На правах рукописи

УШАКОВ АНТОН ВЛАДИМИРОВИЧ

НЕЛИНЕЙНЫЙ ВАРИАНТ ЗАДАЧИ О P-МЕДИАНЕ И ПОРОГОВАЯ РОБАСТНОСТЬ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ В ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧАХ РАЗМЕЩЕНИЯ

05.13.01 — Системный анализ, управление и обработка информации (в технике, экологии и экономике)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2016

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент, **Васильев Игорь Леонидович,** ИДСТУ СО РАН, ведущий научный сотрудник
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, **Кочетов Юрий Андреевич,** ИМ СО РАН, главный научный сотрудник
	доктор физико-математических наук, доцент, **Хамисов Олег Валерьевич,** ИСЭМ СО РАН, зав. отделом прикладной математики № 90
Ведущая организация:	**Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова (г. Москва)**

Защита состоится «____» ____________ 2016 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте `www.idstu.irk.ru` ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан «____» ____________ 2016 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Т.В. Груздева

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Дискретные задачи размещения, несмотря на длительную историю исследований и большое число полученных результатов, представляют собой актуальное направление в области исследования операций, что вызвано прежде всего широким спектром практических приложений таких задач, а также их высокой сложностью. Известно, что в СССР первые исследования подобного рода моделей, связанные с именами таких ученых как В.П. Чечерин и В.Р. Хачатуров, имели место, начиная с середины 60-х годов XX века, т.е. фактически с зарождения современной теории задач размещения. Дальнейшему развитию данного направления в нашей стране посвящены работы В.Л. Береснева, Э.Х. Гимади, Ю.Б. Гермейера, В.Т. Дементьева, Н.И. Глебова, А.А. Колоколова, а также И.Л. Васильева, Г.Г. Забудского, Ю.А. Кочетова, А.В. Плясунова, Ю.В. Шамардина и др. В настоящий момент исследования дискретных задач размещения ведутся по многим направлениям, среди которых стоит выделить исследования структуры и вычислительной сложности, разработку точных и приближенных алгоритмов решения, выделение полиномиально разрешимых случаев и т.д. К настоящему времени задачи размещения нашли свое применение во многих областях техники и экономики. Так, само появление исследуемой в диссертационной работе задачи о p-медиане, являющейся одной из базовых моделей, связано непосредственно с практической задачей о размещении заданного числа коммутаторов в некоторой сети связи. К настоящему моменту задача о p-медиане представляет собой естественно интерпретируемую модель размещения, применяемую в различных областях, из которых прежде всего стоит выделить так называемые «географические» приложения, т.е. непосредственно связанные с размещением предприятий и различных объектов инфраструктуры, таких как пожарные станции и пункты скорой помощи, буровые платформы, школы, пункты снабжения, датчики в системах распределения (например, в муниципальных системах водоснабжения), специализированные банковские счета для оптимизации прохождения средств и т.д. Задача о p-медиане также нашла свое применение в областях, которые относят к так называемым «негеографическим» приложениям. Среди них стоит выделить приложения в области стандартизации и унификации[1], позиционирования товара на рынке[2], задачу об оптимальном замещении в автомобильной промышленности[3], а также в кластерном анализе[4], предсказательной аналити-

[1] Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т. Экстремальные задачи стандартизации. — Новосибирск: Наука, 1978. — 336 с.

[2] Foundations of Location Analysis / Ed. by H. A. Eiselt and V. Marianov. — New York: Springer, 2011. — 520 p.

[3] Васильев И. Л. Метод декомпозиции для задачи о p-медиане на несвязном графе // Дискретн. анализ и исслед. опер. — 2007. — Т. 14, № 1. — С. 43–58.

[4] P. Hansen, B. Jaumard. Cluster analysis and mathematical programming // Math. Program. — 1997. — V. 79, no. 1-3. — P. 191–215.

ке[5], интеллектуальном анализе данных[6] и других областях.

Задача о p-медиане, как и другие классические дискретные задачи размещения, является довольно хорошо изученным объектом. Поэтому в настоящий момент большое число исследований посвящено ее различным нелинейным обобщениям, связанным с возникновением все новых разнообразных приложений, как в области размещения предприятий и объектов инфраструктуры с учетом различных экономических факторов, таких, например, как эффект масштаба, так и в области кластеризации и интеллектуальной обработки информации. Появление таких задач и постановок, все более точно отражающих реальные процессы и естественные экономические факторы, часто приводит к моделям, структура которых существенно отличается от классических дискретных задач размещения и требует разработки новых техник и алгоритмов их решения.

Цель диссертационной работы состоит в исследовании известных и новых нелинейных вариантов задачи о p-медиане и простейшей задачи размещения, имеющих вполне определенное экономическое приложение, а также в разработке и программной реализации методов поиска оптимальных и приближенных решений, в том числе с использованием параллельных вычислений.

Объектом исследования диссертационной работы являются дискретные задачи размещения, такие как задача о p-медиане и простейшая задача размещения, а также их нелинейные и бикритериальные постановки. Предметом исследования являются методы поиска точных и приближенных решений в таких задачах, в том числе с использованием параллельных вычислений.

