44. Сороковиков, П.С. Трехэтапная вычислительная технология оптимизации атомно-молекулярных кластеров Морса сверхбольших размерностей / П.С. Сороковиков, А.Ю. Горнов // Интеллектуализация обработки информации: Тез. докл. 13-й Междунар. конф. – М.: РАН, 2020. – С. 125–128.

45. Сороковиков, П.С. Фреймворк и бенчмарк глобальной оптимизации / П.С. Сороковиков // Сб. тез. участников форума «Наука будущего – наука молодых» (Казань, 20–23 сентября 2016 г.). – М.: Изд-во «Инконсалт К», 2016. – Т. 1. – С. 350–352.

46. Сороковиков, П.С. Фреймворк и бенчмарк глобальной оптимизации / П.С. Сороковиков // Сб. тез. работ участников XI Всерос. конф. обучающихся «Национальное Достояние России» (Москва, 5–7 апреля 2017 г.). – М.: НС «Интеграция», 2017. – С. 156.

47. Сороковиков, П.С. Фреймворк и бенчмарк методов глобальной оптимизации / П.С. Сороковиков, О.В. Кононова // Материалы Междунар. молодежного науч. форума «Ломоносов-2015» [Электронный ресурс]. – М.: МАКС Пресс, 2015. – URL: [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2015/index.htm](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2015/index.htm).

48. Сороковиков, П.С. Численное исследование свойств алгоритмов невыпуклой оптимизации различного генезиса / П.С. Сороковиков // Современные проблемы математики и ее приложений: Тез. Междунар. (51-й Всерос.) молодежной школы-конф. (Екатеринбург, 3–7 февраля 2020 г.). – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2020. – С. 37–38.

49. Сороковиков, П.С. Численное исследование свойств метода биогеографии / П.С. Сороковиков // Материалы 55-й Междунар. науч. студ. конф.

«МНСК-2017». Математика (Новосибирск, 17–20 апреля 2017 г.). – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2017. – С. 122.

50. Сороковиков, П.С. Численное решение двух задач оптимального управления роботами с фазовыми ограничениями / П.С. Сороковиков // Современные проблемы математики и ее приложений: тез. Междунар. (51-й Всерос.) молодежной школы-конф. (Екатеринбург, 3–7 февраля 2020 г.). – Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2020. – С. 75–76.

51. Хандаров, Ф.В. Декомпозиция алгоритмов роевого интеллекта / Ф.В. Хандаров, Б.С. Занаева, П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 5–8 декабря 2017 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 58.

52. Хандаров, Ф.В. Фреймворк глобальной оптимизации с параллелепипедными ограничениями / Ф.В. Хандаров, Б.В. Хабитуев, П.С. Сороковиков, О.В. Кононова // Материалы IV междунар. науч.-практич. конф. «Инновационные технологии в науке и образовании» (Улан-Удэ, 28–30 августа 2015 г.). – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского гос. ун-та, 2015. – С. 275–278.

53. Хандаров, Ф.В. Фреймворк и бенчмарк прямых методов глобальной оптимизации / Ф.В. Хандаров, П.С. Сороковиков, Д.Ф. Дерюгин, С.П. Мальцев, А.Ю. Горнов // Тез. докл. XIII Всерос. конф. молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Иркутск – Старая Ангасолка, 13–18 марта 2017 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 67.

54. Хандаров, Ф.В. Численное исследование свойств метода биогеографии / Ф.В. Хандаров, П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 21–23 ноября 2016 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2016. – С. 60.

55. Хандаров, Ф.В. Численное исследование свойств метода нелокального поиска teaching–learning-based optimization / Ф.В. Хандаров, П.С. Сороковиков // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. – С. 77–78.