

**На правах рукописи**



**АСТРАКОВ Сергей Николаевич**

**МЕТОДЫ ПОИСКА ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ  
В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ**

**Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и  
обработка информации (в технике, экологии и экономике)**

**Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук**

**Иркутск – 2014**

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Конструкторско-технологическом институте вычислительной техники Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный консультант: доктор физико-математических наук  
**Голушко Сергей Кузьмич,**  
КТИ ВТ СО РАН, директор

Официальные оппоненты: член-корреспондент РАН  
**Федотов Анатолий Михайлович,**  
ИВТ СО РАН, зам. директора

доктор технических наук,  
**Горнов Александр Юрьевич,**  
ИДСТУ СО РАН, гл. научн. сотрудник

доктор физико-математических наук  
**Хамисов Олег Валерьевич,**  
ИСЭМ СО РАН, зав. отделом

Ведущая организация: **Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН**  
(г. Новосибирск)

Защита диссертации состоится 24 апреля 2014 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте [www.idstu.irk.ru](http://www.idstu.irk.ru) ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан \_\_\_\_\_ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного  
совета,  
кандидат физико-математических наук

Т.В. Груздева

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Объектом исследования настоящей диссертации являются распределенные системы, определяемые на графах или в некоторых пространственных областях. Элементы системы обладают однородным ресурсом, который распределяется по направлениям структурных связей в соответствии с заданными целевыми критериями. Также рассматриваются системы, где распределительная функция представляется оптимизацией расположения различных устройств для контроля над заданной областью. Наиболее важными приложениями исследований могут быть энергетика и системы связи: как традиционные проводные, так и современные беспроводные. Кроме того, распределенные системы применяются для теоретического и прикладного исследования закономерностей функционирования экономических объектов, социальных образований и современных компьютерных сетей.

Актуальность исследования связана с развитием современных технологий, использующих сложные системы, состоящие из множества компонент, и имеющих комплексные внутренние связи. Основной проблемой при исследовании и построении таких систем является адекватное моделирование их поведения, определение оптимальной структуры и организация взаимодействий между элементами. Неэффективное проектирование способно не только существенно снизить показатели их работы, но и в отдельных случаях стать причиной системного кризиса. Таким образом, проблема оптимизации таких систем, как с позиции повышения надежности, так и эффективности функционирования, является крайне перспективной и актуальной.

Модели, описывающие поведение сложных систем, часто являются гибридными (в широком смысле этого слова). Они используют компоненты различных разделов математики, а также могут одновременно содержать непрерывные и дискретные оптимизационные задачи. Для динамических систем самым важным является сочетание принципов эффективности и надежности в работе системы. Как правило, надежность системы обусловлена наличием обратной связи и «сил быстрого реагирования», что позволяет удерживать систему в некотором устойчивом состоянии. В экономических и социальных сферах, как правило, процессы развиваются успешно, если учитываются разносторонние интересы и распределение произведенных благ проводится в соответствии с некоторым критерием «справедливости».

В данной диссертационной работе предлагается реализация указанных выше принципов для широкого класса ресурсных систем на графах. Вершины графа будут соответствовать элементам системы, а ребра будут определять структуру связей между элементами. При помощи распределений частей своего ресурса по направлениям ребер каждый элемент графа взаимодействует с другими своими «соседями». Предположим, что элементы могут определять сравнительные оценки «полезности» своих взаимодействий по всем направлениям, тогда можно ввести пошаговые независимые перераспределения ресурса всеми элементами, которые определяют стремление элементов к «улучшению» своих состояний. Устойчивые состояния в таких системах можно считать равновесием по Нэшу, *когда отдельно взятому игроку не выгодно менять что-либо при фиксированных стратегиях всех других игроков.*

*Распределенные ресурсные системы* (определение дано ниже в разделе о содержании работы) допускают широкое многообразие структурных связей и гибкую систему параметрических оценочных функций, что позволяет адаптировать их к различным техническим, экономическим и социальным системам. Каждая реализация может быть исследована на предмет существования предельных и равновесных состояний, представляющих практическую важность. Предложенная в работе методика позволяет изучать различные *саморазвивающиеся системы*, последовательность состояний в которых изменяется без внешнего вмешательства. Это направление современных исследований весьма актуально, что подтверждает, например, следующая ссылка<sup>1</sup>.

В диссертационной работе исследуются также модели круговых покрытий, которые непосредственно связаны с проблемами повышения эффективности мониторинга пространственных областей с помощью беспроводных сенсорных сетей. Это напрямую связано с вопросами экономии затрат, поиском оптимальных структур расположения сети датчиков и временных режимов их работы. Ранее эта тематика рассматривалась, в основном, в работах зарубежных авторов: M. Cerdei, G. Potte, L. Wang, J. Wu, H. Zhang, J. Hou, S. Yang, H. Choo, P. Carmi, M. Katz, A. Clementi, P. Wan, I. Akyildiz, H. Gupta, H. Chen, P. Soreanu, Y. Mao, M. Rahman, H. Chizari, P. Nixon и др. В геометрической постановке каждому сенсору сети можно сопоставить круг окружающего пространства, в котором сенсор способен выполнять контрольные действия или передавать (принимать) сигнал. Задача о покрытии заданной области кругами соответствует задаче мониторинга этой области с помощью сенсорной сети. При этом эффективность покрытия и мониторинга определяется отношением суммарной площади кругов к площади области. Это и есть плотность покрытия, которую при проектировании стараются уменьшить. Результаты исследований сенсорных сетей широко востребованы в высокотехнологичных производственных областях. В данной работе рассмотрены новые постановки задач и разработана классификация покрытий.

**Целью диссертационной работы** является разработка методов моделирования распределенных ресурсных систем и исследование динамических свойств поведений таких систем, а также разработка эффективных моделей мониторинга пространственных областей, учитывающих особенности геометрической структуры сенсорных сетей и энергетические затраты.

**Задачи**, решаемые в диссертации для достижения указанных целей.

- Создание математического аппарата для описания ресурсных систем, в которых задаются взаимодействия, состояния и динамика их изменений.
- Разработка принципов и критериев оценки удовлетворенности для элементов системы своими текущими состояниями. Исследование влияния оценок удовлетворенности на стратегию поведения участников.
- Поиск аналитических и численных решений, соответствующих равновесным состояниям систем.
- Проектирование эффективных систем мониторинга пространственных областей и объектов на основе беспроводных сенсорных сетей.

---

<sup>1</sup> Dolev S., Schiller E. Self-Stabilizing Group Communication in Directed Networks // Proc. of 6th International Symposium «Self-Stabilizing Systems». San Francisco (USA), 2003. P. 61-76.

- Создание алгоритмов и программных материалов, позволяющих проводить численные расчеты для конкретных моделей.

**Методы исследований.** В работе использованы геометрические методы решения экстремальных задач, методы матричного анализа, теория графов и методы итерационных вычислений. Из оригинальных методов следует отметить (глава 2) метод определения равновесного состояния системы при помощи построения набора оценочных функций.

**Научная новизна.** Рассмотрены новые распределенные ресурсные системы, в которых взаимодействие между элементами определяется частями ресурса, направленными по линиям связи. Характер взаимодействий между элементами определяется разнообразными классами оценочных функций. Модели допускают сложную структуру межэлементных связей и любое конечное число участников, что позволяет применять их в различных приложениях. Модели на обычных графах являются существенным обобщением ранее известных случаев. Впервые рассмотрены и исследованы модели, задаваемые с помощью гиперграфа и позволяющие описывать не только парные, но и групповые взаимодействия.

Построены модели покрытий плоских областей, имеющие наилучшую эффективность в соответствующих классах задач. Исследованы модели мониторинга протяженных объектов с критериями эффективного гарантированного покрытия, которые ранее не рассматривались. Впервые сформулирована постановка задачи о внешнем мониторинге ограниченных областей и предложены оптимальные регулярные модели покрытий кругами одного, двух и трех различных размеров.

Создана новая универсальная классификация регулярных круговых покрытий, позволяющая однозначно классифицировать все известные модели покрытий и по структуре, и по сложности, а также находить не учтенные ранее варианты. Построены классы обобщенных эллиптических покрытий, имеющих, как правило, меньший показатель плотности по сравнению с соответствующими круговыми покрытиями.

**Практическая и теоретическая значимость.** Работа имеет теоретический характер, однако полученные результаты могут служить методической основой для разработки тарифных планов, определять стратегию экономического сотрудничества, находить эффективные технические решения при мониторинге объектов и оптимизации коммуникационных систем. Отдельные результаты диссертации были использованы в Программе фундаментальных научных исследований государственных академий наук по Проекту I.4.1.5. «Математическое моделирование и вычислительные технологии в задачах принятия решений по управлению технологическими процессами предприятий нефтегазового и горнодобывающего комплексов и других сложных объектов» (№ гос. регистрации 01201154503). В течение 2007-2009 гг. исследования были поддержаны российско-индийским грантом РФФИ (проект 08-07-91300-ИНД\_а), в 2010-2012 – грантом РФФИ (проект 10-07-92650-ИНД\_а). В 2013 году получен грант РФФИ (проект 13-07-00139\_а) на исследование по теме «Разработка математических моделей и методов оптимизации мобильных беспроводных сенсорных сетей».

**Достоверность и обоснованность** полученных результатов обеспечена корректностью постановок рассматриваемых задач и точностью математических

методов для их решения. Предложенные вычислительные алгоритмы определены в строгом формализованном виде и допускают проверку теоретических результатов с помощью численных экспериментов.

**Соответствие диссертации паспорту специальности.** В диссертации разрабатываются теоретические основы и методы анализа сложных моделей распределенных систем, допускающих их оптимизацию, с целью повышения эффективности управления такими системами, что соответствует паспорту специальности 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (Омск, 2003, 2006, 2012), Международный семинар «Вычислительные методы и решение оптимизационных задач» (Бишкек, 2004), XIII и XIV Байкальские международные школы-семинары «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск-Байкал, 2005, 2008), Всероссийская научно-практическая конференция «Системы автоматизации в образовании, науке и производстве» (Новокузнецк, 2005, 2007), Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Владивосток, 2007), International Conference «Operations Research and Global Business» (Аугсбург, Германия, 2008), 7-th International Symposium on Modelling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks (Сеул, Корея, 2009), V Азиатская Международная школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем» (Бишкек, Иссык-Куль, Кыргызстан, 2009), Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 2010, 2013), 11-th International Conference on Computational Science and its Applications (Сантадер, Испания, 2011), 25-th Conference of European Chapter on Combinatorial Optimization (Анталья, Турция, 2012), 21-th International Symposium on Mathematical Programming (Берлин, Германия, 2012). Кроме того, результаты диссертации докладывались и получили положительную оценку на следующих представительных семинарах: «Дискретные экстремальные задачи» (Институт математики СО РАН, 2012, 2013); «Информационные технологии» (Институт вычислительных технологий СО РАН, 2011, 2012, 2013), «Моделирование инфо-коммуникационных систем» (Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, 2013), «Дифференциальные уравнения, управление и системный анализ» (Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 2013).

**Публикации и личный вклад.** По теме диссертации автором опубликованы монография и 34 печатные работы, в том числе 13 статей [2-14] из журналов, рекомендованных ВАК для опубликования основных результатов докторских диссертаций. Все выносимые на защиту результаты получены соискателем лично. В совместных работах вклад соискателя является значимым: ему принадлежат постановки задач, основные идеи доказательств теорем и утверждений, построение алгоритмов и расчеты оптимальных параметров. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы из 133 наименований и трех приложений. Общий объем диссертации – 244 страницы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приведен краткий обзор результатов, связанных с областью исследования, обоснована актуальность темы исследования и кратко изложено содержание диссертационной работы.