Научная новизна. Для известного ранее нелинейного варианта задачи о p-медиане, в котором число открываемых предприятий p является переменной величиной, а в целевой функции присутствует нелинейное слагаемое, ограничивающее число открываемых предприятий, впервые построены и исследованы два типа релаксаций Лагранжа, получающиеся за счет ослабления различных групп ограничений. Получены формулы вычисления значений двойственных функций Лагранжа для заданного набора двойственных переменных, а также теоретические результаты, позволяющие упростить вычисление значения двойственных функций в зависимости от свойств нелинейного слагаемого. На основе полученных теоретических результатов предложен новый алгоритм поиска приближенных решений в нелинейном варианте задачи о p-медиане большой размерности.

Впервые обобщен известный подход к определению робастности решения в непрерывных задачах размещения, называемый пороговой робастностью, на случай дискретных задач на примере задачи о p-медиане и простейшей задачи размещения. Предложены новые робастные версии таких моделей, представляющие собой бикритериальные задачи нелинейного целочисленного програм-

[5] E. Fersini, E. Messina, F. Archetti. A p-Median approach for predicting drug response in tumour cells // BMC Bioinform. — 2014. — V. 15, no. 1. — P. 353–372.

[6] P. S. Bradley, U. M. Fayyad, O. L. Mangasarian. Mathematical Programming for Data Mining: Formulations and Challenges // INFORMS J. Comput. — 1999. — V. 11, no. 3. — P. 217–238.

мирования и предполагающие поиск компромиссных решений относительно робастности и значения целевой функции. Предложен и обоснован алгоритм поиска аппроксимации множества Парето-оптимальных решений, так называемых δ-эффективных решений, основанный на известном методе ε-ограничений (или методе главного критерия), учитывающем специфику рассматриваемых задач. Проведен обширный вычислительный эксперимент на тестовых примерах из известных библиотек, показавший эффективность предложенного подхода.

Предложен новый параллельный алгоритм поиска нижних оценок оптимального значения задачи о p-медиане, основанный на методе релаксаций Лагранжа и специальном методе генерации столбцов, а также включающий в себя специальную процедуры хранения данных. Важной особенностью разработанного параллельного алгоритма является, впервые реализованная для рассматриваемой задачи, схема иерархической (каскадной) сборки данных между параллельными процессами, позволяющая существенно ускорить время работы процедуры поиска нижних оценок на задачах размерностью свыше 100000 узлов, а также при запуске алгоритма с использованием большого числа параллельных процессов.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит как теоретический, так и экспериментальный характер. Полученные теоретические результаты позволили разработать алгоритм поиска приближенных решений для нелинейного варианта задачи о p-медиане, имеющей естественное практическое приложение в региональной экономике и анализе данных. Реализованный в виде программы разработанный алгоритм может успешно применяться при решении практических задач большой размерности. Предложенные бикритериальные постановки дискретных задач размещения демонстрируют новый подход к поиску решений при условии неопределенных начальных данных задачи, который также может быть успешно применен и для других более сложных постановок дискретных задач размещения, а также непосредственно для размещения объектов инфраструктуры при неопределенности величины спроса. Предложенный параллельный алгоритм поиска нижних оценок оптимального значения может служить основой для высокоэффективных параллельных алгоритмов поиска решений в задаче о p-медиане большой размерности, а также ее обобщений. Полученные с помощью программно реализованного параллельного алгоритма нижние оценки для задач большой размерности могут быть использованы как в точных методах, так и для оценки качества решения, получаемого с помощью современных эвристических и метаэвристических алгоритмов.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках проектов по программе СО РАН «Нелокальные методы в теории управления динамическими системами» (№ гос. регистрации 01201001345), «Информационно-вычислительные технологии в системах поддержки принятия решений на основе оптимизационных моделей и методов» (№ гос. регистрации 01201351945), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 21, а также грантов РФФИ (проекты

№ 12-01-31198, № 12-07-33045, № 14-07-00382).

Методология и методы исследования. В диссертационной работе применяются традиционные для задач размещения методы моделирования, а также элементы выпуклой оптимизации. Используются известные подходы из области недифференцируемой выпуклой оптимизации, целочисленного линейного программирования и многокритериальной оптимизации, такие как субградиентные алгоритмы, методы релаксаций Лагранжа и ε-ограничений. В диссертации применяются современные подходы и методы разработки параллельных программ для MIMD-машин с распределенной памятью.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов и выводов диссертации обусловлена применением апробированных методов и подходов исследования операций и математического программирования, а также современных технологий параллельных вычислений, и подтверждается результатами обширных вычислительных экспериментов.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих российских и международных конференциях: Всероссийские и международные научные конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения», 2009, 2012, 2015 (Омск); Российские и международные научные конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций», 2010 (Алтай), 2013 (Новосибирск); Научная конференция «Ляпуновские чтения & презентация информационных технологий», 2010, 2011, 2012 (Иркутск); Байкальской международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения», 2011, (пос. Листвянка), 2014 (о. Ольхон); Международная программа Ассоциации Европейских Обществ Исследования Операций для аспирантов ORP^3-2011, 2011 (Кадис, Испания); XII Прибайкальская школа-семинар молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии», 2012 (Иркутск); XIV Российская конференция с международным участием «Распределенные информационные и вычислительные ресурсы», 2012 (Новосибирск); III Всероссийская научная конференция «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях», 2013 (Иркутск); II Российско-монгольская конференция молодых ученых по математическому моделированию, вычислительно-информационным технологиям и управлению, 2013 (Иркутск, Россия — Ханх, Монголия); 26-ая Европейская конференция по исследованию операций, 2013 (Рим, Италия).

Кроме того, результаты диссертационной работы неоднократно обсуждались на научных семинарах в Институте динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, а также на семинарах в Институте математики Университета Севильи.

Публикации. Материалы диссертации полностью опубликованы в 22 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах из списка, рекомендованного ВАК для опубликования основных результатов диссертаций.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Идея исследования нелинейного варианта задачи о p-медиане [1, 4, 7] и пороговой робастности в дискретных задачах размещения [2, 5] принадлежит Э. Каррисоса (E. Carrizosa) и И.Л. Васильеву. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. Разработка и программная реализация параллельного эвристического алгоритма поиска нижних оценок оптимального значения в задаче о p-медиане осуществлялась автором лично. Из совместных публикаций [3, 6, 8] с И.Л. Васильевым, С. Ханафи (S. Hanafi) и К. Стерле (C. Sterle) на защиту выносятся только результаты, полученные автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 150 страниц, из них 131 страница текста, включая 13 рисунков и 19 таблиц. Библиография включает 280 наименований на 19 страницах.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность диссертационной работы, формулируются цель и задачи исследования, аргументируется научная новизна, отражается практическая и теоретическая значимость полученных результатов, а также их апробация. Приводится обзор известных в литературе методов поиска решений в задаче о p-медиане, а также современного состояния научных исследований в данном направлении. Представляются выносимые на защиту научные положения.

Первая глава диссертационной работы носит по большей части обзорный характер. В ней представлено подробное описание так называемого метода релаксаций Лагранжа для задач целочисленного линейного программирования, а также представлен обзор алгоритмов поиска решений в двойственной по Лагранжу задаче. Далее описан известный алгоритм поиска приближенных решений в задаче о p-медиане большой размерности, заложенные в котором идеи обобщаются во второй главе работы для одной нелинейной модификации задачи о p-медиане. Предложена схема распараллеливания процедуры поиска нижних оценок оптимального значения, эффективность которой продемонстрирована в ходе вычислительного эксперимента.

В разделе 1.1 дается постановка задачи о p-медиане в комбинаторном виде, а также в виде задачи целочисленного линейного программирования. Пусть имеется полный взвешенный простой орграф $G(I, A)$ с множеством узлов I, $|I| = m$, и множеством дуг $A = \{(i, j) : i \in I, j \in I, i \neq j\}$, причем каждой дуге $(i, j) \in A$ приписывается вес $d_{ij} > 0$, задающий расстояния между узлами. Задача о p-медиане состоит в отыскании p узлов, называемых медианами, таких чтобы сумма весов дуг, входящих в немедианные узлы из ближайшей медианы, была минимальна. Обозначим через $\delta^-(j) = \{i \in I|\ (i, j) \in A\}$ множество узлов, смежных с j, а через $\delta^+(i) = \{j \in I | \ (i,j) \in A\}$ множество узлов, с которыми смежна i. Также введем булевы переменные y_i и x_{ij}, соответствующие узлам и дугам графа $G(I, A)$. Переменная y_i принимает значение 1, если узел i является медианой, 0 в противном случае. Переменная x_{ij} равна 1, если узел i представляет собой медиану, и j присоединен к i выходящей из i дугой, 0 в противном случае. Используя введенные переменные и обозначения, задача о p-медиане может быть сформулирована как следующая задача целочисленного линейного программирования:

$$\min_{(x,y)} \sum_{(i,j)\in A} d_{ij}x_{ij}, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in\delta^-(j)} x_{ij} + y_j = 1, \qquad j \in I; \tag{2}$$

$$x_{ij} \le y_i, \qquad i \in I, j \in \delta^+(i); \tag{3}$$

$$\sum_{i\in I} y_i = p; \tag{4}$$

$$y_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \qquad i \in I, (i,j) \in A. \tag{5}$$

Для краткости дальнейшего изложения обозначим через X_{pM} допустимое множество задачи (1)–(5).

В разделе 1.2 дается описание одного метода[7] поиска приближенных решений в задаче о p-медиане, суть которого состоит в последовательном поиске нижних оценок оптимального значения с помощью метода релаксаций Лагранжа, включающего в себя субградиентный алгоритм и специальный метод генерации столбцов для поиска решений в двойственной по Лагранжу задаче, а также верхних оценок с помощью так называемой ядровой эвристики.