**Первая глава** посвящена рассмотрению способов задания системных объектов. За основу взят аппарат теории графов, который непосредственно используется для определения структуры простейших моделей. Для более сложных объектов использованы обобщенные графические представления: *мультиграфы, псевдографы и гиперграфы*.

*Граф* есть пара множеств  $G = (V, E)$ , где  $E$  состоит из 2-элементных подмножеств множества  $V$ .

Обычный граф позволяет описывать только парные связи, поэтому в работе использованы и более общие графические представления.

*Мультиграф*  $MG = (V, E)$  ( $E$  допускает кратные 2-элементные подмножества множества  $V$ ), *псевдограф*  $PG = (V, E)$  ( $E$  допускает кратные ребра и петли) и *гиперграф*.

*Гиперграф* есть пара множеств  $HG = (V, E)$ , где  $E$  состоит из заданного набора подмножеств множества  $V$ , допускающих кратность.

Элементы множества  $E$  называют *обобщенными ребрами*, «связывающими»  $k$ -элементные подмножества множества  $V$ ,  $k \leq n$ . Если  $k \geq 3$ , то обобщенное ребро нельзя изобразить с помощью линии. Например, для гиперграфа  $HG_4 = (V, E)$ , где  $V = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $E = \{e_1 = \{1\}, e_2 = \{1, 2, 3\}, e_3 = \{1, 2, 3, 4\}, e_4 = \{3, 4\}, e_5 = \{4\}\}$ , имеется два 1-элементных ребра  $e_1$  и  $e_5$ , одно 2-элементное  $e_4$ , одно 3-элементное  $e_2$  и одно 4-элементное ребро  $e_3$ . Вместо *ребер* элементы  $E$  естественнее называть *полями*, так как соответствующие элементы одновременно *взаимодействуют* на них. Любой гиперграф, например  $HG_4$ , можно задавать матрицей инцидентности

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичный элемент  $b_{ij}$  матрицы  $B$  показывает присутствие «участника»  $i$  на поле  $j$ , а нулевой элемент  $b_{ij}$  матрицы – отсутствие «участника»  $i$  на поле  $j$ . Сумма элементов в столбце матрицы  $B$  определяет число участников соответствующего поля, а сумма элементов строки – степень соответствующей вершины. Представление графа с помощью матрицы смежности удобно только для простых случаев; для гиперграфов такое представление теряет практическую ценность.

Графически любой гиперграф можно изобразить в виде *P-представления*. Для этого на двух разных уровнях изображаются *вершины* и *поля взаимодействий*, а между ними проводятся линии, определяющие присутствие соответствующего элемента на заданном поле (рис. 1.1).

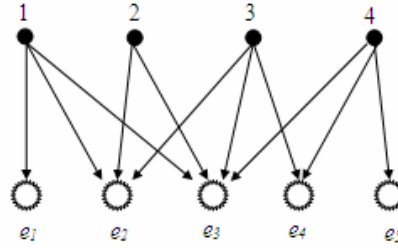


Рис. 1.1. Гиперграф  $HG_4 = (V, E)$ , где  $E = \{e_1 = \{1\}, e_2 = \{1,2,3\}, e_3 = \{1,2,3,4\}, e_4 = \{3,4\}, e_5 = \{4\}\}$

**Определение.** Ресурсная система  $S = (V, E, Q)$  – это взвешенный гиперграф  $HG = (V, E)$ , каждой вершине  $i \in V$  которого присвоен ресурс  $q_i$ , где  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  – ресурсный вектор системы,  $n = |V|$ .

Для описания свойств ресурсных систем введем обозначения:

- $Q_\Sigma = \sum_{i=1}^n q_i$  – общий ресурс системы  $S$ ;
- $E_i = \{e_j \in E : i \in e_j\}$  – подмножество полей, инцидентных элементу  $i$ ;
- $V_{ij} = \{v \in V : \{i, v\} \subset e_j\}$  – множество смежных элементов для элемента  $i$  на поле  $e_j$  (все элементы поля  $e_j$  кроме элемента  $i$ );
- $V_i = \{v \in V : \exists e_t \in E, \{i, v\} \subset e_t\}$  – множество всех смежных элементов для элемента  $i$  (объединение всех  $V_{ij}$  по  $j$ );
- $x_{ij}$  – ресурс элемента  $i$  на поле  $e_j \in E_i$ ; набор всех  $x_{ij}$  определяет некоторое распределение общего ресурса  $Q$  (состояние системы);

- $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$  – матрица состояния системы  $S$ .

Элемент  $i$  имеет возможность активно «действовать» своим ресурсом на подмножестве полей  $e_j \in E_i$ , сохраняя при этом балансовое соотношение  $q_i = \sum_{j \in E_i} x_{ij}$  (сумма элементов строки матрицы  $X$ ).

Каждый столбец матрицы  $X$  полностью определяет одно элементарное  $k$ -взаимодействие, а все столбцы матрицы состояния задают полную систему взаимодействий в данной модели. Если  $k=1$ , то на поле этого взаимодействия  $e_j \in E_i$  присутствует только один элемент  $i$ , поэтому такое поле можно называть *внутренним* для элемента  $i$ .

Таким образом, можно отметить следующие основные свойства распределенной ресурсной системы:

- система состоит из множества связанных между собой элементов и рассматривается как единое целое;



- определена устойчивая *структура* связей между элементами системы;
- задана *форма существования* системы в виде состояния, определяемого ресурсными взаимодействиями между элементами или подмножествами.

Во **второй главе** исследованы состояния динамических ресурсных систем, моделируемых графом  $G = (V, E)$ ,  $n = |V|$ ,  $m = |E|$ . Динамика системы – это последовательность состояний, которые определяются перераспределениями ресурса после оценки элементами своего текущего состояния.

Пусть каждая вершина  $i \in V$  распределяет свой однородный ресурс в количестве  $q_i$  по инцидентным ребрам  $e_j \in E_i$ . Предположим, что известно начальное распределение ресурса

$$x_{ij}^{(0)} : q_i = \sum_{e_j \in E_i} x_{ij}^{(0)}, \quad i \in V, \quad e_j \in E_i.$$

Если система развивается и эволюционирует, то на любом временном шаге  $k$  определяется новое распределение  $x_{ij}^{(k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ :

$$X_0 \rightarrow [T_0] \rightarrow X_1 \rightarrow [T_1] \rightarrow X_2 \rightarrow [T_2] \rightarrow \dots \rightarrow X_k \rightarrow [T_k] \rightarrow \dots,$$

где  $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots$  – это последовательные состояния системы, а  $T_0, T_1, \dots, T_k, \dots$  – это пошаговые *требования* или *управления*, связанные со стратегией поведения и целями. Другими словами, *управление*  $T_k$  побуждает систему к изменению и приводит к новому состоянию  $X_{k+1}$ .

Определим управление  $T_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , перехода

$$x_{ij}^{(k)} \rightarrow x_{ij}^{(k+1)}, \quad i \in V, \quad e_j \in E_i.$$

Для этого зададим систему оценочных функций  $\{c_{ij}\}$ ,  $i \in V$ ,  $e_j \in E_i$ , определяющих «полезность» для элемента  $i$  на поле  $e_j$ . Понятно, что функция  $c_{ij}$  должна зависеть от переменных  $x_{ij}^{(k)}$  и  $x_{sj}^{(k)}$ ,  $s \in V_{ij}$ . Заданная система функций позволяет реализовать равновесную стратегию. По этой стратегии каждый элемент  $i$  стремится так перераспределить свой ресурс, чтобы выполнялись соотношения

$$c_{ij_1} = c_{ij_2} = \dots = c_{ij_t}, \quad \text{где } e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_t} \in E_i. \quad (2.1)$$

Далее действуем по равновесному принципу Курно: *принимаем новое условно-равновесное решение, основываясь на известной информации предыдущего шага.*

Поскольку элемент  $i$  может поменять только свое распределение  $\{x_{ij}^{(k)}\}$ , то новое распределение  $\{x_{ij}^{(k+1)}\}$  следует получать из соотношений (2.1), заменяя  $x_{ij}^{(k)}$  на  $x_{ij}^{(k+1)}$ . Следовательно,

$$c_{ij} \left( x_{ij}^{(k+1)}, \{x_{sj}^{(k)}\} \right) = \text{const}_{e_j \in E_i, s \in V_{ij}}. \quad (2.2)$$

Для конкретных моделей рассмотрены такие семейства оценочных функций, для которых условие (2.2) на каждом шаге достигается однозначно.

Формально, на каждом шаге  $k$  элемент  $i$  решает следующую задачу:

$$T_k : \begin{cases} c_{ij}(x_{ij}^{(k+1)}, \{x_{sj}^{(k)}\}) = \text{const} ; \\ \sum_{j \in E_i} x_{ij}^{(k+1)} = q_i. \end{cases} \quad (2.3)$$

Поскольку элементы действуют независимо друг от друга, то система попадает в состояние, отличное от ожидаемого результата для каждого элемента. Поэтому на очередном шаге происходит новое перераспределение. Тем самым, определяется динамическая модель «жизни» системы в режиме дискретного времени. Представляется важным исследование поведения развивающейся системы и нахождение предельных и равновесных состояний. Это можно делать как аналитическими, так и численными методами. С помощью аналитических методов можно получить теоретические результаты в форме теорем и утверждений. Численные методы дают возможность проверить теоретические утверждения, а также сделать расчеты для построенных итерационных процессов, в которых сложно провести теоретические исследования.

Во второй главе рассматриваются несколько классов функций  $\{c_{ij}\}$ ,  $i \in V$ ,  $e_j \in E_i$ . Каждый класс вместе с графической структурой определяет некоторую свою динамическую модель. Все исследуемые модели разбиваются на два больших класса:  $S_G$  и  $S_{HG}$ . Группа  $S_G$  содержит модели со структурой обычных графов  $G$ , в которых допускаются петли и ребра без кратных повторений. Модели группы  $S_{HG}$  имеют более сложную структуру, которые задаются гиперграфами  $HG$ , но не могут быть описаны с помощью графов  $G$ .

Для моделей группы  $S_G$  два элемента  $i, j \in V$  взаимодействуют на поле  $e = \{i, j\} = \{j, i\}$  ресурсами  $x_{ij}$  и  $x_{ji}$ , направленными друг на друга. Поэтому оценочные функции  $c_{ij}$  зависят от двух аргументов:  $c_{ij} = c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})$ ,  $j \in V_i$ , или  $e_j \in E_i$ . Очевидно, что множества  $E_i$  и  $V_i$  отождествляются между собой. Если же поле задается петлей, то фактически оценочная функция для элемента  $i$  определяется одним аргументом  $c_{ii}(x_{ii}, x_{ii}) = c_{ii}(x_{ii})$ . Следовательно, состояние системы задается квадратной матрицей  $X$  порядка  $n$ .

В ранних работах использовались два вида простых функций:

- (а)  $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ij} - x_{ji}$ , где  $i \in V$ ,  $j \in V_i$ ;
- (б)  $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ij} + x_{ji}$ , где  $i \in V$ ,  $j \in V_i$ .

Вид (а) предполагает прямое противостояние и оценивает угрозу для элемента  $i$  со стороны «соседа»  $j$ . Вид (б) определяет оценку сотрудничества для  $i$ -го элемента с элементом  $j$ , при этом ресурсы того и другого засчитываются одинаково. Оба вида функций являются частными случаями более общих классов линейных функционалов:

1.  $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}$ , где  $a, b \in R$ ;  $i \in V$ ,  $j \in V_i$ ;
2.  $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_i x_{ij} + b_i x_{ji}$ , где  $a_i, b_i \in R$ ;  $i \in V$ ,  $j \in V_i$ ;
3.  $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_{ij} x_{ij} + b_{ij} x_{ji} + d_{ij}$ , где  $a_{ij}, b_{ij}, d_{ij} \in R$ ;  $i \in V$ ,  $j \in V_i$ .