В разделе 1.3 дается обзор архитектур параллельных вычислительных систем, современных интерфейсов и моделей написания параллельных программ, а также некоторых широко известных теоретических результатов касательно вычислительной сложности и производительности параллельных алгоритмов, включая различные абстрактные модели параллельных машин. Приводится также обзор современных параллельных и последовательных алгоритмов поиска решений в задаче о p-медиане большой размерности, предлагается схема распараллеливания процедуры поиска нижней оценки оптимального значения в задаче о p-медиане.

Идея разработанного параллельного алгоритма состоит в разделении столбцов матрицы расстояний $\{d_{ij}\}$, $(i,j) \in A$, на некоторое число непересекающимихся подгрупп и их распределении между параллельными процессами, которые на основании имеющегося блока независимо друг от друга подсчитывают необходимые в ходе итерации алгоритма векторы оценок Лагранжа, субгради-

[7] P. Avella, M. Boccia, S. Salerno, I. Vasilyev. An aggregation heuristic for large scale p-median problem // Comput. Oper. Res. — 2012. — V. 39, no. 7. — P. 1625–1632.

енты, а также новые значения двойственных переменных. При реализации параллельного алгоритма использован интерфейс обмена сообщениями MPI. В качестве модели взаимодействия между процессами использована модель Master-Slave, в рамках которой выделяется один главный процесс Master, управляющий работой всех остальных, называемых Slave-(или вычислительными) процессами.

Для снижения нагрузки на Master-процесс и ускорения работы алгоритма для задач большой размерности была разработана схема иерархической (каскадной) сборки оценок Лагранжа и суммы двойственных переменных, отвечающих столбцам соответствующего блока.

В заключительном разделе 1.4 представлены результаты вычислительного эксперимента на трех известных из литературы тестовых задачах сверхбольшой размерности (1 млн. узлов), демонстрирующие эффективность предложенного параллельного алгоритма.

Во второй главе диссертации исследуется нелинейный вариант задачи о p-медиане, в котором количество открываемых предприятий p является целочисленной переменной, а в целевой функции присутствует дополнительное слагаемое в виде некоторой нелинейной функции, ограничивающей число открываемых предприятий. Для данной модификации задачи о p-медиане предложены и исследованы два вида релаксации Лагранжа, разработан алгоритм поиска приближенных решений, являющийся по сути обобщением метода, представленного в предыдущей главе диссертационной работы.

В разделе 2.1 дается обзор различных дискретных задач размещения с нелинейными компонентами в целевой функции и их экономических приложений, а также представляется постановка рассматриваемой модификации задачи о p-медиане в виде следующей задачи нелинейного целочисленного программирования:

$$F^* = \min_{(x,y,p)} \sum_{(i,j)\in A} d_{ij}x_{ij} + \phi(p), \tag{6}$$

$$(x, y) \in X_{pM}, \tag{7}$$

$$p \in P \triangleq \{p \in \mathbb{Z} : \ 1 \le p \le m\}. \tag{8}$$

В разделе 2.2 предлагаются и исследуются два вида лагранжевых релаксаций для задачи (6)–(8) относительно различных групп ограничений: релаксация $\mathcal{R}_1$ — ограничений (2) и (4), релаксация $\mathcal{R}_2$ — ограничения (4). Построение релаксаций является одним из наиболее известных подходов для поиска так называемых двойственных (нижних в задаче на минимум) оценок оптимального значения в задачах целочисленного линейного программирования и комбинаторной оптимизации. Ее идея состоит в редукции исходной задачи к более простой оптимизационной задаче, оптимальное значение которой, в случае поиска минимума, не превосходило бы оптимальное значение в исходной задаче.

Определение 1. Задача $f(x) \downarrow \min$, $x \in Y \subseteq \mathbb{R}^n$, называется релаксацией задачи $c(x) \downarrow \min$, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, если:

1. $X \subseteq Y$;

2. $f(x) \leq c(x) \ \forall x \in X$.

Лагранжевой релаксацией называют ослабление задачи (6)–(8), получающееся за счет добавления части ограничений в целевую функцию с некоторыми множителями. Сперва рассматривается релаксация $\mathcal{R}_1$ относительно двух типов ограничений, которые добавляются в целевую функцию с множителями $\lambda \in \mathbb{R}^m$ и $\pi \in \mathbb{R}$ соответственно. Обозначим через $\theta_1(\lambda, \pi)$ двойственную функцию Лагранжа, т.е. целевую функцию двойственной к (6)–(8) по Лагранжу задачи:

$$\begin{gathered} \theta_1(\lambda, \pi) \uparrow \max, \\ \lambda \in \mathbb{R}^m, \pi \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \theta_1(\lambda, \pi) = \min_{(x,y,p)} \Big\{ \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in I} \lambda_j \Big(1 - y_j - \sum_{i \in \delta^-(j)} x_{ij} \Big) + \\ + \pi (p - \sum_{i \in I} y_i) + \phi(p) : x_{ij} \leq y_i, \ x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, i \in I, (i, j) \in A \Big\}, \end{aligned}$$

полученной в результате добавления в целевую функцию указанных ограничений. Очевидно, что согласно данному выше определению подобное преобразование является релаксацией исходной задачи (6)–(8). Из теории двойственности известно, что значение целевой функции двойственной по Лагранжу задачи $\theta_1(\lambda, \pi)$ для некоторого фиксированного набора множителей (λ, π) дает некоторую нижнюю оценку оптимального значения исходной задачи (6)–(8). Обозначим через $\zeta_i(\lambda, \pi) = \sum\limits_{j \in \delta^+(i)} (d_{ij} - \lambda_j)^- - \lambda_i - \pi$ так называемые относительные оценки Лагранжа для переменных y_i. Доказан следующий результат.

Теорема 1. *Для любых множителей* $(\lambda, \pi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ *справедливо*

$$\theta_1(\lambda, \pi) = \sum_{i \in I} \min\{0, \zeta_i(\lambda, \pi)\} + \min_{p \in P} \Big\{ \pi p + \phi(p) \Big\} + \sum_{j \in I} \lambda_j. \tag{10}$$

Причем оптимальные значения прямых переменных в релаксированной задаче могут быть подсчитаны в явном виде:

$$p(\pi) \in \operatorname*{Argmin}_{q \in P} \{\pi q + \phi(q)\};$$

$$y_i(\lambda,\pi)=\begin{cases}1, & \zeta_i(\lambda,\pi)<0,\\ 0, & \textit{в противном случае};\end{cases}$$

$$x_{ij}(\lambda,\pi)=\begin{cases}1, & y_i(\lambda,\pi)=1\wedge q_{ij}(\lambda)<0,\\ 0, & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

В теореме 1 показано как при некоторых фиксированных множителях (λ,π) могут быть найдены оптимальные значения $x(\lambda,\pi)$, $y(\lambda,\pi)$ прямых переменных. Однако для того, чтобы найти оптимальное значение $p(\pi)$, необходимо решить задачу одномерной минимизации, что может быть выполнено, например, посредством полного перебора элементов множества P. Однако в случае вогнутой или выпуклой функции $\phi(\cdot)$ такая процедура поиска минимума может быть существенно упрощена.

Построим теперь релаксацию исследуемой нелинейной модификации задачи о p-медиане относительно только одного типа ограничений (2). В этом случае полученную двойственную функцию Лагранжа обозначим $\theta_2(\lambda)$. Обозначим через $\rho_i(\lambda)=\sum_{j\in\delta^+(i)}(d_{ij}-\lambda_j)^- -\lambda_i$ оценки Лагранжа для переменных y_i и предположим, что существует перестановка $i_1,i_2,\ldots,i_m$, такая что

$$\rho_{i_1}(\lambda)\le\rho_{i_2}(\lambda)\le\cdots\le\rho_{i_m}(\lambda).$$

Для отсортированных таким образом оценок введем следующую вспомогательную функцию $\psi(p,\lambda)\triangleq\sum_{k=1}^{p}\rho_{i_k}(\lambda)$. Тогда с использованием этих обозначений справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Для любого вектора $\lambda\in\mathbb{R}^m$ справедливо:*

$$\theta_2(\lambda)=\min_{p\in P}\Big\{\sum_{k=1}^{p}\rho_{i_k}(\lambda)+\phi(p)\Big\}+\sum_{j\in J}\lambda_j. \tag{11}$$

Причем оптимальные значения прямых переменных в релаксированной задаче могут быть подсчитаны в явном виде:

$$p(\lambda)\in\operatorname*{Argmin}_{q\in P}\Big\{\sum_{k=1}^{q}\rho_{i_k}(\lambda)+\phi(q)\Big\},$$

$$y_i(\lambda)=\begin{cases}1, & i\in\{i_1,\ldots,i_{p(\lambda)}\};\\ 0, & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

$$x_{ij}(\lambda)=\begin{cases}1, & y_i(\lambda)=1\wedge d_{ij}-\lambda_j<0;\\ 0, & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Таким образом, для подсчета значения целевой функции $\theta_2(\lambda)$ двойственной по Лагранжу задачи для некоторых фиксированных множителей λ необходимо найти оптимальное решение в задаче одномерной минимизации, которая в общем случае может быть решена полным перебором по $p \in P$. Однако, как и в случае первой релаксации, в зависимости от вида функции $\phi(\cdot)$ процедура перебора может быть упрощена.

В заключение приводится результат о соотношении нижних оценок, получаемых за счет использования релаксаций $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$.