Случай 1 является *однородным*, так как функция  $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}$  одинаково для всех элементов оценивает свой ресурс пропорционально  $a$  и ресурс «соседа» пропорционально  $b$ . Каждый последующий случай обобщает предыдущие варианты и, тем самым, может определять более универсальную модель. Случай 3 позволяет различным образом оценивать и свой, и чужой ресурс на разных полях.

Сформулируем основные результаты для моделей группы  $S_G$ .

Пусть задана ресурсная система  $S$  на полном графе  $G = (V, E)$ ,  $n = |V|$ , в которой последовательность состояний  $X^{(k)} = \{x_{ij}^{(k)}\}$  определяется системой оценочных функций  $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ij} - x_{ji}$ , где  $i \in V$ ,  $j \in V_i$ . Тогда справедливы следующие результаты.

**Теорема 2.1.** *Последовательность состояний  $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}, \dots$  определяет два предельных состояния: четное  $X_{even}^*$  и нечетное  $X_{odd}^*$ , удовлетворяющих соотношениям:*

$$(a) X_{even}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(2k)} = X^*, \quad X_{odd}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(2k+1)} = (X^*)^T;$$

(b) *предельные элементы матрицы  $X^*$  определяются явно по начальным условиям:*

$$x_{ij}^* = x_{ij}^{(0)} - f_i^{(0)} \frac{n-1}{n(n-2)} - f_j^{(0)} \frac{(n-1)^2}{n(n-2)}, \quad i \in V, \quad j \in V_i,$$

$$\text{где } f_i^{(0)} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{s \in V_i} x_{si}^{(0)} - \sum_{s \in V_i} x_{is}^{(0)} \right), \quad f_j^{(0)} = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{s \in V_i} x_{sj}^{(0)} - \sum_{s \in V_i} x_{js}^{(0)} \right).$$

**Теорема 2.2.** *Множество состояний системы  $S = (V, E, Q)$  всегда имеет устойчивое состояние  $\bar{X} = \frac{1}{2}(X^* + (X^*)^T)$ , которое вычисляется по формулам*

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1}{2} (x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2} \frac{n-1}{n-2} (f_j^{(0)} + f_i^{(0)}), \quad i \in V, \quad j \in V_i.$$

Пусть сеть представлена в виде неориентированного графа  $G = (V, E)$ , каждая вершина которого  $i \in V$  есть элемент коммуникационной системы, имеющий ресурс в количестве  $q_i$ . Весь этот ресурс распределяется по инцидентным ребрам таким образом, чтобы суммарные ресурсы этих ребер были одинаковы.

Обозначим через  $x_{ij}$  количество ресурса вершины  $i$ , выделенного на ребро  $(i, j) \in E$ . Поскольку на функционирование ребра  $(i, j)$  выделяется ресурс как вершиной  $i$ , так и вершиной  $j$ , то суммарный ресурс ребра  $(i, j)$  равен  $x_{ij} + x_{ji}$ . Величины  $x_{ij}$  и  $x_{ji}$  будем называть *весами дуг*  $(i, j)$  и  $(j, i)$

В любой последующий момент времени  $k = 1, 2, \dots$  каждая вершина  $i \in V$  перераспределяет свой ресурс на основании решения задачи

$$\begin{aligned} \min_{j \in V_i} (x_{ij}^{(k)} + x_{ji}^{(k-1)}) &\rightarrow \max_{\{x_{ij}^{(k)}\}}; \\ \sum_{j \in V_i} x_{ij}^{(k)} &= q_i; \quad x_{ii}^{(k)} = 0; \quad x_{ij}^{(k)} = 0, \quad (i, j) \notin E, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где  $V_i$  – множество смежных с  $i$  вершин, а величины  $x_{ji}^{(k-1)}$ ,  $j \in V_i$ , на момент решения задачи (2.18) следует считать известными.

Рассматриваемая модель имеет некоторое преимущество в сравнении с игровыми постановками. Например, в работе<sup>2</sup> автор обобщает классические понятия равновесия по Нэшу и по Парето, вводя целый ряд новых равновесий. Но всегда участник с номером  $i$  определяет свою стратегию из области  $X_i \subset R^1$ . Это ограничивает возможности применения модели в экономических и технических приложениях, так как участнику системы, состоящей из  $n$  элементов, иногда приходится определять свои отношения к каждому участнику системы в отдельности, т.е. выбрать стратегию из области  $X_i \subset R^{n-1}$ .

Процесс изменения весов дуг определим рекуррентными соотношениями:

$$x_{ij}^{(k+1)} = f_i^{(k)} - x_{ji}^{(k)}, \quad f_i^{(k)} = \frac{p_i^{(k)} + q_i}{d_i} \quad \forall (i, j) \in E; \quad x_{ii}^{(k)} = 0, \quad \forall (i, j) \notin E, \quad (2.19)$$

где  $p_i^{(k)} = \sum_{j \in V_i} x_{ji}^{(k)}$ ,  $d_i$  – степень вершины  $i$ .

Соотношениями (2.19) определяется последовательность состояний сети.

Пусть  $\Gamma$  – матрица смежности графа  $G$ ,  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$  – диагональная матрица,  $\Delta$  – матрица, полученная делением  $i$ -ой строки матрицы  $\Gamma$  на  $d_i$ . Тогда имеют место следующие утверждения.

**Лемма 2.9.** *В случае не двудольного графа  $G$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(k)} = \frac{2Q}{s}, \quad \text{где } Q = \sum_{i=1}^n q_i, \quad s = \sum_{i=1}^n d_i.$$

**Теорема 2.7.** *В случае, когда граф  $G$  не двудольный, циклические пределы с периодом два для весов дуг существуют и равны:*

$$x_{ij}^{\text{even}} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{(2m)} = x_{ij}^{(0)} + f^{(0)} D (E - (\Delta - L)^2)^{-1} \left( \Delta \frac{e^i}{d_i} - \frac{e^j}{d_j} \right);$$

$$x_{ij}^{\text{odd}} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{(2m+1)} = -x_{ji}^{(0)} - f^{(0)} D (E - (\Delta - L)^2)^{-1} \left( \Delta \frac{e^j}{d_j} - \frac{e^i}{d_i} \right) + \frac{2Q}{s},$$

где  $f^{(0)} = (f_1^{(0)}, \dots, f_n^{(0)})$ ,  $E$  – единичная матрица,  $e^i$  –  $i$ -ый координатный орт,

$$L = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup> Смольяков Э.Р. Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. – М.: Наука, 1986.

Пусть теперь граф  $G$  является *двудольным*. Тогда множество вершин  $V$  разбивается на две доли  $V^1$  и  $V^2$ ,  $|V^1| = n_1$ ,  $|V^2| = n_2$ . Введем матрицы  $\Delta_1 \in M_{n_1 \times n_2}$ ,  $\Delta_2 \in M_{n_2 \times n_1}$ , аналогичные матрице  $\Delta$ , но соответствующие первой и второй долям. Их строчные суммы равны единице, а количество ненулевых элементов в  $j$ -м столбце равно степени  $j$ -й вершины. Степень  $j$ -ой вершины обозначим через  $d_j^1$ , если  $j \in V^1$ , и через  $d_j^2$ , если  $j \in V^2$ . Пусть  $s_h = \sum_{j \in V^h} d_j$ ;  $Q_h = \sum_{j \in V^h} q_j$ ;

$$L_h = \frac{1}{s_h} \begin{pmatrix} d_1^h & d_2^h & \dots & d_{n_h}^h \\ d_1^h & d_2^h & \dots & d_{n_h}^h \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1^h & d_2^h & \dots & d_{n_h}^h \end{pmatrix} \in M_{n_h} \quad h=1, 2; \quad \Delta' = \begin{pmatrix} \Delta_1 \Delta_2 - L_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \Delta_1 - L_2 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 2.10.** *В случае двудольного графа  $G$*

- если  $i \in V^1$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(2k)} = \frac{Q_1}{s_1}$ ;  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(2k+1)} = \frac{Q_2}{s_2}$ ;
- если  $i \in V^2$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(2k)} = \frac{Q_2}{s_2}$ ;  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(2k+1)} = \frac{Q_1}{s_1}$ .

**Теорема 2.8.** *В случае двудольного графа  $G$  циклические пределы с периодом два для весов дуг существуют и равны*

$$x_{ij}^{even} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{(2m)} = x_{ij}^{(0)} + f^{(0)} D(E - \Delta')^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \frac{e^i}{d_i} - \frac{e^j}{d_j} \end{pmatrix};$$

$$x_{ij}^{odd} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{(2m+1)} = -x_{ji}^{(0)} - f^{(0)} D(E - \Delta')^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \frac{e^j}{d_j} - \frac{e^i}{d_i} \end{pmatrix} + \frac{Q_h}{s_h}, \quad h=1,2.$$

**Следствие 2.7.** *В пределе на каждой итерации четные  $x_{ij}^{even}$  и нечетные  $x_{ij}^{odd}$  члены последовательности переходят друг в друга, поэтому состояние, заданное весами  $\bar{x}_{ij} = \frac{1}{2}(x_{ij}^{even} + x_{ij}^{odd})$ , является допустимым и стационарным.*

Рассмотрим *однородный* случай оценочных функций  $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}$ . В этом случае получаем следующие рекуррентные преобразования:

$$\begin{cases} x_{ij}^{(k+1)} = -\frac{b}{a} \cdot x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, & i \neq j; \\ x_{ij}^{(k+1)} = 0, & i = j; \end{cases} \quad (2.20)$$

$$i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad j = \{1, 2, \dots, n\},$$

где  $f_i^{(k)} = \frac{1}{n-1} \left( q_i + \frac{b}{a} p_i^{(k)} \right)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Приведем ряд утверждений для исследуемой модели.

**Лемма 2.11.** Для координат вектора стабилизации  $F^{(k)}$  выполняется соотношение  $\sum_{i=1}^n f_i^{(k)} = \frac{Q}{n-1} \left(1 + \frac{b}{a}\right)$ , где  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$  – суммарный потенциал системы.

**Лемма 2.12.** Для каждого  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  выполняется следующее рекуррентное соотношение:  $f_i^{(k+1)} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \cdot f_i^{(k)} + c_i$ , где  $c_i = \frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{b}{a}\right) \cdot \left(q_i \left(1 - \frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{Q}{n-1}\right)$  есть постоянная величина.

**Лемма 2.13.** В момент времени  $k$  для каждого  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  выполняется следующее соотношение

$$f_i^{(k)} = \left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a}\right)^k f_i^{(0)} + c_i \cdot \frac{(n-1)a}{b+(n-1)a} \left(1 - \left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a}\right)^k\right).$$

**Теорема 2.11.** Для устойчивого поведения вектора стабилизации необходимо и достаточно выполнение условия  $\left|\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a}\right| < 1$ . При этом условия предельные значения координат вектора стабилизации равны

$$f_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(k)} = c_i \frac{(n-1)}{b+(n-1)a} = \frac{a+b}{b+(n-1)a} \left(q_i \left(1 - \frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{Q}{n-1}\right).$$

**Теорема 2.12.** В условиях рассматриваемой модели для решений системы выполняются следующие утверждения.

*A. Решение системы, заданное соотношениями*

$$x_{ij}^* = \frac{1}{b+(n-1)a} \left(aq_i - bq_j + \frac{bQ}{n-1}\right), \quad (2.21)$$

является стационарным, т.е. не изменяется в течение дискретного времени  $k$  при рекуррентных соотношениях (2.20).

*B. При условии  $|b/a| < 1$  любое начальное решение системы в результате преобразований (2.20) при  $k \rightarrow \infty$  стремится к решению (2.21).*

Приведем пример конкурентных взаимодействий. Пусть три фирмы (политические партии)  $A_1, A_2, A_3$  распределяют свои фиксированные ресурсы  $q_1 = 80, q_2 = 50, q_3 = 40$  друг против друга, улучшая свои конкурентные положения. Противостояние предполагает оценку отношений по формуле  $c_{ij} = c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ij} - x_{ji}$ . Тогда рекуррентные соотношения (2.20) принимают вид

$$\begin{cases} x_{ij}^{(k+1)} = -x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, & i \neq j \\ x_{ij}^{(k+1)} = 0, & i = j, \end{cases} \quad \text{где } f_i^{(k+1)} = \frac{1}{2} f_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При начальном решении 
$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 30 \\ 40 & 0 & 10 \\ 20 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^{(0)} = (10; -10; 0),$$

имеется неравновесная ситуация (рис. 2.3, а).

По расчетному алгоритму (2.20) на двух первых шагах получаем

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 30 \\ 40 & 0 & 10 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^{(1)} = (5; -5; 0); \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 35 \\ 45 & 0 & 5 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^{(2)} = (2,5; -2,5; 0).$$

При  $k \rightarrow \infty$  решение стремится к устойчивому состоянию, которое вычисляется по формулам (2.21):

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 35 \\ 45 & 0 & 5 \\ 35 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad f^* = (0; 0; 0).$$

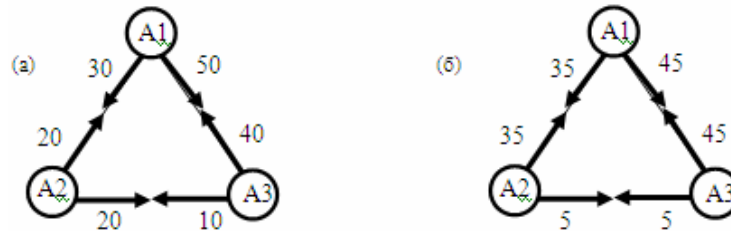


Рис. 2.3. Состояние системы: (а) начальное, (б) конечное равновесное

**Задача об оптимальном обслуживании коммуникационной сети.**

Полагаем, что *коммуникационные сети* – это системы *транспортных дорог, линии связи* и т.д. Рассмотрим небольшую коммуникационную систему, состоящую из четырех вершин (рис. 2.4). Пусть ресурсы вершин, участвующих в обслуживании сети, заданы следующими количественными значениями:  $q_1 = 50$ ,  $q_2 = 40$ ,  $q_3 = 30$ ,  $q_4 = 20$ . Поскольку пара вершин совместно обслуживает свою линию, то уместно считать, что  $c_{ij} = c_{ji} = c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ij} + x_{ji}$ .

Интересы каждого участника состоят в том, чтобы содержать инцидентные линии на одинаково высоком уровне. Решается вопрос: можно ли в процессе *саморазвития* системы справедливо распределить ресурсы на обслуживание линий, если каждый пункт принимает самостоятельное решение по распределению ресурса на каждом шаге?

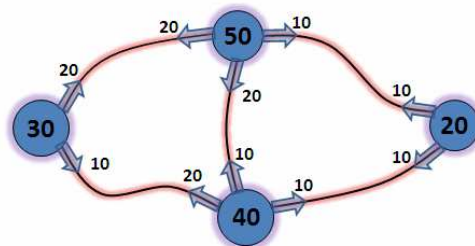


Рис. 2.4. Обслуживание коммуникационных линий

Показано, что некоторое начальное решение, например

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 & 10 \\ 10 & 0 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(0)} = (c_{ij}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 40 & 20 \\ 30 & 0 & 30 & 20 \\ 40 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

стремится к оптимальному (устойчивому) решению. По формуле (2.19)

$$\begin{cases} f_i^{(k)} = \frac{p_i^k + q_i}{d_i}, & i = 1, 2, 3, 4 \\ x_{ij}^{(k+1)} = -x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)} & \forall (i, j) \in E. \end{cases}$$

Численные расчеты для  $k = 10, 20$ :

$$X^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2499 & 11,1223 & 18,6177 \\ 7,7501 & 0 & 14,8823 & 17,3677 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0073 & 27,9927 \\ 28,00000 & 0 & 28,0073 & 27,9926 \\ 28,0073 & 28,0073 & 0 & 0 \\ 27,9927 & 27,9926 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X^{(20)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2500 & 11,1250 & 18,6250 \\ 7,7500 & 0 & 14,8750 & 17,3750 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(20)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 0 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $C^{(20)}$  показывает, что обслуживание линий проходит равномерно.

Заметим, что для рассмотренных примеров найдены равновесные состояния, существование которых было доказано с помощью соответствующих утверждений. Для общих линейных оценочных функций построены итерационные алгоритмы изменения состояний, которые позволяют численно устанавливать или опровергать существование равновесных состояний. На основе этих алгоритмов разработаны программы и проведены расчеты для более двух десятков различных ресурсных моделей.

В **третьей главе** исследованы ресурсные системы  $S_{HG}$ , структура которых задается гиперграфом  $HG$ . С помощью таких систем можно моделировать не только парные, но и групповые взаимодействия.

Пусть система  $S$  состоит из  $n$  агентов, которые имеют соответствующие ресурсы  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Каждый агент  $i$  действует на одном глобальном рынке  $P$  (с участием всех агентов) и на одном внутреннем поле (без участия других). Следовательно, ресурс  $q_i$  распределяется на две составляющие: для внутреннего поля  $x_{ii}$  и для общего поля  $x_{ip}$ , где  $x_{ii} + x_{ip} = q_i$ .

Зададим систему оценок элемента  $i$  на внутреннем поле и на внешнем поле при помощи функций  $f_{ii}$  и  $f_{ip}$ :

$$\begin{cases} f_{ii} = \alpha x_{ii}, \\ f_{ip} = \alpha x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.1)$$

Общее состояние системы определяется состоянием агентов и задается матрицей

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{22} & \dots & x_{nn} \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Таким образом, в системе  $S$ , находящейся в состоянии  $X$ , каждый агент может проводить оценки удовлетворенности своего распределения с помощью соотношений (3.1) и предпринимать соответствующие действия по перераспределению.





Рассмотрим более общие модели.

**Система S2.** Игроки различным образом оценивают эффект своего ресурса на внешнем и внутреннем поле:

$$\begin{cases} f_{ii} = \alpha_1 x_{ii}, \\ f_{ip} = \alpha_2 x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Модель  $S2 = S(n, q, f\{\alpha_1, \alpha_2, \beta\})$  определяется  $n+3$  параметрами:  $n$  для  $q$  и 3 для  $f$ .

**Система S3.** Для каждого агента его оценочные функции дополнительно могут содержать «бонусные» надбавки или штрафы, не связанные с количеством распределенного ресурса:

$$\begin{cases} f_{ii} = \alpha_1 x_{ii} + d_i, \\ f_{ip} = \alpha_2 x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} + h_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Данная модель  $S3 = S(n, q, f\{\alpha_1, \alpha_2, \beta, d, h\})$  включает дополнительно параметры  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ ,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ .

Для систем  $S2$  и  $S3$  в работе доказаны обобщенные аналоги теоремы 3.1.

**Динамические свойства моделей.** Представим ситуацию, когда неизвестно равновесное решение системы  $S$ , но определены равновесные стратегии поведения ее участников. В этом случае некоторое начальное состояние будет последовательно меняться на каждом шаге и, возможно, будет приближаться к равновесному состоянию. В разделе 3.5 исследована динамика состояний систем вида  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$  и найдены условия сходимости произвольного начального состояния к равновесному решению.

**Динамика системы S1.** Пусть  $X(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  последовательные состояния системы. Предположим, что начальное решение

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_{11}(0) & x_{22}(0) & \dots & x_{nn}(0) \\ x_{1p}(0) & x_{2p}(0) & \dots & x_{np}(0) \end{pmatrix}$$

не является равновесным. Тогда равновесная стратегия однозначно определяет рекуррентные соотношения, задающие динамическое развитие системы:

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{1}{2} \left( q_i + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \right); \\ x_{ip}(k+1) = \frac{1}{2} \left( q_i - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \right); \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

Все равновесные состояния системы  $S1$ , найденные ранее, являются «неподвижными» по отношению к преобразованиям (3.6). Определим условия, при которых начальное состояние приближается к равновесному состоянию.

Для дальнейшего исследования можно рассмотреть только второе соотношение из (3.6). Представим его в матричной форме:  $X_p(k+1) = \frac{1}{2}\vec{q} - A \cdot X_p(k)$ ,

где

$$X_p(k+1) = \begin{pmatrix} x_{1p}(k+1) \\ x_{2p}(k+1) \\ \dots \\ x_{np}(k+1) \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad A = \frac{\beta}{2\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_p(k) = \begin{pmatrix} x_{1p}(k) \\ x_{2p}(k) \\ \dots \\ x_{np}(k) \end{pmatrix}.$$

По индукции состояние на шаге  $k+1$  можно выразить через начальное состояние:

$$X_p(k+1) = \left( E - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^k A^k \right) \cdot \frac{\vec{q}}{2} + (-1)^{k+1} A^{k+1} X_p(0). \quad (3.7)$$

Для сходимости процесса достаточно выполнение условия  $\|A\| < 1$  для любой из известных норм матрицы  $A$ , например,

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \quad (3.8)$$

Поскольку в данном случае матрица  $A$  является симметричной, то обе нормы определяют следующее условие сходимости:

$$\left| \frac{(n-1)\beta}{2\alpha} \right| < 1. \quad (3.9)$$

Спектральная норма  $\|A\|_2 = \rho(A) = \max_s \{|\lambda_s|\}$  (максимальное по модулю собственное число матрицы  $A$ ) определяет необходимое и достаточное условие сходимости. Легко показать, что матрица  $A$  имеет два собственных значения:  $\lambda_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ,  $\lambda_2 = \frac{(n-1)\beta}{2\alpha}$ , причем первое значение имеет кратность  $n-1$ . Следовательно, необходимое и достаточное условие сходимости имеет вид  $\|A\|_2 = \left| \frac{(n-1)\beta}{2\alpha} \right| < 1$  и совпадает с условием (3.9).

Переходя к пределу в соотношении (3.7) при условии  $\|A\| < 1$ , получим вид равновесного решения, не зависящего от начального состояния:

$$X_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{1}{2}(E + A)^{-1} \cdot \vec{q}. \quad (3.10)$$

Соотношение (3.9) гарантирует сходимость со скоростью убывающей геометрической прогрессии с множителем  $\mu = \|A\|$ . Если  $Z(0) = X(0) - X^*$  и  $Z(k) = X(k) - X^*$  определяют соответственно начальное отклонение и отклонение на шаге  $k$ , то  $\|Z(k)\| = \|A^k \cdot Z(0)\| \leq \|A\|^k \cdot \|Z(0)\| = \mu^k \|Z(0)\|$ . Следовательно, за  $k$  шагов отклонение уменьшится в  $\varepsilon = \mu^k$  раз. Поэтому количество итераций  $k = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln \mu} \right\rceil + 1$  гарантирует уменьшение начального отклонения в  $\varepsilon$  раз.

**Теорема 3.4.** *Последовательные состояния  $X(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  системы  $S1$ , удовлетворяющие стационарным итерационным соотношениям (3.6), сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии к единственному равновесному состоянию при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда выполняется соотношение  $\left| \frac{(n-1)\beta}{2\alpha} \right| < 1$ .*

**Динамика системы S2.** Для системы  $S2$  равновесная стратегия развития определяет следующие итерационные соотношения:

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} q_i + \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k); \\ x_{ip}(k+1) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} q_i - \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k); \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

Тогда можно получить следующий результат, аналогичный теореме 3.4.