Предложение 1. *Для любого $\lambda \in \mathbb{R}^m$ и $\pi \in \mathbb{R}$ справедливо следующее неравенство:*

$$\theta_1(\lambda, \pi) \leq \theta_2(\lambda). \tag{12}$$

В разделе 2.3 для рассматриваемой модификации задачи о p-медиане предлагается эвристический алгоритм поиска приближенных решений, учитывающий специфику нелинейного варианта задачи и являющийся обобщением метода поиска приближенных решений, представленного в первой главе для задачи о p-медиане. Для поиска нижних оценок оптимального значения ищется решение в двух двойственных по Лагранжу задачах, соответствующих двум типам релаксаций $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$, с помощью субградиентного алгоритма и специального метода генерации столбцов. Применяемая для поиска верхних оценок ядровая эвристика состоит в уменьшении размерности исходной задачи за счет выбора «перспективного» подмножества переменных и фиксации всех остальных переменных в нуле. Получившуюся в результате такого преобразования задачу называют ядровой. В качестве критерия, определяющего включение той или иной переменной в ядровую задачу, выступает величина соответствующей оценки Лагранжа для переменных y_i и x_{ij}, подсчитанной на основе значений двойственных переменных, полученных после процедуры поиска нижней оценки. Например, в случае релаксации $\mathcal{R}_2$ предполагается, что дан вектор множителей Лагранжа λ и число медиан (открытых предприятий) $p(\lambda)$, полученные по завершению процедуры поиска нижней оценки оптимального значения, а также оценки Лагранжа $\rho_i(\lambda) = \sum\limits_{j \in \delta^+(i)} (d_{ij} - \lambda_j)^- - \lambda_i$ и $q_{ij}(\lambda) = d_{ij} - \lambda_j$ для переменных y_i и x_{ij} соответственно. Тогда ядровая задача формируется на основании подмножества переменных, величины оценок Лагранжа которых меньше некоторых наперед заданных пороговых значений ν и μ для переменных y_i и x_{ij} соответственно, причем

$$\begin{aligned}
&i \in I(\lambda, \nu) \triangleq \{i \in I: \ \rho_i(\lambda) \leq \nu\},\\
&(i,j) \in W(\lambda, \mu) \triangleq \{(i,j): \ i \in I(\lambda), j \in \delta^+(i), \ q_{ij} \leq \mu\},\\
&p \in [p(\lambda) - \delta, p(\lambda) + \delta].
\end{aligned}$$

Особенностью такого подхода является то, что ядровая эвристика дает «хорошую» верхнюю оценку оптимального значения только на основании «хорошего» решения двойственной по Лагранжу задачи. С другой стороны, близкая к оптимальной верхняя оценка исключительно важна для подсчета шага субградиентного алгоритма и его сходимости. Для использования данной особенности возникает естественная идея последовательного повторения процедур поиска верхних (BUB) и нижних (BLB) оценок оптимального значения с целью уменьшения относительной погрешности между ними. Последовательные повторения происходят либо некоторое заданное число раз, либо до тех пор, пока погрешность, определяемая величиной $Err = (BUB - BLB)/BUB \cdot 100\%$, не будет достаточно малой.

В разделе 2.4 приводятся результаты вычислительного эксперимента для широкого класса тестовых задач, как из известной библиотеки TSPLIB[8], так и для искусственно сгенерированных примеров, с использованием двух типов релаксаций, а также выпуклой и кусочно-вогнутой функции $\phi(\cdot)$. Полученные результаты свидетельствуют о высокой эффективности разработанного подхода, позволяющего достаточно быстро находить близкие к оптимальным допустимые решения, в том числе для задач большой размерности (свыше 10000 узлов).

В третьей главе рассматривается один из подходов к определению робастности решения в непрерывных задачах размещения, известный также в литературе как пороговая робастность. Исследована возможность обобщения данной концепции для случая дискретных задач размещения на примере простейшей задачи и задачи о p-медиане. Рассмотрены бикритериальные варианты этих дискретных задач, где помимо основного присутствует дополнительный критерий на робастность искомого решения, дана их постановка в виде нелинейных бикритериальных задача целочисленного программирования. Предложен и обоснован метод поиска аппроксимации множества Парето-оптимальных решений.

В разделе 3.1 дается постановка бикритериальной робастной простейшей задачи размещения и задачи о p-медиане, а также приводится подробный обзор различных подходов к моделированию неопределенностей исходных данных в задачах размещения. Остановимся более подробно на задаче о p-медиане. Рассматривается классическая постановка, в которой предполагается наличие множества возможных пунктов размещения предприятий $|I| = m$, множества клиентов $|J| = n$, величин d_{ij}, задающих транспортные затраты на доставку одной единицы продукции от предприятия в пункте i к клиенту j, а также величин $\omega_j > 0$, определяющих спрос клиента $j \in J$. В оригинальной постановке спрос каждого клиента предполагается заранее известным, однако на практике часто возникают ситуации, когда вектор спроса точно не известен, и, более того, отсутствует какая-либо информации относительно распределения вероятностей или интервала изменения значений. Такая картина характерна для долгосрочного, стратегического размещения предприятий, а также для случая реализации совершенно нового товара (услуги) или при планировании каких-

[8] http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/

либо уникальных или важных событий, для которых невозможно каким-либо образом спрогнозировать изменение спроса.