**Теорема 3.5.** *Последовательные состояния  $X(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  системы  $S2$ , удовлетворяющие стационарным итерационным соотношениям (3.11) сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии к единственному равновесному состоянию  $X^*$  при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда выполняется соотношение  $\left| \frac{(n-1)\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \right| < 1$ .*

*Компоненты равновесного состояния удовлетворяют соотношениям*

$$X_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (E - A)^{-1} \cdot \vec{q}, \quad X_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} (E + A)^{-1} \cdot \vec{q}.$$

**Динамика системы S3.** Итерационные соотношения

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\alpha_2 q_i - d_i + h_i) + \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k); \\ x_{ip}(k+1) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\alpha_1 q_i + d_i - h_i) - \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k); \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.12)$$

**Теорема 3.6.** *Последовательные состояния  $X(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  системы  $S3$ , удовлетворяющие стационарным итерационным соотношениям (3.12), сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии к единственному равновесному состоянию  $X^*$  при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда выполняется соотношение  $\left| \frac{(n-1)\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \right| < 1$ .*

*Компоненты равновесного состояния удовлетворяют соотношениям:*

$$\begin{aligned} X_i^* &= \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (E - A)^{-1} \cdot (\alpha_2 \vec{q} - \vec{d} + \vec{h}), \\ X_p^* &= \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (E + A)^{-1} \cdot (\alpha_1 \vec{q} + \vec{d} - \vec{h}), \\ &\text{где } \vec{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T, \quad \vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T. \end{aligned}$$



получаем соотношения  $\sum_{i=1}^n f_i d_i = f \sum_{i=1}^n d_i = f \cdot D = \sum_{i=1}^n x_i = E, \quad f = \frac{E}{D}.$

Следовательно,  $x_i = f \cdot d_i = \frac{E}{D} \cdot d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

Заметим, что точно такое же распределение получится при использовании оценочной функции  $f_1 = f_1(d, x) = \frac{d-x}{d}$ . Объясняется это тем, что функции  $f$  и  $f_1$  отличаются на постоянную величину. Умножение оценочной функции на постоянную величину тоже не изменит итоговое равновесное распределение. Следовательно, определенной стратегии распределения отвечает не просто одна функция, а некоторый класс функций.

В работе также рассмотрены распределения, определяемые *системой равновесных функций*. В этом случае, при сохранении общей стратегии, можно вводить индивидуальные параметры для разных участников.

В **разделе 4.2** рассмотрены распределительные модели страховых операций, основанные на равновесных принципах.

**Модель 1.** Пусть  $E$  – некоторая годовая сумма выплат, которую приходится восстанавливать страховой фирме. Зададим множество клиентов в количестве  $n$  и страховые суммы  $S_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$  Требуется определить коэффициент  $k$  и страховые взносы  $d_i = k \cdot S_i$  при известной вероятности наступления страхового случая  $p$  (считаем, что для каждого страхового случая вероятность одинаковая).

Балансовые соотношения суммарных поступлений и выплат имеют вид

$$E = \sum_{i=1}^n d_i, \quad p \sum_{i=1}^n S_i = E. \quad (4.2)$$

Так как  $S_i = \frac{d_i}{k}$ , то  $\sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n d_i$ . Следовательно,  $k = p$  и  $d_i = p \cdot S_i$ .

Определение страхового взноса по формуле  $d_i = p \cdot S_i$  отвечает «справедливому» равновесному принципу  $S_i / d_i = p = \text{const}.$

**Модель 2.** Пусть  $E_0$  – сумма административных расходов и налоговых отчислений. Все другие обозначения соответствуют *Модели 1*. Тогда балансовые соотношения принимают вид:

$$E + E_0 = \sum_{i=1}^n d_i; \quad p \sum_{i=1}^n S_i = E. \quad (4.3)$$

Из (4.3) после преобразований получим итоговые соотношения

$$k = p \left( 1 + \frac{E_0}{E} \right); \quad d_i = k S_i = p \left( 1 + \frac{E_0}{E} \right) \cdot S_i = p \cdot \left( \frac{E + E_0}{E} \right) \cdot S_i; \quad S_i = \frac{d_i}{p} \cdot \left( \frac{E}{E + E_0} \right).$$

Последнее соотношение показывает, что увеличение вероятности  $p$  или административных расходов  $E_0$  уменьшает возможные выплаты  $S_i$ . Заметим, что по сравнению с *Моделью 1* «мерой» равновесия стал новый коэффициент  $k$ .

Значение вероятности  $p$  обычно определяется по статистическим данным прошлого периода и может быть не вполне достоверным. Поэтому удобно

предусмотреть производственный резерв  $E_i$ , который скорректирует второе балансовое соотношение  $p \sum_{i=1}^n S_i = E - E_1$  и приведет к новым результатам:

$$k = p \left( \frac{E + E_0}{E - E_1} \right); \quad d_i = k S_i = p \left( \frac{E + E_0}{E - E_1} \right) \cdot S_i; \quad \frac{S_i}{d_i} = \frac{(E - E_1)}{p(E + E_0)} = \text{const.}_i$$

В работе представлены также другие модели страхования, которые позволяют сделать некоторые общие выводы. Модели, основанные на равновесных принципах принятия решений, можно реализовать взаимовыгодно и прозрачно для всех участников. По нашему мнению, это может сделать политику страховой фирмы более сбалансированной и привлекательной.

**Пятая глава** посвящена разработке оптимальных моделей круговых (сенсорных) покрытий плоских областей. В той или иной форме эти задачи рассматривались в работах зарубежных авторов Wu J., Yang S., Wang L., Pottie G.J., Kaiser W.J., Cardei M., Du D., Carle J., Siplot D., Dai F., Zhang H., Hou J.C. и др. В работе<sup>4</sup> было предложено несколько интересных моделей покрытий. Однако их расчеты не совсем корректны, так как определяют эффективности покрытия для одного стандартного элемента покрытия, а не в целом для покрываемой области. В диссертационной работе сделаны уточнения их оценок. Кроме того, предложены значительные улучшения эффективности покрытий за счет оптимального «зацепления» соседних кругов (модели второго уровня).

В работе<sup>5</sup> доказано существование нижней границы плотности покрытия кругами двух видов без ограничения на соотношение между размерами кругов и найден способ приближенного вычисления этого значения. Отметим, что в данной работе получено точное аналитическое выражение для этого показателя:

$$d = \frac{2\pi}{\sqrt{27}} \left( 1 - \sqrt{3} \cdot \text{tg} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{27}}{12} \right) \right) \approx 1,018955892.$$

Это очень важно, так как ссылка на приближенное значение не совсем корректна. Приведенная оценка достигается за счет большого различия между кругами двух размеров, поэтому она имеет в большей степени теоретическое значение.

При построении сенсорных покрытий, как правило, стараются сделать как можно меньшим соотношение между размерами областей мониторинга разных сенсорных устройств. Следовательно, для моделей регулярных покрытий ставится задача получения наименьшей плотности при фиксированной сложности. Для решения этой задачи в работе использованы две базовые структуры: «квадратная» и «треугольная», и на их основе построен ряд оптимальных моделей.

**Модели первого уровня.** Рассмотрим однородное покрытие плоскости кругами одного радиуса  $R$ . Это означает, что каждая точка области принадлежит, по крайней мере, одному кругу из рассматриваемого покрытия, а центры кругов определяют некоторую правильную регулярную решетку. Рассмотрим два вида покрытий: (а) *Модель А-1* и (б) *Модель В-1* (рис. 5.1).

<sup>4</sup> Wu J., Yang S. Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges // Intern. J. of Foundations of Computer Science. – 2005. – Vol. 16, № 1. – P. 3-17.

<sup>5</sup> Toth G. F. Covering the Plane with Two Kinds of Circles // Discrete Comput. Geom. – 1995. – Vol. 13. – P. 445-457.

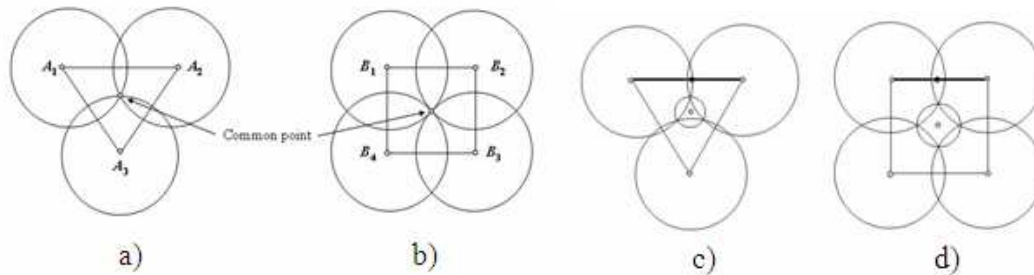


Рис. 5.1. Элементы покрытий. а) Модель А-1; б) Модель В-1; в) Модель А-2; д) Модель В-2

В первой модели центры трех соседних кругов находятся в вершинах равностороннего треугольника и имеют одну общую точку. Во второй модели центры находятся в вершинах квадрата, и также имеется одна узловая точка для четырех соседних кругов. Фрагмент является типовым, если вся контролируемая область состоит из таких по типу паркета без взаимных перекрытий.

Корректным определением *коэффициента эффективности* покрытия  $K$  будет отношение площади  $S_p$  типового фрагмента к суммарной площади  $S_f$  частей окружностей, покрывающих этот фрагмент.

Для *Модели А-1* получаем

$$S_{p_{A-1}} = \frac{R^2 3\sqrt{3}}{4}, \quad S_{f_{A-1}} = \frac{\pi R^2}{2}, \quad K_{A-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,8272. \quad (5.1)$$

Для *Модели В-1* эффективность  $K_{B-1}$  немного ниже:

$$S_{p_{B-1}} = 2R^2, \quad S_{f_{B-1}} = \pi R^2, \quad K_{B-1} = \frac{2}{\pi} \approx 0,6366. \quad (5.2)$$

Считается, что энергетические затраты пропорциональны площади сенсорных кругов с коэффициентом пропорциональности  $\mu$ . Поэтому *коэффициент энергетических затрат*  $E = \mu / K$  обратно пропорционален  $K$ . Значения этого показателя соответственно для *Модели А-1* и *Модели В-1* равны:

$$E_{A-1} = \frac{\mu 2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1,2092\mu; \quad E_{B-1} = \frac{\mu\pi}{2} \approx 1,5708\mu. \quad (5.3)$$

**Модели второго уровня.** Удалось значительно улучшить показатели эффективности покрытия за счет небольшого «наезда» больших соседних кругов друг на друга, а открывшуюся часть закрыть кругом небольшого размера. При этом площадь двукратного накрытия существенно уменьшится, а внутренний круг будет давать сравнительно небольшую добавку. Решая экстремальную задачу можно точно рассчитать лучший вариант «перекрытия» и соотношение между радиусами большего и меньшего кругов. Это и будут две оптимальные модели второго уровня, изображенные на рис. 5.1: в) *Модель А-2* и г) *Модель В-2*.

**Теорема 5.1.** *Оптимальные параметры Модели А-2, определяющие наилучшие показатели эффективности покрытия  $K$  и  $E$ , имеют вид*

$$r = \frac{R}{\sqrt{31}} \approx 0,1796R; \quad S_p = \frac{R^2 27\sqrt{3}}{31}; \quad S_f = \frac{\pi R^2 33}{62}; \quad K_{A-2} = \frac{18\sqrt{3}}{11\pi} \approx 0,902; \quad E_{A-2} \approx 1,108\mu.$$



**Теорема 5.2.** *Оптимальные параметры Модели В-2, определяющие наилучшие показатели эффективности покрытия  $K$  и  $E$ , имеют вид*

$$r = \frac{R}{\sqrt{5}} \approx 0,4472R; \quad Sp = \frac{16R^2}{5}; \quad Sf = \frac{6\pi R^2}{5}; \quad K_{B-2} = \frac{16}{6\pi} \approx 0,8488; \quad E_{B-2} \approx 1,1781\mu.$$

Модели А-2 и В-2 сравнимы по качеству. Однако Модель В-2 имеет преимущество за счет более простой структуры решетки центров кругов.

В разделе 5.2.4 впервые предложена классификация регулярных покрытий плоскости. Любое конструктивное регулярное покрытие отнесем к одному из классов вида  $\text{Cov}_w(n: p_1/k_1, p_2/k_2, \dots, p_n/k_n)$ , где  $w$  – стандартная плитка покрытия,  $n$  – число разных размеров кругов,  $p_i$  – число кругов вида  $i$ , участвующих в покрытии плитки  $w$ ,  $k_i$  – доли кругов вида  $i$ , покрывающих плитку. Если  $w$  – минимальная стандартная плитка, то обозначения однозначно определяют структуру покрытия и позволяют находить соответствующий класс моделей. Значение  $n$  является показателем сложности класса покрытий. Например, Модель А-2 будет принадлежать классу  $\text{Cov}_w(2:1_{12}, 1_6)$ . Из рис. 5.9 видно, что минимальный фрагмент в этом случае является составной частью всех возможных плиток и представляет собой прямоугольный треугольник с острыми углами по 30 и 60 градусов.

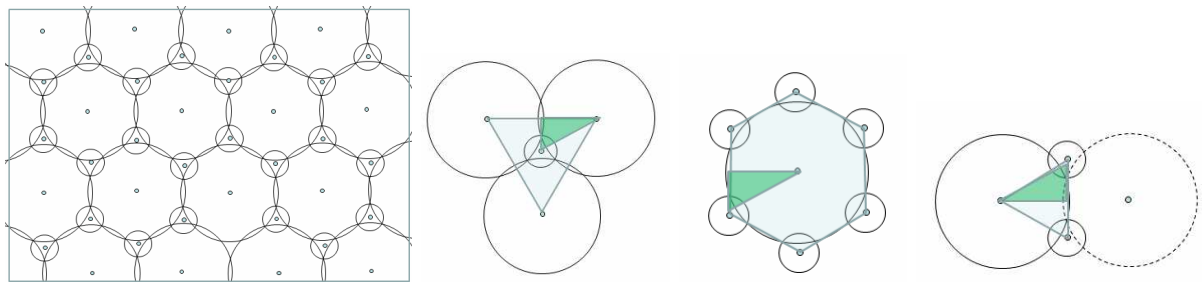


Рис 5.9. Варианты плиток и минимальный фрагмент для Модели А-2

Соответствующие обозначения для других плиток согласованы между собой:  $\text{Cov}_{w1}(2:3_6, 1_1)$ ,  $\text{Cov}_{w2}(2:1_1, 6_3)$ ,  $\text{Cov}_{w3}(2:1_6, 2_6)$ . Каждая запись показывает, что в целом количество кругов одного размера в два раза меньше, чем другого:

$$3/6 : 1/1 = 1/1 : 6/3 = 1/6 : 2/6 = 1 : 2.$$

Классификация позволяет учесть и «не пропустить» все возможные классы данного уровня и определить рекордную по плотности покрытия модель на каждом уровне. В связи с этим приведем следующий результат.

**Теорема 5.1\*.** *В классе моделей правильной треугольной структуры А уровня сложности  $n = 2$  рекордным по плотности является Модель А-2\* из класса  $\text{Cov}_w(2:1_{12}, 1_2)$  (рис 5.10) со следующими оптимальными параметрами:*

$$\min D_{A-2*} = \frac{3\pi}{5\sqrt{3}} \approx 1,0882796 \quad \text{при} \quad r = \frac{R}{2\sqrt{21}} \approx 0,1091R,$$

где  $D_{A-2*}$  – плотность покрытия.

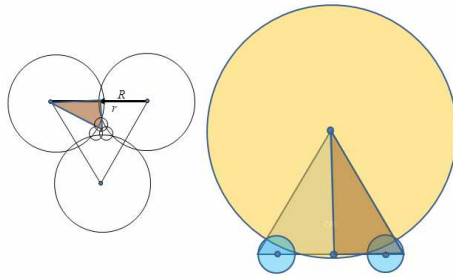


Рис 5.10. Фрагмент модели покрытия класса  $\text{Cov}_w(2:1_{12}, 1_2)$

Расчеты по модели приведены в приложении 2. Заметим, что по сравнению с *Моделью А-2* класса  $\text{Cov}_w(2:1_{12}, 1_6)$  маленький круг теперь находится не в вершине минимальной плитки, а на ее стороне.

Далее рассмотрены наглядные примеры покрытий уровня 3 на рис 5.11. Ниже каждого фрагмента указаны соотношения между количествами разных кругов, участвующих в покрытии.

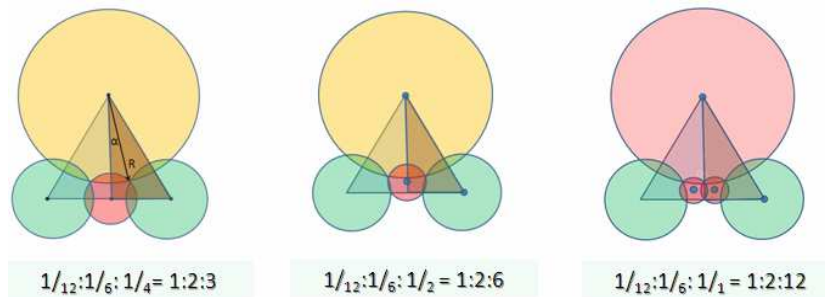


Рис 5.11. Примеры моделей покрытий третьего уровня

Модели достаточно эффективные, но не являются наилучшими в своем классе. Далее приведем наилучшие модели третьего уровня в сериях *А* и *В*.

**Модель В-3.** Рассмотрим класс покрытий  $\text{Cov}_w(3:4_4, 1_1, 4_1)$ , где  $w$  – квадратная плитка со стороной  $a$ . Для минимальной плитки обозначение имеет вид  $\text{Cov}_w(3:1_8, 1_8, 1_2)$  (рис. 5.12). Найдем в этом классе модель, для которой плотность покрытия минимальна.

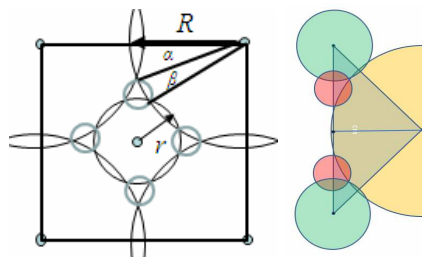


Рис 5.12. Фрагмент модели покрытия класса  $\text{Cov}_w(3:1_8, 1_8, 1_2)$

Плотность покрытия будет выражаться следующей формулой:

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \left( 1 - \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + 4 \left( \text{tg} \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) - \text{tg} \alpha \right)^2 \right).$$

Исследуя функцию на экстремум, находим оптимальные соотношения:

$$\min D(\alpha, \beta) \approx 1,093845, \quad \alpha \approx 19,08^\circ, \quad \beta \approx 13,15^\circ, \quad R \approx 0,529a, \quad r \approx 0,224a \quad \rho \approx 0,067a.$$

В сравнении с плотностью оптимальной *Модели В-2* квадратной структуры из класса  $\text{Cov}_w(2:1_4, 1_4)$ , имеющей значение  $\min D \approx 1,1781$ , плотность покрытия для новой модели стала практически в два раза ближе к единице.

**Модель А-3** представляет аналогичный класс покрытий треугольной структуры. Для правильной треугольной плитки обозначение класса будет иметь вид  $\text{Cov}_w(3:3_6, 1_1, 3_1)$ , а для минимальной плитки –  $\text{Cov}_w(3:1_{12}, 1_6, 1_2)$ .

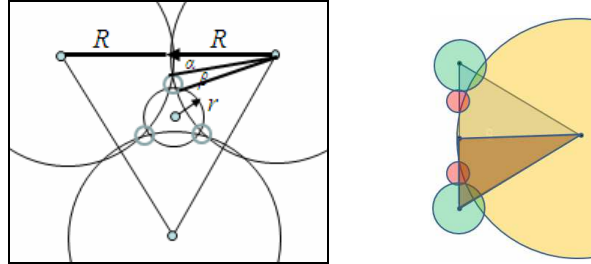


Рис 5.13. Фрагмент модели покрытия класса  $\text{Cov}_w(3:1_{12}, 1_6, 1_2)$

Используя обозначения углов согласно рисунку, получаем формулу

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left( \frac{0,5}{\cos^2 \alpha} + \left( 1 - \frac{\cos(60^\circ - \alpha - \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sin(60^\circ - \alpha - \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + 3 \left( \text{tg} \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) - \text{tg} \alpha \right)^2 \right).$$

и находим оптимальные параметры модели:

$$\min D(\alpha, \beta) \approx 1,067678, \quad \alpha \approx 14,32^\circ, \quad \beta \approx 10,31^\circ, \quad R \approx 0,5160 a, \quad r \approx 0,0798 a, \quad \rho \approx 0,0492 a.$$

Минимальная плотность оптимальной *Модели А-2* треугольной структуры (обобщением которой данная модель является) равна  $\min D \approx 1,1084$ , что существенно больше. Заметим, что это значение также больше соответствующего показателя для *Модели В-3* с квадратной структурой.

При проектировании сенсорных покрытий приходится учитывать стоимость датчиков, затраты энергии и т.д. Для ограниченных областей можно определить приближенное количество сенсоров и их характеристики на основе минимизации общих затрат. В разделе 5.3.3 проведены такие расчеты.

**Теорема 5.3.** При построении покрытия по типу *Модели А-2* для ограниченных областей, имеющих площадь  $S$ , оптимальный размер больших кругов и их количество оценивается по заданному ценовому признаку  $p$  и по функции энергии мониторинга  $f(r) = \mu \cdot r^\alpha$  следующими соотношениями:

$$r_1 \cong \left( \frac{6p}{\mu(\alpha-2) \left( 1 + 31^{-\alpha/2} \right)} \right)^{1/\alpha}; \quad N_1 \cong \frac{S}{\pi} \left( \frac{\mu(\alpha-2) \left( 1 + 31^{-\alpha/2} \right)}{6p} \right)^{2/\alpha}. \quad (5.13)$$

**Теорема 5.4.** При построении покрытия по типу *Модели В-2* для ограниченных областей, имеющих площадь  $S$ , оптимальный размер больших кругов и их количество оценивается по заданному ценовому признаку  $p$  и по функции энергии мониторинга  $f(r) = \mu \cdot r^\alpha$  следующими соотношениями:

$$r_1 \cong \left( \frac{4p}{\mu(\alpha - 2)(1 + 5^{-\alpha/2})} \right)^{1/\alpha}; \quad N_1 \cong \frac{S}{\pi} \left( \frac{\mu(\alpha - 2)(1 + 5^{-\alpha/2})}{4p} \right)^{2/\alpha}. \quad (5.14)$$

Многие реальные объекты моделируются бесконечно длинными полосами. Это автомобильные дороги и железнодорожные пути, различные линии связи, государственные границы, трубопроводы и прочие сооружения, у которых длина существенно превышает ширину. Модели мониторинга подобных объектов рассмотрены в **главе 6**. Задачи сводятся к поиску наименее плотного покрытия бесконечной полосы, которые ранее практически не рассматривались. При исследованиях учтены граничные особенности и определены наиболее эффективные модели в разных классах покрытий.

Назовем покрытие *n*-слоиным, если центры всех кругов покрытия располагаются на *n* прямых, параллельных границам полосы. В работе предложены и исследованы регулярные многослойные покрытия полосы кругами одного, двух и трёх радиусов. При этом радиусы кругов – это регулируемые параметры покрытий.

**Модель 6.1.** Регулярное однослойное покрытие полосы шириной *h* изображено на рис. 6.1.

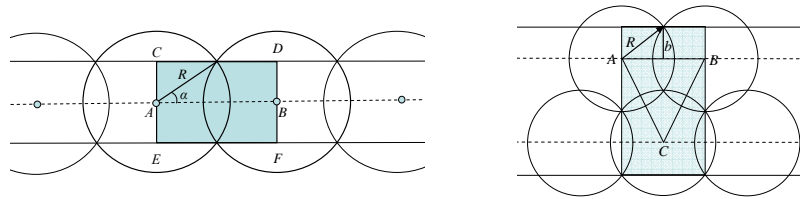


Рис. 6.1. Однослойное и двухслойное покрытия полосы одинаковыми кругами

Плотность покрытия всей полосы совпадает с плотностью прямоугольника и равна  $D = Sf / Sp$ , где  $Sf = \pi R^2$  – площадь кругов, покрывающих прямоугольник  $CDEF$ , а  $Sp$  – площадь  $CDEF$ . Оптимальным является покрытие, имеющее минимальную плотность  $D = \pi/2 \approx 1,5708$ , которая достигается при  $\alpha = \pi/4$ ,  $R = h/\sqrt{2}$  и расстоянии между центрами соседних окружностей  $d = h$ .

**Модель 6.2.** Двухслойное покрытие с *треугольной* решеткой (рис. 6.1). Пусть *h* – ширина полосы, *R* – радиус круга, *d* – расстояние между центрами соседних кругов одного слоя,  $\alpha$  – угол между радиусом, проведенным к точке пересечения двух соседних окружностей одного слоя, и прямой *AB*, проходящей через центры кругов этого слоя.

Плотность покрытия имеет вид  $D(\alpha) = \frac{\pi}{\cos \alpha (1 + 3 \sin \alpha)}$ . Минимум функции  $D(\alpha)$  достигается при  $\sin a = (\sqrt{73} - 1)/12 \approx 0,62867$ ; угол  $\alpha \approx 38,95^\circ$ ,

$$R = \frac{h}{1 + \sin \alpha} = \frac{4h}{3 + \sqrt{73}} \approx 0,3465h, \quad d = \frac{2h\sqrt{70 + 2\sqrt{73}}}{3(3 + \sqrt{73})} \approx 0,5389h.$$

Минимальная плотность такого покрытия

$$\min_{\alpha} D(\alpha) = \frac{48\pi}{\sqrt{70 + 2\sqrt{73}}(3 + \sqrt{73})} \approx 1,3998.$$

**Замечание 6.1.** Отметим нетривиальный результат. Треугольник  $ABC$ , образованный центрами трех соседних кругов, не является правильным, как в покрытии плоскости одинаковыми кругами, он равнобедренный. Это обусловлено граничным эффектом. В случае правильной треугольной решетки плотность покрытия больше и равна  $\frac{4\pi}{5\sqrt{3}} \approx 1,451$ .

**Модель 6.3.** Многослойные покрытия полосы кругами одного радиуса. Для заданного числа слоев  $n$  плотность покрытия имеет вид

$$D(\alpha) = \frac{Sf}{Sp} = \frac{n\pi}{2(n-1 + (n+1)\sin\alpha)\cos\alpha}.$$

Условие оптимальности:  $2\sin^2\alpha + \frac{(n-1)}{(n+1)}\sin\alpha - 1 = 0$ .

Из этого следует, что

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= 0,25\left(\sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + 8} - \frac{n-1}{n+1}\right) = 0,25\left(\sqrt{p^2 + 8} - p\right), \\ \cos\alpha &= 0,25\left(\sqrt{8 - 2p^2 + 2p\sqrt{p^2 + 8}}\right),\end{aligned}$$

где  $p = \frac{n-1}{n+1}$ . Это дает возможность вычислить оптимальное значение плотности покрытия  $D(\alpha)$  и определить соотношение между радиусом и шириной полосы

$$R = \frac{h}{n-1 + (n+1)\sin\alpha}.$$

Устремив  $n$  в бесконечность, получим предельное значение  $p=1$  и  $\sin\alpha = 1/2$ , что соответствует значению  $\alpha = \pi/6$ . Предельное значение плотности  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1,2092$ . Эта асимптотическая оценка соответствует классическому результату для покрытия всей плоскости кругами одного радиуса. Очевидно, что при большой ширине полосы влияние границ несущественно.

**Модель 6.4.** Пусть центры кругов радиуса  $R$  расположены на средней линии полосы и два соседних круга пересекаются, оставляя непокрытой область около границы полосы, которая покрывается кругами радиуса  $r$  (рис. 6.2).

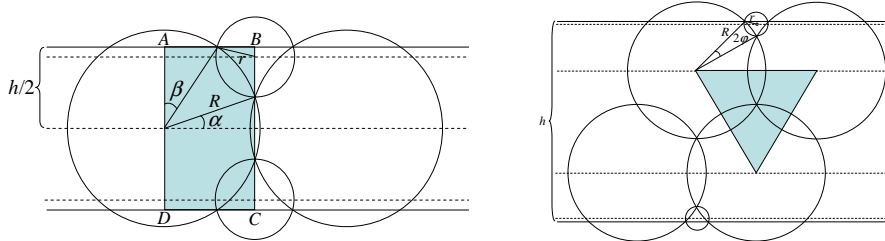


Рис. 6.2. Трехслойное и четырехслойное покрытия полосы кругами двух радиусов

Плотность данного покрытия зависит от двух параметров  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$D(\alpha, \beta) = \frac{Sf}{Sp} = \frac{\pi}{4\cos\alpha\cos\beta} \left( 2 + 2\sin^2\alpha + \sin(\alpha - \beta) - 4\sin\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right).$$

Минимум функции  $D(\alpha, \beta)$  не удается найти аналитически. С использованием вычислительных методов получено:

$$\min_{\alpha, \beta} D(\alpha, \beta) \approx 1,294 \text{ при } R \approx 0,6266 h, \quad r \approx 0,18252 h, \quad \alpha \approx 27^\circ, \quad \beta \approx 37^\circ.$$

**Модель 6.5.** Рассмотрим четырехслойное покрытие, изображено в правой части рис. 6.2. Пусть центральный угол для дуги большой окружности, отсекаемой малой окружностью, равен  $2\varphi$ . Тогда плотность покрытия равна

$$D(\varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{3}(3 + 4\sin(30^\circ + 2\varphi))} (4 + (\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}(30^\circ + \varphi) - 1)^2).$$

В результате численного решения находим оптимальные значения:

$$\min_{\varphi} D(\varphi) \approx 1,2542 \text{ при } \varphi \approx 11,5^\circ, \quad R \approx 0,3229 h, \quad r \approx 0,08595 h.$$

**Замечание 6.2.** Отметим, что добавление кругов радиуса  $r$  позволило существенно уменьшить плотность покрытия по сравнению с *Моделью 6.2*.

**Модель 6.6.** Рассмотрим пятислойное покрытие, изображенное на рис. 6.3. Круги радиуса  $R$  определяют основную прямоугольную структуру, круги радиуса  $r_1$  используются в центральной части полосы, а круги радиуса  $r_2$  находятся на границах полосы. Функция плотности покрытия зависит от двух переменных:

$$D(\alpha, \varphi) = \frac{Sf}{Sp} = \frac{\pi(3 - \sin 2\alpha + 2(\cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2)}{4 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi))}.$$

Минимальная плотность  $\min_{\alpha, \varphi} D(\alpha, \varphi) \approx 1,23355$  достигается при

$$\alpha \approx 26,36^\circ, \quad \varphi \approx 13,18^\circ, \quad R \approx 0,2956 h, \quad r_1 \approx 0,1336 h, \quad r_2 \approx 0,0874 h.$$

**Замечание 6.3.** Если упростить модель, потребовав равенства радиусов внутренних и граничных кругов, то плотность покрытия немного изменится:

$$D(\alpha) = \frac{\pi(5 - 3\sin 2\alpha)}{4(1 + \cos 2\alpha)},$$

$$\min_{\alpha} D(\alpha) \approx 1,256638 \text{ при } \alpha \approx 30,94^\circ, \quad R \approx 0,29147 h, \quad r = 0,10014 h.$$

Данная модель более проста, поэтому в некоторых случаях ей может быть отдано предпочтение в сравнении с *Моделью 6.6*.

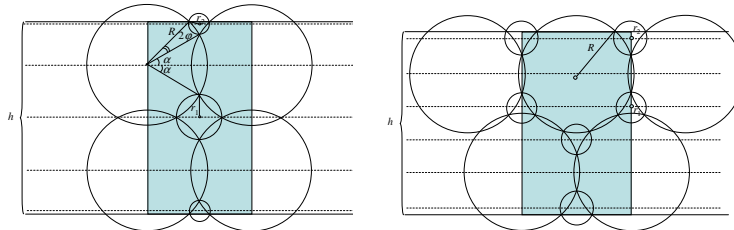


Рис. 6.3. Пятислойное и шестислойное покрытия полосы кругами трех радиусов

**Модель 6.7.** Рассмотрим шестислойное покрытие, состоящее из кругов трех радиусов (рис. 6.3). Используя обозначения углов, принятых в *Модели 6.6*, получим следующее выражение для плотности покрытия:

$$D(\alpha, \varphi) = \frac{\pi(1 + (\cos \alpha / \sqrt{3} - \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2)}{\cos \alpha (\sqrt{3} \cdot \cos \alpha + 2 \sin(\alpha + 2\varphi))}.$$

Минимальная плотность для данной модели  $\min_{\alpha, \varphi} D(\alpha, \varphi) \approx 1,20396$  достигается при

$$\alpha \approx 21,77^\circ, \quad \varphi \approx 14,32^\circ, \quad R \approx 0,31748 h, \quad r_1 \approx 0,05248 h, \quad r_2 \approx 0,09717 h.$$

**Замечание 6.4.** Если потребовать равенства радиусов меньших кругов, то плотность покрытия будет зависеть от одной переменной и ее оптимальное значение немного увеличится:

$$D(\alpha) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{7 - 2\cos 2\alpha - 2\sqrt{3} \cdot \sin 2\alpha}{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha},$$

$$\min_{\alpha} D(\alpha) \approx 1,23387 \quad \text{при } \alpha \approx 17,72^\circ, \quad R \approx 0,33383 h, \quad r \approx 0,24568 R \approx 0,08202 h.$$

Каждое покрытие полосы можно отнести к одному из классов  $P(n, k)$ , где  $n$  есть число слоев покрытия, а  $k$  – число различных радиусов кругов. В каждом классе можно указать оптимальную модель соответствующей структуры.

В разделе 6.3 рассмотрены различные модели мониторинга полосы внешним образом. Это означает, что по некоторым причинам «недоступности» мы не можем располагать сенсорные устройства внутри области. Такая постановка задачи ранее не рассматривалась. Исследования показали, модели внешнего мониторинга полосы более тесно связаны с моделями покрытия плоскости, чем модели обычного мониторинга полосы.

Рассмотрим покрытие плоскости кругами одного радиуса, имеющее правильную треугольную решетку расположения кругов (рис. 6.9). Между центрами кругов можно выделить два типа прямолинейных полос, покрытых внешним образом:  $SA-1(1)$  и  $SA-1(2)$  с одинаковыми плотностями, но разными структурами. Оптимальность покрытия полос следует из оптимальности покрытия плоскости. Очевидно, что плотность покрытия полосы в два раза больше соответствующей плотности покрытия плоскости.

Приведем основные характеристики моделей.

**Модель SA-1(1):**  $D_{SA-1(1)} = 2D_{A-1} = 4\pi / \sqrt{27} \approx 2,4184, \quad R = 2h/3 \approx 0,6667 h.$

**Модель SA-1(2):**  $D_{SA-1(2)} = 2D_{A-1} = 4\pi / \sqrt{27} \approx 2,4184, \quad R = 2h.$

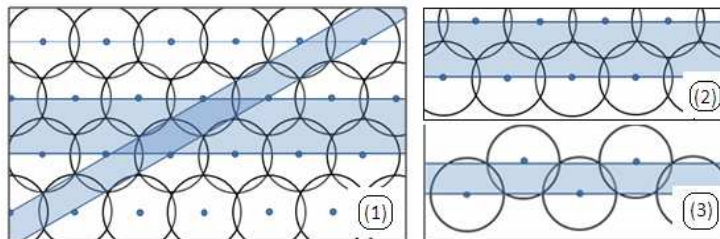


Рис. 6.9. (1) Модель A-1 покрытия плоскости кругами одного радиуса и соответствующие модели внешнего покрытия полосы: (2) Модель SA-1(1), (3) Модель SA-1(2)

Модель A-2 порождает единственную эффективную Модель SA-2 покрытия полосы внешним образом (рис. 6.11):

**Модель SA-2:**  $D_{SA-2} = \frac{11\pi}{9\sqrt{3}} \approx 2,2168, \quad R = \frac{h\sqrt{31}}{3\sqrt{3}} \approx 1,0715 h, \quad r = \frac{h}{3\sqrt{3}} \approx 0,19245 h.$



Рис 6.11. Модель SA-2 покрытия полосы внешним образом

Модель B-2 определяет две Модели SB-2(1) и SB-2(2) для покрытия полос разными способами, но с одинаковой плотностью (рис 6.12):

**Модель SB-2(1):**  $D_{SB-2(1)} = \frac{3\pi}{4} \approx 2,3562$ ,  $R = \frac{h\sqrt{5}}{2} \approx 1,1180h$ ,  $r = \frac{h}{2}$ .

**Модель SB-2(2):**  $D_{SB-2(2)} = \frac{3\pi}{4} \approx 2,3562$ ,  $R = \frac{h\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \approx 0,7906h$ ,  $r = \frac{h}{2\sqrt{2}} \approx 0,3536h$ .

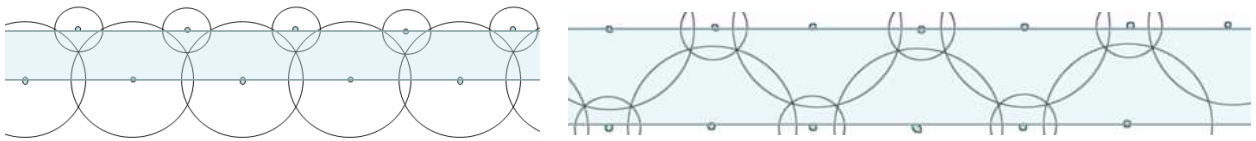


Рис 6.12. Модели SB-2(1) и SB-2(2) покрытия полосы внешним образом

Рассмотрим специальное покрытие плоскости кругами трех различных радиусов: **Модель SA-3**. На рис. 6.14 изображены элемент покрытия и его минимальный фрагмент из класса  $Cov_w(3:1_4, 1_2, 1_2)$ . Исследования показали, что размер фрагмента (соотношение между катетами прямоугольного треугольника) так же является параметром оптимизации. Заметим, что шестиугольник, изображенный на рис. 6.14, немного растянут вдоль горизонтали. С учетом обозначений фрагмента это значит, что выполняется соотношения для углов:  $\alpha > 30^\circ$ ,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Функция плотности покрытия достаточно сложна и зависит от трех параметров:

$$D(\alpha, \beta, \gamma) = \pi \cdot \text{tg} \alpha \cdot \left( \frac{1}{8(\sin \alpha \cos \varphi)^2} + \left( \text{tg} \left( \frac{90^\circ - \alpha - \varphi}{2} + \gamma \right) - \frac{\text{ctg}(\alpha + \varphi)}{2 \sin \alpha \cos \varphi} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{1 - \text{ctg} \alpha \cdot \text{ctg} \varphi}{2} \right)^2 + \left( \text{tg} \left( \frac{\omega + \gamma}{2} \right) - \text{tg} \omega \right)^2 \right), \quad \omega = \arccos(2 \sin \alpha \cdot \cos \varphi).$$

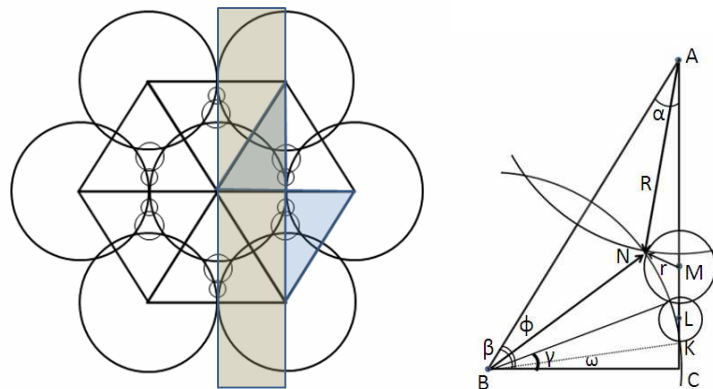


Рис 6.14. Элемент покрытия полосы кругами трех радиусов и его минимальный фрагмент



Оптимальные параметры для данного внешнего покрытия:

$$\min D_{SA-3} \approx 2,186, \quad \alpha \approx 29,79^\circ, \quad \beta \approx 60,21^\circ, \quad R \approx 1,064 a, \quad r \approx 0,2003 a, \quad \rho \approx 0,0305 a.$$

Аналогичная **Модель SB-3** класса  $\text{Cov}_w(3:1_4, 1_4, 1_2)$  третьего уровня получена по типу квадратной структуры с минимальной плотностью  $D_{SB-3} \approx 2,30906$ . Возможны более сложные специальные модели внешнего покрытия полосы, но они дают незначительное уменьшение плотности при существенном повышении сложности класса.

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю и глубокую признательность всем своим соавторам и коллегам за плодотворное сотрудничество, а также научному консультанту за обсуждение результатов работы, ряд ценных замечаний и поддержку.

## **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ**

1. Разработаны принципы моделирования распределенных ресурсных систем на графах и создан математический аппарат для описания таких систем. Предложенная методика позволяет решать прикладные задачи конфликтного характера, реализуя интересы и стратегии любого количества независимых участников (элементов) системы.
2. Впервые доказан ряд теорем об условиях существования и единственности равновесных состояний; определен аналитический вид предельных и равновесных решений для различных классов динамических ресурсных систем, созданы итерационные вычислительные алгоритмы, позволяющие осуществлять расчеты и проводить численные эксперименты при различных условиях развития системы.
3. Определены оптимальные модели регулярных покрытий плоских областей, допускающих круги двух и трех различных радиусов. Исследованы однослойные и многослойные регулярные модели покрытий протяженных объектов. Введено новое понятие внешнего покрытия (внешнего мониторинга) области, и построены соответствующие эффективные модели.
4. Впервые построена универсальная классификация регулярных покрытий пространственных областей, позволяющая группировать модели по структурным особенностям и по уровню сложности. Классификация позволяет определять оптимальные модели покрытий для каждого класса фиксированной сложности.
5. Получен ряд фундаментальных результатов, касающихся геометрических свойств покрытий. В частности, определен аналитический вид точной нижней оценки плотности покрытия кругами двух различных видов, уточняющей результат Тота (G. Toth, 1995).

## **СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **I. Монографии**

1. Астраков С.Н. Ресурсные системы. Равновесные методы поиска оптимальных решений. – Lambert Academic Publishing, 2011. – 157 с.

### **II. Публикации в ведущих рецензируемых научных журналах и в изданиях, рекомендованных ВАК**

2. Астраков С.Н. Моделирование устойчивых взаимоотношений на графах // Вестник КузГТУ. – 2005. – № 2. – С. 94-97.
3. Астраков С.Н. Некоторые методы распределения ресурсов в динамических сетевых моделях // Известия вузов. Черная металлургия. – 2006. – № 4. – С. 7-11.
4. Астраков С.Н. Равновесные методы поиска рациональных распределений // Вестник РГТЭУ. – 2009. – № 5. – С. 45-50.
5. Астраков С.Н., Анисова М.А. Математическое моделирование экономических взаимодействий на графах // Вестник РГТЭУ. – 2009. – № 6. – С. 39-43.
6. Zalubovsky V., Astrakov S., Erzin A., Choo H. Energy-efficient Area Coverage by Sensors with Adjustable Ranges // Sensors. – 2009. – № 9. – P. 2446-2460.
7. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций. – 2009. – № 3. – С. 3-19.
8. Astrakov S., Tahonov I. A Dynamic Model of Group Interactions // International Journal of Biomedical Soft Computing and Human Sciences. – 2011. – V. 18, № 1. – P. 77-84.
9. Astrakov S., Erzin A. Min-Density Stripe Covering and Applications in Sensor Networks // ICCSA, Part III, LNCS. – 2011. – № 6784. – P. 152-162.
10. Астраков С.Н., Тахонов И.И. Равновесное распределение ресурсов в модели групповых взаимодействий // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. – 2011. – Вып. 3. – С. 61-76.
11. Астраков С.Н., Ерзин А.И. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов // Вычислительные технологии. – 2012. – Т. 17, № 1. – С. 26-34.
12. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Сенсорные сети и покрытие полосы эллипсами // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18, № 2. – С. 3-17.
13. Astrakov S., Erzin A. Covering a Plane with Ellipses // Optimization. Journal of Math. Program. and Operation Research. – 2013. – V. 62, № 10. – P. 1357-1366.
14. Astrakov S., Erzin A. Efficient Band Monitoring with Sensors Outer Positioning // Optimization. Journal of Math. Program. and Operation Research. – 2013. – V. 62, № 10. – P. 1367-1378.

### **III. Статьи в профессиональных журналах и научных сборниках**

Общее количество – 24 работы, из них наиболее значимые:

15. Астраков С.Н., Ерзин А.И. Одна модель саморегулирующейся системы // Математические структуры и моделирование. – 2004. – № 13. – С. 30-38.

16. Астраков С.Н., Ерзин А.И. Моделирование устойчивых взаимоотношений на графах // Материалы 13-й Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск: ИГУ, 2005. – Т. 1. – С. 413-420.
17. Астраков С.Н. Моделирование устойчивых взаимодействий на графах // Проблемы информационной экономики: Сб. науч. тр. под ред. Р.М. Нижегородова. – Вып. 4: Моделирование инновационных процессов и экономической динамики. – М.: ЛЕАНД, 2006. – С. 293-302.
18. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залубовский В.В., Раха С. Модели и методы регулярного покрытия в сенсорных сетях // Материалы 14-й Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Иркутск, ИГУ. – 2008. – Т. 1. – С. 322-331.
19. Astrakov S. Search for Intelligent Methods of Equilibrium Distribution // Program and Abstracts of International Conference on Operations Research. – Augsburg: University of Augsburg, 2008. – P. 215.
20. Astrakov S., Erzin A., Zalubovsky V., Choo H. Energy-efficient Area Coverage by Sensors with Adjustable Ranges // 7th Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks. – Seoul (Korea), 2009. – 8 p. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).
21. Астраков С.Н., Ерзин А.И. Покрытие бесконечной полосы кругами одного и двух радиусов // Труды ИВМиМГ «Информатика». – Новосибирск, 2009. – Вып. 9. – С. 143-146.
22. Astrakov S. The full efficient monitoring of stripe with external deployment sensor // Program and Abstracts of 21-st International Symposium on Mathematical Programming. – Berlin, 2012. – P. 100.
23. Астраков С.Н. Мониторинг полосы с внешним расположением сенсорных датчиков // Математические структуры и моделирование. – 2012. – Вып. 25. – С. 52-62.