Предполагается, что спрос каждого клиента ω_j точно не известен, однако выражен некоторой экспертной оценкой $\widehat{\omega}_j$. Отметим, что при замене вектора спроса его оценками погрешности могут привести к значительному росту значения целевой функции задачи, поэтому для контролирования затрат на обслуживание клиентов вводится положительная величина τ, ограничивающая максимальное возможное значение целевой функции. Величину τ можно интерпретировать как имеющийся общий бюджет на обслуживание клиентов и, в случае простейшей задачи, на размещение предприятий. Тогда робастностью $\rho(x, y)$ допустимого решения (x, y) будем называть минимальное отклонение вектора спроса ω от его оценок $\widehat{\omega}$, такое что суммарные затраты на обслуживание всех клиентов превысят бюджет τ, т.е.

$$\rho_{pM}(x, y) = \inf_{\omega \in \mathbb{R}^n_+} \Big\{ \|\omega - \widehat{\omega}\| : \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \omega_j d_{ij} x_{ij} > \tau \Big\}, \tag{13}$$

где $\|\cdot\|$ представляет собой некоторую норму, от выбора которой, вообще говоря, напрямую зависит вид получаемой модели.

В отличие от ранее проведенных исследований пороговой робастности в диссертации данный подход применяется для дискретных задач размещения. При этом для двух представленных моделей рассматривается не задача поиска наиболее робастного решения, а бикритериальные постановки, в которых помимо основного критерия, минимизируещего суммарные затраты на обслуживание клиентов (и размещение предприятий), присутствует также критерий, максимизирующий робастность получаемых решений. Таким образом, робастная версия задачи о p-медиане может быть записана в виде следующей бикритериальной нелинейной задачи целочисленного программирования:

$$\begin{aligned} \min_{(x,y)} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \widehat{\omega}_j d_{ij} x_{ij}, \\ \max_{(x,y)} \quad & \rho_{pM}(x, y), \\ & (x, y) \in X_{pM}. \end{aligned} \tag{BpM}$$

В разделе 3.2 для одного частного выбора нормы — ℓ_∞ (нормы Чебышева) — задающей отклонение спроса, предлагается метод поиска так называемых δ-эффективных решений, в основе которого лежит известный метод ε-ограничений (или метод главного критерия), учитывающий специфику рассматриваемых бикритериальных дискретных задач размещения. Согласно известному теоретическому результату[9], значение робастности допустимого решения (x, y)

[9] E. Carrizosa, S. Nickel. Robust facility location // Math. Methods Oper. Res. — 2003. — V. 58, no. 2. — P. 331–349.

может быть подсчитано в явном виде по формуле

$$\rho_{pM}(x,y) = \max\left\{0, \frac{\tau - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij}x_{ij}}{\|\sum_{i\in I} d_{ij}x_{ij}\|^\circ}\right\},$$

где $\|\cdot\|^\circ$ — двойственная относительно $\|\cdot\|$ норма.

Идея метода ε-ограничений состоит в сведении исходной многокритериальной задачи (BpM) к задаче с одним выбранным главным критерием, в то время как все остальные добавляются в формулировку задачи в виде ограничений с некоторыми параметрами ε_k, принимающими значения в пространстве критериев. Изменяя затем последовательно параметры ε_k, теоретически возможно получить все Парето-множество. При применении метода ε-ограничений для бикритериальной задачи (BpM), в случае выбора нормы ℓ_∞, рассматривается следующая параметрическая задача

$$\begin{aligned}
&\min_{(x,y)} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij}x_{ij},\\
&\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(\widehat{\omega}_j+\varepsilon)d_{ij}x_{ij} \le \tau,\\
&(x,y)\in X_{pM}.
\end{aligned}\tag{P_ε}$$

Для каждой подзадачи (P_ε) обозначим допустимое множество через $X_{pM}(\varepsilon)$, а множество всех δ_1-оптимальных решений через $Sol_{pM}(\varepsilon,\delta_1)$. Как было отмечено ранее, главной сложностью реализации метода ε-ограничений является выбор правила изменения параметра ε таким образом, чтобы не «пропускать» решения, оптимальные по Парето, и в то же время, чтобы каждая итерация метода давала по крайней мере одно новое Парето-оптимальное решение. Представленный далее алгоритм генерирует последовательность $\delta=(\delta_1,\delta_2)$-эффективных решений для задачи (BpM) и может быть легко модифицирован для простейшей задачи размещения.

Шаг 0. (Инициализация) найти $(x^0,y^0)\in Sol_{pM}(0,\delta_1)$,
положить $\varepsilon_0 := \dfrac{\tau - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij}x^0_{ij}}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij}x^0_{ij}}$, $k:=0$;

Шаг 1. Положить $\bar{\varepsilon}_k := \varepsilon_k + \delta'_2$;

Шаг 2. Решить подзадачу $(P_{\bar{\varepsilon}_k})$ с точностью δ_1;

Шаг 3. Если $X_{pM}(\bar{\varepsilon}_k)=\varnothing$, то stop, иначе положить $(\bar{x},\bar{y})\in Sol_{pM}(\bar{\varepsilon}_k,\delta_1)$;

Шаг 4. Если $\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij}\bar{x}_{ij} - \sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij}x^k_{ij} > \delta_1$, то положить $k:=k+1$.

Шаг 5. Положить $(x^k, y^k) = (\bar{x}, \bar{y})$ и $\varepsilon_k := \dfrac{\tau - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\widehat{\omega}_j d_{ij} x_{ij}^k}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij} x_{ij}^k}$ и перейти на шаг 1.

Отметим, что в качестве критерия останова представленного алгоритма ε-ограничений используется условие того, что допустимое множество задачи $(P_{\bar{\varepsilon}_k})$ для некоторого параметра $\bar{\varepsilon}_k$ пусто. Выполнимость такого критерия гарантируется конечностью множества $X_{pM}(\bar{\varepsilon}_k)$ и монотонностью последовательности ε_k. Доказаны следующие результаты.

Предложение 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$, то $X_{pM}(\varepsilon_1) \subseteq X_{pM}(\varepsilon_2)$.*

2. *Если $X_{pM}(\varepsilon) = \varnothing$, то $\nexists (x, y) \in X_{pM} : \rho_{pM}(x, y) > \varepsilon$.*

Предложение 3. *Генерируемая алгоритмом последовательность*

$$\{(x^0, y^0), (x^1, y^1), \ldots, (x^k, y^k)\}$$

конечна и для любого $\delta_2' > \delta_2$ представляет собой множество δ эффективных решений в задаче (BpM). ББолее того, если $\delta_1 = 0$, т.е. каждая подзадача $(P_{\bar{\varepsilon}_k})$ решается точно и найденное решение единственно, то (x^j, y^j), $j = 0, \ldots, k$ является оптимальными по Парето в задаче (BpM).

В разделе 3.3 приведены результаты вычислительного эксперимента для широкого класса тестовых задач из библиотек «Дискретные задачи размещения»[10] и TSPLIB, полученные при тестирование предложенного алгоритма для бикритериальных версий простейшей задачи размещения и задачи о p-медиане при различных величинах бюджета τ. Численные результаты продемонстрировали эффективность разработанного варианта метода ε-ограничений для поиска компромиссных решений, а также предложенного подхода к определению робастности решений в дискретных задачах размещения.

В Заключении приведены основные результаты диссертационной работы.

Результаты, выносимые на защиту:

1. Для нелинейного варианта задачи о p-медиане для двух видов релаксации получены явные формулы вычисления значений целевых функций двойственных задач и прямых переменных для некоторого фиксированного набора множителей. Разработан и протестирован алгоритм поиска приближенных решений, показавший свою эффективность для задач большой размерности.

[10] http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/index.html

2. Предложены новые бикритериальные нелинейные постановки задачи о p-медиане и простейшей задачи размещения с дополнительным критерием, максимизирующим робастность решения. Разработан, обоснован и протестирован алгоритм поиска приближенных Парето-оптимальных (δ-эффективных) решений в данных задачах.

3. Разработан и протестирован параллельный алгоритм поиска нижних оценок оптимального значения в классической задаче о p-медиане, включающий в себя процедуру каскадной сборки и специальную модель хранения данных и показавший эффективность для задачи о p-медиане большой размерности.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. Васильев И.Л., Ушаков А.В. Релаксации Лагранжа для нелинейной задачи о p-медиане // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. Т. 4, № 2. С. 45–59.

2. Васильев И.Л., Ушаков А.В. Об одном подходе к робастности решения в задаче о p-медиане // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5, № 4. С. 2–15.

3. Васильев И.Л., Ушаков А.В. Параллельная реализация субградиентного алгоритма для максимизации двойственной функции Лагранжа в задаче о р-медиане // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 14. С. 9–16.

4. E. Carrizosa, A. Ushakov, I. Vasilyev. A computational study of a nonlinear minsum facility location problem // Comput. Oper. Res. 2012. V. 39, № 11. P. 2625--2633.

5. E. Carrizosa, A. Ushakov, I. Vasilyev. Threshold robustness in discrete facility location problems. A bi-objective approach // Optim. Lett. 2015. V. 9, № 7. P. 1297--1314.

6. S. Hanafi, C. Sterle, A. Ushakov, I. Vasilyev. A parallel subgradient algorithm for Lagrangean dual function of the p-median problem // Studia Informatica Universalis. 2011. V. 9, № 3. P. 105–124.

7. E. Carrizosa, A. Ushakov, I. Vasilyev. A lagrangean heuristic for a nonlinear minsum facility location problem // Proceedings of OR Peripatetic Post-Graduate Programme (ORP^3-2011). ACTAS. Cádiz: Servicio de publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2011. P. 187–192.

8. Васильев И.Л., Ушаков А.В. Параллельный алгоритм поиска нижних оценок оптимального значения в одной из моделей кластерного анализа графов и сетей связей, возникающих в веб-пространстве, биологических и социальных сообществах [Электронный ресурс] // XIV Российская конференция с участием иностранных ученых «Распределенные информационные и вычислительные ресурсы» – DICR-2012 (Новосибирск, Россия, 26.11 - 30.11.2012): Материалы конференции. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2012. – Рег.номер 0321300118. – Режим доступа: `http://conf.nsc.ru/dicr2012/ru/reportview/140468` - (24.08.2015).

Редакционно-издательский отдел
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134
e-mail: rio@icc.ru

Подписано к печати
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 1 п.л. Заказ 256. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН