

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
КОНСТРУКТОРСКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

На правах рукописи



АСТРАКОВ СЕРГЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

**МЕТОДЫ ПОИСКА ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ
СИСТЕМАХ**

**Специальность 05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка
информации (в технике, экологии и экономике)**

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. ГРАФИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИСТЕМ	55
1.1 Основные принципы системного анализа	55
1.2 Графические методы представлений общей структуры системы	60
1.3 Применение графических представлений для моделирования реальных систем и процессов	65
ГЛАВА 2. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕСУРСНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФОВ	67
2.1 Принципы моделирования многосторонних взаимоотношений	67
2.2 Линейная модель конфликтных взаимодействий	75
2.3 Моделирование отношений двух коалиций	83
2.4 Модели коммуникационных сетей	94
2.5 Однородная модель взаимодействий на полном графе	102
2.6 Специальные содержательные модели	107
2.6.1 Конкурентные взаимодействия	107
2.6.2 Обслуживание коммуникационных сетей	109
2.6.3 Оптимизация нелинейных технологических процессов	111
ГЛАВА 3. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГРУППОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В РЕСУРСНЫХ СИСТЕМАХ	118
3.1 Базовая модель взаимодействий	118
3.2 Однородная модель оценки отношений	126
3.3 Неоднородные оценки взаимодействий	129
3.4 Индивидуальные оценки взаимодействий	132
3.5 Динамические модели и итерационные процессы	133
3.6 Модель для двух общих полей взаимодействий	140
3.7 Общий итерационный алгоритм изменений состояний	142
ГЛАВА 4. РАВНОВЕСНЫЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ	145
4.1 Рациональные модели распределений	145
4.1.1 Принципы «справедливости» и критерии распределений	146
4.1.2 Стратегия равных потерь	149

4.1.3 Реализация пропорционального распределения при помощи принципа f-равновесия	150
4.1.4 Системы равновесных функций	150
4.2 Равновесные стратегии в страховании	152
4.3 Выводы по равновесным распределениям	155
ГЛАВА 5. МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ПОКРЫТИЙ ДЛЯ БЕСПРОВОДНЫХ СЕНСОРНЫХ СЕТЕЙ	157
5.1 Проблемы мониторинга и сенсорные сети	167
5.2 Модели покрытий для сенсорных сетей	158
5.2.1 Модели первого уровня	158
5.2.2. К-модели второго уровня	160
5.2.3. Модели второго уровня	162
5.2.4 Классификация регулярных покрытий	166
5.3 Эффективность покрытий ограниченных областей	173
5.3.1 Построение типовой функции затрат	174
5.3.2 Функция затрат для кругового сенсорного покрытия	175
5.3.3 Оптимизация затрат для моделей третьего уровня	176
5.3.4 Обсуждение результатов и выводы	180
ГЛАВА 6. ЭФФЕКТИВНЫЕ ПОКРЫТИЯ ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ	182
6.1. Покрытие полосы кругами одного радиуса	183
6.1.1 Однослойные покрытия	184
6.1.2 Двухслойные и многослойные покрытия	185
6.2. Специальные модели покрытий кругами двух и трех радиусов	188
6.3 Мониторинг полосы с внешним расположением датчиков	193
6.4. Общий анализ результатов по сенсорным сетям	203
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	208
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	210
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	219
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	221
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	225

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Оптимизационные задачи прикладного характера требуют создания инновационных методов нахождения эффективных решений, которые могут достаточно гибко учитывать изменение окружающих условий. Во многих случаях это можно реализовать с помощью равновесных распределений. При решении технических задач равновесные методы способны определять устойчивое состояние, которое и является оптимальным решением по некоторому критерию. С другой стороны, в сложных динамических системах равновесные методы являются «силами быстрого реагирования», что позволяет организовать обратную связь и удерживать систему на некоторой стабильной траектории. Оптимальное состояние – это некоторый вариант решения с максимальной «выгодой». Но всегда ли можно построить адекватный функционал, приводящий к лучшему результату? Реализовать такой подход иногда очень сложно и даже невозможно. Именно для таких случаев могут быть найдены успешные управленческие решения, когда учет разносторонних интересов и равномерная «загрузка» производственных факторов приводят к лучшим результатам, чем непосредственная нацеленность на «максимальные» достижения.

В связи с этим, в данной диссертационной работе предлагаются новые равновесные методы поиска эффективных решений для широкого класса распределенных систем, задаваемых с помощью взвешенных графов. Наличие ресурсов у элементов графа позволяет определять взаимодействия, делать оценку состояний отдельных элементов и системы в целом, а также последовательно перераспределять ресурсы, реализуя некоторую заданную стратегию по «улучшению» состояний участников. Если система состоит из самостоятельных элементов, то эти элементы-участники независимо оценивают отношения между собой и принимают действия по перераспределению своего ресурса. Устойчивые состояния в таких системах принято называть равновесием по Нэшу, *когда отдельно взятому игроку*

невыгодно менять что-либо при фиксированных стратегиях всех других игроков. Равновесие позволяет «системе» стабильно существовать и, как правило, оно соответствует некоторому типу оптимального состояния. Поэтому важной проблемой является поиск равновесных состояний с помощью аналитических или численных итерационных методов.

В наших исследованиях в большей степени развиваются эволюционные методы моделирования, в основе которых лежат теоретико-игровые принципы, графические представления и итерационные вычисления. В моделях явно задаются игроки-агенты и прослеживаются их стратегии поведения при задаваемых предпочтениях. В повторяющихся и эволюционных играх популяции игроков взаимодействуют во времени и имеют возможность делать многократные действия для улучшения своего «выигрыша». Оценка предыдущего опыта дает возможность исправлять ошибки и улучшать состояния. Социальное поведение, а также природные явления замечательно демонстрируют способы нахождения рациональных и оптимальных решений. Как правило, общее устойчивое состояние сложной системы достигается с помощью «компромиссов» при взаимодействии отдельных ее частей. Поэтому в методику моделирования необходимо «закладывать» интересы всех участников и их способность реагировать на действия «окружающей среды». Важно, чтобы агенты имитировали успешное поведение, заставляя систему меняться в целом. Кроме того, в практическом плане подобные модели помогают исследовать не только изменяющиеся во времени процессы, но и проблемы установления социальных норм, задачи выбора эффективных режимов энергопотребления и прочих распределительных процедур.

Используемые в работе *динамические ресурсные системы*, обладают следующими характеристиками:

- 1) *набором элементов* (агентов), имеющих некоторый личный ресурс;
- 2) *структурой связей* между элементами, определяющих направления взаимодействий;

- 3) *множеством допустимых распределений* ресурса по направлениям взаимодействий;
- 4) *системой личных оценок* уровня удовлетворенности по направлениям взаимодействия, зависящих от количества распределенного ресурса.

Предполагается, что на каждом шаге дискретного времени все элементы системы независимо друг от друга изменяют свои состояния на основании имеющейся у них информации о состоянии других элементов. Так как элементы действуют независимо, то новые состояния элементов не полностью соответствуют ожиданиям, поэтому на очередном шаге они вынуждены снова изменять свои состояния. Тем самым задается динамический процесс развития системы, представляющий интерес для изучения.

Динамические ресурсные системы допускают широкое многообразие структур и гибкую систему параметрических оценочных функций, что позволяет адаптировать их к различным техническим, экономическим и социальным системам. Каждая конкретная реализация может быть исследована на предмет существования предельных и равновесных состояний, представляющих практическую важность. Методика дает возможность изучать различные *саморазвивающиеся системы*, стремящиеся к некоторому стабильному состоянию.

Классические игровые модели обычно используются для исследования стратегических аспектов конфликтных ситуаций. Они в меньшей степени пригодны для описания изменяющихся состояний систем. Последовательные и повторяющиеся игры некоторым образом могут отражать динамические свойства систем, но с увеличением количества «игроков» модель становится очень сложной с точки зрения анализа основных характеристик. К тому же, структура связей между *агентами* в матричных играх задается весьма условно, а это достаточно важно для сложных сетевых моделей. Поэтому *динамические ресурсные системы*, по нашему мнению, обладают большими возможностями для описания и

исследования систем с различными формами взаимодействий.

Во второй части диссертационной работы исследуются модели круговых покрытий, которые непосредственно связаны с проблемами мониторинга пространственных областей с помощью беспроводных сенсорных сетей. Ранее эта тематика рассматривалась, в основном, в работах зарубежных авторов: M. Cerdei, G. Potte, L. Wang, J. Wu, H. Zhang, J. Hou, S. Yang, H. Choo, P. Carmi, M. Katz, A. Clementi, P. Wan, I. Akyildiz, H. Gupta, H. Chen, P. Soreanu, Y. Mao, M. Rahman, H. Chizari, P. Nixon и др. В геометрической постановке каждому сенсору сети можно сопоставить круг окружающего пространства, в котором сенсор способен выполнять контрольные действия или передавать (принимать) сигнал. Задача о покрытии заданной области кругами соответствует задаче мониторинга этой области с помощью сенсорной сети. При этом эффективность покрытия и мониторинга определяется отношением суммарной площади кругов к площади области. Это и есть плотность покрытия, которую при проектировании стараются получить как можно меньше. Результаты исследований сенсорных сетей широко востребованы в высокотехнологичных производственных областях. В данной диссертационной работе предложены новые исследования по данной актуальной теме: рассмотрены новые постановки задач и разработана классификация покрытий.

Степень теоретической разработанности темы. В работах [11, 16, 19, 44, 85, 97] предлагаются и частично исследуются модели оценки взаимоотношений сторон. Исследованию свойств различных развивающихся систем посвящен целый ряд работ [13, 21, 39, 43, 67, 82, 83, 91]. Если известны стратегии элементов системы, то основным направлением исследований является изучение поведения системы в течение времени. В игровых постановках элементы с разными интересами часто называют игроками, а состояние равновесия - равновесием по Нэшу [63, 87, 96, 103]. В экономических системах понятие равновесия является одним из ключевых и

ему посвящено множество работ, среди которых отметим [38, 40, 66, 75, 76, 88, 100, 115, 121]. Исследованием равновесных состояний занимаются также при изучении саморазвивающихся систем [41, 46, 98, 104, 110, 113]. Одним из приложений последнего направления является исследование моделей теории конфликтов [12, 20, 26, 33, 53, 102, 114]. Вопросы о нахождения равновесий по Нэшу проводились в работах [24, 69, 96, 105].

Цель диссертационной работы. Разработка методов моделирования распределенных ресурсных систем и исследование динамических свойств поведений таких систем. Разработка эффективных моделей мониторинга пространственных областей, учитывающих особенности геометрической структуры сенсорных сетей и энергетические затраты.

Задачи, решаемые в диссертации для достижения указанных целей.

- Создание математического аппарата для описания ресурсных систем, в которых задаются взаимодействия, состояния и динамика их изменений.
- Разработка принципов и критериев оценки удовлетворенности для элементов системы своими текущими состояниями. Исследование влияния оценок удовлетворенности на стратегию поведения участников.
- Поиск аналитических и численных решений, соответствующих равновесным состояниям систем.
- Проектирование эффективных систем мониторинга пространственных областей на основе моделей круговых покрытий.
- Создание алгоритмов и программных материалов, позволяющих проводить численные расчеты для конкретных моделей.

Область исследования связана с моделями принятия решений на основе понятий эффективности и равновесия в системах со сложной структурой связей.

Объектом исследования настоящей диссертации являются распределенные системы, определяемые на графах или в некоторых пространственных областях. Элементы системы обладают однородным ресурсом, который распределяется по направлениям структурных связей в соответствии с заданными целевыми критериями. Также будут рассматриваться системы, где распределительная функция представляется оптимизацией расположения различных элементов «покрытия» для контроля над заданной областью.

Предмет исследования работы – динамические ресурсные системы на графах и распределенные модели регулярных сенсорных сетей. Динамика ресурсных систем описывается при помощи итерационных процессов, для которых определяются условия сходимости и находятся равновесные состояния. В теории игр и математической экономике подобные процедуры трактуются как поиск равновесия по Курно.

Теоретическая и методологическая основа исследования. Во-первых, это математические модели общего равновесия (Л. Вальрас, В. Парето, Т. Купманс, К. Эрроу, Ж. Дебре, Р. Раднер, Л. Гурвич, Д. Нэш, Л. Макензи, Т. Лунберг, Х. Никайдо, Т. Негуши, В.И. Данилов, А.Д. Новиков, А.И. Соболев, С.Л. Печерский, В.И. Опойцев и др.). Во-вторых, это теория социального выбора и рационального поведения (Э. Мулен, Л. Шепли, С. Шенкер, С. Едлинг, С. Стем, Р. Франк, Д. Грин, М. Олсон, В. Ванберг, И. Шапиро, М. Фармер, М. Зафировский, В. Культыгин, В. Кокорев, Р. Швери, В. Радаев, Г. Рузавин и др.). Отметим влияние теории игр, которая тесно переплетается с вышеуказанными разделами (Д. Нейман, П. Самуэльсон, Р.Ауманн, Т. Шеллинг, Л. Шепли, Д. Нэш, М. Масчлер, О. Моргенштерн, Р. Люис, Р. Майерсон, К. Гренджер, Х. Райфа Д. Бьюенен, Р. Гиббонс, П. Янг, Н. Ховард, М.В. Губко, Ю.Б. Гермейер, Н.Н. Данилов, М.А. Шубин, Ю.Н. Павловский, С.Л. Печорский, А.А. Беляева и др). Кроме того, источником ряда идей послужили исследования по теории систем и системному анализу (Р. Акофф, Л. Бергаланфи, У. Черчмен, С. Кунц, С. Донелл, Н. Винер, Д.

Форрестер, Н. Луман, Т. Бернс, Е. Флем, Т. Хюбнер, И. Стенгерс, И. Пригожин, В.Н. Садовский, В.Г. Афанасьев, В.Д. Могилевский и др.). Методологической основой разработки новых моделей является теория графов и ее приложения (Л.Р. Форд, Д.Р. Фалкерсон, Н. Кристофидес, Р. Дистлер, К. Берж, М. Свами, О.В. Бородин, А.Д. Плотников, В.П. Попов, А.Д. Цвиркун и др.). Работа опирается также на исследования, посвященные сходимости итерационных процессов и методам последовательных приближений (Ф.Р. Гантмахер, С.К. Годунов, Д.К. Фадеев, В.Н. Фадеев, В.И. Крылов, В.В. Бобков, А.А. Самарский, А.В. Гулин, А.М. Мацокин и др.).

Научная новизна. В диссертационной работе рассматриваются новые распределенные ресурсные системы, в которых взаимодействие между элементами определяется частями ресурса, направленными по линиям связи. Характер взаимодействий определяется разнообразными классами оценочных функций. Модели допускают сложную структуру межэлементных связей и любое конечное число участников. Модели первой группы на обычных графах являются существенным обобщением ранее известных случаев. Модели второй группы, задаваемые с помощью гиперграфа и позволяющие описывать групповые взаимодействия (не только парные), рассмотрены и исследованы впервые.

В разделе, посвященном поиску эффективных сенсорных сетей, построены модели покрытий плоских областей, имеющие наилучшую эффективность в соответствующих классах задач. Исследованы модели мониторинга протяженных объектов с критериями эффективного гарантированного покрытия, которые ранее не рассматривались. Впервые сформулирована постановка задачи о внешнем мониторинге ограниченных областей и предложены оптимальные регулярные модели покрытий кругами одного, двух и трех различных размеров.

Отдельно следует отметить создание новой универсальной классификации регулярных круговых покрытий. Она позволяет однозначно классифицировать все известные модели покрытий и по структуре и по

сложности, а также находить не учтенные ранее варианты. В соответствии с данной классификацией также можно построить классы обобщенных эллиптических покрытий имеющих, как правило, меньший показатель плотности по сравнению с соответствующими круговыми покрытиями.

Основными результатами диссертации, вынесенными на защиту, являются:

1. Разработка принципов моделирования распределенных ресурсных систем на графах и создание математического аппарата для описания таких систем. Предложенная методика позволяет решать прикладные задачи конфликтного характера, реализуя интересы и стратегии любого количества независимых участников (элементов) системы.
2. Доказательство ряда теорем об условиях существования и единственности равновесных состояний; определение аналитического вида предельных и равновесных состояний для различных классов *динамических ресурсных систем*.
3. Создание итерационных вычислительных алгоритмов преобразований состояний в распределенных ресурсных системах, позволяющих делать расчеты и проводить численные эксперименты при различных условиях *развития* системы.
4. Построение вычислительных моделей конкурентного взаимодействия, задачи ресурсного обслуживания коммуникационной системы и создание справедливой модели поведения в сфере страхования.
5. Определение оптимальных моделей мониторинга плоских областей сенсорными сетями, допускающие сенсоры двух и трех радиусов действия. Рассмотрены обобщенные модели двух структур: треугольная (серия А) и квадратная (серия В).
6. Разработка приближенного метода определения оптимального

количества сенсорных устройств для мониторинга ограниченных областей с учетом стоимости и технической характеристики сенсорных устройств (на примере моделей А-2 и В-2).

7. Исследование однослойных и многослойных регулярных моделей мониторинга протяженных объектов, основанных на различных геометрических структурах круговых покрытий.
8. Определение понятия внешнего мониторинга области и построение соответствующих эффективных моделей.
9. Построение универсальной классификация регулярных покрытий пространственных областей, позволяющая распределять по уровню сложности все известные модели и находить новые эффективные структуры.
10. Определение аналитического вида точной нижней оценки плотности покрытия кругами двух различных видов, уточняющей результат Тота¹.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер, однако полученные результаты могут служить методической основой для оптимизации коммуникационных и распределительных систем. Предложенные подходы позволяют находить эффективные технические решения, проводить рациональный мониторинг промышленных и природных объектов.

В течение 2007-2009 гг. исследования поддерживались совместным российско-индийским грантом РФФИ (проект 08-07-91300-ИНД_а). В 2010-2012 гг. получена финансовая поддержка исследований грантом РФФИ (проект 10-07-92650-ИНД_а). В 2013 году получен грант РФФИ (проект 13-07-00139_а) на исследование по теме «Разработка математических моделей и методов оптимизации мобильных беспроводных сенсорных сетей». В настоящее по Программе фундаментальных научных исследований

¹ Toth G.F. Covering the plane with two kinds of circles // Discrete Comput. Geom., 1995, v. 13, p. 445-457.

государственных академий наук, проводится работа по Проекту I.4.1.5. «Математическое моделирование и вычислительные технологии в задачах принятия решений по управлению технологическими процессами предприятий нефтегазового и горнодобывающего комплексов и других сложных объектов» (№ гос. регистрации 01201154503).

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечена корректностью постановок рассматриваемых задач и точностью математических методов для их решения. Предложенные вычислительные алгоритмы определены в строгом формализованном виде и допускают проверку теоретических результатов с помощью численных экспериментов.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (Омск, 2003, 2006, 2012), Всероссийская научно-практической конференции «Информационные технологии в экономике, науке и образовании» (Бийск, 2004), Международный семинар «Вычислительные методы и решение оптимизационных задач» (Бишкек, 2004), XIII и XIV Байкальские международные школы-семинары «Методы оптимизации и их приложения» (Иркутск-Байкал, 2005, 2008), Всероссийская научно-практическая конференция «Системы автоматизации в образовании, науке и производстве» (Новокузнецк, 2005, 2007), Научно-методический семинар «Информационно-вычислительные технологии в задачах поддержки принятия решений» ИВТ СО РАН (Новосибирск, 2007, 2011), Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Владивосток, 2007). International Conference «Operations Research and Global Business» (Аугсбург, Германия, 2008), 7-th International Symposium on Modelling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks (Сеул, Корея, 2009), V Азиатская Международная школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем» (Бишкек, Иссык-Куль, Кыргызстан, 2009),

Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 2010, 2013), 11-th International Conference on Computational Science and its Applications (Сантадер, Испания, 2011), 25-th Conference of European Chapter on Combinatorial Optimization (Анталия, Турция, 2012), 21-th International Symposium on Mathematical Programming (Берлин, Германия, 2012), Научный семинар «Дискретные экстремальные задачи» ИМ СО РАН (Новосибирск, 2011, 2012), Научный семинар «Моделирование инфо-коммуникационных систем» ИВМиМГ СО РАН (Новосибирск, 2013).

Публикации и личный вклад. По теме диссертации опубликованы одна монография и 39 работ, из которых 17 являются статьями в центральных и зарубежных журналах. В совместных работах вклад соискателя является основным; ему принадлежат формулировки утверждений и ключевые идеи доказательств. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы и 3 приложений. Объем диссертации - 244 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** приводится краткий обзор результатов, связанных с областью исследования, обосновывается актуальность темы исследования и кратко излагается содержание диссертационной работы.

Первая глава посвящена рассмотрению способов задания системных объектов. За основу берется аппарат теории графов, который непосредственно используется для определения структуры простейших моделей. Для более сложных объектов используются обобщенные графические представления: *мультиграфы, псевдографы и гиперграфы*.

Граф есть пара множеств $G=(V,E)$, где E состоит из 2-элементных подмножеств множества V .

Обычный граф позволяет описывать только парные связи, поэтому в дальнейшем мы будем использовать и более общие графические представления.

Мультиграф $MG=(V,E)$ (E допускает кратные 2-элементные подмножества множества V), псевдограф $PG=(V,E)$ (E допускает кратные ребра и петли) и гиперграф.

Гиперграф есть пара множеств $HG=(V,E)$, где E состоит из заданного набора подмножеств множества V , допускающих кратность.

Элементы множества E называют обобщенными ребрами, «связывающие» k -элементные подмножества множества V , $k \leq n$. Если $k \geq 3$, то обобщенное ребро нельзя изобразить с помощью линии. Например, для гиперграфа $HG_4=(V,E)$, где $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{e_1=\{1\}, e_2=\{1,2,3\}, e_3=\{1,2,3,4\}, e_4=\{3,4\}, e_5=\{4\}\}$ имеется два 1-элементных ребра e_1 и e_5 , одно 2-элементное e_4 , одно 3-элементное e_2 и одно 4-элементное ребро e_3 . Вместо ребер элементы E естественнее называть полями, так как соответствующие элементы одновременно взаимодействуют на них. Любой гиперграф, в том числе и HG_4 , можно задавать таблицей или матрицей инцидентности:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичный элемент b_{ij} матрицы B показывает присутствие «участника» i на поле j , а нулевой элемент b_{ij} матрицы – отсутствие «участника» i на поле j . Сумма элементов в столбце матрицы B определяет число участников соответствующего поля, а сумма элементов строки – степень соответствующей вершины. Представление графа с помощью матрицы смежности удобно только для простых случаев; для гиперграфов такое представление теряет практическую ценность.

Графически любой гиперграф можно изобразить в виде P -представления. Для этого на двух разных уровнях изображаются вершины и поля взаимодействий, а между ними проводятся линии, определяющие присутствие соответствующего элемента на заданном поле (рис. 1.1).

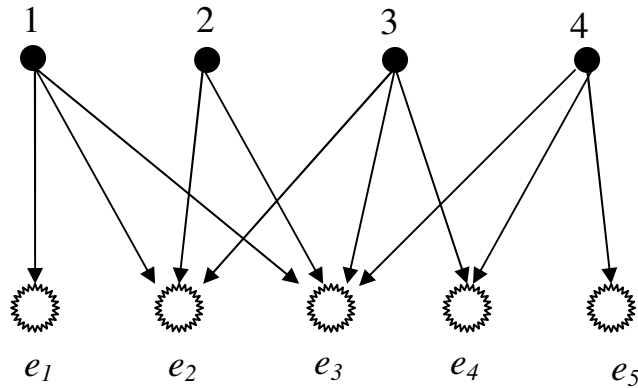


Рис. 1.1. Гиперграф $HG_4=(V,E)$, где $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{e_1=\{1\}, e_2=\{1,2,3\}, e_3=\{1,2,3,4\}, e_4=\{3,4\}, e_5=\{4\}\}$

Определение. Ресурсная система $S=(V,E,Q)$ – это взвешенный гиперграф $HG=(V,E)$, каждой вершине которого $i \in V$ присвоен ресурс q_i , где $Q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ – ресурсный вектор системы, $n=|V|$.

Для описания свойств ресурсных систем введем обозначения:

- $Q_\Sigma = \sum_{i=1}^n q_i$ – общий ресурс системы S ;
- $E_i = \{e_j \in E : i \in e_j\}$ – подмножество полей инцидентных элементу i ;
- $V_{ij} = \{v \in V : \{i, v\} \subset e_j\}$ – множество смежных элементов для элемента i на поле e_j (все элементы поля e_j кроме элемента i);
- $V_i = \{v \in V : \exists e_t \in E, \{i, v\} \subset e_t\}$ – множество всех смежных элементов для элемента i (объединение всех V_{ij} по j);
- x_{ij} – ресурс элемента i на поле $e_j \in E_i$; набор всех x_{ij} определяет некоторое распределение общего ресурса Q (состояние системы);

$$\bullet X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix} - \text{матрица состояния системы } S.$$

Элемент i имеет возможность активно «действовать» своим ресурсом на подмножестве полей $e_j \in E_i$, сохраняя при этом балансовое соотношение

$$q_i = \sum_{j \in E_i} x_{ij} \text{ (сумма элементов строки матрицы } X).$$

Каждый столбец матрицы X полностью определяет одно элементарное k -*взаимодействие*, а все столбцы матрицы состояний задают полную систему взаимодействий в данной модели. Если $k=1$, то на поле этого взаимодействия $e_j \in E_i$ присутствует только один элемент i , поэтому такое поле можно называть *внутренним* для элемента i .

Таким образом, можно отметить следующие основные свойства распределенной ресурсной системы:

- *система* состоит из множества связанных между собой элементов, которая рассматривается как *целое*;
- определена устойчивая *структура* связей между элементами системы;
- задана *форма существования* системы виде состояния, определяемого ресурсными взаимодействиями между элементами или подмножествами.

Во **второй** главе исследуются состояния динамических ресурсных систем, моделируемых графом $G=(V,E)$, $n=|V|$, $m=|E|$. Динамика системы – это последовательностью состояний, которые определяются перераспределениями ресурса после оценки элементами своего текущего состояния.

Пусть каждая вершина $i \in V$ распределяет свой однородный ресурс в количестве q_i по инцидентным ребрам $e_j \in E_i$. Предположим, что известно начальное распределение ресурса

$$x_{ij}^0 : q_i = \sum_{e_j \in E_i} x_{ij}^0, \quad i \in V, \quad e_j \in E_i.$$

Если система развивается и эволюционирует, то на любом временном шаге k определяется новое распределение $x_{ij}^k, k = 0, 1, 2, \dots$:

$$X_0 \rightarrow [T_0] \rightarrow X_1 \rightarrow [T_1] \rightarrow X_2 \rightarrow [T_2] \rightarrow \dots \rightarrow X_k \rightarrow [T_k] \rightarrow \dots,$$

где $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots$ – это последовательные состояния системы, а $T_0, T_1, \dots, T_k, \dots$ – это пошаговые *требования* или *управления*, связанные со стратегией поведения и целями. Другими словами, *управление* T_k побуждает систему к изменению и приводит к новому состоянию X_{k+1} .

Определим управление $T_k, k=0, 1, 2, \dots$, позволяющее осуществить переход

$$x_{ij}^k \rightarrow x_{ij}^{k+1}, \quad i \in V, \quad e_j \in E_i.$$

Для этого зададим систему оценочных функций $\{c_{ij}\}, i \in V, e_j \in E_i$, определяющих «полезность» для элемента i на поле e_j . Понятно, что функция c_{ij} должна зависеть от переменных x_{ij}^k и $x_{sj}^k, s \in V_{ij}$. Заданная система функций позволяет реализовать равновесную стратегию. По этой стратегии каждый элемент i стремится так перераспределить свой ресурс, чтобы выполнялись соотношения:

$$c_{ij_1} = c_{ij_2} = \dots = c_{ij_i}, \quad \text{где } e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_i} \in E_i. \quad (2.1)$$

Далее действуем по равновесному принципу Курно: *принимаем новое условно-равновесное решение, основываясь на известной информации предыдущего шага.*

Так как элемент i может поменять только свое распределение $\{x_{ij}^k\}$, то новое распределение $\{x_{ij}^{k+1}\}$ следует получать из соотношений (2.1), заменяя x_{ij}^k на x_{ij}^{k+1} . Следовательно, получается условие

$$c_{ij}(x_{ij}^{k+1}, \{x_{sj}^k\}) = c_{\text{равн}} = \text{const}, \quad e_j \in E_i, \quad s \in V_{ij}. \quad (2.2)$$

Для конкретных моделей нами будут рассматриваться такие семейства оценочных функций, для которых условие (2.2) на каждом шаге достигается однозначно.

Формально, на каждом шаге k элемент i решает следующую задачу:

$$T_k: \begin{cases} c_{ij}(x_{ij}^{k+1}, \{x_{sj}^k\}) = \text{const}_{j \in E_i} \\ \sum_{j \in E_i} x_{ij}^{k+1} = q_i. \end{cases} \quad (2.3)$$

Так как элементы действуют независимо друг от друга, то система попадает в состояние отличное от ожидаемого результата для каждого элемента. Поэтому на очередном шаге происходит новое перераспределение. Тем самым, определяется динамическая модель «жизни» системы в режиме дискретного времени. Представляется важным исследование поведения развивающейся системы и нахождение предельных и равновесных состояний. Это можно делать как аналитическими, так и численными методами. С помощью аналитических методов можно получить теоретические результаты в форме теорем и утверждений. Численные методы дают возможность проверить теоретические утверждения, а также сделать расчеты для построенных итерационных процессов, в которых сложно провести теоретические исследования.

Во **второй главе** рассматриваются несколько классов функций $\{c_{ij}\}$, $i \in V$, $e_j \in E_i$. Каждый класс вместе с графической структурой определяет некоторую свою динамическую модель. Все исследуемые модели разобьем на два больших класса: S_G и S_{HG} . Группа S_G содержит модели со структурой обычных графов G , в которых допускаются петли и ребра без кратных

повторений. Группа моделей S_{HG} имеет более сложную структуру, которая задается гиперграфом HG , но не может быть описана с помощью графов G .

Для моделей группы S_G два элемента $i, j \in V$ взаимодействуют на поле $e = \{i, j\} = \{j, i\}$ ресурсами x_{ij} и x_{ji} , направленными друг на друга. Поэтому оценочные функции c_{ij} зависят от двух аргументов: $c_{ij} = c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})$, $j \in V_i$ или $e_j \in E_i$. Очевидно, что множества E_i и V_i отождествляются между собой. Если же поле задается петлей, то фактически оценочная функция для элемента i определяется одним аргументом: $c_{ii} = c_{ii}(x_{ii}, x_{ii}) = c_{ii}(x_{ii})$. Следовательно, состояние системы задается квадратной матрицей X порядка n .

В ранних работах по данной тематике использовались два вида простых функций:

$$(a) \quad c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ij} - x_{ji}, \quad \text{где } i \in V, \quad j \in V_i;$$

$$(б) \quad c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ij} + x_{ji}, \quad \text{где } i \in V, \quad j \in V_i.$$

Вид (а) предполагает прямое противостояние и оценивает угрозу для элемента i со стороны «соседа» j . Вид (б) определяет оценку сотрудничества для i -го элемента с элементом j , при этом ресурсы того и другого засчитываются одинаково. Оба вида функций являются частными случаями более общих классов линейных функционалов:

$$1. \quad c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a x_{ij} + b x_{ji}, \quad \text{где } a, b \in R; \quad i \in V, \quad j \in V_i;$$

$$2. \quad c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_i x_{ij} + b_i x_{ji}, \quad \text{где } a_i, b_i \in R; \quad i \in V, \quad j \in V_i;$$

$$3. \quad c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_{ij} x_{ij} + b_{ij} x_{ji} + d_{ij}, \quad \text{где } a_{ij}, b_{ij}, d_{ij} \in R; \quad i \in V, \quad j \in V_i.$$

Случай 1 является *однородным*, так как функция $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a x_{ij} + b x_{ji}$ одинаково для всех элементов оценивает свой ресурс пропорционально a и ресурс «соседа» пропорционально b . Каждый последующий случай обобщает предыдущие варианты и, тем самым, может определять более универсальную модель. Случай 3 имеет максимальное обобщение в классе

всех линейных функционалов и имеет возможность различным образом оценивать и свой и чужой ресурс на разных полях.

Сформулируем основные результаты для моделей группы S_G .

Пусть задана ресурсная система S на полном графе $G=(V,E)$, $|V|=n>2$, в которой последовательность состояний $X^{(k)}=\{x_{ij}^{(k)}\}$ определяется системой оценочных функций $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})=x_{ij}-x_{ji}$, где $i \in V$, $j \in V_i$. Тогда выполняются следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Последовательность состояний $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}, \dots$ определяет два предельных состояния: четное X_e^* и нечетное X_o^* , удовлетворяющих соотношениям:*

$$(a) X_e^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(2k)} = X^*; \quad X_o^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(2k+1)} = (X^*)^T;$$

(b) предельные элементы матрицы весов X^* определяются явно по начальным условиям:

$$x_{ij}^* = x_{ij}^{(0)} - f_i^{(0)} \frac{n-1}{n(n-2)} - f_j^{(0)} \frac{(n-1)^2}{n(n-2)}, \quad i \in V, \quad j \in V_i,$$

$$\text{где } f_i^{(0)} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{s \in V_i} x_{si}^{(0)} - \sum_{s \in V_i} x_{is}^{(0)} \right), \quad f_j^{(0)} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{s \in V_j} x_{sj}^{(0)} - \sum_{s \in V_j} x_{js}^{(0)} \right).$$

Теорема 2.2. *Множество состояний системы S с фиксированными потенциалами элементов (вершин) $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$ всегда имеет устойчивое состояние $\bar{X} = \frac{1}{2}(X^* + X^{*T})$, которое вычисляется по формулам*

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1}{2} (x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2} \frac{n-1}{n-2} (f_j^{(0)} + f_i^{(0)}), \quad i \in V, \quad j \in V_i.$$

Пусть сеть представлена в виде неориентированного графа $G=(V,E)$, каждая вершина которого $i \in V$ представляет элемент коммуникационной системы, имеющий ресурс в количестве q_i . Весь этот ресурс распределяется по инцидентным ребрам таким образом, чтобы суммарные ресурсы этих ребер были одинаковы.

Обозначим через x_{ij} количество ресурса вершины i , выделенного на ребро $(i,j) \in E$. Так как на функционирование ребра (i,j) выделяется ресурс как вершиной i , так и вершиной j , то суммарный ресурс ребра (i,j) равен $x_{ij} + x_{ji}$. Представляя каждое ребро (i,j) парой дуг (i,j) и (j,i) , величины x_{ij} и x_{ji} будем называть *весами* этих дуг.

В любой последующий момент времени $k=1,2,\dots$ каждая вершина $i \in V$ перераспределяет свой ресурс на основании решения задачи:

$$\begin{aligned} \min_{j \in V_i} (x_{ij}^k + x_{ji}^{k-1}) \rightarrow \max_{\{x_{ij}^k\}}; \\ \sum_{j \in V_i} x_{ij}^k = q_i; \quad x_{ii}^k = 0; \quad x_{ij}^k = 0, (i,j) \notin E, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где V_i – множество смежных с i вершин, а величины x_{ji}^{k-1} , $j \in V_i$ на момент решения задачи (2.18) следует считать известными. Таким образом, решение задачи задает стратегию поведения вершин сети в каждый момент времени.

Рассматриваемая модель имеет некоторое преимущество в сравнении с игровыми постановками. Например, в работе² автор обобщает классические понятия равновесия по Нэшу и по Парето, вводя целый ряд новых равновесий. Но всегда участник с номером i определяет свою стратегию из области $X_i \subset R^l$. Это ограничивает возможности экономических и технических приложения, так как участнику системы, состоящей из n элементов, иногда приходится определять свои отношения ко всем участникам системы в отдельности, т.е. выбирать стратегию из области $X_i \subset R^{n-1}$.

Процесс изменения весов дуг определим рекуррентными соотношениями:

$$x_{ij}^{k+1} = f_i^k - x_{ji}^k, \quad f_i^k = \frac{p_i^k + q_i}{d_i}, \quad \forall (i,j) \in E; \quad x_{ii}^k = 0; \quad x_{ij}^k = 0, \quad \forall (i,j) \notin E, \quad (2.19)$$

² Смольяков Э.Р. Равновесные модели при несопадающих интересах участников. – М.: Наука, 1986.

где $p_i^k = \sum_{j \in V_i} x_{ji}^k$, d_i – степень вершины i .

Соотношениями (2.19) определяется последовательность состояний сети.

Пусть Γ – матрица смежности графа G , $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$ – диагональная матрица, Δ – матрица, полученная делением i -ой строки матрицы Γ на d_i . Тогда имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.9. В случае не двудольного графа G

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^k = \frac{2Q}{s}, \text{ где } Q = \sum_{i=1}^n q_i, \quad s = \sum_{i=1}^n d_i.$$

Теорема 2.7. В случае, когда граф G не двудольный циклические пределы с периодом два для весов дуг существуют и равны:

$$x_{ij}^{\text{even}} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + f^0 D (E - (\Delta - L)^2)^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \frac{e^i}{d_i} - \frac{e^j}{d_j} \end{pmatrix};$$

$$x_{ij}^{\text{odd}} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m+1} = -x_{ji}^0 - f^0 D (E - (\Delta - L)^2)^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \frac{e^j}{d_j} - \frac{e^i}{d_i} \end{pmatrix} + \frac{2Q}{s},$$

где $f^0 = (f_1^0, \dots, f_n^0)$, E – единичная матрица, $L = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}$,

e^i – i -ый координатный орт.

Двудольный граф. Пусть граф G является двудольным. Тогда множество вершин V разбивается на две доли V^1 и V^2 , $|V^1| = n_1$, $|V^2| = n_2$. Введем матрицы $\Delta_1 \in M_{n_1 \times n_2}$; $\Delta_2 \in M_{n_2 \times n_1}$ аналогичные матрице Δ , но соответствующие первой и второй долям. Их строчные суммы равны единице, а количество ненулевых элементов в j -ом столбце равно степени j -

ой вершины. Степень j -ой вершины обозначим через d_j^1 , если $j \in V^1$ и через d_j^2 , если $j \in V^2$. Пусть

$$s_h = \sum_{j \in V^h} d_j; Q_h = \sum_{j \in V^h} q_j; L_h = \frac{1}{s_h} \begin{pmatrix} d_1^h & d_2^h & \dots & d_{n_h}^h \\ d_1^h & d_2^h & \dots & d_{n_h}^h \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1^h & d_2^h & \dots & d_{n_h}^h \end{pmatrix} \in M_{n_h}, h=1,2;$$

$$\Delta' = \begin{pmatrix} \Delta_1 \Delta_2 - L_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \Delta_1 - L_2 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.10. В случае двудольного графа G :

- если $i \in V^1$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{2k} = \frac{Q_1}{s_1}$; $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{2k+1} = \frac{Q_2}{s_2}$;
- если $i \in V^2$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{2k} = \frac{Q_2}{s_2}$; $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{2k+1} = \frac{Q_1}{s_1}$.

Теорема 2.8. В случае двудольного графа G циклические пределы с периодом два для весов дуг существуют и равны:

$$x_{ij}^{even} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + f^0 D(E - \Delta')^{-1} \left(\Delta \frac{e^i}{d_i} - \frac{e^j}{d_j} \right);$$

$$x_{ij}^{odd} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m+1} = -x_{ji}^0 - f^0 D(E - \Delta')^{-1} \left(\Delta \frac{e^j}{d_j} - \frac{e^i}{d_i} \right) + \frac{Q_h}{s_h}, h=1,2.$$

Следствие 2.7. В пределе на каждой итерации четные x_{ij}^{even} и нечетные x_{ij}^{odd} члены последовательности переходят друг в друга, поэтому

состояние, заданное весами $\bar{x}_{ij} = \frac{1}{2}(x_{ij}^{even} + x_{ij}^{odd})$, является допустимым и

стационарным.

Рассмотрим *однородный случай* оценочных функций: $c_{ij} = c(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}$. В этом случае мы получаем следующие рекуррентные преобразования:

$$\begin{cases} x_{ij}^{(k+1)} = -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, i \neq j, \\ x_{ij}^{(k+1)} = 0, i = j; \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}, j = \{1, 2, \dots, n\}, \end{cases} \quad (2.20)$$

где $f_i^{(k)} = \frac{1}{n-1} \left(q_i + \frac{b}{a} p_i^{(k)} \right)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Приведем ряд утверждений для исследуемой модели.

Лемма 2.11. Для координат вектора стабилизации $F^{(k)}$ выполняется соотношение $\sum_{i=1}^n f_i^{(k)} = \frac{Q}{n-1} \left(1 + \frac{b}{a} \right)$, где $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ - суммарный потенциал системы.

Лемма 2.12. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется следующее рекуррентное соотношение: $f_i^{(k+1)} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \cdot f_i^{(k)} + c_i$,

где $c_i = \frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \cdot \left(q_i \left(1 - \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{Q}{n-1} \right)$ есть постоянная величина.

Лемма 2.13. В момент времени k для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется следующее соотношение

$$f_i^{(k)} = \left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \right)^k f_i^{(0)} + c_i \cdot \frac{(n-1)a}{b + (n-1)a} \left(1 - \left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \right)^k \right).$$

Теорема 2.11. Для устойчивого поведения вектора стабилизации необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\left| \frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \right| < 1. \quad (2.21)$$

При этом условия предельные значения координат вектора стабилизации равны:

$$f_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(k)} = c_i \frac{(n-1)}{b + (n-1)a} = \frac{a+b}{b + (n-1)a} \left(q_i \left(1 - \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{Q}{n-1} \right).$$

Теорема 2.12. В условиях рассматриваемой модели для решений системы выполняются следующие утверждения.

А. Решение системы, заданное соотношениями:

$$x_{ij}^* = \frac{1}{b + (n-1)a} \left(aq_i - bq_j + \frac{bQ}{n-1} \right). \quad (2.22)$$

является стационарным, т.е. не изменяется в течение дискретного времени k при рекуррентных соотношениях (2.20).

В. При условии $|b/a| < 1$ любое начальное решение системы в результате преобразований (2.20) при $k \rightarrow \infty$ стремится к решению (2.22).

Приведем наглядный пример **конкурентных взаимодействий**. Пусть три фирмы (политические партии) A_1, A_2, A_3 распределяют свои фиксированные ресурсы $q_1=80, q_2=50, q_3=40$ друг против друга с целью улучшения своего конкурентного положения. Противостояние предполагает оценку отношений по формуле $c_{ij} = c(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ij} - x_{ji}$. Тогда рекуррентные соотношения (2.20) принимают вид:

$$\begin{cases} x_{ij}^{(k+1)} = -x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, i \neq j \\ x_{ij}^{(k+1)} = 0, & i = j, \end{cases} \quad \text{где } f_i^{(k+1)} = \frac{1}{2} f_i^{(k)}, i = 1, 2, 3.$$

$$\text{При начальном решении } X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 30 \\ 40 & 0 & 10 \\ 20 & 20 & 0 \end{pmatrix}, f^{(0)} = (10; -10; 0),$$

имеется неравновесная ситуация (рис 2.3, а).

По расчетному алгоритму (2.20) на двух первых шагах получаем

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 30 \\ 40 & 0 & 10 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, f^{(1)} = (5; -5; 0); X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 35 \\ 45 & 0 & 5 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, f^{(2)} = (2.5; -2.5; 0).$$

«Запущенный» процесс меняет состояние системы и на следующих шагах. При $k \rightarrow \infty$ решение стремится к устойчивому состоянию, которое вычисляется по формулам (2.22):

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 35 \\ 45 & 0 & 5 \\ 35 & 5 & 0 \end{pmatrix}, f^* = (0; 0; 0).$$

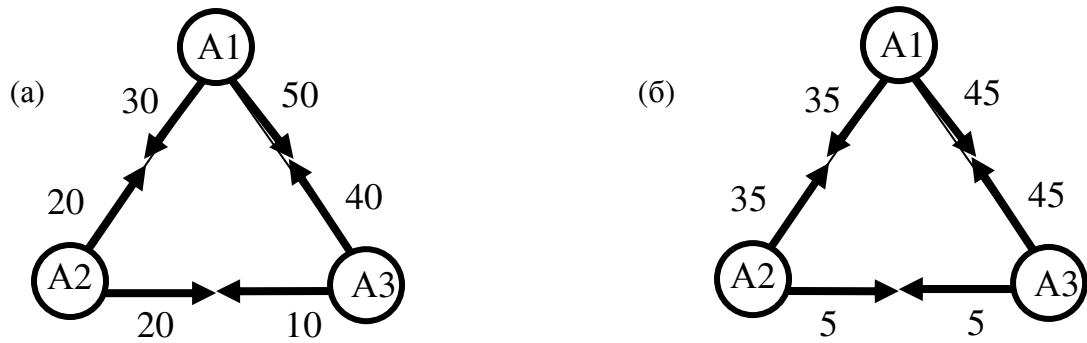


Рис. 2.3. Состояние системы: (а) начальное, (б) конечное равновесное

Задача об оптимальном обслуживании коммуникационных сетей.

Полагаем, что *коммуникационные сети* – это системы *транспортных дорог, линии связи* и т.д. Рассмотрим небольшую коммуникационную систему, состоящую из четырех вершин (рис. 2.4). Пусть ресурсы вершин, участвующих в обслуживании сети, заданы следующими количественными значениями: $q_1=50$, $q_2=40$, $q_3=30$, $q_4=20$. Так как пара вершин совместно обслуживает свою линию, то уместно считать, что $c_{ij}=c_{ji}=x_{ij}+x_{ji}$.

Интересы каждого участника состоят в том, чтобы содержать инцидентные линии на одинаково высоком уровне. Решается вопрос: можно ли в процессе *саморазвития* системы справедливо распределить ресурсы на обслуживание линий, если каждый пункт принимает самостоятельное решение по распределению ресурса на каждом шаге?

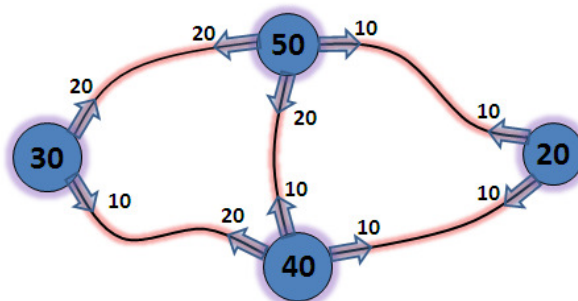


Рис. 2.4. Обслуживание коммуникационных линий

Покажем, что некоторое начальное решение, например,

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 & 10 \\ 10 & 0 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(0)} = (c_{ij}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 40 & 20 \\ 30 & 0 & 30 & 20 \\ 40 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

стремится к оптимальному (устойчивому) решению. Учитывая, что степени вершин $d_1=d_2=3$, $d_3=d_4=2$, получим преобразования:

$$\begin{cases} f_i^{(k)} = \frac{p_i^k + q_i}{d_i}, & i = 1, 2, 3, 4 \\ x_{ij}^{(k+1)} = -x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, & \forall (i, j) \in E, \end{cases}$$

Приведем численные расчеты для $k=10, 20, 30$:

$$X^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2499 & 11,1223 & 18,6177 \\ 7,7501 & 0 & 14,8823 & 17,3677 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0073 & 27,9927 \\ 28,00000 & 0 & 28,0073 & 27,9926 \\ 28,0073 & 28,0073 & 0 & 0 \\ 27,9927 & 27,9926 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X^{(20)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2500 & 11,1250 & 18,6250 \\ 7,7500 & 0 & 14,8750 & 17,3750 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(20)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 0 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X^{(30)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2500 & 11,1250 & 18,6250 \\ 7,7500 & 0 & 14,8750 & 17,3750 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(30)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 0 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что решение практически стабилизировалось. Матрица полезности $C^{(k)}$ показывает, что обслуживание линий проходит равномерно.

Заметим, что для рассмотренных примеров мы нашли равновесные состояния, существование которых было показано с помощью соответствующих утверждений. Для общих линейных оценочных функций нами найдены итерационные алгоритмы изменения состояний, которые позволяют численно устанавливать или опровергать существование равновесных состояний. На основе этих алгоритмов разработаны программы и проведены расчеты для более двух десятков различных ресурсных моделей.

В третьей главе исследуются ресурсные системы S_{HG} , структура которых задается гиперграфом HG . С помощью таких систем можно моделировать не только парные, но и групповые взаимодействия.

Пусть система S состоит из n агентов, которые имеют соответствующие ресурсы q_1, q_2, \dots, q_n . Каждый агент i действует на одном глобальном рынке P (с участием всех агентов) и на одном внутреннем поле (без участия других). Следовательно, ресурс q_i распределяется на две составляющие: для внутреннего поля x_{ii} и для общего поля x_{ip} , где $x_{ii} + x_{ip} = q_i$.

Зададим систему оценок элемента i на внутреннем поле и на внешнем поле при помощи функций f_{ii} и f_{ip} :

$$\begin{cases} f_{ii} = \alpha x_{ii} \\ f_{ip} = \alpha x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.1.2)$$

Общее состояние системы определяется состоянием агентов и задается матрицей

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{22} & \dots & x_{nn} \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Таким образом, в системе S , находящейся в состоянии X , каждый агент может проводить оценки удовлетворенности своего распределения с помощью соотношений (3.1.2) и предпринимать соответствующие действия по перераспределению.

Обозначим **базовую модель** через $SI=S(n,q,f)$, где n – число элементов, $q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ – ресурсный вектор, f – условное обозначение системы оценочных функций. Система функций f зависит от двух параметров α и β , поэтому модель $SI=S(n,q,f\{\alpha,\beta\})$ определяется $n+2$ параметрами: n для q и 2 для f .

Условие равновесия имеет вид:

$$\begin{cases} f_{ii} = f_{ip} \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \alpha x_{ii} = \alpha x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{np} = t, \quad x_{mn} = q_n - t, \\ x_{ip} = t + \frac{n-1}{2n}(q_i - q_n), \\ x_{ii} = -t + \frac{1}{2n}((n+1)q_i + (n-1)q_n), \end{array} \quad i=1, 2, \dots, n-1, \text{ где } t - \text{любое число.} \right.$$

Рассмотрим более общие модели.

Система S2. Игроки различным образом оценивают эффект своего ресурса на внешнем и внутреннем поле:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ii} = \alpha_1 x_{ii} \\ f_{ip} = \alpha_2 x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}, \end{array} \quad i=1, 2, \dots, n. \right. \quad (3.2.1)$$

Модель $S2=S(n,q,f\{\alpha_1,\alpha_2,\beta\})$ определяется $n+3$ параметрами: n для q и 3 для f .

Система S3. Для каждого агента его оценочные функции дополнительно могут содержать «бонусные» надбавки или штрафы, не связанные с количеством распределенного ресурса:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ii} = \alpha_1 x_{ii} + d_i \\ f_{ip} = \alpha_2 x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} + h_i, \end{array} \quad i=1, 2, \dots, n. \right. \quad (3.3.1)$$

Данная модель $S3=S(n,q,f\{\alpha_1,\alpha_2,\beta,d,h\})$ включает дополнительно параметры $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $h=(h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Для систем $S2$ и $S3$ в работе доказаны обобщенные аналоги Теоремы 3.1.

Динамические свойства моделей. Представим ситуацию, когда неизвестно равновесное решение системы S , но определены равновесные стратегии поведения ее участников. В этом случае некоторое начальное состояние будет последовательно меняться на каждом шаге и, возможно, будет приближаться к равновесному состоянию. В разделе **3.5 Главы 3** исследована динамика состояний систем вида $S1, S2, S3$ и найдены условия сходимости произвольного начального состояния к равновесному решению.

Динамика системы S1. Пусть $X(k)$, $k=0,1,2,\dots$ последовательные состояния. Предположим, что начальное решение

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_{11}(0) & x_{22}(0) & \dots & x_{nn}(0) \\ x_{1p}(0) & x_{2p}(0) & \dots & x_{np}(0) \end{pmatrix}$$

не является равновесным. Тогда равновесная стратегия однозначно определяет рекуррентные соотношения, задающие динамическое развитие системы:

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{1}{2} \left(q_i + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \right) \\ x_{ip}(k+1) = \frac{1}{2} \left(q_i - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \right) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.4.1)$$

Все равновесные состояния системы S1, найденные ранее, являются «неподвижными» по отношению к преобразованиям (3.4.1). Определим условия, при которых начальное состояние приближается к равновесному состоянию.

Для дальнейшего можно рассмотреть только второе соотношение из (3.4.1). Представим его в матричной форме: $X_p(k+1) = \frac{1}{2} \vec{q} - A \cdot X_p(k)$, где

$$X_p(k+1) = \begin{pmatrix} x_{1p}(k+1) \\ x_{2p}(k+1) \\ \dots \\ x_{np}(k+1) \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad A = \frac{\beta}{2\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_p(k) = \begin{pmatrix} x_{1p}(k) \\ x_{2p}(k) \\ \dots \\ x_{np}(k) \end{pmatrix}.$$

По индукции состояние на шаге $k+1$ можно выразить через начальное состояние:

$$X_p(k+1) = \left(E - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^k A^k \right) \frac{\vec{q}}{2} + (-1)^{k+1} A^{k+1} X_p(0). \quad (3.4.2)$$

Для сходимости процесса достаточно выполнение условия $\|A\| < 1$, где $\|A\|$ – любая из известных норм матрицы A , например,

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \quad (3.4.3)$$

Так как в нашем случае матрица A является симметричной, то обе нормы определяют следующее условие сходимости:

$$\left| \frac{(n-1)\beta}{2\alpha} \right| < 1 \quad (3.4.4)$$

Спектральная норма: $\|A\|_2 = \rho(A) = \max_s \{|\lambda_s|\}$ (максимальное по модулю собственное число матрицы A) определяет необходимое и достаточное условие сходимости. Легко показать, что матрица A имеет два собственных значения: $\lambda_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}$, $\lambda_2 = \frac{(n-1)\beta}{2\alpha}$, причем первое значение имеет кратность $n-1$. Следовательно, необходимое и достаточное условие сходимости имеет вид

$$\|A\|_2 = \left| \frac{(n-1)\beta}{2\alpha} \right| < 1 \text{ и совпадает с условием (3.4.4).}$$

Переходя к пределу в соотношении (3.4.2) при условии $\|A\| < 1$, получаем вид равновесного решения, не зависящего от начального состояния:

$$X_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{1}{2}(E + A)^{-1} \cdot \vec{q}. \quad (3.4.5)$$

Соотношение (3.4.4) гарантирует сходимость со скоростью убывающей геометрической прогрессии со множителем $\mu = \|A\|$. Если $Z(0) = X(0) - X^*$ и $Z(k) = X(k) - X^*$ определяют, соответственно, начальное отклонение и отклонение на шаге k , то

$$\|Z(k)\| = \|A^k \cdot Z(0)\| \leq \|A\|^k \cdot \|Z(0)\| = \mu^k \|Z(0)\|. \text{ Следовательно, за } k \text{ шагов}$$

отклонение уменьшится в $\varepsilon = \mu^k$ раз. Соответственно, количество итераций

$$k = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln \mu} \right\rceil + 1 \text{ гарантирует уменьшение начального отклонения в } \varepsilon \text{ раз.}$$

Теорема 3.4. Последовательные состояния $X(k)$, $k=0,1,2,\dots$ системы $S1$, удовлетворяющие стационарным итерационным соотношениям (3.4.1) сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии к единственному равновесному состоянию при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\left| \frac{(n-1)\beta}{2\alpha} \right| < 1$.

Динамика системы S2. Для системы $S2$ равновесная стратегия развития определяет следующие итерационные соотношения:

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} q_i + \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \\ x_{ip}(k+1) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} q_i - \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.4.6)$$

Из этого можно получить результат аналогичный **Теореме 3.4.**

Теорема 3.5. Последовательные состояния $X(k)$, $k=0,1,2,\dots$ системы $S2$, удовлетворяющие стационарным итерационным соотношениям (3.4.6) сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии к единственному равновесному состоянию X^* при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\left| \frac{(n-1)\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \right| < 1$.

Компоненты равновесного состояния удовлетворяют соотношениям:

$$X_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (E - A)^{-1} \cdot \vec{q}, \quad X_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} (E + A)^{-1} \cdot \vec{q}.$$

Динамика системы S3. Для системы $S3$ приведем важные соотношения и основной результат:

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\alpha_2 q_i - d_i + h_i) + \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \\ x_{ip}(k+1) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\alpha_1 q_i + d_i - h_i) - \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.4.7)$$

Теорема 3.6. Последовательные состояния $X(k)$, $k=0,1,2,\dots$ системы $S3$, удовлетворяющие стационарным итерационным соотношениям (3.4.7) сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии к единственному равновесному состоянию X^* при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\left| \frac{(n-1)\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \right| < 1$.

Компоненты равновесного состояния удовлетворяют соотношениям:

$$X_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (E - A)^{-1} \cdot (\alpha_2 \vec{q} - \vec{d} + \vec{h}),$$

$$X_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (E + A)^{-1} \cdot (\alpha_1 \vec{q} + \vec{d} - \vec{h}),$$

$$\text{где } \vec{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T, \vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T.$$

В четвертой главе рассматривается ряд математических моделей «справедливого распределения» материальных ресурсов, основанных на естественных принципах равновесия. В настоящее время такого рода исследования объединены в *Теорию рационирования*, которая активно формируется в основном зарубежными авторами (Э. Мулен, Дж. Нэш, Р. Ауманн, Л. Шепли, С. Шенкер и другие). В общем виде модели характеризуются следующим образом: задан объем ресурса (например, деньги или товар), который должен быть распределен между получателями, имеющими различные претензии на ресурс. Понятие «справедливости» распределения зависит от критериев, которые могут быть реализованы различным образом.

Пусть везде далее ресурс E распределяется между n претендентами. Требования претендентов зададим вектором (d_1, d_2, \dots, d_n) , а искомое решение обозначим (x_1, x_2, \dots, x_n) . Представим разные методы реализации рациональных распределений на основе *принципа f -равновесия*.

Стратегия равных потерь. Для поиска решения будем использовать оценочную функцию $f = f(d, x) = d - x$.

Соответствующие оценки для каждого претендента будут равны

$$\begin{cases} f_1 = f(d_1, x_1) = d_1 - x_1, \\ f_2 = f(d_2, x_2) = d_2 - x_2, \\ \dots\dots\dots \\ f_n = f(d_n, x_n) = d_n - x_n. \end{cases} \quad (4.1)$$

Из условия равновесия $f_1=f_2=\dots=f_n=f$ после суммирования уравнений системы (4.1), получаем $nf=d_1+d_2+\dots+d_n-(x_1+x_2+\dots+x_n)$ или $nf=D-E$; $f=(D-E)/n$.

Зная f , можно из (4.1) найти решение (x_1, x_2, \dots, x_n) :

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - f_1 = d_1 - (D-E)/n, \\ x_2 = d_2 - f_2 = d_2 - (D-E)/n, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = d_n - f_n = d_n - (D-E)/n. \end{cases}$$

В работе Р. Ауманна³ принцип равных потерь реализуется для двух претендентов похожим образом. Каждый претендент i уступает претенденту j величину $(E-d_i)_+$, где $S_+=\max(S, 0)$. Величина спорной части $E-(E-d_1)_+ - (E-d_2)_+$ делится поровну между двумя претендентами:

$$x_1 = \frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2} + (E - d_2)_+;$$

$$x_2 = \frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2} + (E - d_1)_+.$$

Представим реализацию **пропорционального распределения** при помощи принципа *f-равновесия*. В качестве оценочной функции возьмем $f=f(d,x)=x/d$.

Если $f = f_i = x_i/d_i$, то $x_i = f_i \cdot d_i$, $i=1, 2, \dots, n$. После суммирования по i получаем соотношения $\sum_{i=1}^n f_i d_i = f \sum_{i=1}^n d_i = f \cdot D = \sum_{i=1}^n x_i = E$, $f = \frac{E}{D}$.

³ Aumann R.J. and Maschler M. *Game Theoretic Analysis of bankruptcy Problem a from the Talmud* // Journal of Economic Theory, 1985, 36, p. 195-213.

Следовательно, $x_i = f \cdot d_i = \frac{E}{D} \cdot d_i$, $i=1, 2, \dots, n$.

Заметим, что точно такое же распределение получится при использовании оценочной функции $f_i = f_1(d, x) = \frac{d - x}{d}$. Объясняется это тем, что функции f и f_i отличаются на постоянную величину. Умножение оценочной функции на постоянную величину тоже не изменит итоговое равновесное распределение. Следовательно, определенной стратегии распределения отвечает не просто одна функция, а некоторый класс функций.

Пусть распределение определяется **системой равновесных функций**:

$$\begin{cases} f_1 = (d_1 - x_1) / k_1 - a_1, \\ f_2 = (d_2 - x_2) / k_2 - a_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_n = (d_n - x_n) / k_n - a_n. \end{cases}$$

Параметры k_1, k_2, \dots, k_n и a_1, a_2, \dots, a_n являются дополнительными характеристиками оценочных функций, отражающими рейтинговые и начальные особенности участников. Условие равновесия определяет искомое решение

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - (f - a_1) \cdot k_1, \\ x_2 = d_2 - (f - a_2) \cdot k_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = d_n - (f - a_n) \cdot k_n \end{cases}, \text{ где } f = (D - E - \sum_{i=1}^n a_i k_i) / \sum_{i=1}^n k_i.$$

Предлагаемый метод поиска равновесных распределений и состояний является естественным и вполне логичным. Он еще раз подтверждает, что в основе определенного равновесия (физического, химического или экономического) лежит некоторый принцип. В нашем случае принципы определяется равновесными функциями, которые обоснованно подбираются для конкретного случая. В широком смысле такие решения являются

оптимальными, так как они устраивают всех участников рассматриваемой системы.

В разделе **4.2 Главы 4** рассмотрены распределительные модели страховых операций, основанные на равновесных принципах.

Модель 1. Пусть E – некоторая годовая сумма выплат, которую приходится восстанавливать страховой фирме. Зададим множество клиентов в количестве n и страховые суммы $S_i, i=1,2,\dots,n$. Требуется определить коэффициент k и страховые взносы $d_i=k \cdot S_i$ при известной вероятности наступления страхового случая p (считаем, что для каждого страхового случая вероятность одинаковая).

Выпишем балансовые соотношения суммарных поступлений и выплат:

$$E = \sum_{i=1}^n d_i; \quad p \sum_{i=1}^n S_i = E. \quad (4.2.1)$$

Так как $S_i = \frac{d_i}{k}$, то $\sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n d_i$. Следовательно, получаем $k=p$ и $d_i=pS_i$.

Определение страхового взноса по формуле $d_i=pS_i$ отвечает «справедливому» равновесному принципу: $S_i / d_i = p = \text{const}$.

Модель 2. Пусть E_0 – сумма административных расходов и налоговых отчислений. Все другие обозначения соответствуют *Модели 1*. Тогда балансовые соотношения принимают вид:

$$E + E_0 = \sum_{i=1}^n d_i; \quad p \sum_{i=1}^n S_i = E. \quad (4.2.2)$$

Из (4.2.2), после преобразований, получим итоговые соотношения:

$$k = p \left(1 + \frac{E_0}{E} \right); \quad d_i = kS_i = p \left(1 + \frac{E_0}{E} \right) \cdot S_i; \quad S_i = \frac{d_i}{p \left(1 + \frac{E_0}{E} \right)}.$$

Последнее соотношение показывает, что увеличение вероятности p или административных расходов E_0 уменьшает возможные выплаты S_i . Заметим,

что по сравнению с *Моделью 1* «мерой» равновесия стал новый коэффициент k .

Значение вероятности p обычно определяется по статистически данным прошлого периода и может быть не вполне достоверным. Поэтому удобно предусмотреть производственный резерв E_1 , который скорректирует второе балансовое соотношение: $p \sum_{i=1}^n S_i = E - E_1$ и приведет к новым результатам:

$$k = p \left(\frac{E + E_0}{E - E_1} \right); \quad d_i = k S_i = p \left(\frac{E + E_0}{E - E_1} \right) \cdot S_i; \quad \frac{S_i}{d_i} = \frac{(E - E_1)}{p(E + E_0)} = \text{const}_i.$$

Модель 3. Пусть каждый страховой случай i имеет свою вероятность наступления p_i , тогда $E + E_0 = \sum_{i=1}^n d_i; \sum_{i=1}^n p_i S_i = E - E_1$.

Логично задать следующие требования: $\frac{d_i}{p_i S_i} = k = \text{const}_i, \quad d_i = k p_i S_i$.

Это дает следующий результат: $k = \left(\frac{E + E_0}{E - E_1} \right); \quad d_i = p_i \left(\frac{E + E_0}{E - E_1} \right) \cdot S_i$.

В работе представлены также другие модели страхования, которые позволяют сделать некоторые общие выводы. Модели, основанные на равновесных принципах принятия решений, можно реализовать взаимовыгодно и прозрачно для всех участников. По нашему мнению, это может сделать политику страховой фирмы более сбалансированной и привлекательной.

Пятая глава посвящена разработке оптимальных сенсорных покрытий плоских областей. В той или иной форме эти задачи рассматривались в работах зарубежных авторов Wu J., Yang S., Wang L., Pottie G.J., Kaiser W.J., Cardei, M., Du D., Carle J., Simplot D., Dai F., Zhang H., Hou J.C. и др. В работе⁴ были предложены несколько интересных моделей

⁴ Wu, J., Yang, S.: Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges. Int. J. of Foundations of Computer Science, 16(1), 3—17 (2005)

покрытий. Однако их расчеты не совсем корректны, так как определяют эффективности покрытия для одного стандартного элемента покрытия, а не в целом для покрываемой области. Нами сделаны уточнения их оценок. Кроме того, мы предлагаем значительное улучшение эффективности покрытий за счет оптимального «зацепления» соседних кругов (модели второго уровня).

В работе⁵ определена нижняя граница плотности покрытия $d \approx 1.018955$ кругами двух видов без ограничения на соотношение между размерами кругов. Точнее, доказано существование этой нижней границы и найден способ вычисления ее с любой заданной точностью. Отметим, что нам удалось получить точное аналитическое значение этого показателя:

$$d = \frac{2\pi}{\sqrt{27}} \left(1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{27}}{12} \right) \right) \approx 1.018955892.$$

Это очень важно, так как ссылка на приближенное значение не совсем корректна. Приведенная оценка достигается за счет большого различия между кругами двух размеров. При построении сенсорных покрытий, как правило, стараются сделать это отличие незначительным и покрыть стандартный фрагмент небольшим количеством кругов.

Мы будем использовать две базовых структуры: «квадратную» и «треугольную» и на основе их построим ряд оптимальных моделей.

Модели первого уровня. Предположим, что построено однородное покрытие достаточно большой области плоскости кругами одного радиуса R . Это означает, что каждая точка области принадлежит, по крайней мере, одному кругу из рассматриваемого покрытия. Рассмотрим два вида покрытий: (a) *Модель А-1* и (b) *Модель В-1* (рис. 5.1).

⁵ Toth, G. F.: Covering the Plane with Two Kinds of Circles. *Discrete Comput. Geom.*, 13, 445-457 (1995)

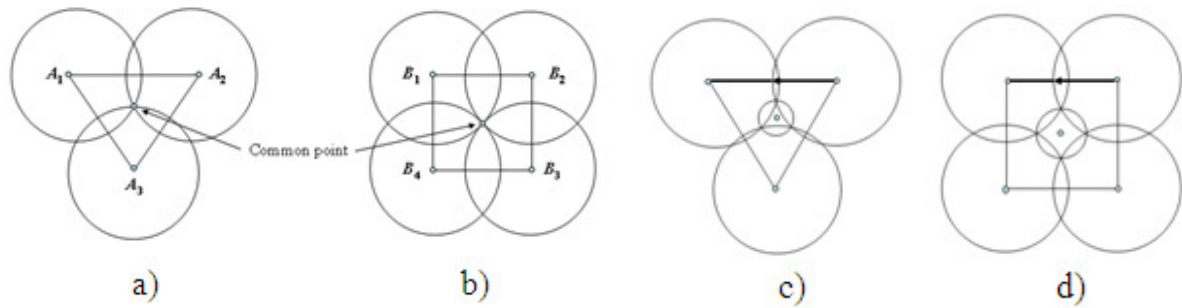


Рис. 5.1. Элементы покрытий. (a) Модель A-1, (b) Модель B-1, (c) Модель A-2. (d) Модель B-2

В первой модели центры трех соседних кругов находятся в вершинах равностороннего треугольника и имеют одну общую точку. Во второй модели центры находятся в вершинах квадрата, и также имеется одна узловая точка для четырех соседних кругов. Фрагмент является типовым, если вся контролируемая область составляется из таких по типу паркета без взаимных перекрытий.

Корректным определением *коэффициента эффективности* покрытия K будет отношение площади S_p типового фрагмента к суммарной площади S_f частей окружностей, покрывающих этот фрагмент.

Для *Модели A-1* получаем

$$S_{p_1} = \frac{R^2 3\sqrt{3}}{4}, \quad S_{f_1} = \frac{\pi R^2}{2}, \quad K_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,8272. \quad (5.1)$$

Для *Модели B-1* эффективность немного ниже:

$$S_{p_1'} = 2R^2, \quad S_{f_1'} = \pi R^2, \quad K_1' = \frac{2}{\pi} \approx 0,6366. \quad (5.2)$$

Считается, что энергетические затраты пропорциональны площади сенсорных кругов с коэффициентом пропорциональности μ . Поэтому *коэффициент энергетических затрат* $E = \mu/K$ обратно пропорционален K . Значения этого показателя, соответственно, для *Модели A-1* и *Модели B-1*, равны:

$$E_1 = \frac{\mu 2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1,2092\mu; \quad E_1' = \frac{\mu\pi}{2} \approx 1,5708\mu. \quad (5.3)$$

Модели второго уровня. В работе⁶ удалось значительно улучшить показатели эффективности покрытия за счет небольшого «наезда» больших соседних кругов друг на друга, а открывшуюся часть закрыть кругом небольшого размера. При этом площадь двукратного накрытия существенно уменьшится, а внутренний круг будет давать сравнительно небольшую добавку. Решая экстремальную задачу можно точно рассчитать лучший вариант «перекрытия» и соотношение между радиусами большего и меньшего кругов. Это и будут две оптимальные модели второго уровня, изображенные на рис. 5.1: (с) *Модель А-2* и (d) *Модель В-2*.

Теорема 5.1. Оптимальные параметры *Модели А-2*, определяющее наилучшие показатели эффективности покрытия K и E , имеют вид:

$$r = \frac{R}{\sqrt{31}} \approx 0,1796R; \quad Sp = \frac{R^2 27\sqrt{3}}{31}; \quad Sf = \frac{\pi R^2 33}{62}; \quad K_3 = \frac{18\sqrt{3}}{11\pi} \approx 0,9022; \quad E_2 \approx 1,1084\mu.$$

Теорема 5.2. Оптимальные параметры *Модели В-2*, определяющее наилучшие показатели эффективности покрытия K и E , имеют вид:

$$r = \frac{R}{\sqrt{5}} \approx 0,4472R; \quad Sp = \frac{16R^2}{5}; \quad Sf = \frac{6\pi R^2}{5}; \quad K_2 = \frac{16}{6\pi} \approx 0,8488; \quad E_2' \approx 1,1781\mu.$$

Модели А-2 и *В-2* сравнимы по качеству. Однако, *Модель В-2* имеет преимущество за счет более простой структуры решетки центров кругов.

В разделе **5.2.4 Главы 5** рассмотрена **классификация регулярных покрытий плоскости**. Любое конструктивное регулярное покрытие можно отнести к одному из классов вида: $\text{Cov}_w(\mathbf{n}; \mathbf{p}_1/k_1, \mathbf{p}_2/k_2, \dots, \mathbf{p}_n/k_n)$, где w – стандартная плитка покрытия, n – число разных размеров кругов, p_i – число кругов вида i , участвующих в покрытии плитки w , k_i – доли кругов вида i ,

⁶ Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций, 2009, № 3, с. 5-19.

покрывающих плитку. Если w – минимальная стандартная плитка, то обозначения однозначно определяют структуру покрытия и позволяют находить соответствующий класс моделей. Например, *Модель А-2* будет принадлежать классу $\text{Cov}_w(2: 1_{12}, 1_6)$. Это легко видеть по рис 5.9. Минимальный фрагмент в этом случае является частью всех рассмотренных плиток и представляет собой прямоугольный треугольник с острыми углами по 30 и 60 градусов.

Соответствующие обозначения для других плиток согласованы между собой: $\text{Cov}_{w1}(2: 3_6, 1_1)$, $\text{Cov}_{w2}(2: 1_1, 6_3)$, $\text{Cov}_{w2}(2: 1_6, 2_6)$. Каждая запись показывает, что в целом количество кругов одного размера в два раза меньше, чем другого: $3/6 : 1/1 = 1/1 : 6/3 = 1/6 : 2/6 = 1 : 2$.

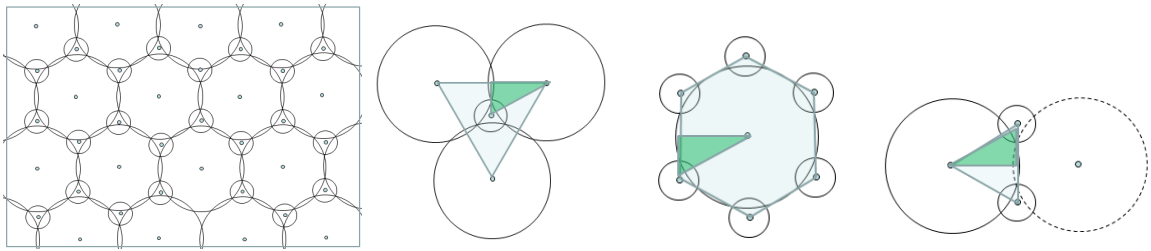


Рис 5.9. Варианты плиток и минимальный фрагмент для *Модели А-2*

Классификация позволяет учесть и «не пропустить» все возможные классы данного уровня и определить рекордную по плотности покрытия модель на каждом уровне. В связи с этим, приведем следующий результат.

Теорема 5. В классе моделей правильной треугольной структуры A уровня сложности $n=2$ рекордной по плотности является покрытие *Модели А-2** класса $\text{Cov}(2: 1_{12}, 1_2)$ (рис 5.10) со следующими оптимальными параметрами:

$$\min D_{A-2^*} = \frac{3\pi}{5\sqrt{3}} \approx 1.0882796, r = \frac{R}{2\sqrt{21}} \approx 0.1091R, \text{ где } D_{A-2^*} - \text{плотность}$$
 покрытия.

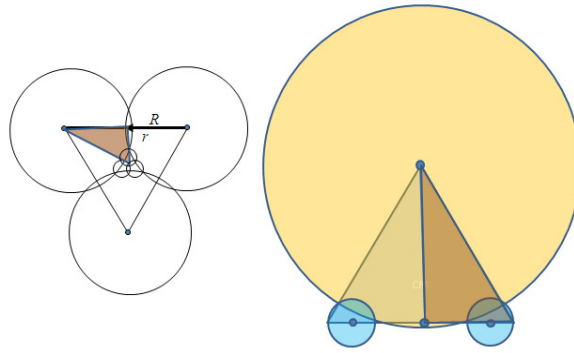


Рис 5.10. Фрагмент модели покрытия класса $\text{Cov}_w(2:1_{12}, 1_2)$

Расчеты по модели приведены в Приложении 2. Заметим, что по сравнению с *Моделью А-2* класса $\text{Cov}_w(2:1_{12}, 1_6)$ маленький круг теперь находится не в вершине минимальной плитки, а на ее стороне.

Рассмотрим наглядные примеры покрытий уровня 3 на рис 5.11. Ниже каждого фрагмента указаны соотношения между количествами разных кругов, участвующих в покрытии.

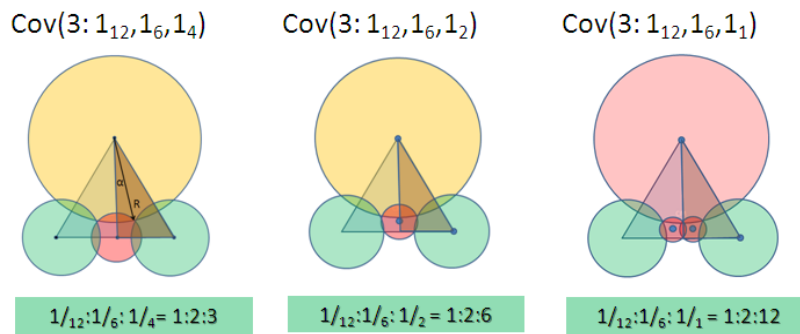
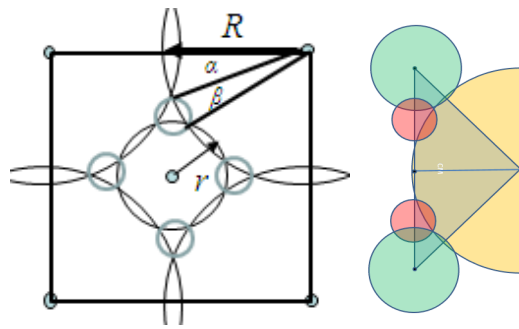


Рис 5.11. Примеры моделей покрытия третьего уровня

Модели достаточно эффективные, но не являются наилучшими в своем классе. Далее приведем наилучшие модели третьего уровня в сериях А и В.

Модель В-3. Рассмотрим класс покрытий $\text{Cov}_w(3:4_4, 1_1, 4_1)$, где w – квадратная плитка со стороной a . Для минимальной плитки обозначение имеет вид $\text{Cov}(3:1_8, 1_8, 1_2)$ (см. рис. 5.12). Найдем в этом классе модель, для которой плотность покрытия минимальна.

Рис 5.12. Фрагмент модели покрытия класса $\text{Cov}(3:1_8, 1_8, 1_2)$

Плотность покрытия будет выражаться следующей формулой:

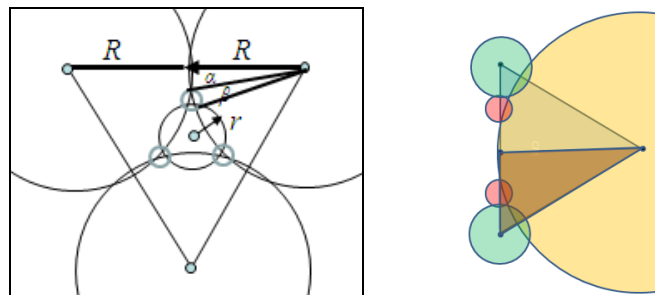
$$D(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \left(1 - \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + \left(1 - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + 4 \cdot \left(\text{tg} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) - \text{tg} \alpha \right)^2 \right),$$

Исследуя функцию на экстремум, находим оптимальные соотношения:

$$\min D(\alpha, \beta) \approx 1,093845, \quad \alpha \approx 19,08^\circ, \quad \beta \approx 13,15^\circ, \quad R \approx 0,529a, \quad r \approx 0,224a, \quad \rho \approx 0,067a.$$

В сравнении с плотностью оптимальной *Модели В-2* квадратной структуры из класса $\text{Cov}(2:1_4, 1_4)$, имеющей значение $\min D \approx 1,1781$, плотность покрытия для новой модели стало практически в два раза ближе к единице.

Модель А-3 представляет аналогичный класс покрытий треугольной структуры. Для правильной треугольной плитки обозначение класса будет иметь вид $\text{Cov}_w(3:3_6, 1_1, 3_1)$, а для минимальной плитки - $\text{Cov}(3:1_{12}, 1_6, 1_2)$.

Рис 5.13. Фрагмент модели покрытия класса $\text{Cov}(3:1_{12}, 1_6, 1_2)$

Используя обозначения углов согласно рисунку, получаем формулу:

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2 \cos^2 \alpha} + \left(1 - \frac{\cos(60^\circ - \alpha - \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sin(60^\circ - \alpha - \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + 3 \left(\text{tg} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) - \text{tg} \alpha \right)^2 \right).$$

После исследования, находим оптимальные параметры модели:

$$\min D(\alpha, \beta) \approx 1,067678, \quad \alpha \approx 14,32^\circ, \quad \beta \approx 10,31^\circ, \quad R \approx 0,5160a, \quad r \approx 0,0798a, \quad \rho \approx 0,0492a.$$

Минимальная плотность оптимальной Модели А-2 треугольной структуры (обобщением которой данная модель является) равна $\min D \approx 1,1084$, что существенно больше. Заметим, что это значение также больше соответствующего показателя для Модели В-3 с квадратной структурой.

При проектировании сенсорных покрытий приходится учитывать стоимость датчиков, затратах энергии и т.д. Для ограниченных областей можно определить приближенное количество сенсоров и их характеристики на основе минимизации общих затрат. В разделе 5.3.3 Главы 5 проведены такие расчеты.

Теорема 5.3. При построении покрытия по типу Модели А-2 для ограниченных областей, имеющих площадь S , оптимальный размер больших кругов и их количество оценивается по заданному ценовому признаку p и по функции энергии мониторинга $f(r) = \mu r^\alpha$ следующими соотношениями

$$r_1 \cong \left(\frac{6p}{\mu(\alpha-2)(1+31^{-\alpha/2})} \right)^{1/\alpha}; \quad N_1 \cong \frac{S}{\pi} \left(\frac{\mu(\alpha-2)(1+31^{-\alpha/2})}{6p} \right)^{2/\alpha}. \quad (5.13)$$

Теореме 5.4. При построении покрытия по типу Модели В-2 для ограниченных больших областей, имеющих площадь S , оптимальный размер больших кругов и их количество оценивается по заданному ценовому признаку p и по функции энергии мониторинга $f(r) = \mu r^\alpha$ следующими соотношениями

$$r_1 \cong \left(\frac{4p}{\mu(\alpha-2)(1+5^{-\alpha/2})} \right)^{1/\alpha}; \quad N_1 \cong \frac{S}{\pi} \left(\frac{\mu(\alpha-2)(1+5^{-\alpha/2})}{4p} \right)^{2/\alpha}. \quad (5.14)$$

Многие реальные объекты моделируются бесконечно длинными полосами. Это автомобильные и железнодорожные дороги, различные линии связи, государственные границы, трубопроводы и прочие сооружения, у

которых длина существенно превышает ширину. Модели мониторинга подобных объектов рассмотрены в **Главе 6**. Задачи сводятся к поиску наименее плотного покрытия бесконечной полосы, которые ранее практически не рассматривались. При исследованиях учитываются граничные особенности и определяются наиболее эффективные модели в разных классах покрытий.

Назовем покрытие *n*-слоиным, если центры всех кругов покрытия располагаются на *n* прямых параллельных границах полосы. В работе предложены и исследованы регулярные многослойные покрытия полосы кругами одного, двух и трёх радиусов. При этом радиусы кругов – это регулируемые параметры покрытий.

Модель 1.1. Регулярное однослойное покрытие полосы шириной *h*, изображено на рис. 6.1.

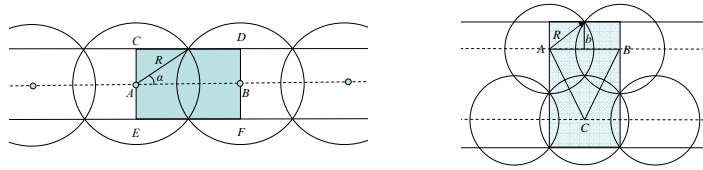


Рис. 6.1. Однослойное и двухслойное покрытия одинаковыми кругами

Плотность покрытия всей полосы совпадает с плотностью прямоугольника и равна $D = S_{кр} / S_{np}$, где $S_{кр} = \pi R^2$ – площадь кругов, покрывающих *CDEF*, а S_{np} – площадь прямоугольника *CDEF*. Оптимальным является покрытие, имеющее минимальную плотность $D = \pi/2 \approx 1,5708$, которая достигается при $\alpha = \pi/4$. Следовательно, оптимальные значения $R = h / \sqrt{2}$ и $d = h$.

Модель 1.2. Двухслойное покрытие с *треугольной* решёткой (рис. 6.1). Пусть *h* – ширина полосы, *R* – радиус круга, *d* – расстояние между центрами соседних кругов одного слоя, α – угол между радиусом, проведенным к точке пересечения двух соседних окружностей одного слоя, и прямой *AB*, проходящей через центры кругов этого слоя.

Плотность покрытия имеет вид $D(\alpha) = \frac{\pi}{\cos \alpha (1 + 3 \sin \alpha)}$.

Минимум функции $D(\alpha)$ получается при $\sin \alpha = (\sqrt{73} - 1)/12 \approx 0,62867$;
угол $\alpha \approx 38,95^\circ$,

$$R = h/(1 + 3 \sin \alpha) = 4h/(3 + \sqrt{73}) \approx 0,3465h, \quad d = \frac{2h\sqrt{70+2\sqrt{73}}}{3(3+\sqrt{73})} \approx 0,5389h.$$

Минимальная плотность такого покрытия равна

$$\min_{\alpha} D(\alpha) = \frac{48\pi}{\sqrt{70+2\sqrt{73}}(3+\sqrt{73})} \approx 1.3998.$$

Замечание 1. Отметим нетривиальный результат. Треугольник ABC , образованный центрами трёх соседних кругов не является правильным, как в покрытии плоскости одинаковыми кругами, он равнобедренный. Это обусловлено граничным эффектом. В случае правильной треугольной решётки плотность покрытия больше и равна $\frac{4\pi}{5\sqrt{3}} \approx 1.451$.

Модель 1.3. Многослойные покрытия полосы кругами одного радиуса. Для заданного числа слоев n плотность покрытия имеет вид:

$$D(\alpha) = \frac{S_{кр}}{S_{пр}} = \frac{n\pi}{2(n-1 + (n+1)\sin \alpha)\cos \alpha}.$$

Условие оптимальности: $2\sin^2 \alpha + \frac{(n-1)}{(n+1)}\sin \alpha - 1 = 0$.

Из решения последнего уравнения определяются требуемые значения тригонометрических показателей:

$$\sin \alpha = 0,25 \left(\sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + 8} - \frac{n-1}{n+1} \right) = 0,25 \left(\sqrt{p^2 + 8} - p \right),$$

$$\cos \alpha = 0,25 \left(\sqrt{8 - 2p^2 + 2p\sqrt{p^2 + 8}} \right),$$

где $p = \frac{n-1}{n+1}$. Это дает возможность вычислить оптимальное значение плотности покрытия $D(\alpha)$ и определить соотношение между радиусом и шириной полосы

$$R = \frac{h}{n-1+(n+1)\sin\alpha}.$$

Устремив n в бесконечность, получим предельное значение $p = 1$ и $\sin\alpha = 1/2$, что соответствует значению $\alpha = \pi/6$. Предельное значение плотности равно $\lim_{n \rightarrow +\infty} D = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1,2092$. Эта асимптотическая оценка соответствует классическому результату для покрытия всей плоскости кругами одного радиуса. Очевидно, что при большой ширине полосы влияние границ несущественно.

Модель 2.1. Пусть центры кругов радиуса R расположены на средней линии полосы, и два соседних круга пересекаются, оставляя непокрытой область около границы полосы, которая покрывается кругами радиуса r (рис. 6.2).

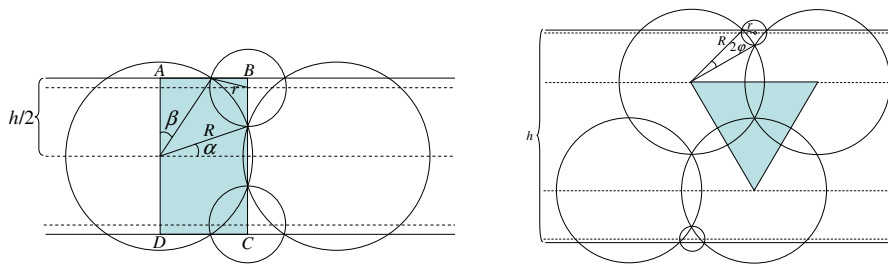


Рис. 6.2. Трехслойное и четырехслойное покрытия кругами двух радиусов

Плотность данного покрытия зависит от двух параметров α и β :

$$D(\alpha, \beta) = \frac{S_{кр}}{S_{пр}} = \frac{\pi}{4\cos\alpha\cos\beta} \left(2 + 2\sin^2\alpha + \sin(\alpha - \beta) - 4\sin\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) \right).$$

Минимум функции $D(\alpha, \beta)$ не удается найти аналитически. Приведем численные расчеты: $\min_{\alpha, \beta} D(\alpha, \beta) \approx 1.294$ при $R \approx 0.6266h$, $r \approx 0.18252h$, $\alpha \approx 27^\circ$, $\beta \approx 37^\circ$.

Модель 2.2. Рассмотрим четырехслойное покрытие, изображённое на рис. 6.2. Пусть центральный угол для дуги большой окружности, отсекаемой малой окружностью, равен 2φ . Тогда плотность покрытия равна

$$D(\varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{3}(3+4\sin(30^\circ+2\varphi))} \left(4 + (\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}(30^\circ + \varphi) - 1)^2 \right).$$

В результате численного решения находим оптимальные значения:

$$\min_{\varphi} D(\varphi) \approx 1.2542 \text{ при } \varphi \approx 11.5^\circ, R \approx 0.3229h, r \approx 0.08595h.$$

Замечание 2. Отметим, что добавление кругов радиуса r позволило существенно уменьшить плотность покрытия по сравнению с Моделью 1.2.

Модель 2.3. Рассмотрим пятислойное покрытие, изображенное на рис. 6.3. Круги радиуса R определяют основную прямоугольную структуру, круги радиуса r_1 используются в центральной части полосы, а круги радиуса r_2 находятся на границах полосы. Такое построение позволяет провести оптимизацию за счет изменений нескольких характеристик покрытия.

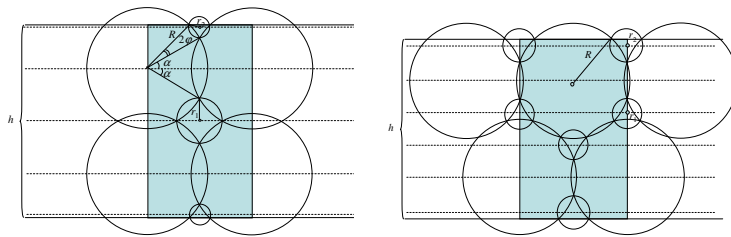


Рис. 6.3. Пятислойное и шестислойное покрытия полосы кругами трех радиусов

$$D(\alpha, \varphi) = \frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{пр}}} = \frac{\pi(3 - \sin 2\alpha + 2(\cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2)}{4 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi))}.$$

Минимальная плотность $\min_{\alpha, \varphi} D(\alpha, \varphi) \approx 1.23355$ достигается при $\alpha \approx 26.36^\circ, \varphi \approx 13.18^\circ, R \approx 0.2956h, r_1 \approx 0.1336h, r_2 \approx 0.0874h.$

Замечание 3. Если упростить модель, потребовав равенства радиусов внутренних и граничных кругов, то плотность покрытия немного изменится:

$$D(\alpha) = \frac{\pi(5 - 3 \sin 2\alpha)}{4(1 + \cos 2\alpha)},$$

$$\min_{\alpha} D(\alpha) \approx 1,256638 \text{ при } \alpha \approx 30,94^\circ, R \approx 0,29147h, r \approx 0,10014h.$$

Данная модель более проста, поэтому в некоторых случаях ей может быть отдано предпочтение в сравнении с Моделью 2.3.

Модель 2.4. Рассмотрим шестислойное покрытие, состоящее из кругов трех радиусов (рис. 6.3). Используя обозначения углов, принятых в Модели 2.3, получим следующее выражение для плотности покрытия:

$$D(\alpha, \varphi) = \frac{\pi(1 + (\cos \alpha / \sqrt{3} - \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2)}{\cos \alpha (\sqrt{3} \cdot \cos \alpha + 2 \sin(\alpha + 2\varphi))}.$$

Минимальная плотность для данной модели $\min_{\alpha, \varphi} D(\alpha, \varphi) \approx 1.20396$ достигается при $\alpha \approx 21.77^\circ$, $\varphi \approx 14.32^\circ$, $R \approx 0.31748h$, $r_1 \approx 0.05248h$, $r_2 \approx 0.09717h$.

Замечание 4. Если потребовать равенства радиусов меньших кругов, то плотность покрытия будет зависеть от одной переменной и ее оптимальное значение немного увеличится:

$$D(\alpha) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{7 - 2\cos 2\alpha - 2\sqrt{3} \cdot \sin 2\alpha}{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha},$$

$$\min_{\alpha} D(\alpha) \approx 1.23387 \text{ при } \alpha \approx 17.72^\circ, R \approx 0.33383h, r \approx 0.24568R \approx 0.08202h.$$

Каждое покрытие полосы можно отнести к одному из классов $P(n, k)$, где n – число слоев покрытия, а k – число различных радиусов кругов. Приведём следующую итоговую таблицу с указанием наиболее эффективных покрытий в каждом классе.

Класс моделей	Лучшее покрытие	Плотность лучшего покрытия	Примечание
1	2	3	4
$P(1, 1)$	Модель 1.1	$D \approx 1,571$	Простая структура
$P(2, 1)$	Модель 1.2	$D \approx 1,399$	Треугольная решётка
$P(n, 1)$	Модель 1.3	$D(\alpha) = \frac{n\pi}{2(n-1 + (n+1)\sin\alpha)\cos\alpha}$	Значения $\cos \alpha$, $\sin \beta$ см. в п. 1.3
$P(3, 2)$	Модель 2.1	$D \approx 1,294$	Простая и эффективная модель
$P(4, 2)$	Модель 2.2	$D \approx 1,254$	Треугольная решётка
$P(5, 3)$	Модель 2.3	$D \approx 1,234$	Квадратная решётка
$P(6, 3)$	Модель 2.4	$D \approx 1,204$	Треугольная решётка

В разделе **6.3 Главы 6** рассмотрены различные модели мониторинга полосы внешним образом. Это означает, что по некоторым причинам «недоступности» мы не можем располагать сенсорные устройства внутри области. Такая постановка задачи ранее не рассматривалась. Исследования показали, модели внешнего мониторинга полосы более тесно связаны с моделями покрытия плоскости, чем модели обычного мониторинга полосы.

Рассмотрим оптимальное покрытие плоскости кругами одного радиуса, имеющую правильную решетку расположения кругов. Легко заметить, что оно порождает «вырезанием» два оптимальных покрытия полосы $SA-1(1)$ и $SA-1(2)$ с одинаковыми плотностями, но разными структурами (рис 6.9).

Приведем основные характеристики моделей.

Модель SA-1(1): $D_{SA-1(1)} = 2D_{A-1} = 4\pi/\sqrt{27} \approx 2.4184$, $R = 2h/3 \approx 0.6667h$.

Модель SA-1(2): $D_{SA-1(2)} = 2D_{A-1} = 4\pi/\sqrt{27} \approx 2.4184$, $R = 2h$.

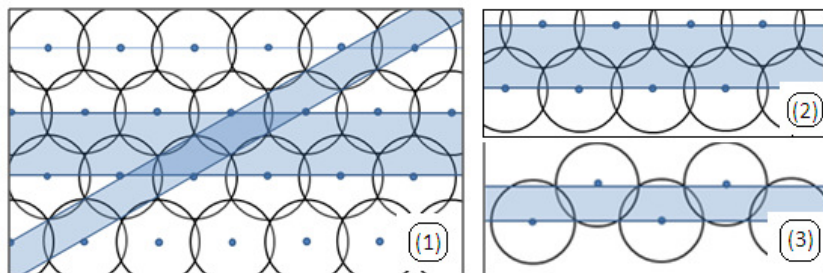


Рис 6.9. (1) *Модель A-1* покрытия плоскости кругами одного радиуса и соответствующие модели внешнего покрытия полосы: (2) *Модель SA-1(1)*, (3) *Модель SA-1(2)*

Модель A-2 порождает единственную эффективную *Модель SA-2* покрытия полосы внешним образом (рис 6.11):

Модель SA-2: $D_{SA-2} = \frac{11\pi}{9\sqrt{3}} \approx 2,2168$, $R = \frac{h\sqrt{31}}{3\sqrt{3}} \approx 1.0715h$, $r = \frac{h}{3\sqrt{3}} \approx 0,19245h$.



Рис 6.11. *Модель SA-2* покрытия полосы внешним образом

Модель В-2 определяет две Модели SB-2(1) и SB-2(2) для покрытия полос разным способом, но с одинаковой плотностью (рис 6.12):

$$\text{Модель SB-2(1): } D_{SB-2(1)} = \frac{3\pi}{4} \approx 2,3562, \quad R = \frac{h\sqrt{5}}{2} \approx 1.1180h, \quad r = \frac{h}{2}.$$

$$\text{Модель SB-2(2): } D_{SB-2(2)} = \frac{3\pi}{4} \approx 2,3562, \quad R = \frac{h\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \approx 0.7906h, \quad r = \frac{h}{2\sqrt{2}} \approx 0.3536h.$$

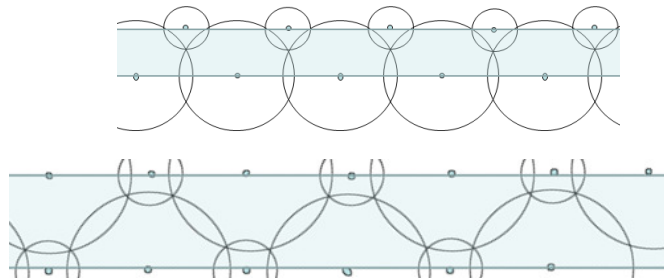


Рис 6.12. Модели SB-2(1) и SB-2(2) покрытия полосы внешним образом

Рассмотрим специальное покрытие плоскости кругами трех радиусов. На рис 6.14 изображены элемент этого покрытия и его минимальный фрагмент: Модель SA-3 класса $\text{Cov}_F(3:1_4, 1_2, 1_2)$. Особенность модели состоит еще и в том, что размер фрагмента (соотношение между катетами прямоугольного треугольника) так же является параметром оптимизации. Заметим, что круги большого размера имеют одинаковый радиус, но при оптимальных параметрах покрытия шестиугольник, изображенный на рис 6.14, немного растянется вдоль горизонтали. С учетом обозначений фрагмента это значит, что выполняется соотношения для углов: $\alpha > 30^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Функция плотности покрытия достаточно сложна и зависит от трех параметров: $D(\alpha, \varphi, \gamma) = D_1 + D_2 + D_3$, где

$$D_1 = \frac{\pi \cdot \text{tg} \alpha}{8(\sin \alpha \cos \varphi)^2}, \quad D_2 = \pi \cdot \text{tg} \alpha \cdot \left(\left(\frac{1 - \text{ctg} \alpha \cdot \text{ctg} \varphi}{2} \right)^2 + \left(\text{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha - \varphi}{2} + \gamma \right) - \frac{\text{ctg}(\alpha + \varphi)}{2 \sin \alpha \cos \varphi} \right)^2 \right),$$

$$D_3 = \pi \cdot \text{tg} \alpha \cdot \left(\text{tg} \left(\frac{\omega + \gamma}{2} \right) - \text{tg} \omega \right)^2, \quad \omega = \arccos(2 \sin \alpha \cdot \cos \varphi).$$

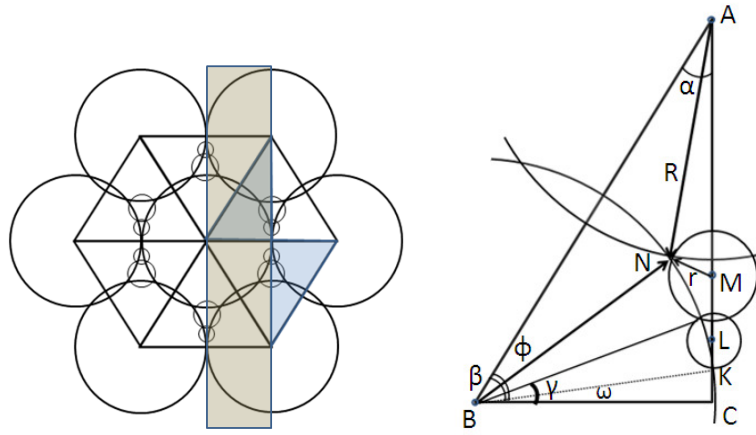


Рис 6.14. Элемент покрытия полосы кругами трех радиусов и структура его минимального фрагмента $\text{Cov}_F(3: 1_4, 1_2, 1_2)$

Оптимальные параметры внешнего покрытия:

$$\min D_{SA-3} \approx 2.185655, \quad \alpha \approx 29.79^\circ, \quad \beta \approx 60.21^\circ, \quad R \approx 1.0644a, \quad r \approx 0.2003a, \quad \rho \approx 0.0305a.$$

Заметим, что аналогичная модель третьего уровня получена по типу квадратной структуры с плотностью $\min D_{SB-3} \approx 2.30906$. Возможны более сложные специальные модели, но они дают незначительное уменьшение плотности.

ГЛАВА 1. ГРАФИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИСТЕМ

1.1 Общие положения системного анализа

Первые представления о системе как совокупности элементов, находящихся в структурной взаимосвязи друг с другом и образующих определенную целостность, возникли в античной философии (Платон, Аристотель). Воспринятые от античности принципы системности развивались в дальнейшем в концепциях Кузанского и Спинозы, в работах основателей немецкой классической философии Канта, Шеллинга и Гегеля. В XX веке принцип системности находит все больше сторонников в различных областях знаний. В 30-40-е годы прошлого столетия австрийский ученый Л. фон Берталанфи успешно применил системный подход к изучению биологических процессов, а затем предложил разработку концепции общей теории систем. Общая теория систем, по замыслу Берталанфи⁸, должна быть отдельной наукой о системах любых типов. Основные усилия предлагалось направить на решение следующих основных задач:

- *выявление общих принципов и законов, задающих структуру систем независимо от составляющих их элементов и отношений между ними;*
- *создание или подбор соответствующих системных моделей, наилучшим образом отражающих закономерности процессов в биологических, социальных или других образованиях, соответствующих аналогичным законам естествознания;*
- *создание синтеза современного научного знания, в котором определены изоморфизмы законов различных сфер деятельности.*

Конкретные реализации этой и подобных программ натолкнулись на очень серьезные трудности, главная из которых состоит в том, что общность понятия системы ведет к потере конкретного содержания.

⁸ Bertalanffy L. Problems of Life. – N.Y., 1960. – с. 148.

Однако, в теории множеств не меньше абстрактных и общих понятий, но она имеет достаточно стройное и законченное построение. Следовательно, существуют другие объективные причины, по которым пока не создана общепризнанная теория систем. Если учесть, что некоторое множество является фактически «базой» любой системы, то причины становятся понятными. При исследовании систем изучается не только составные (элементные) части, но и структурные связи, процессы и взаимодействия. Большое многообразие и сложность указанных категорий создают основные трудности для создания универсальной теории.

Учитывая это, в настоящее время успешно разрабатываются простые и сложные модели систем для конкретных объектов, используя аппарат теории множеств, алгебры и логики, теории графов, теории вероятностей и других разделов математики. Системное мышление с нарастающей интенсивностью используется представителями практически всех наук. Применение понятий системного подхода к анализу конкретных прикладных программ получило название системного анализа. Основной акцент в данном подходе переносится на структуризацию, выделение главных связей и процессов. Как правило, это приводит к некоторой модели или формальной постановке задачи. Системный анализ занимается изучением не только какого-либо объекта (явления, процесса), но главным образом связанной с ним проблемной ситуации.

В работе Р. Акоффа⁹ система рассматривается как нечто целое, имеющее свое функциональное предназначение или «миссию». В отличие от понятия «множества» система не является набором независимых элементов. Термин «система» предполагает взаимодействие составляющих ее элементов. Причем система как целое обладает свойствами, отсутствующими у составных частей.

Элементы – это основные компоненты системы, которые при данном рассмотрении следует считать неразложимыми на более мелкие части. Они

⁹ Акофф Р. Планирование будущего корпорации [Текст] / Р. Акофф, М., 1985, с. 40.

могут иметь свои свойства и характеристики, но вместе они соединены относительно устойчивыми связями, которые определяют *структуру* системы. Как правило, системе приписывают свойство *эмерджентности*, т.е. несводимости свойств системы к свойствам отдельных элементов системы. Это значит, что элементы образуют некоторое уникальное объединение, которое будет совсем другим даже при отсутствии одного элемента.

Целостность системы – это ее относительная независимость от среды и других систем. Это свойство системы позволяет отдельно исследовать ее внутреннюю природу и, далее, использовать полученные знания для выявления ее роли во внешней среде.

Рассмотренные выше понятия характеризуют в основном статическое состояние системы. Для описания динамики системы применяется дополнительная терминология.

Под *поведением* или *функционированием* системы будем понимать ее действие во времени. Поведение системы удобно описывать с помощью изменяющихся состояний. Важно отметить, что изменение *состояния* системы зависит не только от свойств и состояний отдельных элементов, но и от изменения *структуры* системы. Такое поведение можно рассматривать как эволюцию системы. Как правило, система ведет себя целенаправленно и стремится попасть в предпочтительное для нее состояние. Особый интерес представляют системы, которые ведут себя устойчиво даже при наличии конфликтных «отношений» между элементами. С другой стороны, при небольших изменениях внутри системы может произойти смена «курса» или даже «крах». В естественных науках такую ситуацию называют точкой *фазового перехода*. В экономике и социальной жизни могут возникать похожие явления, приводящие к кризису. Отметим общие причины и закономерности, которые объясняют такое поведение систем.

Рассмотрим свойство *обратной связи* для развивающейся системы: *воздействие результатов функционирования системы на характер этого*

функционирования. Если обратная связь усиливает результаты функционирования, то она называется *положительной*, если ослабляет – *отрицательной*. Положительная обратная связь может приводить к дисбалансу и краху.

В качестве примера положительной обратной связи часто приводят проблему инфляционных ожиданий. Рост инфляционных ожиданий заставляет людей делать больше покупок, чем необходимо. Увеличение спроса приводит к росту цен и усиливает инфляцию. Это, в свою очередь, способствует повышению инфляционных ожиданий.

Противоположным образом, отрицательная обратная связь стабилизирует ситуацию и не дает возможности развиваться ей бесконтрольно. Большинство биологических систем имеют ярко выраженную отрицательную обратную связь. В экономике отрицательную обратную связь наглядно «демонстрирует» закон предельной полезности и закон выравнивания прибыльности в разных областях деятельности при условии свободной конкуренции: в высоко прибыльные отрасли устремляется дополнительный поток предпринимателей. Увеличивающиеся предложения и перераспределение спроса уменьшают цены и среднюю прибыльность данного бизнеса. В результате происходит относительная стабилизация и уменьшение финансовой активности по перераспределению инвестиционных средств.

Одним из первых, кто осознал роль обратной связи, был Норберт Винер, который считается одним из основателей кибернетики. В 1943 году появилась его историческая статья «Поведение, целенаправленность и телеология», в которой впервые было показано принципиальное единство ряда управленческих задач в природе и технике.

В сложных системах на определенных этапах положительные обратные связи могут меняться на отрицательные обратные связи и наоборот. Анализируя поведение различных систем, А.А. Богданов¹⁰

¹⁰ Богданов А.А. Тектология [Текст] / А.А. Богданов, М., 1989

показал, что для развития субстанции любой природы необходимы как отрицательные, так и положительные обратные связи. Возможно, этим объясняются часто встречающиеся циклические свойства различных процессов. Изучая самоорганизацию природных систем и моделируя обобщенные аналоги, современная наука может успешно развивать надежные принципы управления.

Как уже было сказано выше, возможности общих представлений и понятий системного анализа достаточно ограничены. Однако, рассмотренные идеи имеют безусловную методическую ценность для формирования направлений исследования конкретных проблем. В нашей работе будут наглядно представлены специальные реализации затронутых понятий и схем. Приведем краткую последовательность этапов, которых мы придерживаемся в рамках системного подхода при постановках проблем и их решений:

- (1) Формулировка основных целей и задач.
- (2) Определение границ и целостности системы.
- (3) Описание множества элементов и их свойств.
- (4) Построение структуры системы и взаимосвязей между элементами.
- (5) Установление функций и характера поведения системы.
- (6) Конструирование системной модели и обоснование ее адекватности.
- (7) Исследование модели и формулировка результатов.
- (8) Анализ проведенных исследований и практические выводы.

Данная схема носит условный характер и не является жестко закрепленной. Содержание каждого этапа допускает широкие трактовки и интерпретации, но такой принципиальный порядок соответствует многим работам, в которых присутствует системная направленность исследований [1, 10, 52, 61, 64, 74, 86, 90].

1.2 Графические методы представлений общей структуры систем

Ключевую роль в системном анализе играет понятие «*структура*». Это понятие связано с упорядоченностью отношений, связывающих элементы системы. Структуры могут быть *простыми* и *сложными* в зависимости от числа и типа взаимосвязей между элементами. Наличие структуры помогает исключить ненужные сочетания и выделить основные связи. Для задания структуры простейших систем обычно используются графы, с помощью которых можно «задавать» парные связи между элементами. Для более сложных объектов используются обобщенные графические представления: *мультиграфы*, *псевдографы* и *гиперграфы*, а также *сети*. Возможности этих представлений практически неограниченны. В частности, они могут определять *поля*, на которых могут одновременно присутствовать и «действовать» любое количество элементов системы.

Граф есть пара множеств $G=(V,E)$, где E состоит из 2-элементных подмножеств множества V .

Элементы множества V называются *вершинами* (*точками*) графа G , а элементы из E – его *ребрами* (*линиями*). Значение $n=|V|$ определяет количество элементов графа и может использоваться в виде нижнего индекса при обозначении графа G_n , а значение $m=|E|$ определяет количество его ребер. Рисуя граф, обычно изображают каждую вершину точкой и соединяют линиями такие пары точек, которые задают в графе ребро. Будем называть этот способ изображения *G-представлением*. Как именно нарисованы эти точки и линии, считается несущественным. Важно лишь то, что точки и вершины определяют некоторую структуру. Точки при описании реальных систем могут быть фирмами, агентами или населенными пунктами, а линии – связями, парными взаимодействиями или коммуникационными соединениями.

Возможности обычного графа ограничены, поэтому в дальнейшем мы будем использовать и более общие графические понятия.

Мультиграф есть пара множеств $MG=(V,E)$, где E допускает кратные 2-элементные подмножества множества V .

Сравним изображение графа G_6 и мультиграфа MG_4 на рис. 1.1.

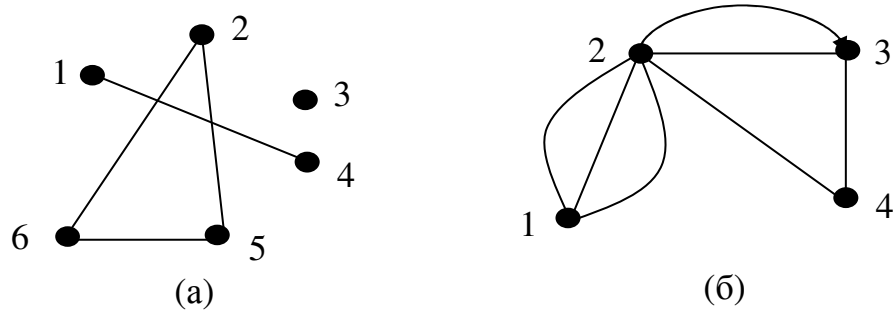


Рис.1.1. Изображение графа и мультиграфа: (а) граф $G_6=(V,E)$, где $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, $E=\{\{1,4\},\{2,5\},\{2,6\},\{5,6\}\}$; (б) мультиграф $MG_4=(V,E)$, где $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{e_1=\{1,2\}, e_2=\{1,2\}, e_3=\{1,2\}, e_4=\{2,3\}, e_5=\{2,3\}, e_6=\{2,4\}, e_7=\{3,4\}\}$

Мультиграф позволяет задавать взаимодействия двух элементов по двум и более независимым направлениям. Если же ребро начинается и заканчивается в одной и той же точке, то оно называется *петлей*, которая подразумевает *внутреннее* действие элемента для самого себя.

Псевдограф есть пара множеств $PG=(V,E)$, где E допускает кратные ребра и петли.

Петля является 1-элементным подмножеством и обозначается $e=\{k\}$, если она связана с вершиной k . Псевдограф может определять достаточно сложную структуру даже для двух элементов: $PG_2=(V,E)$, где $V=\{1,2\}$, $E=\{e_1=\{1\}, e_2=\{1\}, e_3=\{1,2\}, e_4=\{1,2\}, e_5=\{1,2\}, e_6=\{2\}\}$ (см. рис. 1.2).

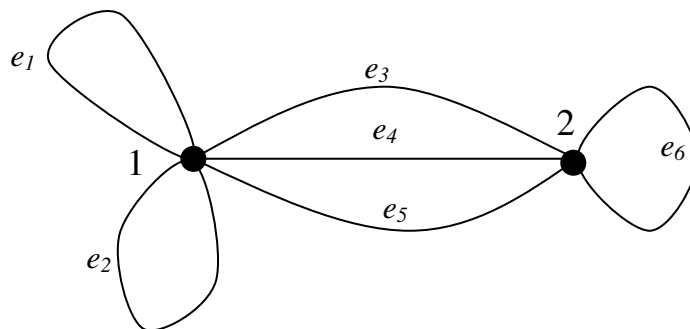


Рис. 1.2. Псевдограф $PG_2=(V,E)$, где $V=\{1,2\}$, $E=\{e_1=\{1\}, e_2=\{1\}, e_3=\{1,2\}, e_4=\{1,2\}, e_5=\{1,2\}, e_6=\{2\}\}$

Обобщением всех рассмотренных выше графических понятий является *гиперграф*.

Гиперграф есть пара множеств $HG=(V,E)$, где E состоит из заданного набора подмножеств множества V , допускающих кратность.

Элементы множества E называют *обобщенными ребрами*, «связывающие» k -элементные подмножества множества V , $k \leq n$. Если $k \geq 3$, то обобщенное ребро нельзя изобразить с помощью линии. Например, для гиперграфа $HG_4=(V,E)$, где $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{e_1=\{1\}, e_2=\{1,2,3\}, e_3=\{1,2,3,4\}, e_4=\{3,4\}, e_5=\{4\}\}$ имеется два 1-элементных ребра e_1 и e_5 , одно 2-элементное e_4 , одно 3-элементное e_2 и одно 4-элементное ребро e_3 . Вместо *ребер* элементы E естественнее называть *полями*, так как соответствующие элементы одновременно *взаимодействуют* на них. Любой гиперграф, в том числе и HG_4 , можно задавать таблицей или матрицей инцидентности:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
1	1	1	1	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	1	1	1	0
4	0	0	1	1	1

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичный элемент b_{ij} матрицы B показывает присутствие «участника» i на поле j , а нулевой элемент b_{ij} матрицы – отсутствие «участника» i на поле j . Сумма элементов в столбце матрицы B определяет число участников соответствующего поля, а сумма элементов строки – степень соответствующей вершины. Классическое представление графа с помощью матрицы смежности удобно только для простых случаев; для гиперграфов такое представление теряет практическую ценность.

Графически любой гиперграф можно изобразить в виде соответствующего *P-представления*. Для этого на двух разных уровнях изображаются *вершины* и *поля взаимодействий*, а между ними проводятся

линии, определяющие присутствие соответствующего элемента на заданном поле (см. рис. 1.3).

Несмотря на то, что *гиперграф* обладает широчайшими возможностями для задания системных структур, они являются частным случаем понятия «*сеть*».¹¹

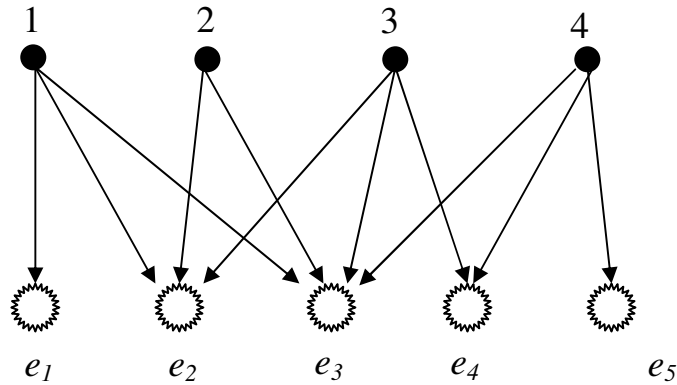


Рис. 1.3. Гиперграф $HG_4=(V,E)$, где $V=\{1,2,3,4\}$, $E=\{e_1=\{1\}, e_2=\{1,2,3\}, e_3=\{1,2,3,4\}, e_4=\{3,4\}, e_5=\{4\}\}$

Сеть S задается парой вида (V,E) , где V – некоторое множество, $E=\{E_0, E_1, E_2, \dots\}$ – семейство наборов из множества V .

Элементы множества V называются вершинами сети S , элементы набора E_0 называются *полюсами*, а наборы E_1, E_2, \dots называются *ребрами*. Вообще говоря, элементы в наборах могут повторяться и сами наборы могут быть кратными, поэтому для фиксированного значения $n=|V|$ число ребер может быть любым сколь угодно большим. *Полюсы* – это выделенные вершины, наделенные специальными характеристиками (например, потенциалом, ресурсом или источником энергии).

Определение 1. *Ресурсная система $S=(V,E,Q)$ – это взвешенный гиперграф $HG=(V,E)$, каждой вершине которого $i \in V$ присвоен ресурс q_i , где $Q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ – ‘ресурсный вектор системы, $n=|V|$.*

Для описания свойств ресурсных систем введем обозначения:

¹¹ Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. – Советская энциклопедия, 1984. – т. 4, с. 1122

- $Q_\Sigma = \sum_{i=1}^n q_i$ – общий ресурс системы S ;
- $E_i = \{e_j \in E : i \in e_j\}$ – подмножество полей инцидентных элементу i ;
- $V_{ij} = \{v \in V : \{i, v\} \subset e_j\}$ – множество смежных элементов для элемента i на поле e_j (все элементы поля e_j кроме элемента i);
- $V_i = \{v \in V : \exists e_t \in E, \{i, v\} \subset e_t\}$ – множество всех смежных элементов для элемента i (объединение всех V_{ij} по j);
- x_{ij} – ресурс элемента i на поле $e_j \in E_i$;
- $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}$ – матрица состояний системы S .

Элемент i имеет возможность активно «действовать» своим ресурсом на подмножестве полей $e_j \in E_i$, сохраняя при этом балансовое соотношение

$$q_i = \sum_{j \in E_i} x_{ij} \quad (\text{сумма элементов строки матрицы } X).$$

Важным для ресурсной системы S является понятие k -взаимодействия.

Определение 2. Элементарным k -взаимодействием назовем взаимодействие (присутствие) k элементов на одном поле с соответствующими частями своего ресурса.

Каждый столбец матрицы X полностью определяет одно элементарное k -взаимодействие, а все столбцы матрицы состояний задают полную систему взаимодействий в данной модели. Если $k=1$, то на поле этого взаимодействия $e_j \in E_i$ присутствует только один элемент i , поэтому такое поле можно называть *внутренним* для элемента i . Если $k=2$, то получается обычное парное взаимодействие соответствующее обычным графам.

1.3 Применение графических представлений для моделирования реальных систем и процессов

Графические представления наглядно и строго определяют основные элементы системных объектов [8, 9, 28, 29]. Приписывая вершинам и дугам количественные показатели, можно не только задавать состояние системы, но и моделировать функциональные изменения в течение времени. Такой подход достаточно успешно применялся ранее для исследования поведения экономических систем, как в игровых постановках [18, 22, 31, 62, 70], так и в форме имитационных моделей [7, 14, 27, 36, 42, 50, 57].

Введенное понятие *ресурсной системы* полностью удовлетворяет основным принципам системного анализа:

- задана *система*, состоящая из множества связанных между собой элементов, которая рассматривается как *целое*;
- *элементы* (вершины графа) являются неразложимыми компонентами системы на данном уровне рассмотрения;
- определена относительно устойчивая *структура* связей между элементами системы;
- имеется *целостность системы*, позволяющая независимое «существование» во внешней среде; определены признаки принадлежности элемента к данной системе;
- задана «*природа*» и *форма существования* системы в виде взаимодействий между элементами и подмножествами, определяемая различными состояниями системы в целом.

Важно отметить, что в нашем случае понятие *ресурса* является основой для формы межэлементных взаимодействий. В работах [4-6] была предложена основная идея равновесной стратегии перераспределения ресурса, при которой система могла развиваться и эволюционировать. В дальнейшем удалось реализовать данный универсальный подход для различных функциональных критериев «справедливости» и «рациональности» [23-25, 34, 54, 55].

Сравнивая с известными работами [2, 3, 35, 37, 47], можно заметить несколько принципиальных отличий от наших моделей. Как правило, основные критерии принятия решений в этих моделях не содержат регулируемых параметров, за счет которых можно добиваться устойчивого поведения системы и отслеживать границы фазовых переходов. Смысл последнего утверждения важен потому, что можно смоделировать «точку» перехода количественных изменений в новые качественные формы.

Кроме того, во многих работах вместо поиска устойчивого и равновесного решения ведется поиск оптимального значения одной целевой функции (возможно даже многофакторной). Единственность целевой функция уже предполагает кооперацию интересов, т.е. некую протокольную договоренность между элементами системы. Уменьшается свобода действий и многообразие состояний. С этой точки зрения, происходит ограничение возможностей для таких моделей.

Есть еще один важный момент: *разумно считать «успехом» не достижение результата, а исключение текущих и будущих «неудач».* Например, для альпинистов необходимо не только зайти на вершину, но и благополучно вернуться вниз, чтобы в будущем покорить новые высоты.

Подчеркнем еще одну ключевую роль понятия *«ресурс»*. В виде ресурса можно задавать информацию, производственные мощности, финансы и другие обменные ценности. При этом оценки одного и того же эквивалента ресурса в экономических и социальных сферах не являются фиксированными, а зависят от условий и индивидуальных предпочтений. Определенные в работе графические ресурсные системы позволяют моделировать такие системы, в которых реализуются принципы индивидуальных предпочтений и связанные с ними взаимоотношения. Индивидуальные предпочтения определяют стратегию перераспределения личных ресурсов и дают возможность оценить удовлетворенность существующим состоянием.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕСУРСНЫХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФОВ

2.1 Принципы моделирования многосторонних взаимоотношений

В работах [11, 16, 19, 44, 85, 97] предложена и частично исследована модель оценки взаимоотношений сторон. Сторонами могут быть коалиция государств, отдельные страны, политические партии, финансовые группы, производственные организации и т.п. В частности, задача количественного анализа межгосударственных отношений с последующим формированием рекомендаций по обеспечению безопасности стран путем организации мероприятий в политической, экономической, военной и других сферах является весьма сложной. В данном разделе предложен подход к оценке взаимоотношений, которая зависит от величины некоторого обобщающего «ресурса» каждой из сторон. Оценка взаимоотношений осуществляется на основе различных критериев. Если предположить, что эти критерии отражают угрозу, исходящую от соседа, то естественной стратегией каждой страны является минимизация максимальной угрозы, исходящей от соседей. Это достигается путем перераспределения ресурса стороны по соседям. Предполагается, что каждая сторона знает величину ресурса, направленную от каждого соседа. Исходя из этого, все государства перераспределяют свой ресурс одновременно, опираясь на текущее распределение ресурсов соседей. Вполне вероятно, что новое распределение ресурсов оказывается более благоприятным, но не совсем таким, на какое рассчитывали элементы системы. В результате перераспределения ресурсов система переходит в другое состояние, которое, в свою очередь, на следующем шаге также меняется. Таким образом, система динамически развивается в течение дискретного времени, и естественно возникают важные вопросы. Существует ли предельное, стационарное состояние системы? Является ли оно устойчивым, равновесным? Ниже будут даны точные постановки задач, для которых можно будет ответить на эти и другие вопросы.

Посвятим несколько строк понятию «ресурс». В работе предполагается, что каждый из участников распределяет свой ресурс по инцидентным направлениям. Понятие ресурса, конечно, зависит от сферы взаимоотношений. Для военной сферы ресурс – это военный потенциал страны, например, совокупность стратегических вооружений, который распределяется по возможным направлениям агрессии соседей. В экономической сфере ресурс – это экономический потенциал, зависящий от финансовых показателей, производственных фондов и товарооборота. В политической области взаимоотношения между странами можно измерять объемами торговли, числом людей посещающих страны для отдыха, учебы и культурного обмена. Во взаимоотношениях политических партий ресурс может быть измерен рейтингом партии или количеством депутатов, выбранных в парламент. Во многих случаях ресурс – это деньги, которыми измеряются взаимные отношения между субъектами в различных областях деятельности.

Исследованию свойств различных развивающихся систем посвящен целый ряд работ [13, 21, 39, 43, 67, 82, 83, 91]. Если известны стратегии элементов системы, то основным направлением исследований является изучение поведения системы в течение времени. Существует ли у системы предельное стационарное состояние? Является ли оно единственным? Особо выделяются равновесные состояния, которые являются предпочтительными для всех элементов системы, несмотря на противоположность их интересов. В игровых постановках элементы с разными интересами часто называют игроками, а состояние равновесия – равновесием по Нэшу [63, 87, 96, 103]. В экономических системах понятие равновесия является одним из ключевых и ему посвящено множество работ, среди которых отметим [38, 40, 66, 75, 88, 100, 115,]. Исследованием равновесных состояний занимаются также при изучении саморазвивающихся систем [41, 46, 98, 104, 110, 113]. Одним из приложений последнего направления является исследование моделей теории

конфликтов [12, 20, 26, 33, 53, 102, 114]. В таких моделях от элементов, которые могут быть представлены вершинами графа, может исходить «угроза» соседям, степень которой зависит от величины выделенного на соответствующее ребро ресурса.

В нашем случае участники объединены в систему и действуют по определенной стратегии, изменяя состояния системы. Мы исследуем процесс изменения состояний. В частности, исследуется вопрос о нахождении равновесного по Нэшу предельного состояния. Подобные исследования проводились в работах [24, 69, 96, 105]. В [35] для частного случая функции оценки взаимоотношения сторон найдено необходимое и достаточное условие существования равновесия, которое может быть найдено путем решения системы линейных неравенств. В данном отчете предлагается *итерационный метод*, реализующий стратегии элементов системы, который позволяет *аналитически* выписать предельные и равновесные состояния, зависящие лишь от начального распределения ресурсов элементов.

Зафиксируем сферу отношений стран, которые задаются графом отношений. В этом графе каждая сторона представлена вершиной, а ребро между парой вершин существует в том случае, если соответствующие страны имеют отношения в рассматриваемой области. Введено понятие угрозы стране, величина которой зависит от размеров ресурса, направленного как от стран-соседей, так и на эти страны. Введена стратегия поведения каждой страны, которая названа *принципом осторожности* и заключается в минимизации максимальной угрозы от стран-соседей. При этом решение по перераспределению ресурса каждая страна принимает на основе наблюдаемой угрозы от стран-соседей.

Построим математическую модель, позволяющую оценить влияние изменений во взаимоотношениях между отдельными странами. В частности, взаимоотношения можно трактовать в терминах безопасности конкретной страны.

Каждой стране $i=1, \dots, n$ поставим в соответствие вершину $i \in V = \{1, 2, \dots, n\}$ в графе взаимоотношений $G=(V, E)$. В этом графе дуга $(i, j) \in E$ из вершины i в вершину j существует лишь в том случае, если страна i представляет угрозу для страны j . (В частности, страны одной коалиции образуют независимое множество в графе G .)

С каждой дугой $(i, j) \in E$ свяжем функцию $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})$, которая отражает степень угрозы исходящей от страны j стране i (с точки зрения страны i). В функции $c_{ij}(x, y)$ переменная x характеризует количество ресурса, направленного на страну j , а y - количество ресурса страны j , направленного на страну i . Функции c_{ij} могут задаваться как аналитически, так и экспертами в соответствующей области. Естественно предположить, что $c_{ij}(x, y)$ являются невозрастающими по x и неубывающими по y . Кроме того, в результате изменения условий (например, после заключения договоров) страна i может переоценить степень угрозы, исходящей от страны j .

Ресурс (возможность влияния) каждой страны i предполагается ограниченным. Пусть величины q_i характеризуют общее количество ресурса стороны i .

Будем считать, что каждая страна придерживается *принципа осторожности* или *равной угрозы* и распределяет свой ресурс таким образом, чтобы минимизировать максимальную угрозу от смежных (по графу G) стран. При этом если для некоторой страны i величины направленных на нее ресурсов x_{ji} изменились, она может перераспределить и свои ресурсы x_{ij} (в пределах q_i).

Принцип осторожности для страны i реализуется распределением ресурса на основе решения следующей задачи:

$$\max_{j \in V_i} c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) \rightarrow \min_{\{x_j\}}; \quad (2.1)$$

$$\sum_{j \in V_i} x_{ij} \leq q_i; \quad (2.2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (2.3)$$

где V_i – множество смежных с i вершин.

Ниже изучается процесс изменения взаимоотношений стран в результате перераспределения ресурса между смежными вершинами. При этом в каждый момент времени $k+1$ (время дискретно) любая страна i решает задачу (1)-(3) при значениях x_{ji} , наблюдаемых в момент времени k .

Определение 2.1. Состояние (набор $\{x_{ij}\}$, удовлетворяющий ограничениям (2)-(3)) при котором $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = c_{ji}(x_{ji}, x_{ij})$ для всех $(i, j) \in E$ будем называть состоянием равновесия.

В работе [35] рассмотрен вопрос о существовании равновесия в простейшем случае, когда $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ji} - x_{ij}$. Сформулированы необходимые и достаточные условия существования равновесия:

$$x_{ij} = x_{ji} \text{ или } c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = 0 \text{ для всех } (i, j) \in E.$$

Состояние равновесия существует не всегда. Может оказаться, что некоторые страны превосходят другие. Но и в этом случае на основе принципа осторожности ресурс каждой страны будет распределен таким образом, чтобы минимизировать максимальную угрозу.

Параметры системы могут измениться в любой момент времени. Может увеличиться или уменьшиться количество ресурса у некоторых стран, могут возникнуть или исчезнуть некоторые ребра, могут быть переоценены функции угроз (например, в результате переговоров). Проследим поведение системы в течение времени, когда каждая страна придерживается принципа осторожности. Предположим, что в начальный момент $k=0$ система находится в состоянии равновесия.

Пусть в момент $k=1$ некоторые характеристики системы изменились. Это может случиться по разным причинам. Например, когда общий ресурс некоторых стран изменился, и/или они перераспределили свои ресурсы между смежными вершинами по-другому, изменив оценку (функцию) угрозы. Так, если некая страна считает, что военная угроза со стороны какого-то соседа изменилась (возросла или уменьшилась), то она изменит свой ресурс, на этом направлении. В результате величины ресурса на

других направлениях также изменятся. Это повлечет изменение величин ресурсов у смежных стран-вершин. Далее изменения коснутся более отдаленных вершин. В свою очередь, изменение величин ресурсов на других направлениях даст повод странам, выведшим систему из начального состояния, опять перераспределить свой ресурс (соблюдая принцип осторожности).

Удобно и естественно считать, что каждая страна в момент $k+1$ принимает решение о перераспределении своих ресурсов на основе состояния инцидентных ребер в момент k . Это означает, что каждая страна i определяет величины x_{ij} , $j \in V_i$ своих ресурсов (решая задачу (1)-(3)) в момент $k+1$, зная величины x_{ji} , $j \in V_i$ в момент k . Такое изменение распределения ресурсов всеми странами, которое влечет изменение состояния всей системы, назовем *шагом по времени*. Дальнейшее перераспределение странами своих ресурсов (на основе принципа осторожности) приведет систему в другое состояние.

Определение 2.2. Будем говорить, что система находится в состоянии устойчивого равновесия, если после изменения некоторых величин x_{ij} она за конечное число шагов возвращается в то же самое состояние равновесия.

Для исследования вопроса устойчивости состояния равновесия рассмотрим следующие примеры.

Пример 2.1. Рассмотрим граф G , изображенный на рис. 2.1. Пусть для функции угроз $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = x_{ji} - x_{ij}$ аргументы x_{ij} , x_{ji} принимают целые значения.

Предположим, что вершина 1 имеет ресурс, равный 4, вершины 2 и 3 имеют ресурсы в объеме 5 единиц каждая. Рядом с дугами изображены величины ресурса. В случае (а) $k=0$ изображено начальное равновесное состояние.

Допустим, в момент $k=1$ страна 1 изменила распределение своего ресурса, положив $x_{12}=4$, $x_{13}=0$ и нарушив равновесие.

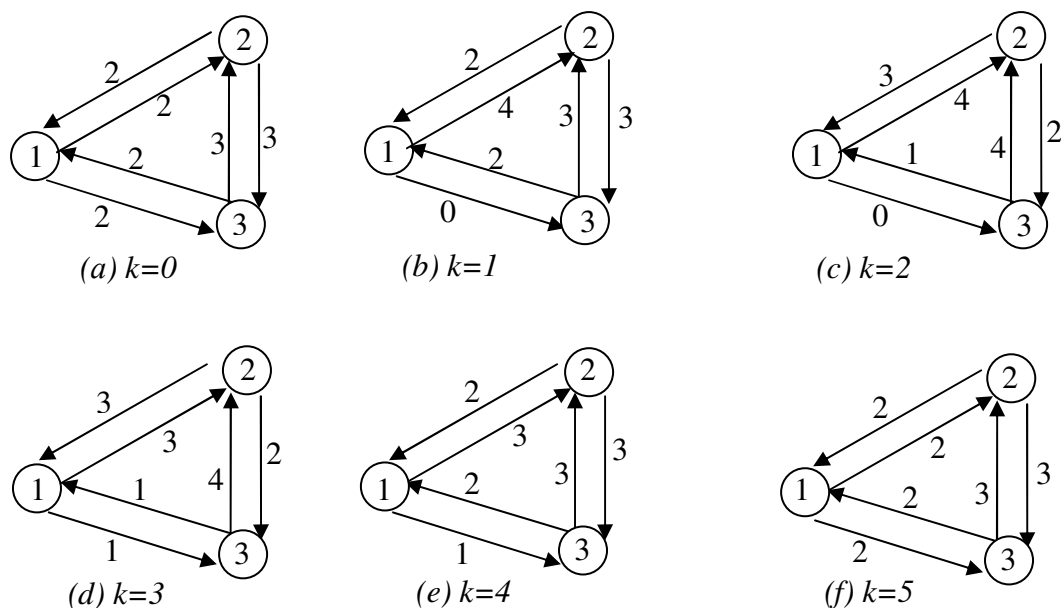


Рис. 2.1. Возвращение системы в устойчивое состояние

В следующий момент времени $k=2$ страна 2 перераспределяет свой ресурс, полагая $x_{21}=3$, $x_{23}=2$, чтобы минимизировать максимальную угрозу, опираясь на распределение ресурса в момент $k=1$. Страна 3 также меняет распределение своего ресурса, опираясь на распределение ресурса своими соседями в момент $k=1$. В результате при $k=2$ она полагает $x_{31}=1$, $x_{32}=4$.

В следующий момент $k=3$ стране 1 для уменьшения максимальной угрозы следует положить $x_{12}=3$, $x_{13}=1$. Странам же 2 и 3 перераспределять свой ресурс не нужно, т.к. это не приведет к уменьшению максимальной угрозы.

В момент $k=4$ страна 1 не меняет распределение своего ресурса. Страна 2 полагает $x_{21}=2$, $x_{23}=3$, тем самым, уменьшая максимальную угрозу с 2 до 1. А страна 3 для уменьшения максимальной угрозы (или точнее для увеличения минимального превосходства) полагает $x_{31}=2$, $x_{32}=3$.

На шаге $k=5$ только страна 1 перераспределяет свои ресурсы, приводя систему в начальное состояние равновесия.

Пример 2.2. Пусть взаимоотношения стран отражает граф, изображенный на рис. 2.

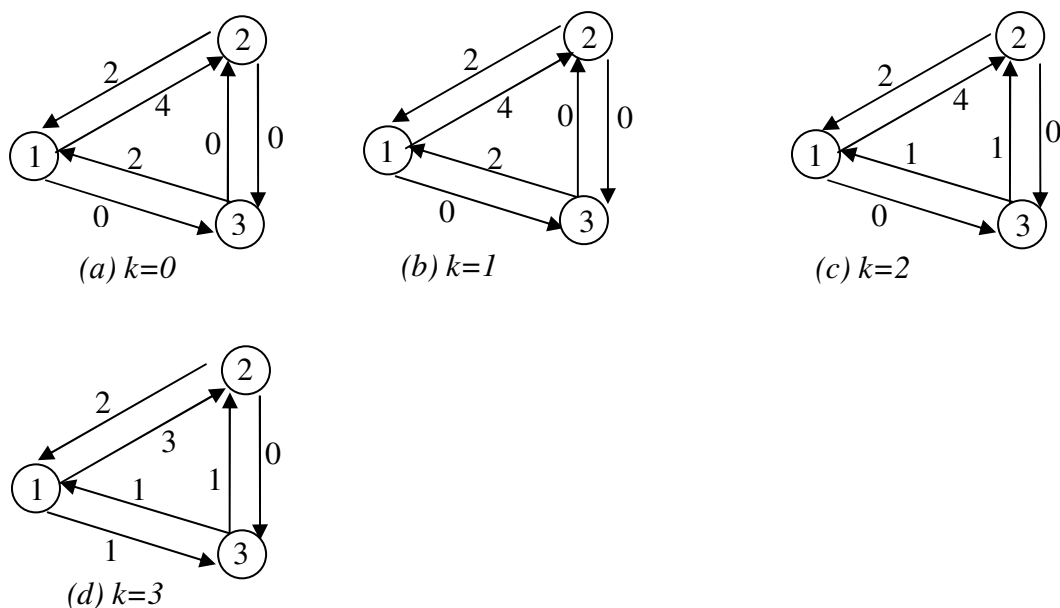


Рис. 2.2. Возвращение системы в неустойчивое состояние

Здесь вершина 1 имеет ресурс, равный 4, а вершины 2 и 3 имеют ресурсы в объеме 2 единиц каждая. В случае (a) $k=0$ изображено начальное равновесное состояние.

Допустим, в момент $k=1$, страна 1 изменила распределение своего ресурса, положив $x_{12}=4$, $x_{13}=0$ и нарушив равновесие.

В следующий момент времени $k=2$ страна 2 не может перераспределить свой ресурс, чтобы уменьшить максимальную угрозу, поэтому x_{21} и x_{23} не меняются. Страна 3 меняет распределение своего ресурса, опираясь на распределение ресурса своими соседями в момент $k=1$. В результате она полагает $x_{31}=x_{32}=1$.

В следующий момент $k=3$ ни одной из стран нет необходимости перераспределять свой ресурс, так как это не приведет к уменьшению максимальной угрозы.

В результате система попала в состояние, отличное от начального состояния равновесия. Более того, это уже не равновесие, так как страна 2 испытывает угрозу как от страны 1, так и от страны 3.

Из приведенных выше примеров видно, что состояния равновесия существуют. Некоторые изменения не приводят к смене состояния системы.

При других изменениях из одного состояния равновесия можно попасть в другое. Можно также прийти в предельное состояние, когда равновесия нет. Причина этого в том, что ресурсы могут принимать только целые значения.

2.2 Линейная модель конфликтных взаимодействий

Рассмотрим модель системы, в которой взаимоотношения любой пары элементов могут быть графически представлены в виде ребра графа и зависят от величины ресурса, направленного друг на друга. Если ресурс каждого элемента системы ограничен, то в зависимости от его распределения по инцидентным дугам и стратегии поведения элементов можно оценить взаимоотношения каждой пары элементов.

В данном разделе рассмотрен случай, когда функция качества взаимоотношения пары элементов является оценкой угрозы от соседа. Другими словами, между элементами существует чистый конфликт или чистая конкуренция. Если задать некоторое начальное распределение ресурсного взаимодействия, то на каждом последующем шаге происходит перераспределение ресурса с целью минимизации максимальной угрозы от смежных элементов.

Исследована динамика изменения состояний системы. Предложен эффективный аппарат поиска предельных и равновесных состояний системы. Для полного графа взаимоотношений найдено аналитическое задание как предельного, так и равновесного состояний.

Рассмотрим граф $G=(V,E)$, $|V|=n$, в котором каждый элемент $i \in V$ имеет ресурс q_i , $i=1,2,\dots,n$. Система оценочных функций имеет вид $c_{ij}(x,y)=y-x$. Пусть $x_{ij}^{(k)}$ – ресурс элемента i направленный на элемент j на временном шаге k . Полагаем, что $x_{ij}^{(k)}=0$ для всех $(i,j) \notin E$ (в частности, $x_{ii}^{(k)}=0$). Для произвольного шага развития системы $k=0, 1, 2, \dots$ обозначим через $p_i^{(k)} = \sum_{j \in V_i} x_{ji}^{(k)}$ суммарный потенциал (ресурс), направленный на элемент i , а

через $q_i^{(k)} = \sum_{j \in V_i} x_{ij}^{(k)}$ – суммарный потенциал вершины i , который распределен по инцидентным дугам графа на шаге k .

Процесс преобразования состояний системы в течение дискретного времени $k = 0, 1, 2, \dots$ определим рекуррентными соотношениями:

$$x_{ij}^{(k+1)} = x_{ji}^{(k)} - f_i^{(k)}, \quad f_i^{(k)} = \frac{p_i^{(k)} - q_i^{(k)}}{d_i}, \quad \forall (i,j) \in E; \quad x_{ii}^{(k)} = 0; \quad x_{ij}^{(k)} = 0, \quad \forall (i,j) \notin E, \quad (2.4)$$

где d_i – степень вершины $i=1, \dots, n$. Нетрудно заметить, что такой итерационный процесс эквивалентен решению следующей задачи

$$\max_{j \in V_i} c_{ij} (x_{ij}, x_{ji}) \rightarrow \min_{\{x_{ij}\}};$$

$$\sum_{j \in V_i} x_{ij} = q_i;$$

Соотношение (2.4) определяет последовательность состояний $\{X^{(k)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, свойства которых будут изучены ниже.

Определение 2.3. Для каждого шага k определим следующие понятия:

- $F^{(k)} = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_n^{(k)})$ – вектор сил стабилизации;
- $P^{(k)} = (p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)})$ – вектор противостояния.

Лемма 2.1. Для всех векторов $F^{(k)}$, $k=0,1,2,\dots$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n d_i f_i^{(k)} = 0. \quad (2.5)$$

Доказательство. По определению $d_i f_i^{(k)} = p_i^{(k)} - q_i^{(k)}$. Кроме того, из условия распределения каждой вершиной *всего* своего ресурса, следует, что

$$\sum_{i=1}^n p_i^{(k)} = \sum_{i=1}^n q_i^{(k)} = C = \text{const.}$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n d_i f_i^{(k)} = \sum_{i=1}^n p_i^{(k)} - \sum_{i=1}^n q_i^{(k)} = C - C = 0.$$

Лемма 2.2. В результате преобразований (2.4) потенциал $q_i^{(k)}$ любого элемента i остается неизменным, т.е. $q_i^{(0)} = q_i^{(1)} = \dots = q_i^{(k)} = q_i$, $i=1, \dots, n$.

Доказательство. В самом деле,

$$q_i^{(k+1)} = \sum_{j \in V_i} x_{ij}^{(k+1)} = \sum_{j \in V_i} (x_{ji}^{(k)} - f_i^{(k)}) = \sum_{j \in V_i} x_{ji}^{(k)} - d_i f_i^{(k)} = p_i^{(k)} - d_i f_i^{(k)} = q_i^{(k)}.$$

Что и требовалось.

Следствие 2.1. Справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \in V_i} f_j^{(k)} = 0. \quad (2.6)$$

Доказательство. Так как потенциал произвольной вершины $q_i^{(k)}$ не меняется, то верхний индекс можно опустить. Поэтому

$$\begin{aligned} d_i f_i^{(k)} &= p_i^{(k)} - q_i = \sum_{j \in V_i} (x_{ji}^{(k)} - x_{ij}^{(k)}) = \sum_{j \in V_i} (x_{ij}^{(k-1)} - f_j^{(k-1)}) - \sum_{j \in V_i} (x_{ji}^{(k-1)} - f_i^{(k-1)}) = \\ &= q_i - \sum_{j \in V_i} f_j^{(k-1)} - p_i^{(k-1)} + d_i f_i^{(k-1)} = - \sum_{j \in V_i} f_j^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $d_i f_i^{(k)} = - \sum_{j \in V_i} f_j^{(k-1)}$. Просуммировав последние равенства

по $i=1, \dots, n$, с учетом (2.5) получаем (2.6).

Пусть G полный граф, и состояние системы характеризуется начальным набором весов

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12}^{(0)} & \dots & x_{1n}^{(0)} \\ x_{21}^{(0)} & 0 & \dots & x_{2n}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}^{(0)} & x_{n2}^{(0)} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.3. Для произвольного $i=1, 2, \dots, n$ последовательность $\{f_i^{(k)}\}$, $k=0, 1, 2, \dots$, является геометрической прогрессией со знаменателем $g=1/(n-1)$.

Доказательство. Поскольку степени всех вершин равны $|V_i|=n-1$, справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned}
f_i^{(k+1)} &= \frac{1}{n-1} (p_i^{(k+1)} - q_i) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j \in V_i} x_{ji}^{(k+1)} - \sum_{j \in V_i} x_{ij}^{(k+1)} \right) = \\
&= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j \in V_i} (x_{ij}^{(k)} - f_j^{(k)}) - \sum_{j \in V_i} (x_{ji}^{(k)} - f_i^{(k)}) \right] = \\
&= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j \in V_i} x_{ij}^{(k)} - \sum_{j \in V_i} f_j^{(k)} - \sum_{j \in V_i} x_{ji}^{(k)} + (n-1) f_i^{(k)} \right] = \\
&= \frac{1}{n-1} [q_i + f_i^{(k)} - p_i^{(k)} + (n-1) f_i^{(k)}] = \frac{1}{n-1} f_i^{(k)}.
\end{aligned}$$

Утверждение леммы доказано.

Следствие 2.2. *Имеют место следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_1^{(k)}, \dots, f_n^{(k)}) = (0, \dots, 0);$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (p_1^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}) = (q_1, \dots, q_n).$$

Приведенные выше результаты позволяют исследовать свойства предельных состояний и находить устойчивые состояния системы S . Введем следующее

Определение 2.4. *Под устойчивым состоянием системы S будем понимать такое распределение ресурсов $X=(x_{ij})$, которое не меняется в результате преобразований (2.4).*

Теорема 2.1. *Последовательность $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}, \dots$ определяет два предельных состояния: четное X_e^* и нечетное X_o^* , удовлетворяющих соотношениям:*

$$(a) X_e^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(2k)} = X^*; \quad X_o^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(2k+1)} = (X^*)^T;$$

(b) элементы предельной матрицы весов $X^* = \|x_{ij}^*\|$ имеют вид:

$$x_{ij}^* = x_{ij}^{(0)} - f_i^{(0)} \frac{n-1}{n(n-1)} - f_j^{(0)} \frac{(n-1)^2}{n(n-2)}.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение (b). По *Лемме 2.3* имеем, что

$$F^{(k)} = (f_1^{(k)}, \dots, f_n^{(k)}) = \frac{1}{(n-1)^k} (f_1^{(0)}, \dots, f_n^{(0)}).$$

Из (2.4) получаем, что $x_{ij}^{(k+1)} = x_{ji}^{(k)} - f_i^{(k)}$ и $x_{ji}^{(k)} = x_{ij}^{(k-1)} - f_j^{(k-1)}$. Поэтому после двух преобразований (2.4) имеем

$$x_{ij}^{(2)} = x_{ij}^0 - f_j^{(0)} - f_i^{(1)} = x_{ij}^0 - f_j^{(0)} - \frac{1}{n-1} f_i^{(0)}.$$

После $2k$ шагов имеем

$$x_{ij}^{(2k)} = x_{ij}^{(0)} - f_j^{(0)} (1+g+g^2+\dots+g^k) - \frac{1}{n-1} f_i^{(0)} (1+g+g^2+\dots+g^k),$$

где $g = \frac{1}{(n-1)^2}$. Переходя к предельному значению геометрической прогрессии, получаем:

$$\begin{aligned} x_{ij}^* &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{ij}^{(2k)} = x_{ij}^{(0)} - f_j^{(0)} \frac{1}{1-g} - \frac{1}{n-1} f_i^{(0)} \frac{1}{1-g} = \\ &= x_{ij}^{(0)} - f_j^{(0)} \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2 - 1} - f_i^{(0)} \frac{(n-1)}{(n-1)^2 - 1} = x_{ij}^{(0)} - \frac{n-1}{n(n-2)} [(n-1) f_j^{(0)} - f_i^{(0)}]. \end{aligned}$$

Докажем (a). Так как $X_\varepsilon^* = X^*$, то первая часть утверждения доказана.

Покажем, что $X_o^* = (X^*)^T$. Это можно сделать, вычислив $x_{ij}^{(2k+1)}$ и перейдя к пределу. Из (4) имеем $x_{ij}^{(2k+1)} = x_{ji}^{(2k)} - f_i^{(2k)}$. Учитывая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ji}^{(2k)} = x_{ji}^*$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f_i^{(0)}}{(n-1)^k} = 0, \text{ получим } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{ij}^{(2k+1)} = x_{ji}^* - \lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(2k)} = x_{ji}^*.$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 2.2. Множество состояний системы S с фиксированными потенциалами элементов (вершин) $(q_1^{(0)}, \dots, q_n^{(0)})$ всегда имеет устойчивое состояние $\bar{X} = \frac{1}{2}(X^* + X^{*T})$ и веса вычисляются по формулам

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1}{2} (x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2} \frac{n-1}{n-2} (f_j^{(0)} + f_i^{(0)}).$$

Доказательство. Учитывая утверждение (a) Теоремы 1, устойчивость состояния очевидна. Докажем приведенные формулы. Согласно (b) Теоремы 1, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{ij} &= \frac{1}{2} (x_{ij}^* + x_{ji}^*) = \frac{1}{2} (x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)^2}{n(n-2)} + \frac{n-1}{n(n-2)} \right) (f_j^{(0)} + f_i^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{2} (x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2} \frac{n-1}{n-2} (f_j^{(0)} + f_i^{(0)}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим особенности поведения системы при $n=3$. В первую очередь нас будет интересовать зависимость предельных и устойчивых состояний от начальных условий, а также количество этих состояний.

По **Теореме 2.2** элементы матрицы \bar{X} , определяющей устойчивое состояние, имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{ij} &= \frac{1}{2} (x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2} \frac{n-1}{n-2} (f_j^{(0)} + f_i^{(0)}) = \frac{1}{2} (x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)}) - \frac{1}{2} (p_j^{(0)} - q_j^{(0)} + p_i^{(0)} - q_i^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{2} (q_i^{(0)} + q_j^{(0)} + x_{ij}^{(0)} + x_{ji}^{(0)} - x_{ij}^{(0)} - x_{ij}^{(0)} - x_{ji}^{(0)} - x_{li}^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{2} (q_i^{(0)} + q_j^{(0)} - x_{ij}^{(0)} - x_{li}^{(0)}) = \frac{1}{2} (q_i^{(0)} + q_j^{(0)} - q_l^{(0)}), \end{aligned}$$

где $l \neq i, j$.

С учетом последнего сформулируем

Следствие 2.3. При $n=3$ модель имеет устойчивое состояние, определяющееся через потенциалы q_1, q_2, q_3 :

$$\bar{X} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (q_1 + q_2 - q_3) & (q_1 + q_3 - q_2) \\ (q_1 + q_2 - q_3) & 0 & (q_2 + q_3 - q_1) \\ (q_1 + q_3 - q_2) & q_2 + q_3 - q_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим предельное состояние X^* . Можно положить $x_{ij}^* = \bar{x}_{ij} - \varepsilon$ и $x_{ji}^* = \bar{x}_{ij} + \varepsilon$, где $\varepsilon = \bar{x}_{ij} - x_{ij}^*$. Заметим, что приведенные соотношения верны для

любой пары индексов $i, j=1, 2, 3, i \neq j$, т.е. ε не зависит от индексов. Действительно, $x_{ij}^* = q_i - x_{il}^*$, $\bar{x}_{ij} = q_i - \bar{x}_{il}$ и, как следствие, $\varepsilon = \bar{x}_{ij} - x_{ij}^* = q_i - \bar{x}_{il} - q_i + x_{il}^* = x_{il}^* - \bar{x}_{il}$. То есть $x_{il}^* = \bar{x}_{il} + \varepsilon$. Нетрудно показать также, что $x_{li}^* = \bar{x}_{li} - \varepsilon$, $x_{jl}^* = \bar{x}_{jl} - \varepsilon$ и $x_{lj}^* = \bar{x}_{lj} + \varepsilon$.

Тем самым доказано

Следствие 2.4. При $n=3$ матрица X^* , определяющая предельное состояние, зависит от одного параметра и имеет вид:

$$X^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (\bar{x}_{12} - \varepsilon) & (\bar{x}_{13} + \varepsilon) \\ (\bar{x}_{12} + \varepsilon) & 0 & (\bar{x}_{23} - \varepsilon) \\ (\bar{x}_{13} - \varepsilon) & (\bar{x}_{23} + \varepsilon) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Можно считать ε отклонением предельного состояния X^* от устойчивого состояния \bar{X} . В связи с этим возникают два естественных вопроса:

- (1) Как зависят предельные состояния от начальных условий?
- (2) При каких начальных условиях $X^{(0)}$ предельное состояние будет устойчивым, т.е. $\varepsilon=0, X^* = \bar{X}$?

Учитывая, что суммы элементов строк матрицы $X^{(0)}$ являются потенциалами вершин, начальное состояние зависит от трех параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и представимо в виде:

$$X^{(0)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & (q_1 - \varepsilon_1) & (q_1 + \varepsilon_1) \\ (q_2 + \varepsilon_2) & 0 & (q_2 - \varepsilon_2) \\ (q_3 - \varepsilon_3) & (q_3 + \varepsilon_3) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Теорема 2.3. Предельное распределение весов имеет вид (2.7) тогда и только тогда, когда для начального распределения весов (2.8) справедливо равенство

$$\varepsilon = \frac{1}{6} |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3|.$$

Предельное состояние является устойчивым, т.е. $X^* = \bar{X}$, если $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$.

Доказательство. Определим силу стабилизации по начальному распределению (2.8):

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= \frac{1}{2} (p_1^{(0)} - q_1, p_2^{(0)} - q_2, p_3^{(0)} - q_3) = \\ &= \frac{1}{2} (q_2 + q_3 - 2q_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3, q_1 + q_3 - 2q_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_3, q_1 + q_2 - 2q_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Применяя соотношения (b) **Теоремы 2.1**, получаем

$$\begin{aligned} x_{12}^* &= \frac{q_1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{1}{4} (q_1 + q_3 - 2q_2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_3) \frac{4}{3} - \frac{1}{8} (q_2 + q_3 - 2q_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \frac{4}{3} = \\ &= \frac{q_1}{2} - \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{1}{6} (2q_1 + 2q_3 - 4q_2 - 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 + q_2 + q_3 - 2q_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \\ &= \frac{1}{2} (q_1 + q_2 - q_3) - \frac{1}{6} (3q_3 + 3q_2 - 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_3) = \\ &= \frac{1}{2} (q_1 + q_2 - q_3) - \frac{1}{6} (\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_3) = \bar{x}_{12} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются остальные элементы:

$$x_{21}^* = \bar{x}_{12} + \varepsilon; x_{13}^* = \bar{x}_{13} + \varepsilon; x_{23}^* = \bar{x}_{23} - \varepsilon; x_{31}^* = \bar{x}_{13} - \varepsilon; x_{32}^* = \bar{x}_{23} + \varepsilon.$$

Доказательство второй части **Теоремы 2.3** очевидно следует из доказанного выше результата. Теорема доказана полностью.

Выразим ε_1 , ε_2 и ε_3 через начальные условия:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{x_{12}^{(0)} + x_{13}^{(0)}}{2} - x_{12}^{(0)} = \frac{x_{13}^{(0)} - x_{12}^{(0)}}{2}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{x_{23}^{(0)} + x_{21}^{(0)}}{2} - x_{23}^{(0)} = \frac{x_{21}^{(0)} - x_{23}^{(0)}}{2}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{x_{31}^{(0)} + x_{32}^{(0)}}{2} - x_{13}^{(0)} = \frac{x_{32}^{(0)} - x_{31}^{(0)}}{2}. \end{aligned}$$

Это позволяет определить отклонение ε через элементы начального состояния:

$$\varepsilon = \frac{1}{6} |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3| = \frac{1}{12} |x_{13}^{(0)} + x_{32}^{(0)} + x_{21}^{(0)} - x_{12}^{(0)} - x_{23}^{(0)} - x_{31}^{(0)}|.$$

В результате получаем следующее закономерное утверждение.

Следствие 2.5. В случае $n=3$ отклонение предельного состояния от устойчивого состояния определяется через начальное распределение весов дуг.

2.3 Моделирование отношений двух коалиций

Пусть теперь задан полный *двудольный* граф взаимоотношений G . Множество вершин первой доли обозначим через $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, множество вершин второй доли – через $V = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$. Между вершинами (элементами) разных долей установлены отношения, которые, как и прежде, характеризуются величинами весов, обозначим их x_{ij} и y_{ji} , $i \in U$, $j \in V$. Величина x_{ij} отражает воздействие вершины $u_i \in U$ на вершину $v_j \in V$. А величина y_{ji} – воздействие $v_j \in V$ на $u_i \in U$. Предположим, что в течение времени $k=0,1,2,\dots$ система меняет величины $x_{ij}^{(k)}$ и $y_{ji}^{(k)}$ по некоторому правилу. Каждая вершина $u_i \in U$ распределяет свой потенциал, который здесь обозначим через $xq_i^{(k)} = \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(k)}$, а вершина $v_j \in V$ – потенциал $yq_j^{(k)} = \sum_{i=1}^l y_{ji}^{(k)}$ по инцидентным ребрам. С другой стороны, каждый элемент u_i испытывает на себе суммарное воздействие $xp_i^{(k)} = \sum_{j=1}^m y_{ji}^{(k)}$, а элемент v_j – воздействие $yp_j^{(k)} = \sum_{i=1}^l x_{ij}^{(k)}$ со стороны элементов другой доли.

Состояние системы в момент времени k представляется квадратной матрицей

$$X^{(k)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & x_{11}^{(k)} & x_{12}^{(k)} & \dots & x_{1m}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x_{l1}^{(k)} & x_{l2}^{(k)} & \dots & x_{lm}^{(k)} \\ \hline y_{11}^{(k)} & y_{12}^{(k)} & \dots & y_{1l}^{(k)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m1}^{(k)} & y_{m2}^{(k)} & \dots & y_{ml}^{(k)} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right),$$

В дальнейшем нам будут нужны обозначения для четырех векторов:

$$xp^{(k)} = (xp_1^{(k)}, xp_2^{(k)}, \dots, xp_l^{(k)}); xq^{(k)} = (xq_1^{(k)}, xq_2^{(k)}, \dots, xq_l^{(k)});$$

$$yp^{(k)} = (yp_1^{(k)}, yp_2^{(k)}, \dots, yp_m^{(k)}); yq^{(k)} = (yq_1^{(k)}, yq_2^{(k)}, \dots, yq_m^{(k)})$$

и значения потенциалов для множеств U и V (коалиций):

$$Q_1 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(k)}; Q_2 = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m y_{ji}^{(k)}.$$

Очевидно, величины Q_1 и Q_2 характеризуют общее воздействие одного множества элементов на другое, или ресурс (потенциал) соответствующих множеств. Обозначим через $\Delta = Q_1 - Q_2$ величину, которую можно назвать превосходством первой стороны над второй.

Предположим, что система меняет свои состояния (перераспределяя ресурсы вершин по инцидентным ребрам) рекуррентно по известному закону $X^{(k+1)} = \Phi(X^{(k)})$. Как и прежде одним из основных вопросов является вопрос о поведении системы. В частности, существует ли устойчивое состояние системы X , для которого выполняется условие $X = \Phi(X)$? Возможны ли циклические состояния X с периодом d , для которого выполняется условие $X = \Phi^d(X)$?

Ниже будет рассмотрено два вида взаимодействий (законов развития системы), допускающих естественные содержательные интерпретации: военное противостояние, рыночная конкуренция, экономическое взаимодействие и др. Определяя формально характер взаимодействия и стратегию «участников», будут изучены свойства меняющихся состояний системы и получены аналитические формулы для состояний $X^{(k)}$, в том числе для предельных состояний (при $k \rightarrow \infty$).

2.3.1 Антагонистические отношения

Приведем описание характера взаимодействий, которые далее в этом разделе будут определены формальными рекуррентными преобразованиями:

(A1) в момент времени k каждый элемент одной доли (коалиции) u_i оценивает свои отношения с элементом другой доли v_j (угрозу со стороны v_j) величиной $c_{ij}^{(k)} = y_{ji}^{(k)} - x_{ij}^{(k)}$;

(A2) в момент времени k все элементы системы «перестраивают» свои отношения одновременно, основываясь на отношениях предыдущего шага $k-1$;

(A3) каждый элемент перераспределяет свой ресурс таким образом, чтобы *минимизировать максимальную угрозу со стороны смежных элементов*.

Формально эти правила могут быть реализованы рекуррентными отношениями:

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(k+1)} &= y_{ji}^{(k)} - f_i^{(k)}; \quad y_{ji}^{(k+1)} = x_{ij}^{(k)} - \varphi_j^{(k)}, \\ f_i^{(k)} &= \frac{1}{m} (xp_i^{(k)} - xq_i^{(k)}); \quad \varphi_j^{(k)} = \frac{1}{l} (yp_j^{(k)} - yq_j^{(k)}); \quad i \in \{1, 2, \dots, l\}; \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Легко проверить, что данные преобразования сохраняют исходные потенциалы вершин, т.е. имеет место

Лемма 2.4. *На каждом шаге преобразования системы (2.9) верны соотношения:*

$$\begin{aligned} xq_i^{(k)} &= xq_i^{(0)} \quad k=1, 2, \dots, \quad i \in U; \\ yq_j^{(k)} &= yq_j^{(0)} \quad k=1, 2, \dots, \quad j \in V. \end{aligned}$$

Определенные в преобразованиях (2.9) величины $f_i^{(k)}$ и $\varphi_j^{(k)}$ назовем *силами стабилизации (или взаимодействия)*. Очевидно выполнение соотношения:

$$m \sum_{i=1}^l f_i^{(k)} + l \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(k)} = 0$$

для произвольного k . Следствием этого являются два равенства, которые будут использоваться в дальнейшем:

$$m/l \sum_{i=1}^l f_i^{(k)} = - \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(k)}, \quad (2.10)$$

$$l/m \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(k)} = - \sum_{i=1}^l f_i^{(k)}. \quad (2.11)$$

Лемма 2.5. *Силы взаимодействия системы в результате преобразований (2.9) стабилизируются, начиная с шага $k=1$ и равны:*

$$f_i^{(k)} = \frac{1}{lm} (Q_2 - Q_1) = - \frac{1}{lm} \Delta,$$

$$\varphi_j^{(k)} = \frac{1}{lm} (Q_1 - Q_2) = \frac{1}{lm} \Delta,$$

т.е. $f_i^{(k)} = -\varphi_j^{(k)}$, $i \in U$; $j \in V$, $k \in \{1, 2, 3 \dots\}$.

Доказательство. Покажем утверждение для $f_i^{(k)}$. Учитывая (2.9), получаем:

$$\begin{aligned} f_i^{(1)} &= \frac{1}{m} (xp_i^{(1)} - xq_i^{(1)}) = \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m y_{ji}^{(1)} - xq_i^{(0)} \right) = \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m (x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)}) - xq_i^{(0)} \right) = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(0)} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(0)} - \frac{1}{m} xq_i^{(0)} = - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(0)}. \end{aligned}$$

Используя соотношение (2.10), продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} f_i^{(1)} &= \frac{1}{m} \left(m/l \sum_{i=1}^l f_i^{(0)} \right) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l f_i^{(0)} = \frac{1}{lm} \sum_{i=1}^l (xp_i^{(0)} - xq_i^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{lm} \left(\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m y_{ji}^{(0)} - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(0)} \right) = \frac{1}{lm} (Q_2 - Q_1) = - \frac{1}{lm} \Delta. \end{aligned}$$

Следовательно, значение $f_i^{(k)}$ не зависит от номера i и от шага k . Что и требовалось показать.

Сделаем аналогичные вычисления для $\varphi_j^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \varphi_j^{(1)} &= \frac{1}{l} (yp_j^{(1)} - yq_j^{(1)}) = \frac{1}{l} \left(\sum_{i=1}^l x_{ij}^{(1)} - yq_j^{(0)} \right) = \frac{1}{l} \left(\sum_{i=1}^l (y_{ji}^{(0)} - f_i^{(0)}) - yq_j^{(0)} \right) = \\ &= \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l y_{ji}^{(0)} - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l f_i^{(0)} - \frac{1}{l} yq_j^{(0)} = - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l f_i^{(0)}. \end{aligned}$$

Используя соотношение (2.11), получаем:

$$\begin{aligned}\varphi_j^{(0)} &= \frac{1}{l} l/m \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(0)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(0)} = \frac{1}{lm} \sum_{j=1}^m (yp_j^{(0)} - yq_j^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{lm} \left(\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(0)} - \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m y_{ji}^{(0)} \right) = \frac{1}{lm} (Q_1 - Q_2) = + \frac{1}{lm} \Delta.\end{aligned}$$

Что и требовалось. **Лемма 2.5** полностью доказана.

Перейдем к исследованию свойств состояний системы.

Теорема 2.4. При произвольных начальных условиях $X^{(0)}$ состояние системы взаимодействий на полном двудольном графе G , преобразующееся по формулам (2.9), имеет в общем случае два циклических состояния с периодом 2.

Доказательство. Проведем вычисления для $k=1,2$.

$$x_{ij}^{(1)} = y_{ji}^{(0)} - f_i^{(0)} = y_{ji}^{(0)} - \frac{1}{m} (xp_i^{(0)} - xq_i^{(0)});$$

$$y_{ji}^{(1)} = x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)} = x_{ij}^{(0)} - \frac{1}{l} (yp_j^{(0)} - yq_j^{(0)});$$

$$x_{ij}^{(2)} = y_{ji}^{(1)} - f_i^{(1)} = x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)} - \frac{1}{lm} (Q_2 - Q_1) = x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)} + \frac{1}{lm} \Delta;$$

$$y_{ji}^{(2)} = x_{ij}^{(1)} - \varphi_j^{(1)} = y_{ji}^{(0)} - f_i^{(0)} - \frac{1}{lm} (Q_1 - Q_2) = y_{ji}^{(0)} - f_i^{(0)} - \frac{1}{lm} \Delta.$$

Заметим, что в двух последних случаях использовалась **Лемма 5**.

Докажем свойство цикличности решения. Так как

$$f_i^{(k)} = - \frac{1}{lm} \Delta, \quad \varphi_j^{(k)} = + \frac{1}{lm} \Delta \text{ при } k \geq 1,$$

то

$$\begin{aligned}x_{ij}^{(k+2)} &= y_{ji}^{(k+1)} - f_i^{(k+1)} = x_{ij}^{(k)} - \varphi_j^{(k)} - f_i^{(k+1)} = x_{ij}^{(k)} - \frac{1}{lm} \Delta + \frac{1}{lm} \Delta = \\ &= x_{ij}^{(k)} = \begin{cases} y_{ji}^{(0)} - f_i^{(0)}, & k - \text{нечетное;} \\ x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)} + \frac{1}{lm} \Delta, & k - \text{четное.} \end{cases}\end{aligned}$$

Аналогично,

$$y_{ji}^{(k+2)} = y_{ji}^{(k)} = \begin{cases} x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)}, & k - \text{нечетное;} \\ y_{ji}^{(0)} - f_i^{(0)} - \frac{1}{lm} \Delta, & k - \text{четное.} \end{cases}$$

Теорема 2.4 полностью доказана.

Следствие 2.6. При равенстве потенциалов Q_1 и Q_2 , т.е. $\Delta=0$, циклические решения являются взаимно транспонированными: $X^{(k+1)} = \Phi(X^{(k)}) = (X^{(k)})^T$, $k=1,2,\dots$.

Теорема 2.5. В условиях Теоремы 4 два циклических решения $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ определяют устойчивое состояние $X^* = \frac{1}{2} (X^{(1)} + X^{(2)})$.

Доказательство. Вычислим элементы решения X^* :

$$x_{ij}^* = \frac{1}{2} (y_{ji}^{(0)} + x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)} - f_i^{(0)} + \frac{1}{lm} \Delta);$$

$$y_{ji}^* = \frac{1}{2} (y_{ji}^{(0)} + x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)} - f_i^{(0)} - \frac{1}{lm} \Delta).$$

Проверим свойство устойчивости $\Phi(X^*) = X^*$. Пусть $\Phi(X^*) = X^{**}$, тогда

$$x_{ij}^{**} = y_{ji}^{**} + \frac{1}{lm} \Delta = \frac{1}{2} (y_{ji}^{(0)} + x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)} - f_i^{(0)} - \frac{1}{lm} \Delta) + \frac{1}{lm} \Delta = x_{ij}^*;$$

$$y_{ji}^{**} = x_{ij}^* - \frac{1}{lm} \Delta = \frac{1}{2} (y_{ji}^{(0)} + x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)} - f_i^{(0)} + \frac{1}{lm} \Delta) - \frac{1}{lm} \Delta = y_{ji}^*.$$

Что и требовалось показать. **Теорема 2.5** доказана.

Следствие 2.7. В случае $\Delta=0$ устойчивое состояние X^* представляется симметричной матрицей.

3.3.2. Сотрудничество коалиций

Дадим описание характера взаимодействий:

(Б1) в момент времени k элементы u_i и v_j оценивают свои отношения по суммарному количеству ресурса $c_{ij}^{(k)} = c_{ji}^{(k)} = x_{ij}^{(k)} + x_{ji}^{(k)}$;

(Б2) на каждом шаге все элементы системы «перестраивают» свои отношения одновременно, основываясь на отношениях предыдущего шага;

(Б3) каждый элемент перераспределяет свои средства так, чтобы *максимизировать минимум ресурса* по всем инцидентным ребрам.

Такие взаимодействия можно задать следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(k+1)} &= -y_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, & f_i^{(k)} &= \frac{1}{m} (xp_i^{(k)} + xq_i^{(k)}); \\ y_{ji}^{(k+1)} &= -x_{ij}^{(k)} + \varphi_j^{(k)}, & \varphi_j^{(k)} &= \frac{1}{l} (yp_j^{(k)} + yq_j^{(k)}); \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$i \in U; j \in V.$$

Лемма 2.6. На каждом шаге $k=1,2,3,\dots$ преобразование (2.12) исходные потенциалы вершин сохраняются, т.е.

$$\begin{aligned} xq_i^{(k)} &= xq_i^{(0)} \quad \forall k \in \mathbb{N}, i \in U; \\ yq_j^{(k)} &= yq_j^{(0)} \quad \forall k \in \mathbb{N}, j \in V. \end{aligned}$$

Доказательство. Покажем утверждение для $xq_i^{(k)}$. Учитывая соотношения (12), получаем:

$$\begin{aligned} xq_i^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(k+1)} = \sum_{j=1}^m (-y_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}) = \sum_{j=1}^m (-y_{ji}^{(k)} + \frac{1}{m} \cdot m(xp_i^{(k)} + xq_i^{(k)})) = \\ &= -\sum_{j=1}^m y_{ji}^{(k)} + xp_i^{(k)} + xq_i^{(k)} = -xp_i^{(k)} + xp_i^{(k)} + xq_i^{(k)} = xq_i^{(k)}. \end{aligned}$$

Повторяя процедуру расчета несколько раз, получим требуемое соотношение:

$$xq_i^{(k+1)} = xq_i^{(k)} = xq_i^{(k-1)} = \dots = xq_i^{(0)}.$$

Далее докажем важную вспомогательную лемму.

Лемма 2.7. Для произвольного k выполняются соотношения:

$$\sum_{i=1}^l f_i^{(k)} = \frac{1}{m} (Q_1 + Q_2) = \frac{Q}{m}, \quad (2.13)$$

$$\sum_{j=1}^m \varphi_j^{(k)} = \frac{1}{l} (Q_1 + Q_2) = \frac{Q}{l}, \quad (2.14)$$

$$m \sum_{i=1}^l f_i^{(k)} + l \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(k)} = 2(Q_1 + Q_2) = 2Q, \quad (2.15)$$

где Q есть суммарный потенциал двух коалиций.

Доказательство. Проведем вычисления:

$$\sum_{i=1}^l f_i^{(k)} = \sum_{i=1}^l \frac{1}{m} (xp_i^{(k)} + xq_i^{(k)}) = \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^m y_{ji}^{(k)} + \sum_{j=1}^m x_{ij}^{(k)} \right) \right) = \frac{1}{m} (Q_1 + Q_2).$$

Соотношение (2.13) доказано.

Аналогично доказывается (2.14). Из соотношений (2.13) и (2.14) следует (2.15). **Лемма 2.7** полностью доказана.

Определим характер изменения сил взаимодействий $f_i^{(k)}$ и $\varphi_j^{(k)}$.

Лемма 2.8. Силы взаимодействия системы в результате преобразований (2.12) стабилизируются, начиная с шага $k=1$, и принимают одинаковые значения:

$$f_i^{(k)} = \varphi_j^{(k)} = \delta = \frac{Q}{ml}, \quad i \in U; j \in V; k \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Доказательство. Учитывая **Лемму 2.6**, достаточно доказать **Лемму 2.8** при $k=1$. Для $f_i^{(1)}$ получаем:

$$\begin{aligned} f_i^{(1)} &= \frac{1}{m} (xp_i^{(1)} + xq_i^{(1)}) = \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m y_{ji}^{(1)} + xq_i^{(0)} \right) = \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^m (-x_{ij}^{(0)} + \varphi_j^{(0)}) + xq_i^{(0)} \right) = \\ &= \frac{1}{m} (-xq_i^{(0)} + \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(0)} + xq_i^{(0)}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \varphi_j^{(0)} = \frac{Q}{ml}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $\varphi_j^{(1)} = \frac{Q}{ml}$. Что и требовалось.

Сделаем ряд вычислений, определяющих свойства итерационных состояний. На первом шаге получаем:

$$x_{ij}^{(1)} = -y_{ji}^{(0)} + f_i^{(0)}; \quad y_{ji}^{(1)} = -x_{ij}^{(0)} + \varphi_j^{(0)}. \quad (2.16)$$

При $k=2$ с учётом **Леммы 2.8** имеем

$$\begin{aligned}
x_{ij}^{(2)} &= -y_{ji}^{(1)} + f_i^{(1)} = -(-x_{ij}^{(0)} + \varphi_j^{(0)}) + \delta = x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)} + \delta; \\
y_{ji}^{(2)} &= -x_{ij}^{(1)} + \varphi_j^{(1)} = -(-y_{ji}^{(0)} + f_i^{(0)}) + \delta = y_{ji}^{(0)} - f_i^{(0)} + \delta.
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

Далее докажем цикличность решений (с периодом 2).

$$\begin{aligned}
x_{ij}^{(k+2)} &= -y_{ji}^{(k+1)} + f_i^{(k+1)} = -(-x_{ij}^{(k)} + \varphi_j^{(k)}) + \delta = x_{ij}^{(k)} - \delta + \delta = x_{ij}^{(k)}; \\
y_{ji}^{(k+2)} &= -x_{ij}^{(k+1)} + \varphi_j^{(k+1)} = -(-y_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}) + \delta = y_{ji}^{(k)} - \delta + \delta = y_{ji}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Используя свойство цикличности и соотношения (2.16) и (2.17) можно полностью определить вид решения в каждый момент времени k :

$$\begin{aligned}
x_{ij}^{(k)} &= \begin{cases} -y_{ji}^{(0)} + f_i^{(0)}, & k - \text{нечетное} \\ x_{ij}^{(0)} - \varphi_j^{(0)} + \delta, & k - \text{четное.} \end{cases} \\
y_{ji}^{(k)} &= \begin{cases} -x_{ij}^{(0)} + \varphi_j^{(0)}, & k - \text{нечетное} \\ y_{ji}^{(0)} - f_i^{(0)} + \delta, & k - \text{четное.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что при данных начальных условиях $X^{(0)}$ система имеет два циклических решения $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$.

Полученные циклические решения определяют одно устойчивое решение

$$X^* = \frac{1}{2}(X^{(1)} + X^{(2)}).$$

Действительно,

$$x_{ij}^* = \frac{1}{2} (x_{ij}^{(0)} - y_{ji}^{(0)} + f_i^{(0)} - \varphi_j^{(0)} + \delta); \quad y_{ji}^* = \frac{1}{2} (y_{ji}^{(0)} - x_{ij}^{(0)} + \varphi_j^{(0)} - f_i^{(0)} + \delta) = x_{ij}^* + \delta.$$

Для $X^{**} = \Phi(X^*)$ получаем:

$$\begin{aligned}
x_{ij}^{**} &= -y_{ji}^* + \delta = -(-x_{ij}^* + \delta) + \delta = x_{ij}^*; \\
y_{ji}^{**} &= -x_{ij}^* + \delta = y_{ji}^* - \delta + \delta = y_{ji}^*.
\end{aligned}$$

Что и требовалось показать.

Сформулируем доказанные выше результаты в виде теоремы.

Теорема 2.6. При произвольных начальных условиях $X^{(0)}$ система взаимодействий на двудольном графе G , в которой ресурсы вершин перераспределяются по формулам (2.12), имеет два циклических состояния $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ с периодом 2, определяемых соотношениями (2.16) и (2.17).

Данные циклические состояния определяют устойчивое состояние

$$X^* = \frac{1}{2} (X^{(1)} + X^{(2)}).$$

Сделаем несколько важных замечаний по рассмотренным моделям. Одно из них касается возможности в некоторых случаях для весов $x_{ij}^{(k)}$ принять отрицательные значения. Во-первых, отрицательные показатели часто встречаются в экономике: отрицательная прибыль, долг, поставка как отрицание потребления и т.д. Во-вторых, как показывают следующие примеры, возможны ситуации, когда малыми значениями положительных и отрицательных ресурсных изменений восстанавливается общее равновесие.

Допустим, завод снизил выпуск автомобилей с 5 тысяч в месяц до 3,5 тысяч. Изменение $q = -1,5$ тыс. Другие заводы и поставщики комплектующих деталей тоже изменили в ту или иную сторону свои показатели. Тогда система «устремляется» к новому равновесному состоянию, продолжая находиться в положительной зоне фактических выпусков.

Пример 2.3. Пусть функции угроз имеют вид $c_{ij}(x_{ij}^{(k+1)}, x_{ji}^{(k)}) = x_{ji}^{(k)} - x_{ij}^{(k+1)}$, а веса $x_{ij}^{(k+1)}$ определяются по рекуррентным соотношениям (4). Пусть $q_1=3$, $q_2=4$, $q_3=9$ и начальное распределение ресурсов отражено таблицей

	$x_{ij}^{(0)}$		$f_i^{(0)}$
0	1.5	1.5	1.75
2	0	2	1
4.5	4.5	0	-2.75

В последнем столбце таблицы указаны значения $f_i^{(0)}$. На первом шаге

$k=1$ получаем новые веса

$x_{ij}^{(1)}$		
0	0.25	2.75
0.5	0	3.5
4.25	4.75	0

В пределе получаем равновесное состояние

$\bar{x}_{ij}^{(0)}$			f_i^*
0	-1	4	0
-1	0	5	0
4	5	0	0

с отрицательными весами $\bar{x}_{12} = \bar{x}_{21} = -1$.

Отрицательность же весов имеет интерпретацию. Действительно, если некоторое $x_{ij} < 0$, то это значит, что x_{ij} единиц ранее распределенного ресурса снимается с направления (i,j) . Это легко объяснить на примере. Пусть система, рассмотренная в *Примере 3* с первоначальными ресурсами элементов $q_1=50$, $q_2=30$, $q_3=40$, находилась в состоянии равновесия:

$x_{ij}^{(0)}$		
0	20	30
20	0	10
30	10	0

Допустим, в некоторый момент, ресурс 1-ой вершины увеличился на 3 единицы, 2-ой – на 4 единицы и 3-ей – на 9 единиц. Возникает вопрос: «Как распределить этот дополнительный ресурс, не нарушив равновесия?». Для ответа достаточно найти состояние равновесия в *Примере 3*. Взяв найденное равновесное состояние, получаем, что x_{12} и x_{21} нужно уменьшить на единицы. Таким образом, состояние равновесия с суммарными ресурсами есть следующее распределение :

\bar{x}		
0	19	34
19	0	15
34	15	0

В реальных приложениях отношения сторон, как правило, находятся в некотором состоянии, которое устраивает все элементы системы. Если появляется дополнительный ресурс у элементов, то вопрос о его распределении может быть решен без учета распределения ранее имевшегося ресурса. При этом если величина распределенного ранее на дугу ресурса больше величины вновь появившегося ресурса, то, очевидно, веса дуг останутся положительными.

Чем способ распределения ресурса на основании рекуррентных соотношений (2.4) лучше решения задачи (2.1)-(2.3) или решения системы линейных неравенств (как в [35])? Прежде всего, своей простотой и рядом хороших свойств. Так предельные и равновесные состояния зависят лишь от начального распределения и ресурсов элементов и могут быть выписаны аналитически.

В данном разделе подробно рассмотрены частные случаи графов отношений (полный граф, полный двудольный граф) и функций оценки качества отношений (противостояние, сотрудничество). Можно рассматривать другие графы отношений, другие критерии оценки этих отношений и другие стратегии поведения сторон. Любое сочетание этих характеристик приводит к новым постановкам и к новым системам.

2.4 Модели коммуникационных сетей

В данном разделе рассмотрен случай, когда функция качества взаимоотношения пары элементов является суммой ресурсов, направленных по линии взаимодействия. Другими словами, между элементами существует взаимовыгодное сотрудничество, при котором ресурс соседнего элемента добавляется в качестве полезной составляющей. Если задать некоторое начальное распределение ресурсного

взаимодействия, то оно в силу характера динамической модели будет к наилучшему варианту по нашему критерию сотрудничества. С практической точки зрения такая модель задает функционирующую распределительную или коммуникационную сеть, в которой каждое существующее ребро одинаково обслуживается двумя смежными вершинами.

Рассмотрим динамическую модель сети, представленной неориентированным графом, вершины которого независимо друг от друга в каждый момент времени распределяют свой ограниченный ресурс между инцидентными ребрами с целью повышения качества связи. Предполагается, что качество линии связи (ребра) зависит от суммарной величины ресурса, выделенного на ее функционирование инцидентными вершинами. Так как все линии связи равноценны, вершины, опираясь на текущее распределение ресурсов, перераспределяют свой ресурс между инцидентными ребрами таким образом, чтобы максимизировать минимальный суммарный ресурс этих ребер. Исследовано поведение системы во времени, найдены условия существования предельных и стационарных (устойчивых) состояний, а также сами эти состояния.

Постановка проблемы. В настоящий момент глобальные коммуникационные системы обслуживают большие территории и имеют ярко выраженный распределенный характер. Глобальная сеть разбита на достаточно независимые подграфы, в которых решения по распределению средств на нормальное функционирование сети принимаются независимо. Естественно считать качество линии связи между смежными пунктами пропорциональным количеству вложенных средств. Кроме того, разумно принять, что за состоянием линии связи (ребра) (i,j) следят конечные пункты (смежные вершины) i и j .

Пусть сеть представлена в виде неориентированного графа $G=(V,E)$, каждая вершина которого $i \in V$ представляет элемент коммуникационной системы, имеющий ресурс в количестве q_i . Весь этот ресурс распределяется

по инцидентным ребрам таким образом, чтобы суммарные ресурсы этих ребер были одинаковы. Такая стратегия имеет смысл, когда все инцидентные ребра равнозначны. Например, если ресурс используется для профилактики заражения компьютерным вирусом, то неважно, откуда вирус может придти. Необходимо обезопасить все направления в равной степени. При этом ресурс, в частности, идет на мониторинг коммуникаций, развитие аппаратной части, а также разработку соответствующего программного обеспечения для анализа характеристик сети.

Обозначим через x_{ij} количество ресурса вершины i , выделенного на ребро $(i,j) \in E$. Так как на функционирование ребра (i,j) выделяется ресурс как вершиной i , так и вершиной j , то суммарный ресурс ребра (i,j) равен $x_{ij} + x_{ji}$. Представляя каждое ребро (i,j) парой дуг (i,j) и (j,i) , величины x_{ij} и x_{ji} будем называть *весами* этих дуг.

Нас будет интересовать динамика изменения весов дуг. Пусть в некоторый начальный момент времени, который мы примем за нулевой ($k=0$), веса x_{ij}^0 , $(i,j) \in E$ ($x_{ij}^0 = 0$, $(i,j) \notin E$) известны. В любой последующий момент времени $k=1,2,\dots$ каждая вершина $i \in V$ перераспределяет свой ресурс на основании решения задачи:

$$\begin{aligned} \min_{j \in V_i} (x_{ij}^k + x_{ji}^{k-1}) &\rightarrow \max_{\{x_{ij}^k\}}; \\ \sum_{j \in V_i} x_{ij}^k &= q_i; \\ x_{ii}^k &= 0; \quad x_{ij}^k = 0, \quad (i,j) \notin E, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где V_i – множество смежных с i вершин, а величины x_{ji}^{k-1} , $j \in V_i$ на момент решения задачи (2.18) следует считать известными. Таким образом, решение задачи задает стратегию поведения вершин сети в каждый момент времени.

Так как все вершины меняют веса исходящих дуг в каждый момент времени независимо друг от друга, то они не достигают того состояния, к которому стремятся. В этой связи возникает несколько вопросов, среди которых главным является вопрос о сходимости процесса перераспределения ресурсов. Если предельные состояния существуют, то, зная их, можно найти стационарные состояния, т.е. состояния, когда веса дуг не меняются ($x_{ij}^k = x_{ij}^{k-1}$, $k=1,2,\dots$, $(i,j)\in E$).

Описанную выше систему можно считать саморазвивающейся, т.к. стратегии элементов, а также топология сети и ресурсы вершин не меняются. Когда известны стратегии элементов системы, тогда основным направлением исследований является изучение поведения системы в течение времени. Существует ли у системы предельное состояние? Является ли оно единственным? Как его найти? Среди состояний системы особо выделяются стационарные состояния, когда характеристики системы перестают меняться. Это такие состояния, которые устраивают все элементы системы, несмотря на возможную противоположность их интересов, и их можно назвать состояниями равновесия.

В игровых постановках элементы с разными интересами называют игроками, а состояние равновесия – равновесием по Нэшу [12, 44, 88]. Рассматриваемая модель также имеет некоторое сходство с игровыми постановками. Представление об игровых постановках с участием нескольких игроков можно получить из работ Смольякова Э.Р. (см., например, [53]). В них автор обобщает классические понятия равновесия по Нэшу и по Парето, вводя целый ряд новых равновесий, некоторые из которых существуют в любой игре. Разработанные модели имеют широкий круг практических приложений, но, конечно, не являются универсальными. Обычно участник с номером i определяет свою стратегию из области $X_i \subset R^l$. Это ограничивает возможности экономических и технических приложения, так как участнику системы, состоящей из n элементов, иногда

приходится определять свои отношения ко всем участникам системы в отдельности, т.е. выбирать стратегию из области $X_i \subset R^{n-1}$.

Проведем исследование свойств нашей модели. Пусть

$$p_i^k = \sum_{j \in V_i} x_{ji}^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Процесс изменения весов дуг определим рекуррентными соотношениями:

$$x_{ij}^{k+1} = f_i^k - x_{ji}^k, \quad f_i^k = \frac{p_i^k + q_i}{d_i}, \quad \forall (i,j) \in E; \quad x_{ii}^k = 0; \quad x_{ij}^k = 0, \quad \forall (i,j) \notin E, \quad (2.19)$$

где d_i – степень вершины $i = 1, \dots, n$. Нетрудно заметить, что таким образом определенные веса дуг исходящих из вершины i составляют решение задачи (2.18). Очевидно, преобразования (2.19) не меняют количества ресурсов вершин. Действительно, если считать количество ресурса i -ой вершины на k -ой итерации, равной q_i^k , то

$$q_i^{k+1} = \sum_{j \in V_i} x_{ij}^{k+1} = - \sum_{j \in V_i} x_{ji}^k + \sum_{j \in V_i} f_i^k = -p_i^k + q_i^k + p_i^k = q_i^k.$$

Соотношениями (2.19) определяется последовательность состояний сети, свойства которой будут изучаться ниже. Оказалось, что результаты зависят от структуры графа G . В этой связи отдельно рассмотрены два случая, когда граф является не двудольным и когда он двудольный.

Не двудольный граф. Пусть Γ – матрица смежности графа G , а диагональная матрица $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$. Обозначим через Δ матрицу, полученную делением i -ой строки матрицы Γ на d_i .

Доказаны следующие утверждения.

Лемма 2.9. В случае не двудольного графа G $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^k = \frac{2Q}{s}$,

$$\text{где } Q = \sum_{i=1}^n q_i, \quad s = \sum_{i=1}^n d_i.$$

Теорема 2.7. В случае, когда граф G не двудольный циклические пределы с периодом два для весов дуг существуют и равны:

$$x_{ij}^{even} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + f^0 D(E - (\Delta - L)^2)^{-1} \left(\Delta \frac{e^i}{d_i} - \frac{e^j}{d_j} \right);$$

$$x_{ij}^{odd} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m+1} = -x_{ji}^0 - f^0 D(E - (\Delta - L)^2)^{-1} \left(\Delta \frac{e^j}{d_j} - \frac{e^i}{d_i} \right) + \frac{2Q}{s},$$

где $f^0 = (f_1^0, \dots, f_n^0)$, E – единичная матрица, $L = \frac{1}{s} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n \end{pmatrix}$,

e^i – i -ый координатный орт.

Двудольный граф. Пусть граф G является двудольным. Тогда множество вершин V разбивается на две доли V^1 и V^2 , $|V^1| = n_1$, $|V^2| = n_2$. Введем матрицы $\Delta_1 \in M_{n_1 \times n_2}$; $\Delta_2 \in M_{n_2 \times n_1}$ аналогичные матрице Δ , но соответствующие первой и второй долям. Их строчные суммы равны единице, а количество ненулевых элементов в j -ом столбце равно степени j -ой вершины. Степень j -ой вершины обозначим через d_j^1 , если $j \in V^1$ и через d_j^2 , если $j \in V^2$. Пусть $s_h = \sum_{j \in V^h} d_j$; $Q_h = \sum_{j \in V^h} q_j$;

$$L_h = \frac{1}{s_h} \begin{pmatrix} d_1^h & d_2^h & \dots & d_{n_h}^h \\ d_1^h & d_2^h & \dots & d_{n_h}^h \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_1^h & d_2^h & \dots & d_{n_h}^h \end{pmatrix} \in M_{n_h}, h=1,2;$$

и

$$\Delta' = \begin{pmatrix} \Delta_1 \Delta_2 - L_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \Delta_1 - L_2 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2.10. В случае двудольного графа G :

- если $i \in V^1$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{2k} = \frac{Q}{s_1}$; $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{2k+1} = \frac{Q}{s_2}$;
- если $i \in V^2$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{2k} = \frac{Q}{s_2}$; $\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{2k+1} = \frac{Q}{s_1}$.

Теорема 2.8. В случае двудольного графа G циклические пределы с периодом два для весов дуг существуют и равны:

$$x_{ij}^{even} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + f^0 D(E - \Delta')^{-1} \left(\Delta \frac{e^i}{d_i} - \frac{e^j}{d_j} \right);$$

$$x_{ij}^{odd} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m+1} = -x_{ji}^0 - f^0 D(E - \Delta')^{-1} \left(\Delta \frac{e^j}{d_j} - \frac{e^i}{d_i} \right) + \frac{Q}{s_h}, \quad h=1,2.$$

Следствие 2.7. В пределе на каждой итерации четные x_{ij}^{even} и нечетные x_{ij}^{odd} члены последовательности переходят друг в друга, поэтому состояние, заданное весами $\bar{x}_{ij} = \frac{1}{2}(x_{ij}^{even} + x_{ij}^{odd})$, является допустимым и стационарным (равновесным).

Полные графы. Для полных графов и полных двудольных графов предельные значения весов имеют более простой вид. Доказаны следующие результаты.

Теорема 2.9. Если граф G полный, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^k = \frac{2Q}{n(n-1)};$$

$$x_{ij}^{even} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + \frac{2Q - (n-1)f_i^0 - (n-1)^2 f_j^0}{n(n-2)};$$

$$x_{ij}^{odd} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m+1} = -x_{ji}^0 + \frac{-2Q + (n-1)^2 f_j^0 + (n-1)^3 f_i^0}{n(n-1)(n-2)}.$$

Среднее арифметическое четного x_{ij}^{even} и нечетного x_{ij}^{odd} предельных распределений весов дуг определяет стационарное (равновесное) состояние:

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1}{2} (x_{ij}^{even} + x_{ij}^{odd}) = \frac{1}{2} [x_{ij}^0 - x_{ji}^0 + \frac{2Q}{n(n-1)} + \frac{n-1}{n} (f_i^0 - f_j^0)].$$

Теорема 2.10. Если G – полный двудольный граф, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^k = \frac{Q}{n_1 n_2};$$

$$x_{ij}^{even} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m} = x_{ij}^0 + \frac{Q}{n_1 n_2} - f_j^0;$$

$$x_{ij}^{odd} = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{ij}^{2m+1} = x_{ij}^1 = f_i^0 - x_{ji}^0.$$

Среднее арифметическое четного x_{ij}^{even} и нечетного x_{ij}^{odd} предельных распределений весов дуг определяет стационарное (равновесное) состояние:

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1}{2} (x_{ij}^{even} + x_{ij}^{odd}) = \frac{1}{2} [x_{ij}^0 - x_{ji}^0 + \frac{Q}{n_1 n_2} + f_i^0 - f_j^0].$$

В общем случае оценка произвольной вершиной $i \in V$ эффективности использования средств, выделенных на поддержание линии связи $(i, j) \in E$ может осуществляться на основе значения некоторой функции $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})$. Так, например, если вершина $i \in V$ оценивает эффективность своих вложений пропорционально величине a , а эффективность использования средств вершины $j \in V_i$ – пропорционально b , то для оценки суммарной эффективности выделенных на ребро (i, j) средств (с точки зрения вершины i) можно использовать функцию $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a x_{ij} + b x_{ji}$. Оказывается, что при выполнении неравенства $\left| \frac{b}{a} \right| < 1$ (в частности, когда каждая вершина считает использование своих средств более эффективным) описанный в работе итерационный процесс сходится к единственному предельному состоянию, которое не зависит от начального распределения ресурса.

Описанный в работе итерационный процесс перераспределения средств каждой вершиной опирается на неизменную стратегию, заданную решением задачи (2.18). При этом по инцидентным ребрам распределяется

весь ресурс на основе текущего распределения ресурса смежными вершинами. Такая ситуация напоминает, в частности, клеточный автомат, когда состояние элемента системы зависит от состояния его соседей. Эволюция клеточного автомата, как правило, исследуется на основе программной реализации процесса, т.е. с помощью имитационной модели.

С другой стороны, несомненно, рассматриваемая модель является игровой. Это обобщение некооперативной игры n лиц, в которой каждый игрок i выбирает стратегию (точку) на множестве размерности d_i , а его выигрыш при каждом ходе (итерации) зависит от распределения ресурсов им самим и его соседями. В этом случае равновесные состояния характеризуют ситуацию, когда ни одному игроку не выгодно отклоняться от достигнутого распределения своего ресурса.

2.5. Однородная модель взаимодействий на полном графе

Пусть имеется граф $G=(V,E)$ с множеством вершин $v \in V$ и множеством дуг $(i,j) \in E$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Будем рассматривать полный граф G , когда между каждой парой вершин существуют отношения, определяемые величинами x_{ij} и x_{ji} . Величина x_{ij} характеризует воздействие v_i на v_j , а величина x_{ji} - воздействие v_j на v_i . Таким образом, на графе $G=(V,E)$ определено состояние $X=(x_{ij})$, в виде квадратной матрицы порядка n . Заметим, что ограничение на полноту графа можно в дальнейшем снять и расширить область применения полученных ниже методов.

Предположим, что состояния системы $X^{(k)}$ меняются в режиме дискретного времени $k=0,1,2,\dots$, перестраивая свои отношения $x_{ij}^{(k)}$ по определенным правилам. Будем считать, что каждая вершина v_i переопределяет выгодным для себя образом свой исходный потенциал q_i , сохраняя его на каждом шаге, т. е.

$$q_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

С другой стороны, вершина v_i испытывает на себе суммарное воздействие

$$p_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)},$$

направленное от других элементов и меняющееся в течение времени k .

Меняя свои состояния рекуррентно: $X^{(k+1)} = \Phi(X^{(k)})$, система может стремиться к *устойчивым* или *циклическим* решениям, поиск которых представляется весьма интересным.

Интересы участника i с участником j определяются общей линейной функцией: $c_{ij} = c(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}$.

Возможные значения весовых коэффициентов a и b могут отражать как степень, так и полезность отношений. Представляется естественной следующая стратегия участников:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_j (ax_{ij} + bx_{ji}) \rightarrow \max_{x_{ij}} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = q_i, \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Участник v_i на шаге $(k+1)$ принимает решение, основываясь на действиях других участников на предыдущем шаге k , поэтому

$$c_{ij}^{(k+1)} = ax_{ij}^{(k+1)} + bx_{ji}^{(k)} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n c_{ji}^{(k)} = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n ax_{ij}^{(k)} + \sum_{j=1}^n bx_{ji}^{(k)} \right).$$

Следовательно,

$$x_{ij}^{(k+1)} = -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)} + \frac{b}{a} \sum_{j=1}^n x_{ji}^{(k)} \right)$$

или

$$x_{ij}^{(k+1)} = -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + \frac{1}{n-1} \left(q_i + \frac{b}{a} p_i^{(k)} \right) = -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)},$$

где

$$f_i^{(k)} = \frac{1}{n-1} \left(q_i + \frac{b}{a} p_i^{(k)} \right), \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Таким образом, на каждом шаге определен вектор стабилизации

$$F^{(k)} = \{f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_n^{(k)}\}.$$

По его изменению можно определить характер состояний $X^{(k)}$.

Пусть на графе $G = (V, E)$ определены начальные отношения между вершинами:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12}^{(0)} & x_{13}^{(0)} & \dots & x_{1n}^{(0)} \\ x_{21}^{(0)} & 0 & x_{23}^{(0)} & \dots & x_{2n}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}^{(0)} & x_{n2}^{(0)} & x_{n3}^{(0)} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и заданы рекуррентные преобразования состояний системы:

$$\begin{cases} x_{ij}^{(k+1)} = -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, & i \neq j, \\ x_{ij}^{(k+1)} = 0, & i = j; \end{cases} \quad (2.20)$$

$$i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad j = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Необходимо определить свойства и характер изменения состояний

$X^{(k)} = (x_{ij}^{(k)})$ для различных a и b . Найти устойчивые состояния $X^* = (x_{ij}^*)$, не меняющиеся после преобразования (2.20).

Важным является то, что в условиях задачи выполняется свойство сохранения ресурса для каждой вершины: $q_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k)}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Действительно,

$$\sum_{j=1}^n x_{ij}^{(k+1)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(-\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + \frac{1}{n-1} \left(q_i + \frac{b}{a} p_i^{(k)} \right) \right) = -\frac{b}{a} p_i^{(k)} + \frac{n-1}{n-1} \left(q_i + \frac{b}{a} p_i^{(k)} \right) = q_i.$$

Опуская достаточно длинные доказательства, приведем основные последовательные результаты.

Лемма 2.11. Для координат вектора стабилизации $F^{(k)}$ выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^n f_i^{(k)} = \frac{Q}{n-1} \left(1 + \frac{b}{a} \right),$$

где $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ - суммарный потенциал системы.

Лемма 2.12. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется следующее рекуррентное соотношение

$$f_i^{(k+1)} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \cdot f_i^{(k)} + c_i,$$

Где

$$c_i = \frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{b}{a} \right) \cdot \left(q_i \left(1 - \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{Q}{n-1} \right)$$

есть постоянная величина.

Лемма 2.13. В момент времени k для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется следующее соотношение

$$f_i^{(k)} = z^k f_i^{(0)} + c_i (1 + z + z^2 + \dots + z^{k-1}),$$

где $z = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a}$. Или, с учетом преобразования геометрической прогрессии,

$$f_i^{(k)} = \left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \right)^k f_i^{(0)} + c_i \cdot \frac{(n-1)a}{b + (n-1)a} \left(1 - \left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \right)^k \right).$$

Теорема 2.11. Для устойчивого поведения вектора стабилизации необходимо и достаточно выполнение условия:

$$|z| = \left| \frac{1}{n-1} \cdot \frac{b}{a} \right| < 1 \text{ или } \left| \frac{b}{a} \right| < n-1. \quad (2.21)$$

При этом условия предельные значения координат вектора стабилизации равны:

$$f_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} f_i^{(k)} = c_i \frac{(n-1)}{b + (n-1)a} = \frac{a+b}{b + (n-1)a} \left(q_i \left(1 - \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a} \cdot \frac{Q}{n-1} \right).$$

Теорема 2.12. В условиях рассматриваемой модели для решений системы выполняются следующие утверждения.

А. При условии (2) начальное решение системы, заданное соотношениями:

$$x_{ij}^* = \frac{1}{b + (n-1)a} \left(aq_i - bq_j + \frac{bQ}{n-1} \right). \quad (2.22)$$

является стационарным, т.е. не изменяется в течение дискретного времени k .

В. При условии $|b/a| < 1$ любое начальное решение системы в результате преобразований (1) при $k \rightarrow \infty$ стремится к решению (3).

Замечание 2.1. При некоторых a и b (в частности при $a=b$) решение системы стремится к двум предельным циклическим (нечетному и четному), зависящим от начальных условий, которые в среднем определяют устойчивое решение (2.22). Как показывают расчеты, цикличности можно избежать, если в стратегию «принятия решений» ввести свойство «исторической преемственности»:

$$\begin{cases} y_{ij}^{(k+1)} = -\frac{b}{a} x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, \\ x_{ij}^{(k+1)} = \alpha y_{ij}^{(k+1)} + (1-\alpha)x_{ij}^{(k)}, \\ i \neq j, 0 < \alpha < 1; \\ x_{ij}^{(k+1)} = 0, i = j; \\ i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad j = \{1, 2, \dots, n\}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Замечание 2.2. В случае $1 < |b/a| < n-1$ имеется необычная ситуация: решение системы расходится при сходящемся векторе стабилизации. Условно это объясняется тем, что если «полезность» отношений обеспечивается в большей степени за счет партнера ($b > a$), но эти «злоупотребления» имеют несколько ограниченный характер ($b/a < n-1$), то «крах» системы наступает при достаточно продолжительной материальной обеспеченности участников системы.

Рассмотрим примеры, на которых реализуются приведенные выше алгоритмы. При этом можно наглядно анализировать поведение систем с

помощью численных решений. Кроме того, исходя из здравого смысла, можно корректировать алгоритм (например, для неполного графа) или ввести в стратегию принятия решения некоторые изменения.

2.6 Специальные содержательные модели

Рассмотрим несколько моделей содержательного характера, которые демонстрируют возможности применения равновесных методов для задач прикладного характера. Модели связаны с некоторой конкретной деятельностью, описывают характер взаимодействий и содержат конкретные числовые данные. Все приведенные примеры можно существенно обобщить на системы с более сложной структурой и применить к принципиально похожим сферам деятельности.

2.6.1. Конкурентные взаимодействия

Предположим, что три фирмы (политические партии) A_1, A_2, A_3 распределяют свои фиксированные ресурсы $q_1=80, q_2=50, q_3=40$ друг против друга с целью улучшения своего конкурентного положения. Необходимо определить устойчивое состояние, устраивающее всех участников взаимодействия с точки зрения их интересов.

Покажем, что некоторое допустимое решение (не обязательно оптимальное) в результате преобразований будет приближаться к устойчивому решению. Степень близости к устойчивому решению будет определяться поведением вектора стабилизации $f=(f_1, f_2, f_3)$.

В данном случае имеется классический случай противостояния с оценкой отношений по формуле

$$c_{ij}=c(x_{ij}, x_{ji})=x_{ij} - x_{ji},$$

т.е. $a=1, b=-1$.

Рекуррентные соотношения (2.20) принимают вид:

$$\begin{cases} x_{ij}^{(k+1)} = -x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, & i \neq j, \\ x_{ij}^{(k+1)} = 0, & i = j; \end{cases}$$

$$i \in \{1, 2, 3\}, \quad j = \{1, 2, 3\}.$$

Согласно *Лемме 2.12*, $c_i=0$, $i=1,2,3$, поэтому

$$f_i^{(k+1)} = \frac{1}{2} f_i^{(k)}, i=1,2,3.$$

При начальном решении

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 30 \\ 40 & 0 & 10 \\ 20 & 20 & 0 \end{pmatrix}, f^{(0)} = (10; -10; 0).$$

имеется довольно сложная ситуация (рис 2.3): $x_{12}=50$, $x_{13}=30$, $x_{21}=40$, $x_{23}=10$, $x_{31}=20$, $x_{32}=20$. Первый участник «чувствует» себя уверенно по отношению ко второму и третьему участникам; третий участник создает угрозу второму (20 против 10).

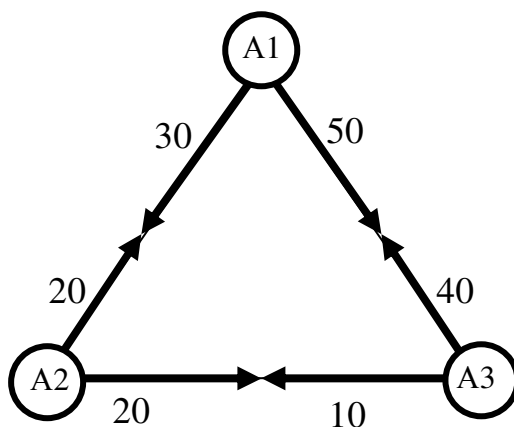


Рис. 2.3. Начальное неравновесное состояние

После первого шага расчетного алгоритма (2.20) получаем

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 30 \\ 40 & 0 & 10 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, f^{(1)} = (5; -5; 0).$$

Первый и второй участники сохранили свои распределения, так как первый имел одинаково «хорошее» противостояние с соперниками, а второй – одинаково «плохое». Третий же участник логично перестроил взаимоотношения и сделал их паритетными.

После второго шага

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 35 \\ 45 & 0 & 5 \\ 30 & 10 & 0 \end{pmatrix}, f^{(2)} = (2.5; -2.5; 0).$$

«Запущенный» алгоритм аналогичным образом меняет состояние системы и на следующих шагах.

При $k \rightarrow \infty$ решение стремится к устойчивому состоянию, которое вычисляется по формулам (2.22):

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 45 & 35 \\ 45 & 0 & 5 \\ 35 & 5 & 0 \end{pmatrix}, f^* = (0; 0; 0).$$

Оно устраивает всех участников с точки зрения угроз (рис. 2.4), так как все оценки $c_{ij} = 0$.

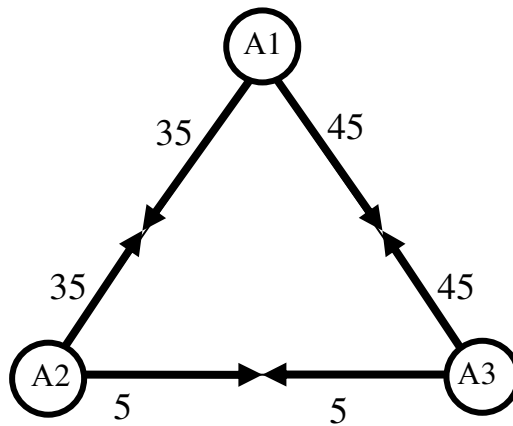


Рис. 2.4. Конечное равновесное состояние

2.6.2 Обслуживание коммуникационных сетей

Можно предполагать, что *коммуникационные сети* – это системы *транспортных маршрутов, линии связи* и т.д. Обслуживание таких систем имеет ярко выраженный распределительный характер, когда конечные пункты (смежные вершины) принимают решения по распределению средств на функционирование инцидентных линий.

Для наглядности рассмотрим небольшую коммуникационную систему, состоящую из четырех вершин (рис. 2.5). Граф не является полным, так как две вершины не являются смежными. Вершины задают пункты, в которых

находятся фиксированные ресурсы. Ресурс каждого пункта тратится на обслуживание линий, соблюдая при этом определенный критерий справедливости.

Пусть ресурсы вершин, участвующих в обслуживании сети, заданы следующими количественными значениями: $q_1=50$, $q_2=40$, $q_3=30$, $q_4=20$.

Заметим, что «периферийные» пункты 3 и 4 имеют меньше ресурса, чем «центральные» 1 и 2.

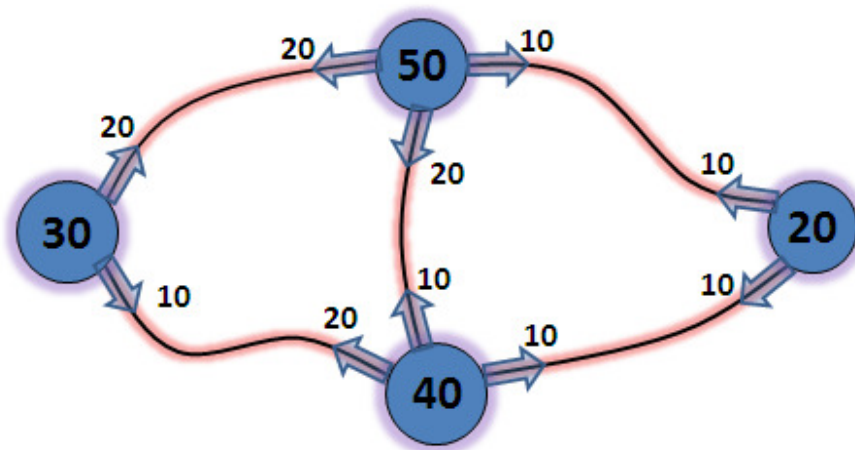


Рис. 2.5. Обслуживание коммуникационной сети

Как и ранее, x_{ij} – доля ресурса, направленного от i к j , а c_{ij} – оценка «полезности» по данному направлению. Так как пара вершин совместно обслуживает свою линию, то уместно считать, что $c_{ij}=c_{ji}=x_{ij}+x_{ji}$, т.е. для функции $c_{ij}=ax_{ij}+bx_{ji}$ полагаем $a=1$, $b=1$.

Интересы каждого участника состоят в том, чтобы содержать инцидентные линии на одинаково высоком уровне. Решается вопрос: можно ли в процессе *саморазвития* системы справедливо распределить ресурсы на обслуживание линий, если каждый пункт принимает самостоятельное решение по распределению ресурса на каждом шаге?

Покажем, что некоторое начальное решение, например,

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 & 10 \\ 10 & 0 & 20 & 10 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^{(0)} = (c_{ij}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 40 & 30 \\ 30 & 0 & 30 & 20 \\ 40 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

в результате определенного алгоритма стремится к оптимальному (устойчивому) решению.

Учитывая, что степени вершин различны, сделаем корректировку преобразований:

$$\begin{cases} f_i^{(k)} = \frac{p_i^k + q_i}{d_i}, & i = 1, 2, 3, 4 \\ x_{ij}^{(k+1)} = -x_{ji}^{(k)} + f_i^{(k)}, & \forall (i, j) \in E, \end{cases}$$

где $d_1=d_2=3$, $d_3=d_4=2$ – степени вершин, E – множество ребер системы.

Приведем численные расчеты для $k=10, 20, 30$:

$$X^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2499 & 11,1223 & 18,6177 \\ 7,7501 & 0 & 14,8823 & 17,3677 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0073 & 27,9927 \\ 28,00000 & 0 & 28,0073 & 27,9926 \\ 28,0073 & 28,0073 & 0 & 0 \\ 27,9927 & 27,9926 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X^{(20)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2500 & 11,1250 & 18,6250 \\ 7,7500 & 0 & 14,8750 & 17,3750 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C^{(20)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 0 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$X^{(30)} = \begin{pmatrix} 0 & 20,2500 & 11,1250 & 18,6250 \\ 7,7500 & 0 & 14,8750 & 17,3750 \\ 16,8750 & 13,1250 & 0 & 0 \\ 19,3750 & 10,6250 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C^{(30)} = \begin{pmatrix} 0 & 28,0000 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 0 & 28,0000 & 28,0000 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \\ 28,0000 & 28,0000 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что решение практически стабилизировалось. Матрица полезности $C^{(k)}$ показывает, что обслуживание линий проходит равномерно.

Заметим, что можно решать аналогичные задачи для коммуникационных сетей для любого числа вершин и любой структуры. При этом каждый «обслуживаемый» участок может иметь свою категорию, которая будет влиять на количество поступающего ресурса.

2.6.3 Оптимизация нелинейных технологических процессов

Рассмотрим процесс замораживания пищевых продуктов, которые последовательно проходят через две морозильные камеры с разной внутренней температурой. Сформулируем несколько оптимизационных задач по расчету режимных параметров и определим наилучшие

технологические стратегии замораживания при заданных условиях. Предложенные методы были подробно изложены в работе¹². Принцип сбалансированной вариации двух стратегий (двух режимов) можно применять и к другим нелинейным динамическим процессам.

Постановка задачи. Рассматривается процесс отвода тепла от некоторого продукта фиксированной массы и определенных физико-химических свойств. Имеются две холодильные камеры (или два соседних модуля скороморозильного аппарата), в которых поддерживаются постоянные температуры на уровне, соответственно, t_1 и t_2 ($t_1 > t_2$), а данный продукт последовательно проходит через обе камеры по равному промежутку времени $\tau/2$. Требуется определить оптимальный порядок прохождения камер, который обеспечивал бы наименьшую конечную температуру продукта, при условии, что режимные параметры процесса замораживания (зависимость среднеобъемной температуры продукта от времени) известны для каждой камеры.

При решении поставленной задачи важно теоретически с достаточной точностью смоделировать закон, по которому происходит понижение температуры продукта. Для этого следует потребовать, например, выполнения начальных условий и зависимости средней температуры замораживаемого продукта от времени. Схематично этот закон должен изображаться некоторой монотонно убывающей функцией, имеющей горизонтальную асимптоту при больших значениях временного параметра. Приведем два класса функций, удовлетворяющих этому условию:

$$\varphi_1(\tau) = A_1 + B_1 \cdot \exp(-\alpha\tau), \quad \varphi_2(\tau) = A_2 + B_2/(1 + \alpha\tau).$$

Модель 1. Если $\varphi_1(\tau) = A_1 + B_1 \cdot \exp(-\alpha\tau)$, то

$$\varphi_1(0) = t_n = A_1 + B_1 \cdot \exp(0) = A_1 + B_1;$$

$$\varphi_1(\infty) = t_{cp} = A_1 + B_1 \cdot \exp(-\infty) = A_1.$$

Следовательно, $A_1 = t_{cp}$, $B_1 = t_n - t_{cp}$.

¹² Буянов О.Н., Астраков С.Н. Расчет продолжительности стадии замораживания в условиях регулируемого теплоотвода // Вестник международной академии холода, 2001, №1, - 0, 36 печ. л.

Таким образом,

$$\varphi_1(\tau) = t_{cp} + (t_n - t_{cp}) \cdot \exp(-\alpha\tau). \quad (2.6.1)$$

Модель 2. Если $\varphi_2(\tau) = A_2 + B_2/(1 + \alpha\tau)$, то получается система условий

$$\begin{cases} \varphi_2(0) = t = A_2 + \frac{B_2}{1 + \alpha \cdot 0}, \\ \varphi_2(\infty) = t_{-p} = A_2 + \frac{B_2}{\infty}. \end{cases}$$

Откуда следует, что $A_2 = t_{cp}$, $B_2 = t_n - t_{cp}$. Таким образом,

$$\varphi_2(\tau) = t_{cp} + \frac{(t_n - t_{cp})}{1 + \gamma \cdot \tau}. \quad (2.6.2)$$

Заметим, что оба класса функций имеют совпадения при разложении в ряд Тейлора с точностью до линейных слагаемых:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= A_1 - B_1 \gamma \tau + B_1 \frac{\gamma^2 \tau^2}{2} - B_1 \frac{\gamma^3 \tau^3}{6} + \dots, \\ \varphi_2(\tau) &= A_2 - B_2 \gamma \tau + B_2 \gamma^2 \tau^2 - B_2 \gamma^3 \tau^3 + \dots \end{aligned}$$

Расчет конечной температуры продукта. Зададим следующий порядок исследования. Сначала продукт помещается в первую камеру и в течение времени $\tau/2$ температура продукта меняется по закону (1), т.е.

$$t_k = t_1 + (t_n - t_1) \cdot \exp(-\alpha_1 \tau). \quad (2.6.3)$$

Затем процесс продолжается во второй камере в течение времени $\tau/2$ по тому же закону, но с параметрами новой камеры:

$$t_k = t_2 + (t_n - t_2) \cdot \exp(-\alpha_2 \tau). \quad (2.6.4)$$

Предполагаем, что $t_1 > t_2$ и $\alpha_2 > \alpha_1$, что вполне понятно с физической точки зрения, так как коэффициент α в определенной степени характеризует интенсивность теплообмена.

После времени $\tau/2$ из (2.6.3) получаем промежуточное значение среднеобъемной температуры продукта:

$$t_{п.п} = t_1 + (t_n - t_1) \cdot \exp\left(-\gamma_1 \frac{\tau}{2}\right).$$

При переходе на режим второй камеры необходимо передвинуть начало отсчета на время τ_{np} :

$$t_{np} = t_2 + (t_n - t_2) \cdot \exp[-\gamma_2(\tau_{np} + \tau)], \quad (2.6.5)$$

где τ_{np} можно определить из уравнения:

$$t_{np} = t_1 + (t_n - t_1) \cdot \exp(-\alpha_1 \cdot \tau/2) = t_2 + (t_n - t_2) \cdot \exp(-\alpha_2 \cdot \tau_{np}).$$

Откуда получаем

$$\frac{(t_1 - t_2) + (t_n - t_1) \cdot \exp\left(-\gamma_1 \frac{\tau}{2}\right)}{(t_n - t_2)} = \exp(-\gamma_2 \tau_{np})$$

$$\text{и } \tau_{np} = -\frac{1}{\gamma_2} \ln \left(\frac{(t_1 - t_2) + (t_n - t_1) \cdot \exp\left(-\gamma_1 \frac{\tau}{2}\right)}{(t_n - t_2)} \right) = -\frac{1}{\gamma_2} \ln C,$$

где C – это краткое обозначение аргумента логарифма.

После этого по формуле (5) при времени $\tau/2$ получаем зависимость для определения конечной температуры продукта:

$$t_k = t_2 + t_1 \cdot \exp\left(-\gamma_2 \frac{\tau}{2}\right) - t_2 \cdot \exp\left(-\gamma_2 \frac{\tau}{2}\right) + t_n \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)\right] - t_1 \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)\right]. \quad (2.6.6)$$

Меняя порядок индексов в формуле (2.6.6), можно оценить конечную температуру продукта, проходящего сначала через вторую камеру в течение времени $\tau/2$, а затем через первую в течение того же времени:

$$t_k^* = t_1 + t_2 \cdot \exp\left(-\gamma_1 \frac{\tau}{2}\right) - t_1 \cdot \exp\left(-\gamma_1 \frac{\tau}{2}\right) + t_n \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)\right] - t_2 \cdot \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)\right].$$

Необходимо отметить, что разность значений Δt не зависит от начальной температуры продукта t_n и равна:

$$\Delta t = t_2 - t_1^* = (t_2 - t_1) \left\{ 1 + \exp\left[-\frac{\tau}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)\right] - \exp\left[-\gamma_1 \frac{\tau}{2}\right] - \exp\left[-\gamma_2 \frac{\tau}{2}\right] \right\}. \quad (2.6.7)$$

Покажем, что $\Delta t < 0$. Так как $(t_2 - t_1) < 0$, то достаточно установить, что второй множитель в правой части равенства (2.6.7) больше нуля.

В самом деле, второй множитель имеет вид

$$\delta = 1 + xy - x - y, \text{ где } x = \exp(-\alpha_1 \tau/2), \quad y = \exp(-\alpha_2 \tau/2).$$

Здесь мы имеем стандартную задачу о наибольшем значении функции двух переменных $\delta = \delta(x, y)$ для области определения $D: \{0 < X < 1, 0 < Y < 1\}$.

$$\text{Из условий } \begin{cases} \delta'_x = y - 1 = 0 \\ \delta'_y = x - 1 = 0 \end{cases} \text{ найдем особую точку при } x=1, y=1.$$

Очевидно, что $\delta(1, 1) = 0$. Функция $\delta(x, y)$ может принимать значение равное нулю лишь только на границе открытой области D . Во внутренних же точках этой области данная функция положительна.

С физической точки зрения полученный результат означает то, что для достижения более низкой температуры (при определённых выше временных условиях) целесообразно продукт помещать вначале в менее холодную камеру с дальнейшим переходом в более холодную (а не наоборот). Это вполне понятно, так как в начале процесса охлаждения даже в менее холодной камере имеется значительный потенциал для теплообмена. На практике первой камерой может служить помещение для предварительного охлаждения продукта в естественных условиях, не требующее дополнительных энергетических затрат.

Расчет продолжительности ступеней цикла. Рассмотрим выбор режима теплоотвода при заданных начальной и конечной температурах продукта и фиксированной продолжительности процесса.

Пусть τ - общее время теплоотвода, которое равно $\tau = \tau_1 + \tau_2$ - сумме продолжительности пребывания продукта, соответственно в первой и второй камерах. Необходимо, при известных τ, t_n, t_k определить τ_1 и τ_2 при условии, что решение существует.

Условием существования решения, очевидно, будет:

$$t_2 + (t_n - t_2) \cdot \exp(-\alpha_2 \tau) < t_k. \quad (2.6.8)$$

Далее проведены расчеты с использованием промежуточных температур и продолжительностей ступеней процесса.

Так, из формулы (2.6.3) получено

$$t_{np} = t_1 + (t_n - t_1) \cdot \exp(-\alpha_1 \tau_1).$$

Конечная температура будет достигнута во второй камере, поэтому

$$t_k = t_2 + (t_n - t_2) \cdot \exp[-\alpha_2(\tau_{np} + \tau_2)], \quad (2.6.9)$$

где промежуточное время τ_{np} определяем из уравнения

$$\tau_{np} = -\frac{1}{\alpha_2} \ln \left(\frac{(t_1 - t_2) + (t_n - t_1) \cdot \exp(-\alpha_1 \tau_1)}{(t_n - t_2)} \right).$$

Подставляя найденное значение τ_{np} в (9), получаем

$$t_k = t_2 + (t_1 - t_2) \cdot \exp(-\alpha_2 \tau_2) + (t_n - t_1) \cdot \exp(-\alpha_1 \tau_1 - \alpha_2 \tau_2) \quad (2.6.10)$$

Для решения уравнения введем новое обозначение $z = \exp(-\alpha_2 \tau_2)$.

Тогда уравнение (2.6.10) будет иметь вид:

$$t_k = t_2 + (t_1 - t_2) \cdot z + (t_n - t_1) \cdot \exp(-\alpha_1 \tau_1) \cdot z^{(1 - \alpha_1 / \alpha_2)}$$

Получено уравнение относительно z :

$$a = v \cdot z + c \cdot z^k, \quad (2.6.11)$$

где $k = (1 - \alpha_1 / \alpha_2)$; $a = (t_k - t_2)$; $v = (t_1 - t_2)$; $c = (t_n - t_1) \cdot \exp(-\alpha_1 \tau_1)$.

Если такое решение z будет найдено, то из соотношения

$$z_0 = \exp(-\alpha_2 \tau_2),$$

можно найти нужные величины:

$$\tau_2 = - (1 / \alpha_2) \cdot \ln z; \quad \tau_1 = \tau - \tau_2 = \tau - (1 / \alpha_2) \cdot \ln z.$$

С помощью итерационных методов можно приближенно с любой заданной точностью решить уравнение (2.6.11), представив его в виде.

$$f(z) = cz^k + vz - a = 0.$$

Известно, что метод Ньютона (метод касательных) основан на замене $f(z)$ в точке начального приближения $z = z_0$ касательной, пересечение

которой с осью z дает первое приближение z_1 . Затем, выбирается $z=z_l$ и т.д. Таким образом, строится итерационный процесс, сходящийся к корню уравнения:

$$z_{n+1} = z_n - f(z)/f'(z).$$

Если ε - заданная точность, то процесс останавливается при условии $z_{n+1} - z_n \leq \varepsilon$. Метод обеспечивает быструю сходимость, если

$$f(z_0) \cdot f''(z_0) > 0.$$

В качестве z_0 выбирается тот конец отрезка $[a, b]$, на котором значение функции $f(z_0)$ и значение второй производной $f''(z_0)$ совпадают. Например, для $a=16$, $b=10$, $c=40$, $\kappa=0,6$ получаем $f(z) = 40z^{0,6} + 10z - 16 = 0$; $f(0) = -16$; $f(1)=2$; $z_0 \in [0,1]$; $f'(z) = 40 \cdot 0,6 \cdot z^{-0,4} + 10$; $f''(z) = -24 \cdot 0,4 \cdot z^{-1,4} = -9,6 \cdot z^{-1,4}$.

Значение $f''(z) < 0$ на отрезке $(0,1)$ и $f(0) < 0$, поэтому в качестве начального приближения принято $z_0=0,12$; $f(0,12) < 0$. Далее,

$$f(z_n)/f'(z_n) = (40 \cdot z_n^{0,6} + 10 \cdot z_n - 16)/(24 \cdot z_n^{-0,4} + 10),$$

$$z_{n+1} = z_n - (40 \cdot z_n^{0,6} + 10 \cdot z_n - 16)/[(24 + 10 \cdot z_n^{-0,4})/z_n^{0,4}].$$

При погрешности $\varepsilon=10^{-3}$ $z=0,1783326$ за три итерации ($n=3$).

В продолжение сказанного, можно сделать следующие замечания. Во-первых, метод позволяет рассматривать задачу оптимизации режимов замораживания для любого конечного числа камер охлаждения. Во-вторых, используя процедуру расчета, можно решать в некотором смысле обратную задачу: при заданных начальной (t_n) и конечной (t_k) температурах продукта рассчитать время пребывания продукта в первой и второй камерах, соответственно, τ_1 и τ_2 .

ГЛАВА 3. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГРУППОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В РЕСУРСНЫХ СИСТЕМАХ

В данном разделе исследуются несколько специальных ресурсные системы S_{HG} , структура которых задается простейшими гиперграфами HG . Все модели содержат конечного числа элементов, но отличаются друг от друга системой оценочных функций. Общим свойством моделей является то, что все элементы системы имеют возможность взаимодействовать одновременно на общем поле (рынке) и могут альтернативно с определенной выгодой оставлять часть ресурса для собственных нужд. Каждая последующая модель является развитием предыдущих моделей. Это позволяет, с одной стороны, на каждом шаге использовать общие свойства ранних моделей, а с другой стороны, в рассмотренном классе можно всегда выбрать такую модель, которая обладает достаточными универсальными свойствами при минимальном числе параметров.

3.1 Базовая модель взаимодействий

Пусть система S состоит из n агентов, которые имеют соответствующие ресурсы q_1, q_2, \dots, q_n . Каждый агент i действует на одном глобальном рынке (с участием всех агентов) и на одном внутреннем поле (без участия других). Следовательно, ресурс q_i распределяется на две составляющие: для внутреннего поля x_{ii} и для общего поля x_{ip} , где

$$x_{ii} + x_{ip} = q_i \quad (3.1.1)$$

Зададим систему оценок элемента i на внутреннем поле f_{ii} и на внешнем поле f_{ip} при помощи функций

$$\begin{cases} f_{ii} = \alpha x_{ii} \\ f_{ip} = \alpha x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.1.2)$$

Фиксированные параметры α и β задают характер оценочных функций. Оценка элемента на внешнем поле естественным образом зависит от присутствия на этом поле ресурсов всех элементов. Для этого удобно задавать подмножество элементов V_i , являющихся партнерами элемента i

на внешнем поле. В нашем случае V_i - это все элементы системы кроме элемента i в количестве $n-1$.

Общее состояние системы определяется состоянием агентов и задается матрицей

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{22} & \dots & x_{nn} \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Таким образом, в системе S , находящейся в состоянии X , каждый агент может проводить оценки удовлетворенности своего распределения с помощью соотношений (3.1.2) и предпринимать соответствующие действия по перераспределению. Предполагаем, что все агенты заинтересованы в стабильном развитии системы, поэтому придерживаются равновесных стратегий. Сформулируем понятие равновесного состояния системы.

Определение 1. Распределение $X_i=(x_{ii}, x_{ip})$ для агента i является равновесным, если оно удовлетворяет условию баланса (3.1.1) и условию равной полезности $f_{ii}=f_{ip}$.

Определение 2. Состояние системы $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ является равновесным, если каждое распределение $X_i, i=1, 2, \dots, n$, является равновесным.

Далее нам придется ответить на следующие важные вопросы. Существуют ли равновесные состояния для систем данного типа? Каким образом связаны равновесные состояния с параметрами системы? В каких случаях существует единственное равновесное решение?

Введем дополнительные обозначения и определим число параметров системы. Будем обозначать рассматриваемую базовую модель через SI или, более подробно, $SI=S(n, q, f)$, где n – число элементов, $q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ – ресурсный вектор, f – условное обозначение системы оценочных функций. Система функций f зависит от двух параметров α и β , поэтому модель $SI=S(n, q, f\{\alpha, \beta\})$ определяется $n+2$ параметрами: n для q и 2 для f .

Рассмотрим условие равновесия:

$$\begin{cases} f_{ii} = f_{ip} \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

или

$$\begin{cases} \alpha x_{ii} = \alpha x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.1.4)$$

Заметим, что система имеет $2n$ неизвестных и $2n$ уравнений, поэтому можно ставить вопрос о существовании и единственности равновесных состояний.

Выражая x_{ii} из второго уравнения соотношения (3.1.4) и подставляя в первое, получаем систему n уравнений с n неизвестными:

$$\alpha(q_i - x_{ip}) = \alpha x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

или

$$2\alpha x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} = \alpha q_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.1.5)$$

В развернутом виде система (3.1.5) имеет вид

$$\begin{cases} 2\alpha x_{1p} + \beta x_{2p} + \beta x_{3p} + \dots + \beta x_{np} = \alpha q_1 \\ \beta x_{1p} + 2\alpha x_{2p} + \beta x_{3p} + \dots + \beta x_{np} = \alpha q_2 \\ \dots \\ \beta x_{1p} + \beta x_{2p} + \beta x_{3p} + \dots + 2\alpha x_{np} = \alpha q_n \end{cases}.$$

Основная матрица системы имеет на главной диагонали элементы со значением 2α , а все другие элементы равны β . С помощью специальных методов удалось вычислить данный определитель данной матрицы для произвольного значения n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & 2\alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & 2\alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & 2\alpha \end{vmatrix} = (2\alpha - \beta)^{n-1} (2\alpha + (n-1)\beta).$$

Имеется два особых случая, когда $\Delta=0$: при $2\alpha-\beta=0$ и при $2\alpha+(n-1)\beta=0$. Во всех других случаях $\Delta \neq 0$ и система уравнений имеет

единственное решения, которое определяет единственное равновесное состояние. Найдем это равновесное состояние при помощи метода Крамера:

$$x_{ip} = \Delta_i / \Delta, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Опуская громоздкие вычисления, выпишем Δ_1 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha q_1 & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \alpha q_2 & 2\alpha & \beta & \dots & \beta \\ \alpha q_3 & \beta & 2\alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha q_n & \beta & \beta & \dots & 2\alpha \end{vmatrix} = (2\alpha - \beta)^{n-2} (\alpha q_1 (2\alpha + (n-2)\beta) - \alpha\beta \sum_{j \in T_1} q_j).$$

Аналогично находим все Δ_i :

$$\Delta_i = (2\alpha - \beta)^{n-2} (\alpha q_i (2\alpha + (n-2)\beta) - \alpha\beta \sum_{j \in V_i} q_j), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Учитывая, что $\sum_{j \in T_i} q_j = \sum_{j=1}^n q_j - q_i = Q - q_i$, где Q – суммарный ресурс

всей системы, получаем

$$\Delta_i = (2\alpha - \beta)^{n-2} (\alpha q_i (2\alpha + (n-1)\beta) - \alpha\beta Q), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

После этого легко получить равновесное распределение

$$\begin{cases} x_{ip} = \frac{\alpha q_i (2\alpha + (n-1)\beta) - \alpha\beta Q}{(2\alpha - \beta)(2\alpha + (n-1)\beta)} \\ x_{ii} = \frac{q_i (\alpha - \beta)(2\alpha + (n-1)\beta) + \alpha\beta Q}{(2\alpha - \beta)(2\alpha + (n-1)\beta)} \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.1.6)$$

Особый случай 1. Пусть $2\alpha = \beta$, тогда соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \alpha x_{ii} = \alpha x_{ip} + 2\alpha \sum_{j \in V_i} x_{jp} \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Так как $\alpha \neq 0$ и $x_{ii} = q_i - x_{ip}$, то можно получить систему из n уравнений:

$$q_i = 2 \sum_{j=1}^n x_{jp}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.1.7)$$

В правой части каждого уравнения имеется одинаковая сумма, задающая суммарный ресурс общего поля. Следовательно, решение (равновесное состояние) возможно только при одинаковых значениях q_i .

Предположим, что $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$. Тогда из (3.1.7) получаем, что для равновесия необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{j=1}^n x_{jp} = \frac{q}{2} = \frac{Q}{2n}.$$

Далее, определяем оставшийся суммарный ресурс частных распределений:

$$\sum_{i=1}^n x_{ii} = \frac{(2n-1)}{2} q = \frac{(2n-1)}{2n} Q.$$

Из этого можно сделать вывод, что распределение ресурсов при равновесном состоянии должно обеспечивать на общем поле заданный фиксированный объем $Q/2n$, а оставшаяся большая часть общего ресурса распределяется по частным полям. Из множества различных равновесных решений можно выделить два наиболее интересных.

Симметричное решение. Все агенты действуют на общем поле своими равными долями ресурса:

$$x_{ii} = \frac{(2n-1)}{2n} q, \quad x_{ip} = \frac{q}{2n}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Оценки уровня взаимодействий:

$$f_{ii} = \alpha x_{ii} = \alpha \frac{(2n-1)}{2n} q;$$

$$f_{ip} = \alpha x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} = \alpha \frac{q}{2n} + 2\alpha(n-1) \frac{q}{2n} = \alpha \frac{(2n-1)}{2n} q.$$

Видим, что выполняется условие равновесия: $f_{ii} = f_{ip}, i=1, 2, \dots, n$.

Несимметричное решение. Первый участник полностью «закрывает» потребности общего поля; остальные участники оставляют весь ресурс на своих внутренних полях:

$$x_{11} = \frac{q}{2}, \quad x_{1p} = \frac{q}{2}, \quad x_{ii} = q, \quad x_{ip} = 0, \quad i=2, 3, \dots, n.$$

Равновесные оценки:

$$f_{11} = \alpha x_{11} = \alpha q / 2, \quad f_{1p} = \alpha x_{1p} + \beta \sum_{j \in V_1} x_{jp} = \alpha q / 2 + \beta \cdot 0 = \alpha q / 2,$$

$$f_{ii} = \alpha x_{ii} = \alpha q, \quad f_{ip} = \alpha x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} = \alpha \cdot 0 + 2\alpha \frac{q}{2} = \alpha q, \quad i=2, 3, \dots, n.$$

Условия равновесия выполняются, хотя у первого участника самооценка ниже. Это не нарушает равновесие, так как первый агент не сравнивает свои оценки с оценками других агентов. Важно отметить, что все участники, начиная со второго, не имея ресурса на общем поле, обеспечивают свои «интересы» на этом поле за счет первого участника.

Особый случай 2. Пусть $2\alpha = (1-n)\beta$. Тогда система оценочных функций принимает вид:

$$f_{ii} = \alpha x_{ii}, \quad f_{ip} = \alpha x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} = \alpha x_{ip} + \frac{2\alpha}{1-n} \sum_{j \in V_i} x_{jp}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Соответственно, получаем условие равновесия:

$$\begin{cases} \alpha x_{ii} = \alpha x_{ip} + \frac{2\alpha}{1-n} \sum_{j \in V_i} x_{jp}, & i=1, 2, \dots, n. \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}$$

или

$$q_i = 2x_{ip} + \frac{2}{1-n} \sum_{j \in V_i} x_{jp}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

В матричной форме система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & \omega & \omega & \dots & \omega \\ \omega & 2 & \omega & \dots & \omega \\ \omega & \omega & 2 & \dots & \omega \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega & \omega & \omega & \dots & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ x_{3p} \\ \dots \\ x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \text{где } \omega = \frac{2}{1-n}.$$

Чтобы определиться со способом решения общего случая, рассмотрим сначала систему при $n=3$ и решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & q_1 \\ -1 & 2 & -1 & q_2 \\ -1 & -1 & 2 & q_3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & q_1 \\ 0 & 3 & -3 & q_2 - q_3 \\ 0 & -3 & 3 & 2q_3 + q_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & q_1 \\ 0 & 3 & -3 & q_2 - q_3 \\ 0 & 0 & 0 & q_1 + q_2 + q_3 \end{array} \right).$$

Система совместна и имеет множество решений при $q_1+q_2+q_3=0$. Такое соотношение имеет смысл, если система состоит из элементов-поставщиков и элементов-потребителей: элементы с положительным ресурсом являются потребителями, а элементы с отрицательным ресурсом – поставщиками.

Покажем, что для произвольного n является верным аналогичное утверждение: *система совместна и имеет множество равновесных решений при $q_1+q_2+q_3+\dots+q_n=0$.*

Применим метод исключения неизвестных для общего случая:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \omega & \omega & \dots & \omega & q_1 \\ \omega & 2 & \omega & \dots & \omega & q_2 \\ \omega & \omega & 2 & \dots & \omega & q_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega & \omega & \omega & \dots & 2 & q_n \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \omega & \omega & \dots & \omega & q_1 \\ 0 & -n\omega & 0 & \dots & n\omega & q_2 - q_n \\ 0 & 0 & -n\omega & \dots & n\omega & q_3 - q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega & \omega & \omega & \dots & 2 & q_n \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \omega & \omega & \dots & \omega & q_1 \\ 0 & -n\omega & 0 & \dots & n\omega & (q_2 - q_n)n \\ 0 & 0 & -n\omega & \dots & n\omega & (q_3 - q_n)/n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & -2 & -2 & \dots & (n-1) & (n-1)q_n \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \omega & \omega & \dots & \omega & q_1 \\ 0 & -n\omega & 0 & \dots & n\omega & q_2 - q_n \\ 0 & 0 & -n\omega & \dots & n\omega & q_3 - q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & n\omega & n\omega & \dots & (n-1) + \omega & (n-1)q_n + q_1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & \omega & \omega & \dots & \omega & q_1 \\ 0 & -n\omega & 0 & \dots & n\omega & q_2 - q_n \\ 0 & 0 & -n\omega & \dots & n\omega & q_3 - q_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q_1 + q_2 + \dots + q_n \end{array} \right).$$

Система имеет решение при $q_1+q_2+q_3+\dots+q_n=0$. Что и требовалось показать.

Определитель основной матрицы имеет ранг $n-1$, поэтому множество решений является однопараметрическим семейством. В качестве параметра t удобно взять x_{np} . После этого нетрудно получить общее решение:

$$\begin{cases} x_{np} = t, & x_{nn} = q_n - t, \\ x_{ip} = t + \frac{n-1}{2n}(q_i - q_n), \\ x_{ii} = -t + \frac{1}{2n}((n+1)q_i + (n-1)q_n), \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n-1.$$

Рассмотрим одно важное частное решение, когда агент n отдает весь свой ресурс на общий рынок: $\begin{cases} x_{np} = t = q_n \\ x_{nn} = q_n - t = 0. \end{cases}$

Тогда равновесное распределение имеет вид:

$$\begin{cases} x_{ip} = q_n + \frac{n-1}{2n}(q_i - q_n) = \frac{1}{2n}(n-1)q_i + (n+1)q_n, \\ x_{ii} = -q_n + \frac{1}{2n}((n+1)q_i + (n-1)q_n) = \frac{1}{2n}((n+1)q_i - (n+1)q_n), \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n-1.$$

По результатам исследования рассматриваемой модели сформулируем следующую теорему.

Теорема 3.1. Для системы $SI=S(n,q,f\{\alpha,\beta\})$ выполняются следующие утверждения.

(а) Если $2\alpha \neq \beta$ и $2\alpha \neq (1-n)\beta$, то существует единственное равновесное состояние X :

$$\begin{cases} x_{ip} = \frac{\alpha q_i (2\alpha + (n-1)\beta) - \alpha\beta Q}{(2\alpha - \beta)(2\alpha + (n-1)\beta)} \\ x_{ii} = \frac{q_i (\alpha - \beta)(2\alpha + (n-1)\beta) + \alpha\beta Q}{(2\alpha - \beta)(2\alpha + (n-1)\beta)}, \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n,$$

где Q – общий ресурс системы.

(б) Если $2\alpha = \beta$, то существует множество равновесных состояний при условии $q_1=q_2=\dots = q_n=q$, для которых необходимо и достаточно выполнения соотношений

$$\sum_{j=1}^n x_{jp} = \frac{q}{2} = \frac{Q}{2n}, \quad \sum_{i=1}^n x_{ii} = \frac{(2n-1)}{2} q = \frac{(2n-1)}{2n} Q.$$

(в) Если $2\alpha=(1-n)\beta$, то при условии $q_1+q_2+q_3+\dots+q_n=0$ существует однопараметрическое семейство равновесных состояний

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{np} = t, \quad x_{nn} = q_n - t, \\ x_{ip} = t + \frac{n-1}{2n}(q_i - q_n), \\ x_{ii} = -t + \frac{1}{2n}((n+1)q_i + (n-1)q_n), \end{array} \quad i=1, 2, \dots, n-1, \text{ где } t - \text{любое число.} \right.$$

3.2 Однородная модель оценки отношений

Рассмотрим систему $S2$, в которой игроки различным образом оценивают эффект своего ресурса на внешнем и внутреннем поле:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ii} = \alpha_1 x_{ii} \\ f_{ip} = \alpha_2 x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}, \end{array} \quad i=1, 2, \dots, n. \right. \quad (3.2.1)$$

Все элементы системы имеют одинаковые критерии оценки распределенного ресурса, поэтому модель можно назвать однородной. Данную модель можно задать в общем виде так: $S2=S(n,q,f\{\alpha_1,\alpha_2,\beta\})$. Она будет определяться $n+3$ параметрами: n для q и 3 для f . Все другие обозначения соответствуют модели $S1$. Также остаются в силе все введенные ранее определения.

Проведем исследование модели и определим ее основные свойства.

Определим условия, при которых достигаются равновесные состояния. Предполагая, что выполняется критерий равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{ii} = f_{ip} \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{array} \right., \quad i=1, 2, \dots, n,$$

получаем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{ii} = \alpha_2 x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}, & i=1, 2, \dots, n; \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}$$

$$\alpha_1 (x_{ii} + x_{ip}) = (\alpha_1 + \alpha_2) x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}, \quad i=1, 2, \dots, n;$$

$$\alpha_1 q_i = (\alpha_1 + \alpha_2) x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Выпишем систему уравнений в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha_1 + \alpha_2 & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha_1 + \alpha_2 & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ x_{3p} \\ \dots \\ x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 q_1 \\ \alpha_1 q_2 \\ \alpha_1 q_3 \\ \dots \\ \alpha_1 q_n \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Определитель основной матрицы в общем случае имеет вид следующее значение

$$\Delta = (\alpha_1 + \alpha_2 - \beta)^{n-1} (\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta).$$

Следовательно, при $\alpha_1 + \alpha_2 - \beta \neq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta \neq 0$ система имеет единственное решение. Решая систему так же, как это сделано для соответствующего случая модели $S1$, получаем равновесное распределение:

$$\begin{cases} x_{ip} = \frac{\alpha_1 q_i (\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta) - \alpha_1 \beta Q}{(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta)(\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta)} \\ x_{ii} = \frac{q_i (\alpha_2 - \beta)(\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta) + \alpha_1 \beta Q}{(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta)(\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta)} \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Особый случай $\alpha_1 + \alpha_2 - \beta = 0$. Легко получить, что система совместна при условии $q_1 = q_2 = \dots = q_n$. Если это условие выполняется, то существует множество равновесных решений

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{22} & \dots & x_{nn} \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{pmatrix},$$

которое должно удовлетворять следующим требованиям:

$$\sum_{j=1}^n x_{jp} = \frac{\alpha_1 Q}{n\beta}, \quad \sum_{i=1}^n x_{ii} = \frac{(n\beta - \alpha_1) Q}{n\beta} Q.$$

Особый случай $\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta = 0$. Условие равновесия запишется в виде

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{ii} = \alpha_2 x_{ip} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1-n} \sum_{j \in T_i} x_{jp}, & i=1, 2, \dots, n. \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}$$

После преобразований, получаем

$$\alpha_1 q_i = (\alpha_1 + \alpha_2) \left(x_{ip} + \frac{1}{1-n} \sum_{j \in T_i} x_{jp} \right), \quad i=1, 2, \dots, n,$$

или

$$x_{ip} + \frac{1}{1-n} \sum_{j \in T_i} x_{jp} = \frac{\alpha_1 q_i}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Выпишем систему в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \dots \\ \dots \\ x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda q_1 \\ \lambda q_2 \\ \dots \\ \lambda q_{n-1} \\ \lambda q_n \end{pmatrix}, \quad \text{где } \varepsilon = \frac{1}{1-n}, \quad \lambda = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

После преобразований система приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ 0 & -n\varepsilon & 0 & \dots & n\varepsilon \\ 0 & 0 & -n\varepsilon & \dots & n\varepsilon \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ x_{3p} \\ \dots \\ x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda q_1 \\ \lambda(q_2 - q_n) \\ \lambda(q_3 - q_n) \\ \dots \\ \lambda(q_1 + q_2 + \dots + q_n) \end{pmatrix}$$

Далее, получаем условие совместности системы уравнений $q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = 0$ (такое же, как в аналогичном случае модели *SI*) и однопараметрическое семейство равновесных распределений:

$$\begin{cases} x_{np} = t, & x_{nn} = q_n - t, \\ x_{ip} = t + \left(\lambda - \frac{\lambda}{n} \right) (q_i - q_n), & i=1, 2, \dots, n-1. \\ x_{ii} = -t + \left(1 - \lambda + \frac{\lambda}{n} \right) q_i + \left(\lambda - \frac{\lambda}{n} \right) q_n, \end{cases}$$

В частности, при $x_{np} = t = q_n$, $x_{nn} = q_n - t = 0$, получаем

$$\begin{cases} x_{ip} = (\lambda - \frac{\lambda}{n})q_i + (1 - \lambda + \frac{\lambda}{n})q_n, \\ x_{ii} = (1 - \lambda + \frac{\lambda}{n})q_i - (1 - \lambda + \frac{\lambda}{n})q_n, \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n-1.$$

Сформулируем основной результат для системы S2.

Теорема 3.2. Для системы $S2=S(n,q,f\{\alpha_1,\alpha_2,\beta\})$ выполняются следующие утверждения.

(а) Если $\alpha_1+\alpha_2-\beta \neq 0$ и $\alpha_1+\alpha_2+(n-1)\beta \neq 0$, то система имеет единственное равновесное состояние X:

$$\begin{cases} x_{ip} = \frac{\alpha_1 q_i (\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta) - \alpha_1 \beta Q}{(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta)(\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta)} \\ x_{ii} = \frac{q_i (\alpha_2 - \beta)(\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta) + \alpha_1 \beta Q}{(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta)(\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta)} \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

где Q – общий ресурс системы.

(б) Если $\alpha_1+\alpha_2-\beta=0$, то существует множество равновесных состояний при условии $q_1=q_2=\dots = q_n=q$, для которых необходимо и достаточно выполнения соотношений

$$\sum_{j=1}^n x_{jp} = \frac{\alpha_1 Q}{n\beta}, \quad \sum_{i=1}^n x_{ii} = \frac{(n\beta - \alpha_1)Q}{n\beta}.$$

(в) Если $\alpha_1+\alpha_2+(n-1)\beta=0$, то при условии $q_1+q_2+q_3+\dots+q_n=0$ существует однопараметрическое семейство равновесных состояний

$$\begin{cases} x_{np} = t, \quad x_{nn} = q_n - t, \\ x_{ip} = t + (\lambda - \frac{\lambda}{n})(q_i - q_n), \\ x_{ii} = -t + (1 - \lambda + \frac{\lambda}{n})q_i + (\lambda - \frac{\lambda}{n})q_n, \end{cases} \quad i=1,2,\dots,n-1, \text{ где } t - \text{любое число.}$$

3.3 Неоднородные оценки взаимодействий

Рассмотрим систему S3, в которой сделано еще одно обобщение для семейства оценочных функций: для каждого агента системы его оценочные функции дополнительно могут содержать «бонусные» надбавки или штрафы, не связанные с количеством распределенного ресурса. Для

каждого поля взаимодействия такая добавка характеризует свою специфическую ситуацию.

$$\begin{cases} f_{ii} = \alpha_1 x_{ii} + d_i \\ f_{ip} = \alpha_2 x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} + h_i, \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.3.1)$$

Данная модель : $S3=S(n,q,f\{\alpha_1,\alpha_2,\beta,d,h\})$ включает дополнительные параметры $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $h=(h_1, h_2, \dots, h_n)$. В итоге она будет зависеть от $3n+3$ параметров.

Проведем исследование модели и определим ее основные свойства.

Предполагая, что выполняется критерий равновесия:

$$\begin{cases} f_{ii} = f_{ip} \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

получаем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{ii} + d_i = \alpha_2 x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp} + h_i \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n;$$

$$\alpha_1 (x_{ii} + x_{ip}) + d_i - h_i = (\alpha_1 + \alpha_2) x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}, \quad i=1, 2, \dots, n;$$

$$\alpha_1 q_i + d_i - h_i = (\alpha_1 + \alpha_2) x_{ip} + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Выпишем систему уравнений в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha_1 + \alpha_2 & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha_1 + \alpha_2 & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ x_{3p} \\ \dots \\ x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 q_1 + d_1 - h_1 \\ \alpha_1 q_2 + d_2 - h_2 \\ \alpha_1 q_3 + d_3 - h_3 \\ \dots \\ \alpha_1 q_n + d_n - h_n \end{pmatrix}.$$

(3.3.2)

Система (3.3.2) отличается от системы (3.2.2) только правой частью, поэтому исследования этой модели во многом похожи на предыдущий случай. Исследуя систему линейных уравнений, получим основной результат в виде следующей теоремы.

Теорема 3.3. Для системы $S3=S(n,q,f\{\alpha_1,\alpha_2,\beta,d,h\})$ выполняются следующие утверждения.

(а) Если $\alpha_1+\alpha_2-\beta \neq 0$ и $\alpha_1+\alpha_2+(n-1)\beta \neq 0$, то система имеет единственное равновесное состояние X :

$$\begin{cases} x_{ip} = \frac{(\alpha_1 q_i + d_i - h_i)(\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta) - \alpha_1 \beta (Q + D - H)}{(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta)(\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta)} \\ x_{ii} = \frac{(\alpha_2 q_i - d_i + h_i)(\alpha_1 - \beta)(\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta) + \alpha_1 \beta (Q + D - H)}{(\alpha_1 + \alpha_2 - \beta)(\alpha_1 + \alpha_2 + (n-1)\beta)} \end{cases}$$

$$i=1,2,\dots,n.$$

где $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ – общий ресурс системы, $D = \sum_{i=1}^n d_i$, $H = \sum_{i=1}^n h_i$ – суммарные характеристики добавочных параметров оценочных функций.

(б) Если $\alpha_1+\alpha_2-\beta=0$, то существует множество равновесных состояний при условии $q_1+d_1-h_1=q_2+d_2-h_2=\dots = q_n+d_n-h_n$, для которых необходимо и достаточно выполнения соотношений

$$\sum_{j=1}^n x_{jp} = \frac{\alpha_1 Q + D - H}{n\beta}, \quad \sum_{i=1}^n x_{ii} = \frac{(n\beta - \alpha_1)Q - D + H}{n\beta}.$$

(в) Если $\alpha_1+\alpha_2+(n-1)\beta=0$, то при условии $Q+D-H=0$ существует однопараметрическое семейство равновесных состояний

$$\begin{cases} x_{np} = t, \quad x_{nn} = q_n - t, \\ x_{ip} = t + \frac{n-1}{n(\alpha_1 + \alpha_2)}(\alpha_1 q_i + d_i - h_i) - \frac{n-1}{n(\alpha_1 + \alpha_2)}(\alpha_1 q_n + d_n - h_n), \\ x_{ii} = -t + \frac{q_i}{n} + \frac{n-1}{n(\alpha_1 + \alpha_2)}(\alpha_2 q_i - d_i + h_i) + \frac{n-1}{n(\alpha_1 + \alpha_2)}(\alpha_1 q_n + d_n - h_n), \end{cases}$$

$$i=1,2,\dots,n-1, \quad t - \text{любое число.}$$

Результат является обобщением всех приведенных выше теорем, а устойчивость найденного решения можно непосредственно проверить с помощью оценочных функций.

3.4 Индивидуальные оценки взаимодействий

Рассмотрим систему $S4$, в которой игроки оценивают эффект своего ресурса на внешнем и внутреннем поле следующим образом:

$$\begin{cases} f_{ii} = \alpha_{i1}x_{ii} \\ f_{ip} = \alpha_{i2}x_{ip} + \beta_i \sum_{j \in V_i} x_{jp} \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Видим, что у каждого участника свои индивидуальные оценки на каждом поле взаимодействия. Проведем исследование модели и определим ее основные свойства.

Вначале найдем равновесные состояния. Предполагая, что выполняется критерий равновесия:

$$\begin{cases} f_{ii} = f_{ip} \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

получаем следующую цепочку соотношений для каждого $i=1, 2, \dots, n$:

$$\begin{cases} \alpha_{i1}x_{ii} = \alpha_{i2}x_{ip} + \beta_i \sum_{j \in V_i} x_{jp} ; \\ x_{ii} + x_{ip} = q_i \end{cases}$$

$$\alpha_{i1}(x_{ii} + x_{ip}) = (\alpha_{i1} + \alpha_{i2})x_{ip} + \beta_i \sum_{j \in V_i} x_{jp} ;$$

$$\alpha_{i1}q_i = (\alpha_{i1} + \alpha_{i2})x_{ip} + \beta_i \sum_{j \in V_i} x_{jp} .$$

Выпишем систему уравнений в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} & \beta_1 & \beta_1 & \dots & \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha_{21} + \alpha_{22} & \beta_2 & \dots & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \alpha_{31} + \alpha_{32} & \dots & \beta_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n & \beta_n & \beta_n & \dots & \alpha_{n1} + \alpha_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ x_{3p} \\ \dots \\ x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}q_1 \\ \alpha_{21}q_2 \\ \alpha_{31}q_3 \\ \dots \\ \alpha_{n1}q_n \end{pmatrix} .$$

Определитель основной матрицы в общем случае имеет следующее значение

$$\Delta = \prod_{i=1}^n (\alpha_{i1} + \alpha_{i2} - \beta_i) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\beta_i}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2} - \beta_i} \right) \right).$$

При подсчете Δ пришлось делать ряд преобразований и замен,

которые достаточно трудоемки и требуют больших вычислений (см. Приложение 1).

Заметим, что каждый из множителей произведения определяет свой особый вырожденный случай. Следовательно, имеется не менее n таких случаев, которые в дальнейшем при необходимости можно исследовать. В следующем параграфе будут изучены динамические свойства системы $S4$.

3.5 Динамические модели и итерационные процессы

Представим ситуацию, когда неизвестно равновесное решение системы S , но известны равновесные стратегии поведения ее участников. В этом случае некоторое начальное состояние будет последовательно меняться на каждом шаге и, возможно, будет приближаться к равновесному состоянию. Далее мы исследуем динамику состояний систем вида $S1, S2, S3$ и найдем условия сходимости произвольного начального состояния к равновесному состоянию.

Динамика системы $S1$. Рассмотрим систему $S1$ и ее последовательные состояния $X(k)$, $k=0,1,2,\dots$. Предположим, что начальное решение

$$X(0) = \begin{pmatrix} x_{11}(0) & x_{22}(0) & \dots & x_{nn}(0) \\ x_{1p}(0) & x_{2p}(0) & \dots & x_{np}(0) \end{pmatrix}$$

не является равновесным. Тогда на следующем шаге агентами независимо друг от друга формируется новое решение $X(1)$, основываясь на информации предыдущего шага. Следовательно, соотношения (3.1.2) принимают вид

$$\begin{cases} f_{ii} = \alpha x_{ii}(1) \\ f_{ip} = \alpha x_{ip}(1) + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}(0), \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.5.1)$$

Полагая $f_{ii}=f_{ip}=f_i$, из (3.5.1) получаем

$$x_{ii}(1) = \frac{f_i}{\alpha}; \quad x_{ip}(1) = \frac{1}{\alpha} (f_i - \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}(0)), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.5.2)$$

Значение f_i найдем с помощью балансовых соотношений и (3.5.2):

$$x_{ii}(1) + x_{ip}(1) = q_i = \frac{1}{\alpha} \left(2f_i - \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}(0) \right), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Следовательно,

$$f_i = \frac{1}{2} \left(\alpha q_i + \beta \sum_{j \in V_i} x_{jp}(0) \right), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Возвращаясь к соотношению (3.5.2), определяем первый итерационный шаг:

$$\begin{cases} x_{ii}(1) = \frac{1}{2} \left(q_i + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(0) \right) \\ x_{ip}(1) = \frac{1}{2} \left(q_i - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(0) \right) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.5.3)$$

Соответственно, на произвольном шаге k , получаем:

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{1}{2} \left(q_i + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \right) \\ x_{ip}(k+1) = \frac{1}{2} \left(q_i - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \right) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.5.4)$$

Таким образом, соотношения (3.5.4) задают итерационные изменения состояний $X(k)$ в течение дискретного времени $k=0,1,2,\dots$.

Легко проверить, что все равновесные состояния системы SI , найденные ранее, являются «неподвижными» по отношению к преобразованиям (3.5.4). В связи с этим, важно определить условия, при которых система ведет себя устойчиво, т.е. любое начальное состояние приближается к равновесному состоянию. Кроме того, интересно знать скорость сходимости и меру отклонения от равновесного решения.

Для дальнейшего исследования можно рассмотреть только второе соотношение из (3.5.4). Представим его в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x_{1p}(k+1) \\ x_{2p}(k+1) \\ \dots \\ x_{np}(k+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} - \frac{\beta}{2\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p}(k) \\ x_{2p}(k) \\ \dots \\ x_{np}(k) \end{pmatrix}.$$

В сжатой форме это выглядит так: $X_p(k+1) = \frac{1}{2} \vec{q} - A \cdot X_p(k)$, где

$$X_p(k+1) = \begin{pmatrix} x_{1p}(k+1) \\ x_{2p}(k+1) \\ \dots \\ x_{np}(k+1) \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad A = \frac{\beta}{2\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_p(k) = \begin{pmatrix} x_{1p}(k) \\ x_{2p}(k) \\ \dots \\ x_{np}(k) \end{pmatrix}.$$

При $k=0$ имеем $X_p(1) = \frac{\vec{q}}{2} - A \cdot X_p(0)$. При $k=2$:

$$X_p(2) = \frac{\vec{q}}{2} - A \cdot X_p(1) = \frac{\vec{q}}{2} - A \cdot \left(\frac{\vec{q}}{2} - A \cdot X_p(0) \right) = (E - A) \frac{\vec{q}}{2} + A^2 X_p(0).$$

По индукции найдем состояние на шаге $k+1$, выраженное через начальное состояние:

$$X_p(k+1) = (E - A + A^2 - A^3 + \dots + (-1)^k A^k) \frac{\vec{q}}{2} + (-1)^{k+1} A^{k+1} X_p(0). \quad (3.5.5)$$

Для сходимости процесса достаточно выполнение условия $\|A\| < 1$, $\|A\|$ – любая из известных норм матрицы A , например,

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \quad (3.5.6)$$

Так как в нашем случае матрица A является симметричной, то обе нормы определяют следующее условие сходимости:

$$\left| \frac{(n-1)\beta}{2\alpha} \right| < 1 \quad (3.5.7)$$

Спектральная норма: $\|A\|_2 = \rho(A) = \max_s \{|\lambda_s|\}$ (максимальное по модулю собственное число матрицы A) определяет необходимое и достаточное условие сходимости. Легко показать, что матрица A имеет два

собственных значения: $\lambda_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}$, $\lambda_2 = \frac{(n-1)\beta}{2\alpha}$, причем первое значение имеет кратность $n-1$. Следовательно, необходимое и достаточное условие сходимости имеет вид

$$\|A\|_2 = \left| \frac{(n-1)\beta}{2\alpha} \right| < 1$$

и совпадает с условием (3.5.7).

Переходя к пределу в соотношении (3.5.5) при условии $\|A\| < 1$, получаем вид равновесного решения, не зависящего от начального состояния:

$$X_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{1}{2}(E + A)^{-1} \cdot \vec{q}. \quad (3.5.8)$$

Чтобы найти состояние в явном виде и сравнить его известным решением (3.1.6), проведем вычисления:

$$E + A = \frac{\beta}{2\alpha} \begin{pmatrix} \frac{2\alpha}{\beta} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{2\alpha}{\beta} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \frac{2\alpha}{\beta} \end{pmatrix}, \quad \det(E + A) = \left(\frac{2\alpha - \beta}{2\alpha} \right)^{n-1} \left(\frac{2\alpha + (n-1)\beta}{2\alpha} \right),$$

$$A_{ii} = \left(\frac{2\alpha - \beta}{2\alpha} \right)^{n-2} \left(\frac{2\alpha + (n-2)\beta}{2\alpha} \right),$$

$$A_{ij} = -\left(\frac{2\alpha - \beta}{2\alpha} \right)^{n-2} \left(\frac{\beta}{2\alpha} \right), \quad i \neq j.$$

$$(E + A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c & c & \dots & c \\ c & d & c & \dots & c \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c & c & c & \dots & d \end{pmatrix},$$

$$\text{где } d = \frac{2\alpha(2\alpha + (n-2)\beta)}{(2\alpha - \beta)(2\alpha + (n-1)\beta)}, \quad c = \frac{-2\alpha\beta}{(2\alpha - \beta)(2\alpha + (n-1)\beta)}.$$

Далее, по формуле (3.5.7) получаем известное равновесное состояние (3.1.6).

Соотношение (3.4.5) гарантирует сходимость со скоростью убывающей геометрической прогрессии с множителем $\mu = \|A\|$. Если

$Z(0) = X(0) - X^*$ и $Z(k) = X(k) - X^*$ определяют, соответственно, начальное отклонения и отклонение на шаге k , то $\|Z(k)\| = \|A^k \cdot Z(0)\| \leq \|A\|^k \cdot \|Z(0)\| = \mu^k \|Z(0)\|$. Следовательно, за k шагов отклонение уменьшится в $\varepsilon = \mu^k$ раз. Соответственно, количество итераций $k = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln \mu} \right\rceil + 1$ гарантирует уменьшение начального отклонения в ε раз [17, 60].

Теорема 3.4. *Последовательные состояния $X(k)$, $k=0,1,2,\dots$ системы S1, удовлетворяющие стационарным итерационным соотношениям*

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{1}{2} \left(q_i + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \right) \\ x_{ip}(k+1) = \frac{1}{2} \left(q_i - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \right) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n.$$

сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии к единственному равновесному состоянию при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\left| \frac{(n-1)\beta}{2\alpha} \right| < 1$.

Динамика системы S2. Для системы S2 равновесная стратегия развития определяется следующими итерационными соотношениями (по методу, представленному в п. 3.5.1):

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} q_i + \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \\ x_{ip}(k+1) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} q_i - \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.5.9)$$

Соответствующие матричные формы имеют вид

$$\begin{pmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \\ \dots \\ x_{nn}(k+1) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} + \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}(k) \\ x_{22}(k) \\ \dots \\ x_{nn}(k) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1p}(k+1) \\ x_{2p}(k+1) \\ \dots \\ x_{np}(k+1) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix} - \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p}(k) \\ x_{2p}(k) \\ \dots \\ x_{np}(k) \end{pmatrix}.$$

Из этого легко получить результат аналогичный **Теореме 3.4**.

Теорема 3.5. Последовательные состояния $X(k)$, $k=0,1,2,\dots$ системы $S2$, удовлетворяющие стационарным итерационным соотношениям (3.5.9) сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии к единственному равновесному состоянию X^* при любых начальных условиях тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\left| \frac{(n-1)\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \right| < 1$.

Компоненты равновесного состояния удовлетворяют соотношениям:

$$X_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} (E - A)^{-1} \cdot \vec{q},$$

$$X_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} (E + A)^{-1} \cdot \vec{q},$$

где $A = \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – симметричная матрица порядка n .

Динамика системы $S3$. Для системы $S3$ приведем важные соотношения и основной результат:

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\alpha_2 q_i - d_i + h_i) + \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \\ x_{ip}(k+1) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\alpha_1 q_i + d_i - h_i) - \frac{\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.5.10)$$

Теорема 3.6. Последовательные состояния $X(k)$, $k=0,1,2,\dots$ системы $S3$, удовлетворяющие стационарным итерационным соотношениям (4.10) сходятся со скоростью убывающей геометрической прогрессии к единственному равновесному состоянию X^* при любых начальных условиях

тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\left| \frac{(n-1)\beta}{\alpha_1 + \alpha_2} \right| < 1$.

Компоненты равновесного состояния удовлетворяют соотношениям:

$$X_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (E - A)^{-1} \cdot (\alpha_2 \vec{q} - \vec{d} + \vec{h}),$$

$$X_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (E + A)^{-1} \cdot (\alpha_1 \vec{q} + \vec{d} - \vec{h}),$$

$$\text{где } \vec{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T, \vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T.$$

Динамика системы S4. Для системы S4 равновесная стратегия развития определяется следующими итерационными соотношениями

$$\begin{cases} x_{ii}(k+1) = \frac{\alpha_{i2}}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2}} q_i + \frac{\beta_i}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2}} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \\ x_{ip}(k+1) = \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2}} q_i - \frac{\beta_i}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2}} \sum_{j \in V_i} x_{jp}(k) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.5.11)$$

Соответствующие матричные формы имеют вид

$$\begin{pmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \\ \dots \\ x_{nn}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 q_1 \\ w_2 q_2 \\ \dots \\ w_n q_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v_1 & \dots & v_1 & v_1 \\ v_2 & 0 & \dots & v_2 & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & v_n & \dots & v_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}(k) \\ x_{22}(k) \\ \dots \\ x_{nn}(k) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{1p}(k+1) \\ x_{2p}(k+1) \\ \dots \\ x_{np}(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 q_1 \\ w_2 q_2 \\ \dots \\ w_n q_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & v_1 & \dots & v_1 & v_1 \\ v_2 & 0 & \dots & v_2 & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & v_n & \dots & v_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1p}(k) \\ x_{2p}(k) \\ \dots \\ x_{np}(k) \end{pmatrix},$$

$$w_i = \frac{\alpha_{i2}}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2}}, \quad v_i = \frac{\beta_i}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2}}.$$

Из этого легко получить важный результат.

Теорема 3.7. Система S4, меняющая состояния по итерационным формулам (3.4.11), сходится к единственному равновесному состоянию при любых начальных условиях, если выполняется один из достаточных критериев сходимости:

$$(1) \|A\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max_i \left| \frac{(n-1)\beta_i}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2}} \right| < 1,$$

$$(2) \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_j \left\{ \sum_{i \in V_i} \left| \frac{\beta_j}{\alpha_{j1} + \alpha_{j2}} \right| \right\} < 1.$$

Компоненты равновесного состояния удовлетворяют соотношениям:

$$X_i^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = (E - A)^{-1} \cdot \overrightarrow{wq},$$

$$X_p^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_p(k) = (E + A)^{-1} \cdot \overrightarrow{wq},$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & \dots & v_1 & v_1 \\ v_2 & 0 & \dots & v_2 & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & v_n & \dots & v_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{wq} = \begin{pmatrix} w_1 q_1 \\ w_2 q_2 \\ \dots \\ w_n q_n \end{pmatrix}.$$

3.6 Модель для двух общих полей взаимодействий.

Рассмотрим систему S^* , в которой игроки оценивают эффект своего ресурса на двух внешних полях следующим образом:

$$\begin{cases} f_{i1} = \alpha_1 x_{i1} + \beta_1 \sum_{j \in V_{i1}} x_{j1} \\ f_{i2} = \alpha_2 x_{i2} + \beta_2 \sum_{j \in V_{i2}} x_{j2} \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Из условия равновесия:

$$\begin{cases} f_{i1} = f_{i2} \\ x_{i1} + x_{i2} = q_i \end{cases}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

получаются следующие соотношения для всех $i=1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_{i1} + \beta_1 \sum_{j \in V_{i1}} x_{j1} &= \alpha_2 x_{i2} + \beta_2 \sum_{j \in V_{i2}} x_{j2}, \\ \alpha_1 x_{i1} + \beta_1 \sum_{j \in V_{i1}} x_{j1} &= \alpha_2 (q_i - x_{i1}) + \beta_2 \sum_{j \in V_{i2}} (q_j - x_{j1}), \\ (\alpha_1 + \alpha_2) x_{i1} + (\beta_1 + \beta_2) \sum_{j \in V_{i1}} x_{j1} &= \alpha_2 q_i + \beta_2 \sum_{j \in V_{i2}} q_j, \\ (\alpha_1 + \alpha_2) x_{i1} + (\beta_1 + \beta_2) \sum_{j \in V_{i1}} x_{j1} &= (\alpha_2 - \beta_2) q_i + \beta_2 Q, \end{aligned}$$

где $Q = \sum_{i=1}^n q_i$. Последнее соотношение определяет систему уравнений для равновесного решения:

$$\begin{pmatrix} \omega & \nu & \nu & \dots & \nu \\ \nu & \omega & \nu & \dots & \nu \\ \nu & \nu & \omega & \dots & \nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu & \nu & \nu & \dots & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \\ \dots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_2 Q + (\alpha_2 - \beta_2) q_1 \\ \beta_2 Q + (\alpha_2 - \beta_2) q_2 \\ \beta_2 Q + (\alpha_2 - \beta_2) q_3 \\ \dots \\ \beta_2 Q + (\alpha_2 - \beta_2) q_n \end{pmatrix},$$

где $\omega = \alpha_1 + \alpha_2$, $\nu = \beta_1 + \beta_2$.

Найдем определитель основной матрицы:

$$\Delta = (\omega - \nu)^{n-1} (\omega + (n-1)\nu).$$

Вид определителя позволяет выписать особые случаи:

(1) $\omega = \nu$, т.е. $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ или $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} = 1$;

(2) $\omega = (1-n)\nu$, т.е. $\alpha_1 + \alpha_2 = (1-n)(\beta_1 + \beta_2)$ или $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} = 1-n$.

Если $\Delta \neq 0$, то равновесное состояние можно определить из системы линейных уравнений с помощью метода Крамера:

$$\begin{cases} x_{i1} = \frac{(\beta_2 Q + (\alpha_2 - \beta_2) q_i (\omega + (n-1)\nu) - \nu Q (\beta_2 (n-1) + \alpha_2))}{(\omega - \nu)(\omega + (n-1)\nu)} \\ x_{i2} = \frac{(\beta_1 Q + (\alpha_1 - \beta_1) q_i (\omega + (n-1)\nu) - \nu Q (\beta_1 (n-1) + \alpha_1))}{(\omega - \nu)(\omega + (n-1)\nu)} \\ i=1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Динамика системы S^* . Для системы S^* равновесная стратегия развития определяется следующими итерационными соотношениями, которые получаются после стандартных вычислений:

$$\begin{cases} x_{i1}(k+1) = \frac{\beta_1 Q}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1 + \alpha_2} q_i - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{j1}(k) \\ x_{i2}(k+1) = \frac{\beta_1 Q}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2}} q_i - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \sum_{j \in V_i} x_{j2}(k) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (3.6.1)$$

Проводя исследование итерационного процесса, получаем следующий результат.

Теорема 3.8. Система S^* , меняющая состояния по итерационным формулам (3.6.1), сходится к единственному равновесному состоянию, если выполняется необходимый и достаточный критерий сходимости:

$$(n-1) \left| \frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right| < 1.$$

При этом условии любое начальное состояние сходится со скоростью геометрической прогрессии к предельному равновесному состоянию:

$$X_1^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_1(k) = (E - A)^{-1} \cdot \vec{c1},$$

$$X_2^* = \lim_{k \rightarrow \infty} X_2(k) = (E + A)^{-1} \cdot \vec{c2},$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon & \dots & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 & \dots & -\varepsilon & -\varepsilon \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \dots & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$$\vec{c1} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \begin{pmatrix} \beta_1 Q + (\alpha_1 - \beta_1) q_1 \\ \beta_1 Q + (\alpha_1 - \beta_1) q_2 \\ \dots \\ \beta_1 Q + (\alpha_1 - \beta_1) q_n \end{pmatrix}, \quad \vec{c2} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} \begin{pmatrix} \beta_2 Q + (\alpha_2 - \beta_2) q_1 \\ \beta_2 Q + (\alpha_2 - \beta_2) q_2 \\ \dots \\ \beta_2 Q + (\alpha_2 - \beta_2) q_n \end{pmatrix}.$$

3.7 Общий итерационный алгоритм изменения состояний

Исследование моделей групповых взаимодействий показали, что аналитический вид устойчивых состояний можно реально получить для систем с достаточно простыми структурами связей. В случае отсутствия регулярностей и симметрий в структуре системы получение явного вида решений требует преодоления больших вычислительных трудностей. В этой ситуации исследование и тестирование сложных систем возможно с помощью итерационных алгоритмов и вычислительных экспериментов. Кроме того, по опыту исследования простых моделей, можно выдвигать гипотезы для достаточных условий сходимости и, далее, подтверждать или опровергать их с помощью вычислений.

В связи с этим, далее мы выведем *общий итерационный алгоритм* для дискретных состояний систем с групповыми взаимодействиями без ограничений на вид структурных связей. Все приведенные ранее итерационные алгоритмы являются частными случаями *общего алгоритма*.

Пусть ресурсная система $S=(V,E,Q)$ на гиперграфе $HG=(V,E)$, $n=|V|$, $m=|E|$ (см. *Определение 6*, п. 1.2).

Зададим исходные данные:

$Q=(q_1, q_2, \dots, q_n)$ – ‘ресурсный вектор системы,;

$Q_\Sigma = \sum_{i=1}^n q_i$ – общий ресурс системы S ;

$E_i = \{e_j \in E : i \in e_j\}$ – подмножество полей инцидентных элементу i ;

$V_{ij} = \{v \in V : \{i, v\} \subset e_j\}$ – множество смежных элементов для элемента i на поле e_j (все элементы поля e_j кроме элемента i);

$V_i = \{v \in V : \exists e_j \in E, \{i, v\} \subset e_j\}$ – множество всех смежных элементов для элемента i (объединение всех V_{ij} по j);

x_{ij} – ресурс элемента i на поле $e_j \in E_i$;

$X = \begin{pmatrix} x_{11}(0) & x_{12}(0) & \dots & x_{1m}(0) \\ x_{21}(0) & x_{22}(0) & \dots & x_{2m}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(0) & x_{n2}(0) & \dots & x_{nm}(0) \end{pmatrix}$ – матрица начального состояния

системы S .

Система оценочных функций для элемента i :

$$f_{ij} = \alpha_{ij} x_{ij} + \sum_{k \in V_{ij}} \beta_{ijk} x_{jk}, \quad e_j \in E_i. \quad (3.7.1)$$

Построение алгоритма. Система оценочных функций (3.7.1) задает равновесную стратегию поведения в течение времени t :

$$\begin{cases} f_{ij} = \alpha_{ij} x_{ij}(t+1) + \sum_{k \in V_{ij}} \beta_{ijk} x_{jk}(t) \\ f_i = f_{ij} \end{cases}, e_j \in E_i. \quad (3.7.2)$$

Из соотношений (3.7.2) получаем

$$x_{ij}(t+1) = \frac{f_i}{\alpha_{ij}} - \frac{1}{\alpha_{ij}} \sum_{k \in V_{ij}} \beta_{ijk} x_{jk}(t), e_j \in E_i. \quad (3.7.3)$$

Определим f_i для того, чтобы завершить построение алгоритма. Для этого найдем суммы левых и правых частей уравнения и учтем балансовые соотношения:

$$q_i = f_i \sum_{p \in E_i} \frac{1}{\alpha_{ip}} - \sum_{p \in E_i} \sum_{k \in V_{ij}} \frac{\beta_{ikp} x_{kp}(t)}{\alpha_{ip}}.$$

Из последнего выражения находим f_i :

$$f_i = \frac{1}{\sum_{p \in E_i} \frac{1}{\alpha_{ip}}} \left(q_i + \sum_{p \in E_i} \sum_{k \in V_{ij}} \frac{\beta_{ikp} x_{kp}(t)}{\alpha_{ip}} \right) \quad (3.7.4)$$

С учетом (3.7.3) и (3.7.4), получаем **общий итерационный алгоритм** (соотношения для всех компонент текущего состояния):

$$x_{ij}(t+1) = \frac{1}{\alpha_{ij} \sum_{p \in E_i} \frac{1}{\alpha_{ip}}} \left(q_i + \sum_{p \in E_i} \sum_{k \in V_{ij}} \frac{\beta_{ikp} x_{kp}(t)}{\alpha_{ip}} \right) - \frac{1}{\alpha_{ij}} \sum_{k \in V_{ij}} \beta_{ijk} x_{jk}(t),$$

$$i=1, 2, \dots, n; e_j \in E_i; t=0, 1, 2, 3, \dots$$

Известное начальное состояние позволяет последовательно вычислять все другие состояния и оценивать предельное поведение системы.

ГЛАВА 4. РАВНОВЕСНЫЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

В данной главе рассматривается ряд математических модели «справедливого» распределения материальных ресурсов или принятия некоторого решения по стратегии поведения при распределительных процедурах. Модели основаны на естественных принципах равновесия и определенным образом учитывают интересы всех участников «системы». В настоящее время такого рода исследования объединены в *Теорию рационального выбора* и *Теорию рационального выбора*, которые активно формируются в основном зарубежными авторами (Э. Мулен [101], Дж. Нэш [103], Р. Ауманн [68, 71], Л. Шепли [112, 113], Г. Янг [119] и другие). На постсоветском пространстве можно отметить работы [14, 30, 48,49, 51]

Распределительные модели в общем виде характеризуются следующим образом: задан объем ресурсов (например, денег), который должен быть распределен между получателями, имеющими различные претензии на ресурс. Понятие «справедливости» распределения зависит от стратегических критериев, которые могут быть реализованы различным образом [51, 65, 81, 108, 109, 120].

4.1 Рациональные модели распределений

В работах [23-25, 48, 51, 55, 56, 65, 71, 81,84, 101] исследуются различные методы распределения материальных и финансовых ресурсов с применением теории игр и других специальных методов. Например, в работе Нобелевского лауреата по экономике 2005 года Р. Ауманна [68] показано, что пропорциональный способ распределения, хотя и является наиболее распространенным, имеет различные альтернативы.

В данной работе рассматриваются математические модели распределений материальных ресурсов, основанные на естественных принципах равновесия. С помощью предлагаемого метода можно объяснить

экономические закономерности и строить рациональные распределения. В частности, это могут быть следующие практические задачи:

- обоснованные распределения денежного остатка между кредиторами;
- справедливые распределения социальных поступлений по различным направлениям;
- планирование различных схем финансовых расчетов;
- проведение взаимовыгодных страховых операций.

4.1.1 Принципы «справедливости» и критерии распределений

Рассмотрим простейший пример двухтысячелетней давности из Талмуда, упомянутый в [68].

К судье-мудрецу пришли два человека, чтобы разрешить спор о дележе некоторого имущества $E=1$. Первый претендует на $d_1=1$, а второй претендует на $d_2=1/2$.

Решение мудреца было таким: первый получает $x_1=3/4$, а второй $x_2=1/4$.

Разберем подробно данную ситуацию, ответив на следующие вопросы.

Вопрос 1. Что получается при пропорциональном делении и почему оно может не устраивать конфликтные стороны?

Вопрос 2. По какому принципу принято решение и как следует поступать при других значениях d_1 и d_2 ?

Вопрос 3. Как разрешить спор между n претендентами на благо E , претензии которых равны, соответственно, d_1, d_2, \dots, d_n ?

Ответы на поставленные вопросы являются ключами к решению экономических проблем: о банкротстве, о распределении прибыли при инвестициях, о социальных распределениях и т.д.

Случай пропорционального распределения.

При пропорциональном делении получается следующее решение:

$$y_1 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot E = \frac{1}{1 + 1/2} \cdot 1 = 2/3; \quad y_2 = \frac{d_2}{d_1 + d_2} \cdot E = \frac{1/2}{1 + 1/2} \cdot 1 = 1/3.$$

Одним из возможных аргументов против этого решения является то, что «потери» претендентов не одинаковы:

$$\Delta_1 = d_1 - y_1 = 1 - 2/3 = 1/3; \quad \Delta_2 = d_2 - y_2 = 1/2 - 2/3 = 1/6.$$

Сравнительные «потери» для первого (библейского) решения являются одинаковыми:

$$\delta_1 = d_1 - x_1 = 1 - 3/4 = 1/4; \quad \delta_2 = d_2 - x_2 = 1/2 - 1/4 = 1/4.$$

Альтернативные способы распределения

Рассмотрим обоснование первого решения, являющегося альтернативным *пропорциональному способу*. Следующий простой принцип был высказан в комментариях к Библии в одиннадцатом веке.

Определим общие требования:

$$D = d_1 + d_2 = 1 + 1/2 = 3/2.$$

Всего же имеется ресурс $E=1$, поэтому потери в размере $1/2$ делятся поровну и вычитаются из соответствующих требований:

$$x_1 = d_1 - 1/4 = 1 - 1/4 = 3/4; \quad x_2 = d_2 - 1/4 = 1/2 - 1/4 = 1/4.$$

Можно объяснить по-другому. Первый претендент не уступает второму ничего. Второй уступает половину. Другая половина является спорной, поэтому она делится на две равные части. Следовательно, первый получает $x_1 = 1/2 + 1/4 = 3/4$, а второй получает только половину спорной части, т.е. $x_2 = 1/4$.

В работе [68] данный принцип формально реализуется следующим образом. Каждый претендент i уступает претенденту j величину $(E - d_i)_+$, где

$$S_+ = \max(S, 0).$$

Величина спорной части $E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+$ делится поровну между двумя претендентами. В итоге, получаем следующее решение:

$$x_1 = \frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2} + (E - d_2)_+;$$

$$x_2 = \frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2} + (E - d_1)_+.$$

Этот способ распределения назван *CG (contested garment) принцип*.

Мы предлагаем новый *принцип равновесных функций* для решения проблемы распределения ресурса E между двумя претендентами, имеющими, соответственно, требования d_1 и d_2 .

Определим функцию «потерь»:

$$f = f(d, x) = d - x.$$

Найдем соответствующие оценки для каждого претендента:

$$\begin{cases} f_1 = f(d_1, x_1) = d_1 - x_1; \\ f_2 = f(d_2, x_2) = d_2 - x_2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Для разрешения конфликта логично предположить, что $f_1 = f_2 = f$. После суммирования уравнений системы (4.1), получаем

$$f_1 + f_2 = 2f = d_1 + d_2 - (x_1 + x_2)$$

или

$$2f = D - E; \quad f = (D - E)/2.$$

Зная f , можно из (4.1) найти x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - f_1 = d_1 - (D - E)/2; \\ x_2 = d_2 - f_2 = d_2 - (D - E)/2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Применяя соотношения (4.2) для рассмотренного выше примера, получаем:

$$D = d_1 + d_2 = 1 + 1/2 = 3/2, \quad f = (D - E)/2 = (3/2 - 1)/2 = 1/4.$$

$$x_1 = 1 - 1/4 = 3/4; \quad x_2 = 1/2 - 1/4 = 1/4.$$

Видим, что получены значения первого решения.

В дальнейшем рассмотренный метод будем называть *f-равновесным принципом*.

Ниже будет показано, что принцип *f-равновесия* просто обобщается на случай $n \geq 3$. Этого нельзя сказать о *CG-принципе*. Для случая $n \geq 3$ нет простых

обобщений *CG* - принципа, поэтому большого количества участников распределений авторы применяют достаточно сложный аппарат теории кооперативных игр.

Предлагаемый нами метод равновесных распределений является достаточно универсальным, так как строится в зависимости от вида функций *f*-равновесия. Далее, в качестве демонстрации, мы приведем несколько важных реализаций.

4.1.2 Стратегия равных потерь

Пусть ресурс E распределяется между n претендентами. Требования претендентов зададим вектором (d_1, d_2, \dots, d_n) , а искомое решение обозначим (x_1, x_2, \dots, x_n) . Для поиска решения, удовлетворяющего стратегии равных потерь, будем использовать оценочную функцию

$$f=f(d,x)=d-x.$$

Соответствующие оценки для каждого претендента будут определяться соответствующими значениями оценочной функции:

$$\begin{cases} f_1 = f(d_1, x_1) = d_1 - x_1, \\ f_2 = f(d_2, x_2) = d_2 - x_2, \\ \dots\dots\dots \\ f_n = f(d_n, x_n) = d_n - x_n. \end{cases} \quad (4.3)$$

Из условия равновесия $f_1=f_2=\dots=f_n=f$ после суммирования уравнений системы (4.3), получаем

$$nf=d_1+d_2+\dots+d_n-(x_1+x_2+\dots+x_n)$$

или

$$nf=D-E; \quad f=(D-E)/n.$$

Зная f , можно из (4.3) найти решение (x_1, x_2, \dots, x_n) :

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - f_1 = d_1 - (D - E)/n, \\ x_2 = d_2 - f_2 = d_2 - (D - E)/n, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = d_n - f_n = d_n - (D - E)/n. \end{cases} \quad (4.4)$$

4.1.3 Реализация пропорционального распределения при помощи принципа f -равновесия

Пусть ресурс E распределяется между n претендентами. Требования претендентов зададим вектором (d_1, d_2, \dots, d_n) , искомое решение обозначим (x_1, x_2, \dots, x_n) . Покажем, что пропорциональное распределение реализуется при помощи оценочной функции

$$f=f(d,x)=x/d.$$

В самом деле, $f=f_i=x_i/d_i$ и, следовательно,

$$x_i=f_i \cdot d_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

После суммирования по i системы равенств получаем соотношения

$$\sum_{i=1}^n f_i d_i = f \sum_{i=1}^n d_i = f \cdot D = \sum_{i=1}^n x_i = E, \quad f = \frac{E}{D}.$$

Далее, из (6) находим

$$x_i = f \cdot d_i = \frac{E}{D} \cdot d_i, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Получилось пропорциональное (рейтинговое) распределение. Что и требовалось показать.

Заметим, что точно такое же распределение получится при использовании оценочной функции

$$f_1 = f_1(d, x) = \frac{d - x}{d}$$

Объясняется это тем, что функции f и f_1 отличаются на постоянную величину. Если оценочную функцию умножить на постоянную величину, то это тоже не изменит итоговое равновесное распределение. Следовательно, определенной стратегии распределения отвечает не просто одна функция, а некоторый класс функций.

4.1.4 Системы равновесных функций

Некоторым ограничением рассматриваемой выше модели является то, что «мерилом» отношений с разными «участниками» служит одна функция. Даже при условии того, что эта функция имеет несколько переменных,

применение метода невозможно в некоторых случаях. Ниже мы покажем, как можно обобщить равновесные принципы для принятия решений по оптимальному распределению ресурсов. При этом за равновесное решение будет отвечать система некоторых однородных функций с параметрами, характеризующими преимущества или недостатки участников.

Пусть ресурс E распределяется между n претендентами. Требования претендентов зададим стандартно вектором (d_1, d_2, \dots, d_n) , а искомое решение обозначим вектором (x_1, x_2, \dots, x_n) . Определим суммарные требования D и балансовое отношение по ресурсу:

$$D = d_1 + d_2 + \dots + d_n, E = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Определим стратегию распределения при помощи системы оценочных функций

$$\begin{cases} f_1 = (d_1 - x_1)/k_1 - a_1, \\ f_2 = (d_2 - x_2)/k_2 - a_2, \\ \dots\dots\dots \\ f_n = (d_n - x_n)/k_n - a_n. \end{cases}$$

Параметры k_1, k_2, \dots, k_n и a_1, a_2, \dots, a_n являются дополнительными характеристиками оценочных функций, отражающими рейтинговые и начальные особенности участников.

Из условия равновесия

$$f = f_1 = f_2 = \dots = f_n$$

можно стандартным способом найти искомое решение

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - (f - a_1) \cdot k_1, \\ x_2 = d_2 - (f - a_2) \cdot k_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_n = d_n - (f - a_n) \cdot k_n \end{cases},$$

где

$$f = (D - E - \sum_{i=1}^n a_i k_i) / \sum_{i=1}^n k_i.$$

Таким образом, построен строгий алгоритм распределительной процедуры с регулируемым критериями и требованиями.

4.2 Равновесные стратегии в страховании

Рассмотрим простую модель определения оптимальной стратегии в страховании, которую в дальнейшем можно обобщить и детализировать.

Модель 1. Пусть E – некоторая годовая сумма выплат, связанная со страховыми случаями, и которую приходится восстанавливать страховой фирме (пока не будем учитывать организационные затраты и налоговые выплаты). Зададим множество клиентов в количестве n и страховые суммы S_i , $i=1,2,\dots,n$. Требуется определить коэффициент k и страховые взносы $d_i=kS_i$ при известной вероятности наступления страхового случая p (считаем, что для каждого страхового случая вероятность одинаковая).

Сделаем соответствующие расчеты. Выпишем балансовые соотношения:

$$E = \sum_{i=1}^n d_i; \quad p \sum_{i=1}^n S_i = E. \quad (4.2.1)$$

Первое равенство определяет суммарные поступления, а второе – суммарные выплаты. Так как $S_i = \frac{d_i}{k}$, то $\sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n d_i$. Следовательно, получаем $k=p$ и $d_i=pS_i$.

Вывод. При страховых суммах S_i , $i=1,2,\dots,n$ определение страхового взноса по формуле $d_i=pS_i$ отвечает «справедливому» равновесному принципу, так как выполняется условие $S_i / d_i = p = const$. Это может сделать политику фирмы более сбалансированной и привлекательной.

Модель 2. Пусть E_0 – сумма административных расходов и налоговых отчислений. Все другие обозначения соответствуют *Модели 1*. Тогда балансовые соотношения принимают вид:

$$E + E_0 = \sum_{i=1}^n d_i; \quad p \sum_{i=1}^n S_i = E. \quad (4.2.2)$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^n S_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{k}(E + E_0)$; $\frac{p}{k}(E + E_0) = E$.

В результате получаем итоговые соотношения:

$$k = p \left(1 + \frac{E_0}{E} \right); \quad d_i = kS_i = p \left(1 + \frac{E_0}{E} \right) \cdot S_i; \quad S_i = \frac{d_i}{p \left(1 + \frac{E_0}{E} \right)}.$$

Последнее соотношение показывает, что увеличение вероятности p или административных расходов E_0 уменьшает возможные выплаты S_i . Заметим, что по сравнению с *Моделью 1* «мерой» равновесия стал новый коэффициент k :

$$\frac{S_i}{d_i} = k = p \left(1 + \frac{E_0}{E} \right) = \text{const.}_i$$

Значение вероятности p обычно определяется по статистически данным прошлого периода и может быть не вполне достоверным. Поэтому с практической точки зрения удобно предусмотреть производственный резерв E_1 , который скорректирует второе балансовое соотношение: $p \sum_{i=1}^n S_i = E - E_1$.

Это приведет к новым итоговым соотношениям:

$$k = p \left(\frac{E + E_0}{E - E_1} \right); \quad d_i = kS_i = p \left(\frac{E + E_0}{E - E_1} \right) \cdot S_i; \quad \frac{S_i}{d_i} = \frac{\left(1 - \frac{E_1}{E} \right)}{p \left(1 + \frac{E_0}{E} \right)} = \text{const.}_i$$

Модель 3. Пусть каждый страховой случай i имеет свою вероятность наступления p_i , тогда произойдет следующее уточнение балансовых соотношений:

$$E + E_0 = \sum_{i=1}^n d_i; \quad \sum_{i=1}^n p_i S_i = E - E_1. \quad (4.2.3)$$

Логично задать следующие «стратегические» условия:

$$\frac{d_i}{p_i S_i} = k = \text{const.}_i, \quad d_i = k p_i S_i.$$

С учетом этого, получаем

$$E - E_1 = \sum_{i=1}^n p_i S_i = \sum_{i=1}^n d_i / k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{E + E_0}{k}.$$

Следовательно,

$$k = \left(\frac{E + E_0}{E - E_1} \right); \quad d_i = kp_i S_i = p_i \left(\frac{E + E_0}{E - E_1} \right) \cdot S_i; \quad S_i = \frac{d_i}{p_i} \left(\frac{E - E_1}{E + E_0} \right).$$

Пусть имеются n различных групп со стандартными данными: в каждой i -ой группе S_i – стандартная страховая сумма, m_i – число договоров, p_i – вероятность страхового случая, d_i – страховой взнос. Покажем, что для групповой формы задания данных все итоговые соотношения останутся неизменными. В самом деле,

$$E + E_0 = \sum_{i=1}^n m_i d_i; \quad E - E_1 = \sum_{i=1}^n p_i m_i S_i, \quad \frac{d_i}{p_i S_i} = k = \text{const}. \quad (4.2.4)$$

Поэтому
$$E - E_1 = \sum_{i=1}^n p_i m_i S_i = \sum_{i=1}^n m_i d_i / k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n m_i d_i = \frac{E + E_0}{k}.$$

Следовательно,

$$k = \left(\frac{E + E_0}{E - E_1} \right); \quad d_i = kp_i S_i = p_i \left(\frac{E + E_0}{E - E_1} \right) \cdot S_i; \quad S_i = \frac{d_i}{p_i} \left(\frac{E - E_1}{E + E_0} \right).$$

В дальнейшем можно учесть и другие существенные факторы: степень наступления страхового случая (доли ущерба), длительность страховых договоров, специфику области страхования и пр.

Модель 4. Рассмотрим модель страхования, учитывающую степень наступления страхового случая. Пусть S_i – страховая сумма, d_i – страховой взнос, $f_i(t)$ – функция плотности распределения степени наступления t страхового случая i , где $0 \leq t \leq 1$. По степени наступления страхового случая фирма производит оплату страховой премии: $X_i = t \cdot S_i$. Требуется оценить величину страхового взноса d_i через «входные» параметры страховки.

Вычислим математическое ожидание степени страхового наступления $a_i = \int_0^1 t \cdot f_i(t) \cdot dt$ и среднюю ожидаемую премию $\bar{X}_i = a_i S_i$. Определим значение k , удовлетворяющее условию: $d_i = k \bar{X}_i = k a_i S_i$. Из соотношений баланса

$$E + E_0 = \sum_{i=1}^n d_i; \quad \sum_{i=1}^n \bar{X}_i = E - E_1 \quad (4.2.5)$$

получаем $E - E_1 = \sum_{i=1}^n \bar{X}_i = \sum_{i=1}^n a_i S_i = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{k} (E + E_0)$; $k = \frac{E - E_1}{E + E_0}$.

В итоге $d_i = k a_i S_i = a_i \left(\frac{E - E_1}{E + E_0} \right) \cdot S_i = \left(\frac{E - E_1}{E + E_0} \right) \cdot S_i \cdot \int_0^1 t \cdot f_i(t) \cdot dt$.

Модель 5. Заменяем в *Модели 4* непрерывную функцию плотности распределения $f_i(t)$ на ее дискретный аналог. Для этого отрезок $0 \leq t \leq 1$ разобьем на m интервалов: $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots, m$, $x_0 = 0$, $x_m = 1$. Если t_j – середина интервала j , а p_{ij} – соответствующая вероятность, то математическое ожидание наступления страхового случая $a_i = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m p_{ij} t_j$. Сравнивая с

Моделью 4, получаем: $d_i = a_i \left(\frac{E - E_1}{E + E_0} \right) = \left(\frac{E - E_1}{E + E_0} \right) \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m p_{ij} t_j$.

4.3 Выводы по равновесным распределениям

Задачи распределительного характера достаточно часто встречаются в экономике, социальной сфере и других областях. Известно множество специальных методов принятия обоснованных решений, удовлетворяющих условиям оптимальности или равновесия.

В данной работе рассматриваются модели принятия решений по распределению материальных ресурсов, основанные на принципах равновесия и реализованные с помощью оценочных функций. Благодаря возможности построения различных видов оценочных функций данный подход можно адаптировать к разнообразным конкурентным и кооперативным системам. Предлагаемый метод поиска равновесных распределений и состояний является естественным и вполне логичным. Он еще раз подтверждает, что в основе определенного равновесия (физического, химического или экономического) лежит некоторый принцип. В нашем случае за принципы и стратегию принятия решений отвечают равновесные функции, которые обоснованно подбираются для конкретной ситуации.

Важно отметить, что метод универсален и легко реализуется в задачах поиска равновесных решений. В широком смысле такие решения являются оптимальными, так как они могут учитывать интересы всех участников рассматриваемых систем.

В связи с этим, интересно сравнить формальные модели со сложными экономическими проблемами. Современные научные подходы выдвигают высокие требования при принятии важных экономических и политических решений. Как указано в [128], должна работать простая схема: *лучшие исследования*→*лучшая политика*→*лучшее экономическое состояние*. Даже при принятии локального решения приходится оценивать ситуацию в целом и просчитывать последствия. Это невозможно без современных глобальных исследовательских сетей таких, как *Консорциум экономических исследований и образования* [129], *Глобальная сеть развития (Global Development Network)* [130], *Центр макроэкономического анализа и краткосрочного прогнозирования* [128] и др. Принятые решения и текущие планы должны постоянно пересматриваться и всесторонне анализироваться [124, 125, 132, 133].

Заметим, что проведенные исследования и наличие приемлемых «рецептов» экономического развития еще не гарантирует их осуществления. Необходимо общественное признание выбранной стратегии. Доказано, что даже наличие больших ресурсов является вторичным фактором, по сравнению с правильной экономической политикой. По этой причине, главным является изучение многообразных сторон рационального поведения и рационального выбора (см., например, материал сайта «The Center for the Study of Rationality» [131]), а также адекватное применение методов управления [123, 126, 127].

ГЛАВА 5. МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ПОКРЫТИЙ ДЛЯ БЕСПРОВОДНЫХ СЕНСОРНЫХ СЕТЕЙ.

5.1 Проблемы мониторинга и сенсорные сети

В настоящее время достаточно быстро развиваются системы контроля, создаваемые на основе чувствительных датчиков. Датчики, как правило, имеют автономное питание и контролируют в достаточной степени некоторую область. Это может быть любой объект, территория, телекоммуникации и т.д. Разрабатываемые модели помогают успешно решать проблемы мониторинга природных явлений, практические задачи в медицине и биологии, проблемы национальной безопасности и прочее. Системы, задействованные в этих сферах, называются *сенсорными сетями (sensor networks)* и, с геометрической точки зрения, состоят из кругов определенного радиуса. В центре круга находится воображаемое устройство, передающее или принимающее сигналы. Задавая критерии и свойства сенсорных сетей, приходится решать две основные задачи:

(1) проектирование эффективных структур размещений сенсорных устройств;

(2) выбор качественных характеристик применяемых типовых устройств с целью оптимизации суммарных затрат.

В той или иной форме эти задачи рассматривались в работах [56, 78-80, 93, 106,116-118, 122 и др.]. В работе¹³ были предложены несколько интересных моделей покрытий. Однако, сделанные там расчеты не совсем корректны, так как оценка эффективности покрытия определяется для одного стандартного элемента покрытия, а не в целом для покрываемой области. Нами сделаны уточнения и корректировки их оценок. Кроме того, мы предлагаем значительное улучшение эффективности покрытий (примерно на 10 процентов) за счет оптимального «зацепления» соседних кругов.

¹³ Wu, J., Yang, S.: Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges // Int. J. of Foundations of Computer Science, 2005, 16(1), 3—17.

5.2 Модели покрытий для сенсорных сетей

Рассмотрим несколько моделей покрытия плоской области кругами одного или нескольких фиксированных размеров. Расположение центров кругов имеет определенную упорядоченную структуру. Мы рассмотрим две базовых структуры: «квадратную» и «треугольную» и на основе их построим несколько оптимальных моделей по заданным критериям. Определим понятие эффективности покрытия и проведем сравнительный анализ различных моделей.

5.2.1 Модели первого уровня

Предположим, что построено однородное покрытие достаточно большой области плоскости кругами одного радиуса R . Это означает, что каждая точка области принадлежит, по крайней мере, одному кругу из рассматриваемого покрытия. На рисунке 5.1 изображены элементы двух видов наиболее приемлемых покрытий (*Модель A-1* и *Модель B-1*).

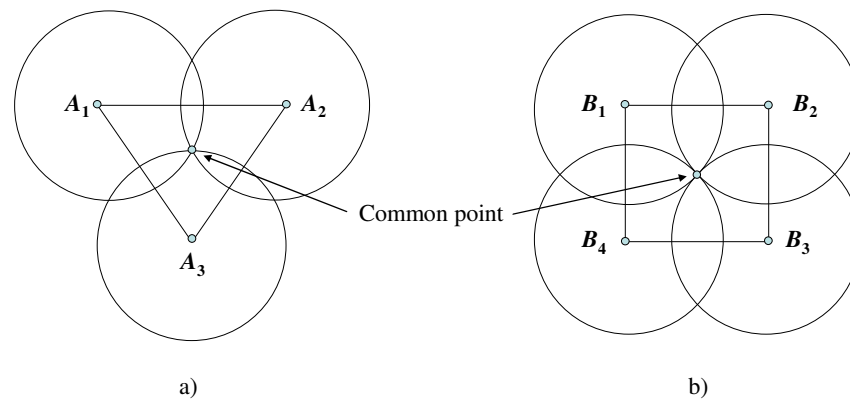


Рис. 5.1. Два типа покрытий. (a) *Модель I-A*. (b) *Модель I-B*.

В первой модели центры трех соседних кругов находятся в вершинах равностороннего треугольника, а сами эти круги имеют одну общую узловую точку. Во второй модели центры находятся в вершинах квадрата, и также имеется одна узловая точка для четырех соседних кругов. Если центры всех

соседних окружностей соединить, то в обоих случаях получатся регулярные симметрические решетки.

Проведем расчеты эффективности покрытия для рассмотренных выше моделей. Для этого будут использоваться *типовые фрагменты*: треугольник $A_1A_2A_3$ в *Модели А-1* и квадрат $B_1B_2B_3B_4$ в *Модели В-1* (см. рис. 5.1). Поясним, что фрагмент является типовым, если вся контролируемая область составляется из таких по типу паркета без взаимных перекрытий.

Корректным определением *коэффициента эффективности* покрытия K будет отношение площади S_p типового фрагмента к суммарной площади S_f частей окружностей, покрывающих этот фрагмент. Понятно, что показатель K не превышает единицы. Чем он больше, тем выше эффективность покрытия. При области покрытия кругами достичь значения $K=1$ невозможно.

Для *Модели А-1* получаем

$$S_{p_1} = \frac{R^2 3\sqrt{3}}{4}, \quad S_{f_1} = \frac{\pi R^2}{2}, \quad K_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,8272. \quad (5.1)$$

Для *Модели В-1* эффективность немного ниже:

$$S_{p_1'} = 2R^2, \quad S_{f_1'} = \pi R^2, \quad K_1' = \frac{2}{\pi} \approx 0,6366. \quad (5.2)$$

Вычисления энергетических затрат может зависеть от размеров сенсорных кругов и их количества. Пока будем считать, что энергетические затраты пропорциональны площади сенсорных кругов с коэффициентом пропорциональности μ . В связи с этим, верно следующее.

Коэффициент энергетических затрат обратно пропорционален K и имеет вид $E=\mu/K$. Значения этого показателя, соответственно, для *Модели А-1* и *Модели В-1*, равны:

$$E_1 = \frac{\mu 2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1,2092\mu; \quad E_1' = \frac{\mu\pi}{2} \approx 1,5708\mu. \quad (5.3)$$

Аналогичный показатель, рассчитанный в работе [117], для *Модели А-1* имеет значение

$$E_1^* = \frac{6\pi\mu}{4\pi + 3\sqrt{3}} \approx 0,3379\pi\mu \approx 1,0615\mu \quad (5.4)$$

и весьма сильно отличается от реального. Причина этого в том, что не учтены наложения других окружающих элементов покрытия.

Модель В-1 в указанной работе вообще не рассматривается, хотя (как будет показано ниже) она после модификации будет иметь хорошие показатели эффективности. Кроме того, практическая реализация «квадратных» структур на практике (в том числе для прямоугольных областей) гораздо проще.

Если показатель энергетических затрат рассчитать для *Модели В-1* по методике работы [117], то он будет равен

$$E_1^{**} = \frac{2\pi\mu}{2 + \pi} = 1,2220\mu,$$

что практически на 20% меньше по сравнению с E_1' . Это и есть степень несоответствия.

5.2.2 К-модели второго уровня

Если в моделях первого уровня соседние круги «раздвинуть» до точек касания, то между ними образуется открытая часть плоскости. Эту часть можно закрыть дополнительным кругом некоторого радиуса. Две новые полученные таким образом модели мы назовем *К-моделями* второго уровня: *Модель КА-2* и *Модель КВ-2* (см. рис. 5.2). Для *Модели КА-2* радиус нового круга равен $r = (1 / \sqrt{3})R$, а в *Модели КВ-2* $r=R$.

Для *Модели КВ-2* все показатели эффективности покрытия остаются на уровне *Модели В-1*, а для *Модели КА-2* - показатели изменятся по сравнению с результатами (5.1), (5.3) и (5.4). Это видно из сделанных ниже расчетов:

$$Sp_2 = R^2 \sqrt{3}, \quad Sf_2 = \frac{\pi R^2}{2} + \pi r^2 = \frac{5\pi R^2}{6}, \quad K_2 = \frac{6\sqrt{3}}{5\pi} \approx 0,662. \quad (5.5)$$

$$E_2 = \frac{\mu 5\pi}{6\sqrt{3}} \approx 1,512\mu; \quad E_2^* = \frac{\mu\pi(3R^2 + r^2)}{(\sqrt{3} + \frac{5\pi}{2})R^2} = \frac{20\mu\pi}{6\sqrt{3} + 15\pi} \approx 0,3487\mu\pi \approx 1,092 \quad (5.6)$$

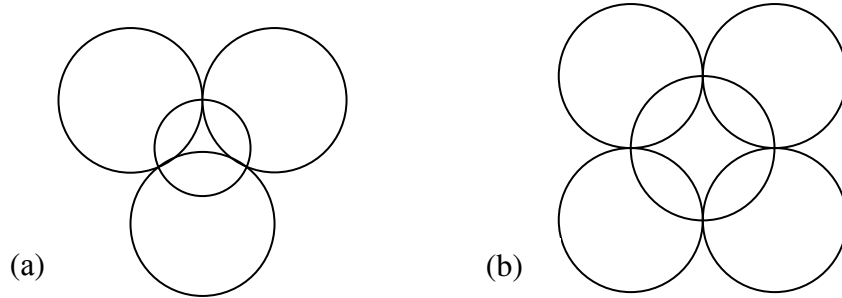


Рис. 5.2. Элементы покрытий второго уровня. (а) Модель КА-2. (б) Модель КВ-2.

Заметим, что показатели эффективности покрытия и энергетических затрат в *Модели КА-2* ухудшились по сравнению с *Моделью А-1*. Отличие E_2 от E_2^* стало еще существеннее, чем отличие E_1 от E_1^* .

Замечание 5.1. Если абсолютные энергетические затраты для кругов пропорциональны r^n , $n > 2$, то можно добиться некоторого снижения энергетических затрат в моделях второго уровня за счет меньших кругов. Количество их примерно такое же, как и больших, так как к одному, изображенному на рис. 5.2, «прилипнут» еще три такого же размера. Центры меньших кругов образуют такую же «треугольную» структуру. Однако более ощутимых улучшений показателей эффективности и по покрытию, и по энергетическим затратам можно добиться за счет небольшого «наезда» больших соседних кругов друг на друга. При этом площадь двукратного накрытия увеличится несущественно, а радиус малого круга уменьшится значительно с «кумулятивным» эффектом. Следовательно, суммарная площадь покрываемых кругов существенно уменьшится и эффективность улучшится.

5.2.3 Модели второго уровня

Если использовать наглядную терминологию, то можно сказать, что при переходе от моделей первого уровня к *K-моделям* второго уровня (раздвижение соседних кругов до касания) находятся стандартные модели второго уровня (используются два вида кругов). Получается, что моделей второго уровня много, а их качество зависит от степени «перекрывтия» соседних кругов. Решая экстремальную задачу можно точно рассчитать лучший вариант «перекрывтия» и соотношение между радиусами большего и меньшего кругов. Рассчитанные соотношения определяют две основных оптимальные модели второго уровня.

Опишем последовательность действий при построении моделей второго уровня.

- Покрываем заданную область кругами радиуса R так, что их центры находятся в узлах заданной «треугольной» или «квадратной» решетки, а перекрывтие больших соседних кругов образует некоторую (небольшую) одинаковую для всех зону перекрывтия.
- Между большими кругами образуется открытая центрально симметричная область, которая покрывается минимальным кругом радиуса r .
- Варьируя зону перекрывтия больших кругов, можно рассматривать два класса покрытий: *Модели А-2* и *Модели В-2*.

Модель А-2. Выделим типовой фрагмент *Модели А-2* (см. рис. 5.3), который является равносторонним треугольником с вершинами в центрах трех соседних кругов. Возникает задача оптимального расположения (налегания) больших кругов и определения радиуса меньшего круга. Ответ на поставленную задачу дает следующая теорема.

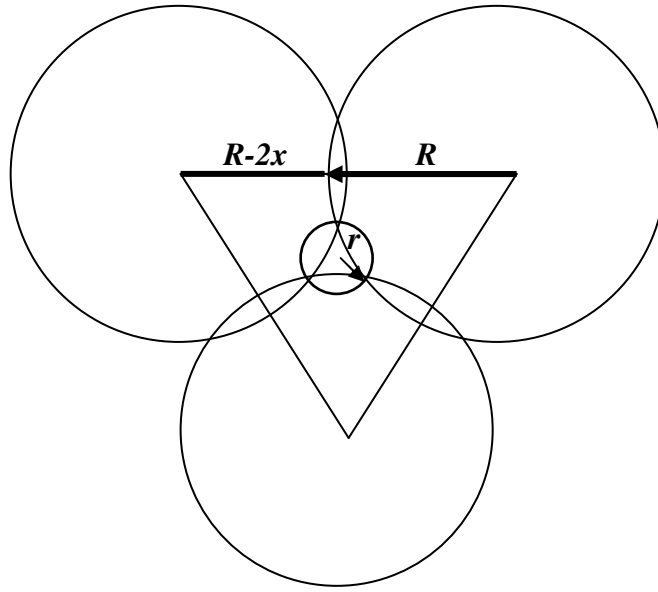


Рис. 5.3. Элемент и типовой фрагмент Модели А-2

Теорема 5.1. *Оптимальное расположение кругов в Модели А-2, определяющее наилучшие показатели эффективности покрытия K и E , задается условиями:*

$$r = \frac{R}{\sqrt{31}} \approx 0,1796R; \quad 2x = \frac{2R(\sqrt{31} - 3\sqrt{3})}{\sqrt{31}} \approx 0,1335R; \quad (5.7)$$

$$a = 2(R-x) = \frac{6R\sqrt{3}}{\sqrt{31}} \approx 1,8665R,$$

где $2x$ – размер радиального перекрытия двух больших кругов, a – расстояние между центрами двух больших соседних кругов (сторона равностороннего треугольника, соответствующего типовому фрагменту).

Доказательство. Используя обозначения, введенные в п. 5.2.1, получаем

$$r = \frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{R^2 - t^2}; \quad \text{где } t = R - x;$$

$$Sp = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = (R-x)^2\sqrt{3} = t^2\sqrt{3}; \quad Sf = \frac{\pi R^2}{2} + \pi\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{R^2 - t^2}\right)^2;$$

$$\frac{1}{K(t)} = \frac{Sf}{Sp} = \frac{\frac{\pi R^2}{2} + \pi \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{R^2 - t^2} \right)^2}{t^2 \sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{3R^2}{2t^2} - \frac{2}{3} - \frac{2\sqrt{R^2 - t^2}}{t\sqrt{3}} \right) \rightarrow \min.$$

Решая экстремальную задачу, находим оптимальное значение $t = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}} R$

и другие величины:

$$x = R - t = \frac{R(\sqrt{31} - 3\sqrt{3})}{\sqrt{31}}; r = \frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{R^2 - t^2} = \frac{R}{\sqrt{31}}.$$

Что и требовалось показать.

Далее вычисляем соответствующие площади фрагмента и коэффициенты эффективности:

$$Sp = \frac{R^2 27\sqrt{3}}{31}; Sf = \frac{\pi R^2 33}{62}; K_3 = \frac{18\sqrt{3}}{11\pi} \approx 0,9022; E_3 \approx 1,1084\mu. \quad (5.8)$$

Следствие 5.1. Коэффициенты эффективности *Модели А-2* имеют наилучшие показатели среди серии *А*. Для наглядности, расположим их в порядке улучшения:

$$K_2 \approx 0,6619; K_1 \approx 0,8270; K_3 \approx 0,9022. E_2 \approx 1,5115\mu; E_1 \approx 1,2092\mu; E_3 \approx 1,1084\mu.$$

Важно отметить, что радиус меньшего круга составляет примерно 17% от радиуса большего круга. Для энергетической оптимизации это может дать хороший эффект.

Модель В-2. Для *Модели В-2* (см. рис. 5.4), типовым фрагментом является квадрат с вершинами в центрах четырех соседних кругов. Заметим, что соседство «диагональных» кругов чисто условное. Впрочем, все эти четыре круга равноправные соседи по отношению к меньшему кругу. Как и в случае *Модели А-2*, можно получить существенное улучшение эффективности покрытия за счет введения дополнительного маленького круга в каждом фрагменте покрытия. Сформулируем следующий важный результат.

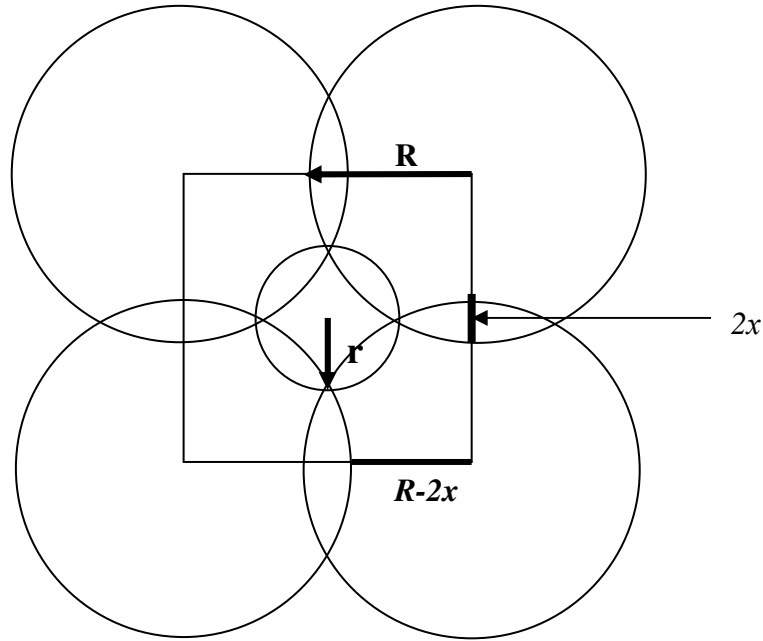


Рис.5.4. Элемент и типовой фрагмент Модели В-2.

Теорема 5.2. *Оптимальное расположение кругов в Модели В-2, определяющее наилучшие показатели эффективности покрытия K и E , задается условиями:*

$$r = \frac{R}{\sqrt{5}} \approx 0,4472R; \quad 2x = \frac{2R(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5}} \approx 0,2111R; \quad (5.9)$$

$$a = 2(R - x) = \frac{4R}{\sqrt{5}} \approx 1,7889R,$$

где $2x$ – размер радиального перекрытия двух больших кругов, a – расстояние между центрами двух больших соседних кругов (сторона квадрата, соответствующего типовому фрагменту).

Доказательство. Проведем коротко расчеты:

$$r = t - \sqrt{R^2 - t^2}, \quad \text{где } t = R - x;$$

$$Sp = 4(R - x)^2 = 4t^2, \quad Sf = \pi R^2 + \pi \left(t - \sqrt{R^2 - t^2} \right)^2;$$

$$\frac{1}{K(t)} = \frac{Sf}{Sp} = \frac{\pi R^2 + \pi(t - \sqrt{R^2 - t^2})}{4t^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R^2}{t^2} - \frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{t} \right) \rightarrow \min.$$

Решением экстремальной задачи будет

$$t = \frac{2R}{\sqrt{5}}; \quad x = R - t = \frac{R(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5}}; \quad r = t - \sqrt{R^2 - t^2} = \frac{R}{\sqrt{5}}.$$

Теорема 2 доказана.

После этого несложно вычислить характеристики типового фрагмента и коэффициенты эффективности:

$$Sp = \frac{16R^2}{5}; \quad Sf = \frac{6\pi R^2}{5}; \quad K'_3 = \frac{16}{6\pi} \approx 0,8488; \quad E'_3 \approx 1,1781\mu. \quad (5.10)$$

Следствие 5.2. Коэффициенты эффективности *Модели В-2* имеют наилучшие показатели среди моделей серии *В*:

$$K'_1 = K'_2 \approx 0,6366; \quad K'_3 \approx 0,8488; \quad E'_1 = E'_2 \approx 1,5708\mu; \quad E'_3 \approx 1,1781\mu.$$

5.2.4 Классификация регулярных покрытий

Рассмотрим покрытие плоскости кругами двух радиусов (*Модель В-2*), изображенное на рис 5.5.

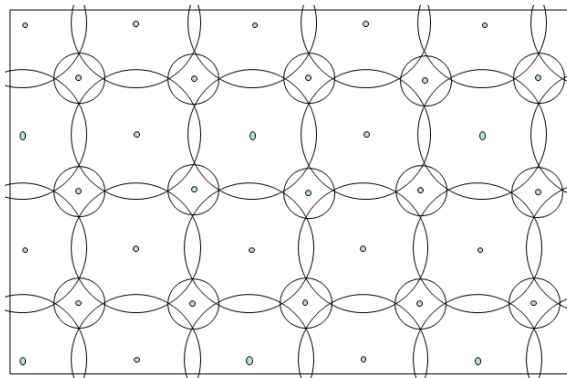


Рис 5.5. *Модель В-2* покрытия плоскости

В качестве базовой плитки покрытия можно брать несколько вариантов фигур (рис 5.6).

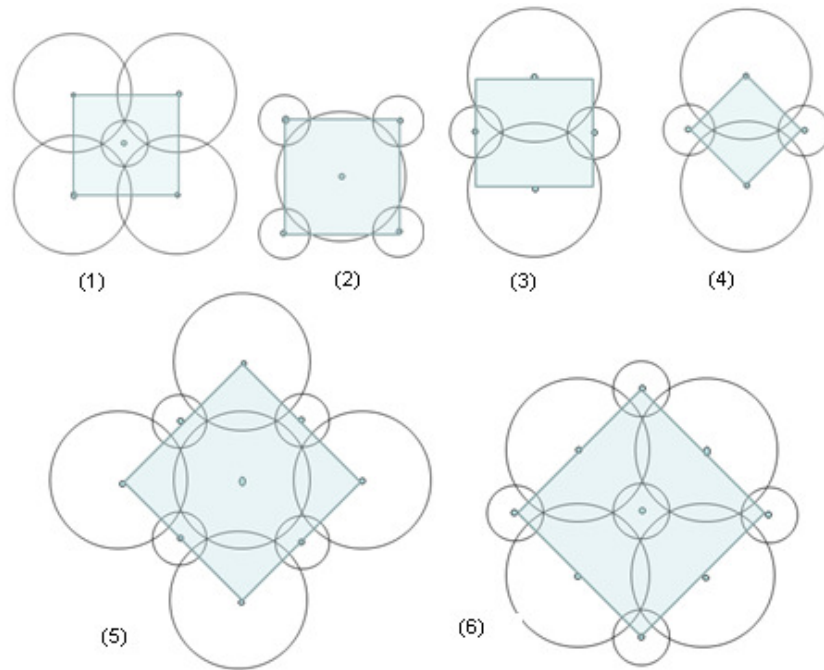


Рис 5.6. Различные варианты плиток для *Модели B-2*

Все указанные плитки можно делить на две, четыре (а некоторые и на большее количество) равных частей, которые также являются плитками данного покрытия. Процесс деления конечен, так как в покрытии каждой плитки должны участвовать круги двух размеров, расстояние между центрами которых не меньше определенного значения. Во всех случаях процесс «деления» приводит к прямоугольному треугольнику, в покрытии которого участвуют два круга своими $1/8$ частями (рис 5.7).

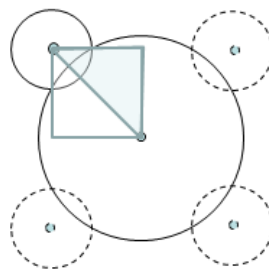


Рис 5.7. Минимальная плитка для *Модели B-2*

Это можно обозначить как $\text{Cov}_{w_0}(2: 1/8, 1/8)$ или $\text{Cov}_{w_0}(2: 1_8, 1_8)$, где w_0 - это минимальная плитка. Заметим, что для случаев (1)-(3), изображенных на рис 5.6, плитки одинаковые, но принимают разные положения. Очень важно, что обозначения согласованы между собой:

$$\text{Cov}_{w_1}(2: 4_4, 1_1), \text{Cov}_{w_2}(2: 1_1, 4_4), \text{Cov}_{w_3}(2: 2_2, 2_2).$$

Для случаев (4)-(6) характеристические показатели изменяются пропорционально площади плитки:

$$\text{Cov}_{w4}(2: 4_4+1_1, 4_2), \text{Cov}_{w5}(2: 4_2, 4_4+1_1), \text{Cov}_{w6}(2: 2_4, 2_4).$$

Каждое обозначение покрытия, отнесенное к разным плиткам, показывает, что среднее количество кругов одного и второго вида одинаковое. Если брать «хорошую» (не очень большую) плитку, то можно обойтись без суммирования частей кругов. Общее обозначение класса покрытий с двумя разными размерами кругов будет иметь вид:

$$\text{Cov}_w(2: p_1/k_1, p_2/k_2).$$

Данный способ описания классов регулярных покрытий можно обобщить на любое количество разных кругов, применяемых для мониторинга. Таким образом, любое конструктивное (без особенностей) регулярное покрытие можно отнести к одному из классов вида:

$$\text{Cov}_w(n: p_1/k_1, p_2/k_2, \dots, p_n/k_n),$$

где w – стандартная плитка покрытия, n – число разных размеров кругов, p_i – число кругов вида i , участвующих в покрытии плитки w , k_i – доли кругов вида i , покрывающих плитку.

Модель А-2 со стандартной треугольной плиткой (рис 5.8) будет представлять класс $\text{Cov}_w(2: 3_6, 1_1)$. Это легко видеть на рис 5.9.

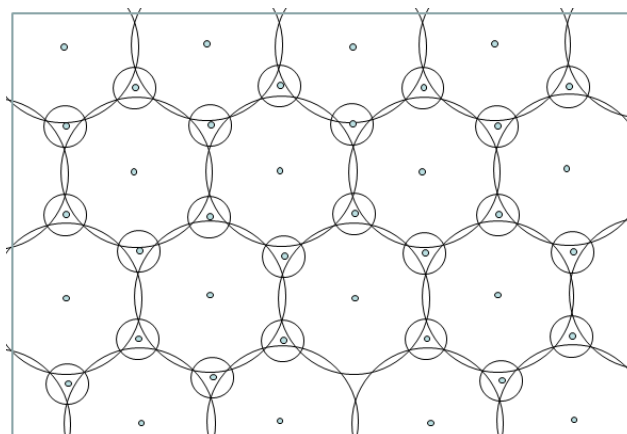


Рис 5.8. Модели А-2 покрытия плоскости

На этом же рисунке изображены еще два варианта плиток и соответствующий минимальный фрагмент. Он является частью всех

рассмотренных плиток и представляет собой прямоугольный треугольник с острыми углами по 30 и 60 градусов. Приведем соответствующие обозначения: $\text{Cov}_{w0}(2: 1_{12}, 1_6)$, $\text{Cov}_{w1}(2: 1_1, 6_3)$, $\text{Cov}_{w2}(2: 1_6, 2_6)$.

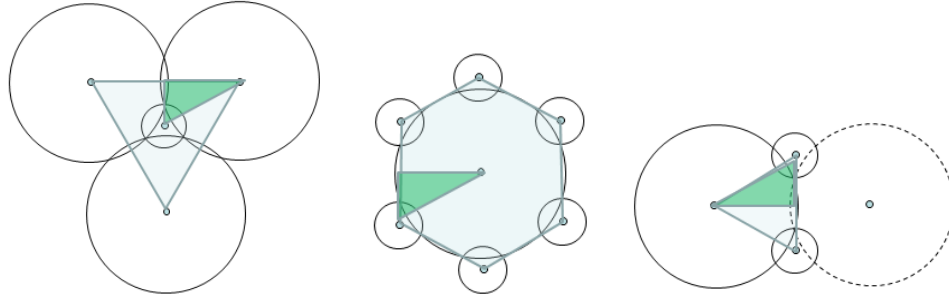


Рис 5.9. Варианты плиток и минимальный фрагмент для *Модели А-2*

Обозначения для разных плиток показывают, что количество кругов одного размера в два раза меньше, чем другого:

$$1/12 : 1/6 = 1/1 : 6/3 = 1/6 : 2/6 = 1 : 2.$$

Второй вариант для правильной шестиугольной плитки, изображенной на рис 5.9, показывает, что гексагональная структура покрытия не является особенной, а описывается обычной треугольной.

5.2.5 Построение новых моделей покрытий, используя классификацию

Предположим, что мы имеем стандартную плитку для регулярного покрытия. В общем случае это некоторый многоугольник, покрытый определенным образом кругами. Важно заметить, что обозначения классификации определяют положение центров кругов. Центры могут находиться в вершинах многоугольника, на сторонах или внутри. Следовательно, для заданной минимальной плитки можно однозначно определять структуру покрытия любой заданной сложности и находить соответствующий класс моделей. Значение n в обозначении

$$\text{Cov}_w(n: p_1/k_1, p_2/k_2, \dots, p_n/k_n)$$

можно считать уровнем сложности покрытия. Классификация позволяет учесть и «не пропустить» все возможные классы данного уровня и определить рекордную по плотности покрытия модель не только в каждом классе, но и на каждом уровне. В связи с этим, приведем следующий результат.

Теорема 5. В классе моделей правильной треугольной структуры A уровня сложности $n=2$ рекордной является покрытие Модели $A-2^*$ класса $Cov(2: 1_{12}, 1_2)$ (рис 5.10) со следующими оптимальными параметрами:

$\min D_{A-2^*} = \frac{3\pi}{5\sqrt{3}} \approx 1.0882796, r = \frac{R}{2\sqrt{21}} \approx 0.1091R,$ где D_{A-2^*} - плотность покрытия.

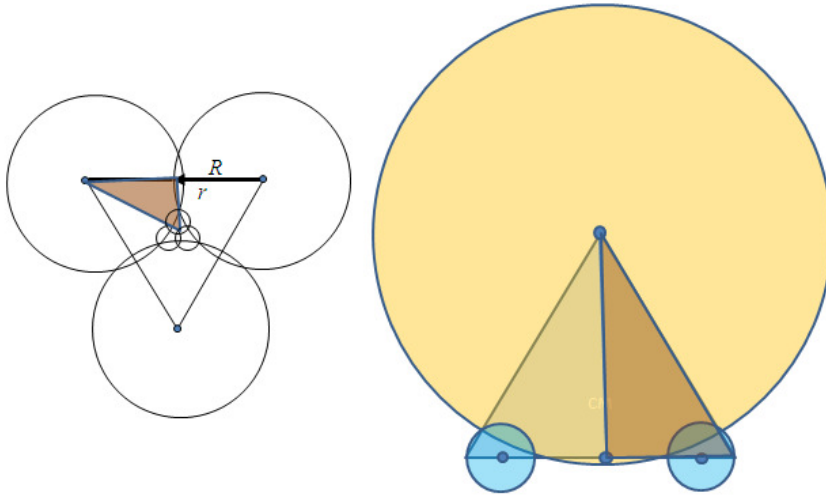


Рис 5.10. Фрагмент модели покрытия класса $Cov_w(2:1_{12},1_2)$

Расчеты по модели приведены в Приложении 2. Заметим, что по сравнению с *Моделью A-2* $Cov_w(2:1_{12},1_6)$ маленький круг теперь находится не в вершине минимальной плитки, а на ее стороне.

Рассмотрим наглядные примеры покрытий уровня 3 на рис 5.11. Ниже каждого фрагмента указаны соотношения между количествами разных кругов, участвующих в покрытии.

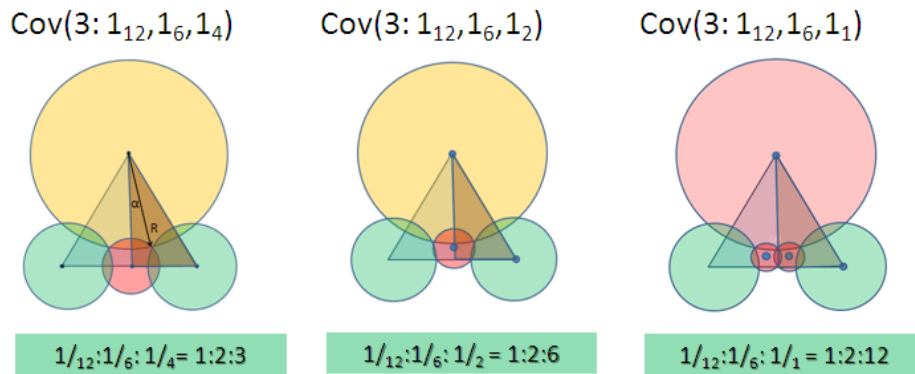


Рис 5.11. Примеры моделей покрытия третьего уровня

Модели достаточно эффективные, но не являются наилучшими в своем классе. Далее приведем наилучшие модели третьего уровня в сериях А и В.

Модель В-3. Рассмотрим класс регулярных покрытий $\text{Cov}_w(3:4_4, 1_1, 4_1)$, где w – квадратная плитка со стороной a . Для минимальной плитки обозначение имеет вид $\text{Cov}(3:1_8, 1_8, 1_2)$ (минимальная плитка определяется однозначно, поэтому в обозначении ее можно не указывать). Найдем в этом классе модель, для которой плотность покрытия минимальна. Другими словами, определим оптимальные соотношения между размерами кругов и их расположение.

Пусть R, r, ρ – это радиусы кругов трех разных размеров. Центры кругов первого типа расположены в вершинах квадрата, один круг второго типа находится строго в центре, а четыре круга третьего типа закрывают маленькие криволинейные треугольники, проходя через их вершины (рис 5.12).

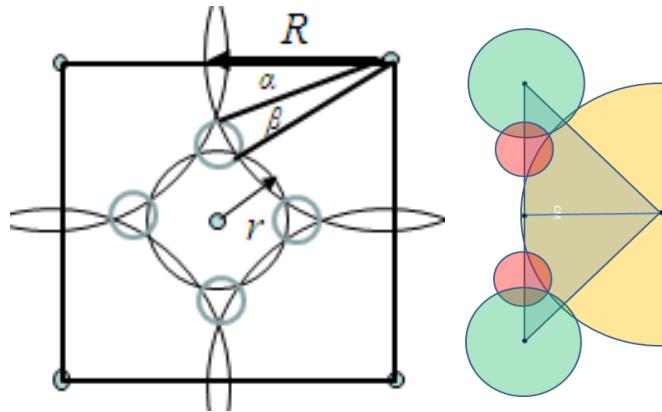


Рис 5.12. Фрагмент модели покрытия класса $\text{Cov}(3:1_8, 1_8, 1_2)$

Обозначим через α и β углы, выходящие из вершины квадрата, со сторонами, проведенными к соответствующим пересечениям окружностей. Тогда плотность покрытия будет выражаться следующей формулой:

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \left(1 - \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + \left(1 - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + 4 \cdot \left(\text{tg} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) - \text{tg} \alpha \right)^2 \right).$$

Исследуя функцию на экстремум с помощью численных методов, находим оптимальные соотношения:

$$\min D(\alpha, \beta) \approx 1,093845, \quad \alpha \approx 19,08^\circ, \quad \beta \approx 13,15^\circ, \quad R \approx 0,529a, \quad r \approx 0,224a, \quad \rho \approx 0,067a.$$

В сравнении с плотность оптимальной *Модели В-2* квадратной структуры из класса $\text{Cov}(2:1_4, 1_4)$, имеющей значение $\min D \approx 1,1781$, плотности покрытия для новой модели стало практически в два раза ближе к единице.

Модель А-3. Рассмотрим аналогичный класс покрытий треугольной структуры и найдем соответствующие оптимальные параметры. Для правильной треугольной плитки обозначение класса будет $\text{Cov}_w(3:3_6, 1_1, 3_1)$, а для минимальной плитки $\text{Cov}(3:1_{12}, 1_6, 1_2)$.

Пусть R , r , ρ – это радиусы кругов трех разных размеров. Центры кругов первого типа расположены в вершинах правильного треугольника со стороной a , один круг второго типа находится строго в центре треугольника, а три круга третьего типа закрывают маленькие криволинейные треугольники, проходя через их вершины (рис 5.13).

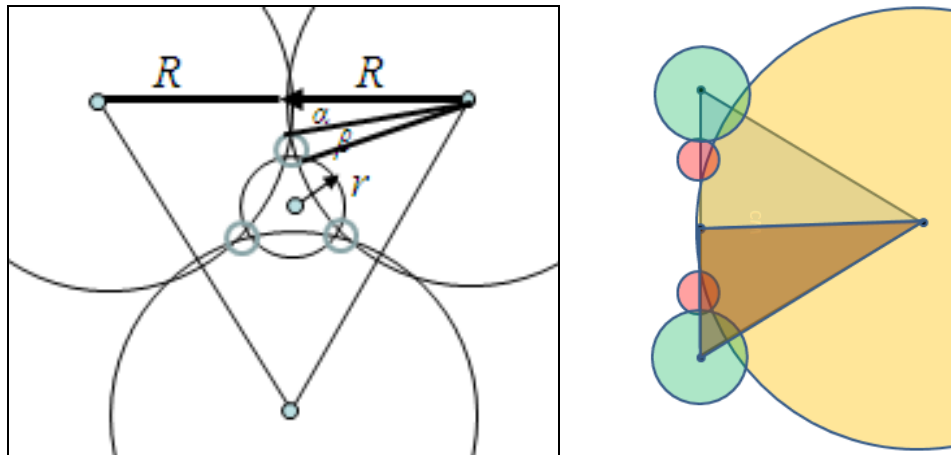


Рис 5.13. Фрагмент модели покрытия класса $\text{Cov}(3:1_{12}, 1_6, 1_2)$

Используя обозначения углов согласно рисунку, получаем формулу для плотности покрытия:

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2 \cos^2 \alpha} + \left(1 - \frac{\cos(60^\circ - \alpha - \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sin(60^\circ - \alpha - \beta)}{\cos \alpha} \right)^2 + 3 \left(\operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) - \operatorname{tg} \alpha \right)^2 \right).$$

После исследования функции на экстремум, находим оптимальные параметры модели:

$$\min D(\alpha, \beta) \approx 1,067678, \quad \alpha \approx 14,32^\circ, \quad \beta \approx 10,31^\circ, \quad R \approx 0,5160a, \quad r \approx 0,0798a, \quad \rho \approx 0,0492a.$$

Минимальная плотность оптимальной *Модели А-2* треугольной структуры (обобщением которой данная модель является) равна $\min D \approx 1,1084$, что существенно больше. Заметим, что это значение также больше соответствующего показателя для *Модели В-3* с квадратной структурой.

Приведем основные выводы по исследованным моделям:

- Исследования показали высокую эффективность моделей второго и третьего уровня. Причем, как по серии *А*, так и по серии *В* произошло существенное улучшение каждого предыдущего уровня.
- *Модели А-2* и *В-2* сравнимы по качеству. Однако, *Модель В-2* хотя и уступает по эффективности *Модели А-2*, но имеет преимущества за счет более простой структуры решетки центров кругов. Местоположение сенсоров в такой модели проще рассчитать и смонтировать.
- Дальнейшие обобщения моделей по уровню сложности вполне возможны, но пока с практической точки зрения нецелесообразны при проектировании сенсорных сетей. Если вводить дополнительные размеры кругов, то радиус меньшего круга будет отличаться от радиуса большего круга в несколько десятков раз.

5.3 Эффективность покрытий ограниченных областей

При проектировании сенсорных покрытий необходимо решать вопрос о выборе характеристик датчиков: стоимость устройств, радиуса действия, потребление энергии на обслуживание и т.д. В связи с этим, для ограниченных областей можно спроектировать эффективную структуру покрытия и рассчитать характеристики датчиков так, что получатся минимальные экономические затраты. Далее мы предложим одну из возможных методик оценки размеров сенсорных радиусов в зависимости от общей площади эксплуатируемой области и затратных показателей оборудования.

5.3.1 Построение типовой функции затрат

Общие энергетические (материальные) затраты по объектам и оборудованию имеют разные составляющие: разовая оплата стоимости, монтаж, расходы на эксплуатацию и управление, энергопотребление и т.д. По большому счету, все затраты можно разделить на три типа:

- (а) разовые затраты на всю проектную операцию (лицензия, оплата за документацию и пр.),
- (б) оплата за монтаж оборудования, зависящая от количества и цены установки на одну единицу устройства,
- (с) затраты на эксплуатацию, зависящие от количества и качества тех же комплектующих.

Замечание 5.2. Время, по третьему виду затрат, можно исключить (точнее, оно учитывается), пересчитав затраты через среднее время эксплуатации по каждому виду «деталей».

Замечание 5.3. Стоимость устройств учитывается в разделе (с), так как его цена зависит от качества. При монтаже качество устройства учитывать не будем, считая, что установка не связана с ценностью и внутренней начинкой.

Согласно предположениям (а), (б), (с), выпишем *функцию затрат*

$$E=E(N, P, Q)= E_a+E_b(N,P)+E_c(N,Q), \quad (5.11)$$

где $N=\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ – количественный признак оборудования, $P=\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ – ценовой признак монтажных работ, $Q=\{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ – качественный признак по обслуживанию. Так как цена монтажа P для каждого вида устройств не меняется, то функция затрат будет зависеть от двух переменных. Неявно функция затрат зависит от формы и границ «области» эксплуатации, которая в любой момент может проявиться. Однако, если область достаточно большая по сравнению с радиусом действия сенсорного устройства, то граничными эффектами можно пренебречь.

5.3.2 Функции затрат для кругового сенсорного покрытия

Учитывая вышесказанное, построим функцию затрат для некоторой области при полном контроле ее чувствительными датчиками определенного радиуса действия.

Принимаем во внимание следующие положения.

- Имеется область D без «особенностей» с площадью S . Специальных ограничений нет, - главное, чтобы при «расстановке» сенсорных датчиков не было сложных препятствий, которые надо обходить. Можно считать ее односвязной и с гладкими границами. В противном случае расчеты не будут иметь указанных ниже закономерностей.

- Предположим, что область покрыта кругами некоторым регулярным способом по типу моделей рассмотренных выше. Считаем, что имеется m разных кругов с размерами $R=\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. Размеры кругов, в нашем случае, будут отвечать за качественный признак Q , входящий в формулу (5.11).

- Зададим количество (плотность покрытия) $N=\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ кругов соответствующего размера, приходящееся на единицу площади. Это количество не обязательно целое. Для его определения надо взять количество кругов, приходящееся на *типовой фрагмент* и соотнести его с площадью этого фрагмента.

- Фактические затраты трех типов (а), (б), (с) определим следующим естественным образом:

$$E_a = E_0 = \text{const}; \quad E_b = S \left(\sum_{i=1}^m n_i p_i \right); \quad E_c = S \left(\sum_{i=1}^m n_i f(r_i) \right),$$

где $P=\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ - цены монтажных работ, $F=\{f(r_1), f(r_2), \dots, f(r_m)\}$ - норма ценовых и эксплуатационных затрат на каждое устройство.

Таким образом, общие материальные и энергетические затраты для области D , согласно (5.11), будут определены следующей функцией:

$$E=E(N,R)= E_0+S\left(\sum_{i=1}^m n_i p_i\right)+S\left(\sum_{i=1}^m n_i f(r_i)\right). \quad (5.12)$$

Используя данную функцию, можно проводить оптимизационные действия на всей области D . При этом нужно учитывать, что векторные переменные N и R являются зависимыми. Более того, обычная «покрываемая» (coverage) эффективность при фиксированной модели, зависит только от отношений между радиусами, а не от их размера. Поэтому для решения проблемы оптимизации экономических затрат при проектировании сетей надо определить технические характеристики основных сенсорных кругов, т.е. достаточно найти значения количества кругов n_1 и размер радиуса r_1 . Реализуем этот подход для конкретных моделей третьего уровня.

5.3.3 Оптимизация затрат для моделей второго уровня

Применим все результаты раздела 5.3.2 к моделям третьего уровня. Пока проводим рассуждения для двух моделей одновременно. Полагая $m = 2$, получаем простую функцию затрат:

$$E=E(N,R)= E_0+S(n_1 p_1 + n_2 p_2)+S(n_1 f(r_1)+n_2 f(r_2))$$

или, учитывая линейные зависимости: $r_2 = k r_1$ и $n_2 = t n_1$

$$E=E(r_1, n_1)= E_0+S n_1 (p_1 + t p_2)+S n_1 (f(r_1)+f(k r_1)). \quad (5.13)$$

Расчеты показывают, что для моделей третьего уровня с большой точностью площадь типового фрагмента S_p равна суммарной площади S_1 - частей основных кругов, входящих в этот фрагмент. В самом деле,

$$\text{Модель 3-A: } S_p = \frac{R^2 27\sqrt{3}}{31} \approx 1,5086R^2; \quad S_1 = \frac{\pi R^2}{2} \approx 1,5708R^2;$$

$$\text{Модель 3-B: } S_p = \frac{16R^2}{5} \approx 3,2R^2; \quad S_1 = \pi R^2 \approx 3,1416R^2.$$

Это вполне объяснимо, так как незакрытая большими кругами область компенсируется налеганием этих кругов друг на друга. Из этого следует, что

$$n_1 = \frac{1}{\pi r_1^2} \text{ или, более предпочтительно, } n_1 \cong \frac{1}{\pi r_1^2}. \quad (5.14)$$

Последнее соотношение определяет эквивалентность величин или приближенное равенство. Так как мы делаем оценочные операции, то это вполне допустимо. К тому же, учет в дальнейшем некоторых других факторов может привести к более точной корректировке полученных результатов.

Из (5.14) следует важное для дальнейшего соотношение

$$E = E(r_1) \cong E_0 + \frac{S}{\pi r_1^2} (p_1 + t p_2) + \frac{S}{\pi r_1^2} (f(r_1) + f(k r_1)). \quad (5.15)$$

Решение оптимизационной задачи $E(r_1) \rightarrow \min$ приводит к следующему уравнению

$$\frac{dE}{dr_1} \cong -\frac{2S}{\pi r_1^3} (p_1 + t p_2 + f(r_1) + f(k r_1)) + \frac{S}{\pi r_1^2} \frac{d(f(r_1) + f(k r_1))}{dr_1} = 0. \quad (5.16)$$

Для функции $f(r) = \mu r^\alpha$ из (5.16) получаем

$$(\alpha - 2)\mu r_1^\alpha (1 + k^\alpha) \cong 2(p_1 + t p_2),$$

из которого для двух моделей третьего уровня находим в общем виде оптимальное значение радиуса r_1 :

$$r_1 \cong \left(\frac{2(p_1 + t p_2)}{\mu(\alpha - 2)(1 + k^\alpha)} \right)^{1/\alpha} \quad (5.17)$$

Замечание 5.4. При $\alpha \leq 2$ формула (5.17) не определяет корректного результата. Поэтому рассмотрим функцию (15) при $f(r) = \mu r^\alpha$:

$$E = E(r_1) \cong E_0 + \frac{S}{\pi r_1^2} (p_1 + t p_2) + \frac{\mu S}{\pi r_1^{2-\alpha}} (1 + k^\alpha). \quad (5.18)$$

При $\alpha = 2$ третье слагаемое является константой (вместе с E_0) и функция затрат E монотонно убывает при возрастании r_1 . Предельное значение $E^* = E_0 + \frac{\mu S}{\pi r_1} (1+k^2)$, но оно не достижимо, так как мы приходим к одному кругу, покрывающему всю область.

При $\alpha < 2$ так же имеется монотонное убывание и, как и в предыдущем случае, будет выгодно брать минимальное количество кругов большого размера. С практической точки зрения это означает, что затраты на обслуживание одного сенсора (с увеличением его радиуса действия) растут медленнее, чем растет контролируемая им площадь.

Замечание 5.5. Можно считать, что $p_1 = p_2 = p$, так как монтируются однотипные устройства (более того, проводится оптимизация по радиусу действия). В общем случае этого нельзя было делать, потому что могут быть работы разной сложности. С учетом этого, получаем немного измененный аналог соотношения (5.17)

$$r_1 \cong \left(\frac{2p(1+t)}{\mu(\alpha-2)(1+k^\alpha)} \right)^{1/\alpha} \quad (5.19)$$

Теперь можно приступить к определению коэффициентов k и t для *Модели 3-А* и *Модели 3-В*.

Расчеты для Модели А-2. Полученные выше результаты позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 5.3. При построении покрытия по типу *Модели А-2* для достаточно больших областей, имеющих площадь S , оптимальный размер больших кругов и их количество оценивается по заданным признакам $P = \{p, p\}$ и $f(r) = \mu r^\alpha$ следующими соотношениями

$$r_1 \cong \left(\frac{6p}{\mu(\alpha-2)(1+31^{-\alpha/2})} \right)^{1/\alpha}; \quad N_1 \cong \frac{S}{\pi} \left(\frac{\mu(\alpha-2)(1+31^{-\alpha/2})}{6p} \right) \quad (5.20)$$

Доказательство. Так как покрытие регулярное, то можно по типовому фрагменту (см. рис 5.3) определить зависимости между величинами. Напомним, что новому обозначению r_1 соответствует прежнее обозначение R , а обозначению r_2 соответствует r . Сделаем необходимые расчеты.

$$N=\{n_1;n_2\}=\{0,5/Sp;1/Sp\}=\left\{\frac{31}{54\sqrt{3}r_1^2};\frac{31}{27\sqrt{3}r_1^2}\right\}; n_2 = 2n_1; t=2; \quad (5.21)$$

$$R=\{r_1;r_2\}=\left\{r_1;\frac{r_1}{\sqrt{31}}\right\}; k=\frac{1}{\sqrt{31}}.$$

Принимая во внимание *Замечание 5.5*, везде далее будем считать, что $\alpha > 2$. Тогда согласно (5.19) и (5.21), получаем значение для оптимального значения большого радиуса;

$$r_1 \cong \left(\frac{2p(1+t)}{\mu(\alpha-2)(1+31^{-\alpha/2})} \right)^{1/\alpha} \cong \left(\frac{6p}{\mu(\alpha-2)(1+31^{-\alpha/2})} \right)^{1/\alpha}$$

Оценим количество кругов:

$$N_1 \cong S n_1 \cong \frac{S}{\pi r_1^2} \cong \frac{S}{\pi} \left(\frac{\mu(\alpha-2)(1+31^{-\alpha/2})}{6p} \right)^{2/\alpha}.$$

Что и требовалось показать.

Расчеты для Модели В-2. Для Модели В-2 верна теорема аналогичная *Теореме 5.3*.

Теореме 5.4. При построении покрытия по типу Модели В-2 для ограниченных областей, имеющих площадь S , оптимальный размер больших

кругов и их количество оценивается по заданным признакам $P=\{p, p\}$ и $f(r)=\mu r^\alpha$ следующими соотношениями

$$r_1 \cong \left(\frac{4p}{\mu(\alpha-2)(1+5^{-\alpha/2})} \right)^{1/\alpha}; \quad N_1 = \frac{S}{\pi} \left(\frac{\mu(\alpha-2)(1+5^{-\alpha/2})}{4p} \right)^{2/\alpha}. \quad (5.23)$$

Доказательство. Приведем соответствующие расчеты, используя характерные показатели и рис. 5.4.

$$N=\{n_1; n_2\}=\{1/Sp; 1/Sp\}=\left\{ \frac{5}{16R^2}; \frac{5}{16R^2} \right\}; \quad n_2 = n_1; \quad t=1;$$

$$R=\{r_1; r_2\}=\left\{ r_1; \frac{r_1}{\sqrt{5}} \right\}; \quad k=\frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (5.24)$$

Из (5.19) и (5.24) получаем требуемое (5.23). Теорема 5.4 полностью доказана.

5.3.4 Обсуждение результатов и выводы

- Покрывающая эффективность (coverage efficient) для моделей второго уровня зависит не от размера радиусов кругов, а от их отношения. Поэтому, за счет изменения размера кругов, при заданном отношении радиусов, можно оптимизировать затратные показатели для разных функций $f(r)$.

- Формула (5.17) показывает, что оценка размера оптимального радиуса базового круга зависит от баланса эксплуатационных и монтажных затрат. Если стоимость монтажных работ растет, то радиус увеличивается. Если же увеличивается стоимость эксплуатационных работ (за счет коэффициента μ), то радиус уменьшается.

- Соотношение (5.14) мы вывели из предположения того, что $Sp \approx S_1$. Это не является обязательным требованием для предлагаемой методики. Если имеется существенное отличие между Sp и S_1 , то небольшая цепочка расчетов приводит к универсальному и более точному соотношению:

$$n_1 \cong \frac{1}{\omega \pi r_1^2}, \text{ где } \omega = \frac{Sp}{S_1}. \quad (5.25)$$

В частности, для *Модели А-2* $\omega \approx 0,9604$, а для *Модели: В-2* $\omega \approx 1,0119$.

Применив оценку (5.25), мы можем получить следующий более точный общий результат для двух моделей третьего уровня.

Теоремы 5.5. *При построении моделей второго уровня для ограниченных областей, имеющих площадь S , оптимальный размер больших кругов и их количество оценивается по заданным признакам $P=\{p, p\}$ и $f(r)=\mu r^\alpha$ следующими соотношениями*

$$r_1 \cong \left(\frac{2p(1+t)}{\mu(\alpha-2)(1+k^\alpha)} \right)^{1/\alpha}; \quad N_1 \cong \frac{S}{\omega \pi} \left(\frac{\mu(\alpha-2)(1+k^\alpha)}{2p(1+t)} \right)^{2/\alpha}. \quad (5.26)$$

Значения показателей t и k определены ранее для каждой из двух моделей.

ГЛАВА 6. ЭФФЕКТИВНЫЕ ПОКРЫТИЯ ПРОТЯЖЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Многие реальные объекты моделируются бесконечно длинными полосами. Это автомобильные и железнодорожные дороги, линии связи, государственные границы, трубопроводы и прочие сооружения, у которых длина существенно превышает ширину (толщину), и которые имеют незначительную кривизну. Задачи мониторинга подобных объектов требуют построения эффективных моделей покрытия, удовлетворяющим соответствующим требованиям. Указанные объекты хотя и имеют достаточно большую протяженность, но все же, содержат окружающие границы. При покрытии областей, имеющих границы, появляются дополнительные сложности с определением критериев эффективности и числовыми расчетами. Далее мы рассмотрим практически не изученную проблему покрытия бесконечной полосы, которая позволяет решать задачи мониторинга протяженных объектов. Несмотря на то, что решаются задачи на плоскости, большинство методов и результатов можно адаптировать на пространственные объекты. Во второй части главы представлены новые постановки проблем, касающиеся внешнего мониторинга полосы или некоторой другой ограниченной области. При этом предполагается, что по каким-либо причина «недоступности» сенсорное устройство не может располагаться внутри контролируемой области.

В данной главе предложены и исследованы регулярные многослойные покрытия полосы кругами одного, двух и трёх радиусов. При этом радиусы кругов – это регулируемые параметры покрытий. В каждом классе покрытий выделены наиболее эффективные и показаны их преимущества. Приведенные результаты демонстрируют общие методы построения эффективных покрытий, которые могут быть использованы при решении практических задач.

6.1 Покрывтия для полосы с кругами одного радиуса

Рассмотрим для начала прямую линию L , которую требуется покрыть кругами радиуса R . На рис. 6.1 показаны различные варианты покрытия. В случае (в) линия содержится в некоторой полосе, границы которой проходят через точки пересечения равномерно расположенных окружностей. Ширина полосы определяет степень «гарантии» покрытия линии. В случае (а) линия также покрыта, но точки касания входят в покрытие без своих окрестностей, и такое покрытие может оказаться недостаточным по причине надежности. В случае (б) линия покрыта с некоторым запасом, но отсутствие системности расположения кругов не позволяет делать каких-либо полезные заключения.

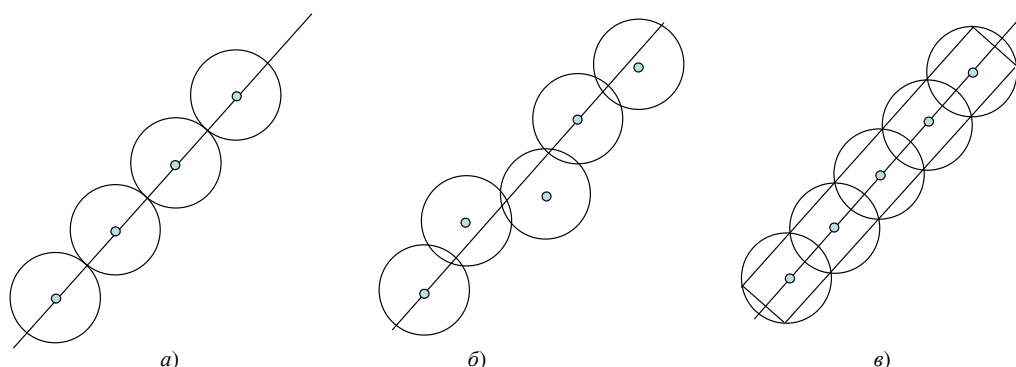


Рис. 6.1. Покрывтия прямой линии кругами: а) регулярное покрытие без пересечения кругов, б) нерегулярное покрытие, в) регулярное гарантированное покрытие

Если оценивать качество покрытия линии по критерию минимума плотности, то в силу того, что линия имеет нулевую площадь, любое ее покрытие кругами является неэффективным. Однако, если рассматривать гарантированное покрытие линии, то постановка задачи становится корректной и однозначно сводится к покрытию полосы. Кроме того, практически любой физический предмет имеет ширину (толщину). Поэтому изучение *регулярных* покрытий полосы является полезным с точки зрения практических приложений.

6.1.1 Однослойные покрытия

Модель 6.1. Рассмотрим регулярное покрытие полосы шириной h , изображенное на рис. 6.2, и найдем радиус круга R , при котором плотность такого покрытия минимальна. Рассматриваемое покрытие является 1-слойным, так как центры кругов располагаются на одной прямой.

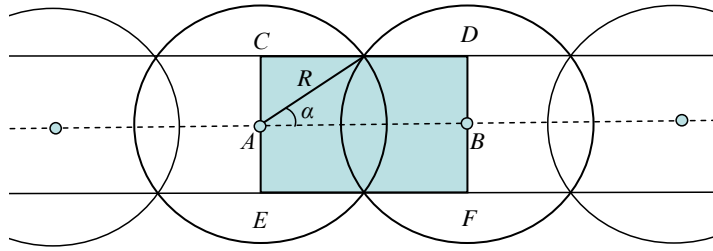


Рис. 6.2. Регулярное однослойное покрытие одинаковыми кругами.

Пусть точки A и B являются центрами двух соседних кругов покрытия. Через эти точки проведем диаметры перпендикулярные отрезку AB (и, естественно, сторонам полосы), а через точки пересечения окружностей проведем, соответственно, отрезки CD и EF параллельные AB . Прямоугольник $CDEF$ является частью полосы и покрывается двумя полукругами с суммарной площадью πR^2 . Плотность покрытия всей полосы совпадает с плотностью прямоугольника и равна $D = S_{кр} / S_{np}$, где $S_{кр} = \pi R^2$ – площадь кругов, покрывающих $CDEF$, а S_{np} – площадь прямоугольника $CDEF$. Оптимальным является покрытие, имеющее минимальную плотность D . Найдём оптимальные значения радиуса круга R и расстояние d между центрами соседних кругов в зависимости от ширины полосы h . Согласно обозначениям рисунка 2, $d = |AB| = 2R \cos \alpha$, $h = 2R \sin \alpha$. Следовательно,

$$S_{np} = dh = 4R^2 \cos \alpha \sin \alpha = 2R^2 \sin 2\alpha, \quad D(\alpha) = \pi / (2 \sin 2\alpha).$$

Плотность $D(\alpha)$ – это дифференцируемая функция одной переменной, и её минимум $\pi/2 \approx 1,5708$ достигается при $\alpha = \pi/4$. Следовательно, оптимальные значения $R = h / \sqrt{2}$ и $d = h$.

6.1.2 Двухслойные и многослойные покрытия

Назовем покрытие *n*-слойным, если центры всех кругов покрытия располагаются на *n* прямых параллельных границах полосы. Плотность покрытия может быть уменьшена путём введения дополнительных слоев. Двухслойные покрытия кругами одного радиуса могут быть построены по-разному. Рассмотрим двухслойное покрытие, которое использует *треугольную* решётку (рис. 6.3).

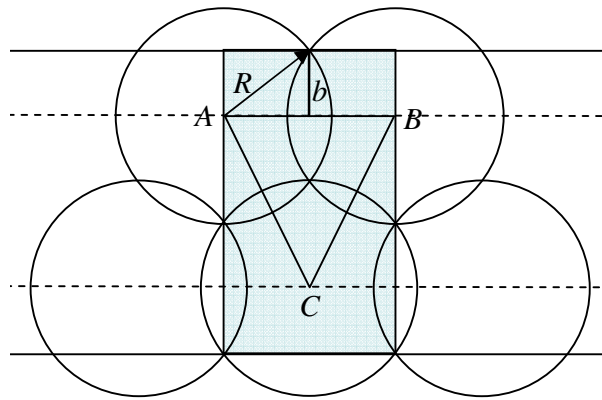


Рис. 6.3. Двухслойное покрытие полосы кругами, использующее треугольную решётку.

Модель 6.2. Пусть, как и прежде, h – ширина полосы, R – радиус круга, $d = |AB|$ – расстояние между центрами соседних кругов одного слоя, α – угол между радиусом, проведенным к точке пересечения двух соседних окружностей одного слоя, и прямой AB , проходящей через центры кругов этого слоя. Обозначим $b = R \sin \alpha$. Тогда

$$h = R + 3b = R(1 + 3 \sin \alpha), \quad d = 2R \cos \alpha, \quad S_{np} = dh = 2R^2 \cos \alpha (1 + 3 \sin \alpha),$$

$$S_{кр} = 2\pi R^2.$$

Следовательно, плотность покрытия имеет вид

$$D(\alpha) = \frac{\pi}{\cos \alpha (1 + 3 \sin \alpha)}.$$

Находя минимум функции $D(\alpha)$, получаем $\sin \alpha = (\sqrt{73} - 1)/12 \approx 0,62867$,

$$\alpha \approx 38,95^\circ, R = h/(1 + 3 \sin a) = 4h/(3 + \sqrt{73}) \approx 0,3465h, d = \frac{2h\sqrt{70+2\sqrt{73}}}{3(3+\sqrt{73})} \approx 0,5389h,$$

и минимальная плотность такого покрытия равна

$$\min_{\alpha} D(\alpha) = \frac{48\pi}{\sqrt{70+2\sqrt{73}}(3+\sqrt{73})} \approx 1.3998.$$

Замечание 6.1. Отметим нетривиальный результат. Треугольник ABC , образованный центрами трёх соседних кругов не является правильным, как в покрытии плоскости одинаковыми кругами, он равнобедренный! Это обусловлено граничным эффектом. В случае правильной треугольной решётки плотность покрытия больше и равна $\frac{4\pi}{5\sqrt{3}} \approx 1.451$.

Модель 6.3. Рассмотрим многослойные покрытия полосы кругами одного радиуса. По аналогии с Моделью 6.2 проведем соответствующие вычисления. Для $n = 3$: $h = 2R + 4b$, $S_{np} = d(2R + 4b) = 2R^2 \cos a(2 + 4\sin a)$, $S_{кр} = 3\pi R^2$. Для $n = 4$: $h = 3R + 5b$, $S_{np} = d(3R + 5b) = 2R^2 \cos a(3 + 5\sin a)$, $S_{кр} = 4\pi R^2$. Замечая индукционные закономерности, проведём расчеты для произвольного значения n :

$$h = (n - 1)R + (n + 1)b = R((n - 1) + (n + 1)\sin a),$$

$$S_{np} = d h = 2R^2 \cos a((n - 1) + (n + 1)\sin a), S_{кр} = n\pi R^2,$$

$$D(\alpha) = \frac{S_{кр}}{S_{np}} = \frac{n\pi}{2(n - 1 + (n + 1)\sin a)\cos a}.$$

После элементарных вычислений получим условие оптимальности:

$$2 \sin^2 \alpha + \frac{(n-1)}{(n+1)} \sin \alpha - 1 = 0.$$

Из решения последнего уравнения находим требуемые значения тригонометрических показателей:

$$\sin \alpha = 0,25 \left(\sqrt{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 + 8} - \frac{n-1}{n+1} \right) = 0,25 \left(\sqrt{p^2 + 8} - p \right),$$

$$\cos \alpha = 0,25 \left(\sqrt{8 - 2p^2 + 2p\sqrt{p^2 + 8}} \right),$$

где $p = \frac{n-1}{n+1}$. Это дает возможность вычислить оптимальное значение плотности покрытия $D(\alpha)$ и определить соотношение между радиусом и шириной полосы

$$R = \frac{h}{n-1 + (n+1)\sin \alpha}.$$

Устремив n в бесконечность, получим предельное значение $p = 1$ и $\sin \alpha = 1/2$, что соответствует значению $\alpha = \pi/6$. Предельное значение плотности равно

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \approx 1,2092.$$

Эта асимптотическая оценка соответствует классическому результату для покрытия всей плоскости кругами одного радиуса. Такой результат объясняется тем, что при большой ширине полосы влияние границ несущественно.

Заметим, что для решения практических задач введение большого количества слоев нецелесообразно, так как требует дополнительных экономических затрат на установку сенсорных устройств. Расчет оптимального количества слоев может быть выполнен с помощью составления функции экономических затрат по методу, приведенному в п.

5.3.2. Главы 5.

6.2 Специальные модели покрытий кругами двух и трех радиусов

Модель 6.4. Пусть центры кругов радиуса R расположены на средней линии полосы, и два соседних круга пересекаются, оставляя непокрытой область около границы полосы, которая покрывается кругами радиуса r (рис. 6.4).

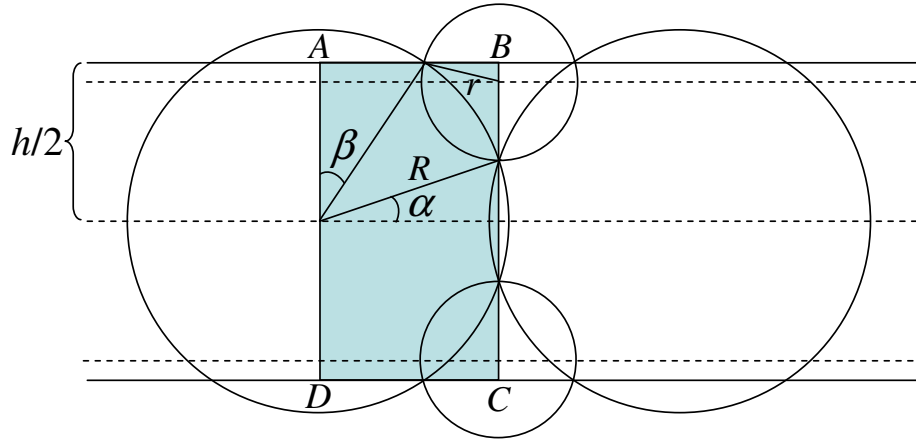


Рис. 6.4. Трехслойное покрытие кругами двух радиусов.

Плотность данного покрытия зависит от двух угловых параметров α и β , отмеченных на рисунке. Площадь прямоугольника $ABCD$ и другие характеристики покрытия можно, соответственно, вычислить:

$$S_{np} = h \cdot a = 4R^2 \cos \alpha \cos \beta;$$

$$r = R \left(\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \alpha \right);$$

$$S_{кр} = \pi R^2 + 2\pi r^2 = \pi R^2 \left(1 + 2 \left(\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \alpha \right)^2 \right).$$

Следовательно, плотность покрытия равна

$$D(\alpha, \beta) = \frac{S_{кр}}{S_{np}} = \frac{\pi}{4 \cos \alpha \cos \beta} \left(1 + 2 \left(\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \alpha \right)^2 \right).$$

Минимум функции $D(\alpha, \beta)$ не удается найти аналитически, а численные расчеты дают следующие результаты:

$$\min_{\alpha, \beta} D(\alpha, \beta) \approx 1.294 \text{ при } R \approx 0.6266h, r \approx 0.18252h, \alpha \approx 27^\circ, \beta \approx 37^\circ.$$

Модель 6.5. Рассмотрим четырехслойное покрытие, изображённое на рис. 6.5. Три соседних круга радиуса R (два с одного слоя и один с другого) пересекаются в единственной общей точке, и их центры являются вершинами правильного треугольника. Круги радиуса r покрывают оставшиеся непокрытыми граничные участки полосы.

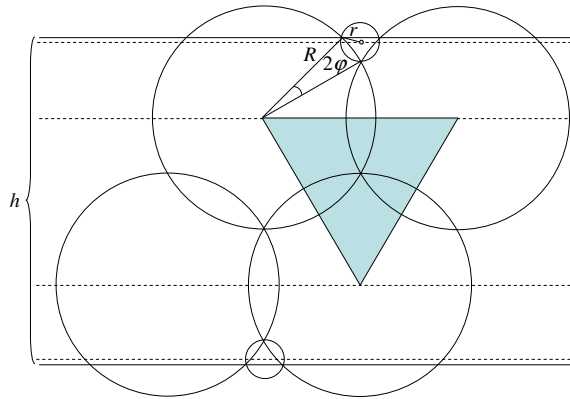


Рис. 6.5. Четырехслойное покрытие кругами двух радиусов.

Пусть центральный угол для дуги большой окружности, отсекаемой малой окружностью, равен 2φ . Тогда плотность покрытия равна

$$D(\varphi) = \frac{\pi}{\sqrt{3}(3 + 4\sin(30^\circ + 2\varphi))} \left(4 + (\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}(30^\circ + \varphi) - 1)^2 \right).$$

В результате численного решения находим оптимальные значения:

$$\min_{\varphi} D(\varphi) \approx 1.2542 \text{ при } \varphi \approx 11.5^\circ, R \approx 0.3229h, r \approx 0.08595h.$$

Замечание 6.2. Отметим, что добавление кругов радиуса r позволило существенно уменьшить плотность покрытия по сравнению с Моделью 6.2.

Модель 6.6. Рассмотрим покрытие, изображенное на рис. 6.6, которое состоит из кругов трех радиусов. Круги радиуса R определяют основную прямоугольную структуру, круги радиуса r_1 используются в центральной части полосы, а круги радиуса r_2 находятся на границах полосы. Такое построение позволяет провести оптимизацию за счет изменений нескольких характеристик покрытия.

Выделим прямоугольник, образованный границами полосы и прямыми, проходящими через центры соседних кругов радиуса R . Для удобства вычислений выразим искомые величины через радиус круга R :

$$h = 2R \cos \alpha + 2R \cos(90^\circ - \alpha - 2\varphi) = 2R(\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi)),$$

$$r_1 = R(\cos \alpha - \sin \alpha), r_2 = R(\cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - \sin \alpha), d = 2R \cos \alpha,$$

где 2α и 2φ – это центральные углы окружности радиуса R , соответствующие дугам при пересечении соседних окружностей. Имеем

$$S_{\text{пр}} = h \cdot d = 4R^2 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi)),$$

$$S_{\text{кр}} = 2\pi R^2 + \pi r_1^2 + 2\pi r_2^2 = \pi R^2 (3 - \sin 2\alpha + 2(\sin(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2),$$

$$D(\alpha, \varphi) = \frac{S_{\text{кр}}}{S_{\text{пр}}} = \frac{\pi(3 - \sin 2\alpha + 2(\cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2)}{4 \cos \alpha (\cos \alpha + \sin(\alpha + 2\varphi))}.$$

Минимальная плотность $\min_{\alpha, \varphi} D(\alpha, \varphi) \approx 1.23355$ достигается при $\alpha \approx 26.36^\circ$, $\varphi \approx 13.18^\circ$, $R \approx 0.2956h$, $r_1 \approx 0.1336h$, $r_2 \approx 0.0874h$.

Замечание 6.3. Если упростить модель, потребовав равенства радиусов внутренних и граничных кругов, то плотность покрытия немного изменится:

$$D(\alpha) = \frac{\pi(5 - 3 \sin 2\alpha)}{4(1 + \cos 2\alpha)},$$

$$\min_{\alpha} D(\alpha) \approx 1,256638 \text{ при } \alpha \approx 30,94^\circ, R \approx 0,29147h, r \approx 0,10014h.$$

Несмотря на то, что плотность увеличилась, данная модель более проста. По этой причине в некоторых случаях ей может быть отдано предпочтение в сравнении с Моделью 6.6.

Модель 6.7. Рассмотрим покрытие, состоящее из кругов трех радиусов (рис. 6.6). Центры кругов радиуса R определяют основную треугольную решетку, и эти круги оставляют непокрытой внутренние и граничные части полосы. Круги радиуса r_1 покрывают внутренние криволинейные треугольнички, а круги радиуса r_2 закрывают граничные части полосы. Легко видеть, что покрытие является шестислойным.

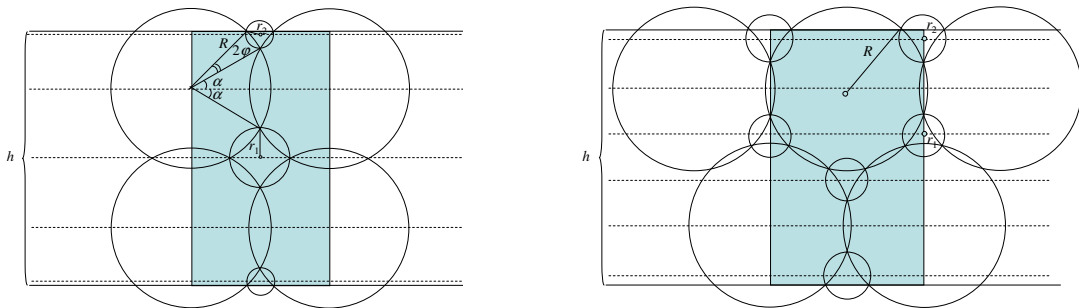


Рис. 6.6. Пятислойное и шестислойное покрытие кругами трех радиусов.

Плотности покрытия будет зависеть от двух угловых параметров:

$$D(\alpha, \varphi) = \frac{\pi(1 + (\cos \alpha / \sqrt{3} - \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) - \sin \alpha)^2)}{\cos \alpha (\sqrt{3} \cdot \cos \alpha + 2 \sin(\alpha + 2\varphi))}.$$

Минимальная плотность для данной модели $\min_{\alpha, \varphi} D(\alpha, \varphi) \approx 1.20396$ достигается при $\alpha \approx 21.77^\circ$, $\varphi \approx 14.32^\circ$, $R \approx 0.31748h$, $r_1 \approx 0.05248h$, $r_2 \approx 0.09717h$.

Замечание 6.4. Заметим, что в оптимальном случае внутренние круги имеют меньший радиус по сравнению с граничными кругами. В Модели 6.6 было наоборот. Если же упростить модель, потребовав равенства радиусов внутренних и граничных кругов, то плотность покрытия будет зависеть от одной переменной и ее оптимальное значение ухудшится, но останется достаточно высоким:

$$D(\alpha) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{7 - 2\cos 2\alpha - 2\sqrt{3} \cdot \sin 2\alpha}{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot \cos 2\alpha - \sin 2\alpha},$$

и $\min_{\alpha} D(\alpha) \approx 1.23387$ при $\alpha \approx 17.72^\circ$, $R \approx 0.33383h$, $r \approx 0,24568R \approx 0.08202h$.

Достоинством покрытия является не только низкая плотность, но и простота структуры. В связи с этим, приведём классификацию покрытий и в каждом классе укажем наиболее эффективные покрытия. Предлагается следующая классификация. Каждое покрытие относится к одному из классов $P(n, k)$, где n – число слоев покрытия, а k – число различных радиусов кругов. Приведём следующую итоговую таблицу исследований.

Класс моделей	Лучшее покрытие	Плотность лучшего покрытия	Примечание
$P(1, 1)$	Модель 1.1	$D \approx 1,571$	Простая структура
$P(2, 1)$	Модель 1.2	$D \approx 1,399$	Треугольная решётка
$P(n, 1)$	Модель 1.3	$D(\alpha) = \frac{n\pi}{2(n-1 + (n+1)\sin\alpha)\cos\alpha}$	Значения $\cos \alpha$, $\sin \beta$ см. в п. 5.5.3
$P(3, 2)$	Модель 2.1	$D \approx 1,294$	Простая и эффективная модель
$P(4, 2)$	Модель 2.2	$D \approx 1,254$	Треугольная решётка
$P(5, 3)$	Модель 2.3	$D \approx 1,234$	Квадратная решётка
$P(6, 3)$	Модель 2.4	$D \approx 1,204$	Треугольная решётка

6.3 Мониторинг полосы с внешним расположением сенсорных датчиков

В данном разделе также решается задача нахождения наименее плотного покрытия полосы кругами одного двух и трех радиусов действия. Но в отличие от предыдущих исследований, центры кругов не должны находиться внутри полосы (внешний мониторинг). Это означает, что по некоторым причинам «недоступности» мы не можем располагать сенсорные устройства внутри контролируемой области. По сути, такая новая постановка проблемы существенно изменила стратегию поиска эффективных решений при внешнем мониторинге полосы. Неожиданно оказалось, что решение проблемы во многом связаны с изученными нами ранее моделями покрытия плоскости.

6.3.1 Предварительные результаты

Рассмотрим прямолинейную полосу SP шириной h , покрытую кругами:

$$SP \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i,$$

где I – счетное множество чисел, S_i – круги покрытия, R_i – радиусы соответствующих кругов.

Далее будут рассматриваться только регулярные круговые покрытия, определенные следующим образом. Пусть F_j – одинаковые фрагменты (плитки), составляющие полосу:

$$SP = \bigcup_{j \in J} F_j, \quad \mu(F_{j_1} \cap F_{j_2}) = 0 \quad \forall j_1, j_2 \in J,$$

где μ – мера площади. Другими словами, соседние плитки могут иметь только общие граничные участки. Выделенный фрагмент F покрывается конечным набором кругов, а все другие фрагменты покрываются точно таким же набором кругов, что формально определяется изометрическими преобразованиями плоскости T_j :

$$F \subseteq \bigcup_{m=1}^k S_m, \quad F_j = T_j(F), \quad F_j \subseteq T_j \left(\bigcup_{m=1}^k S_m \right), \quad j \in J. \quad (6.3.1)$$

Для регулярного покрытия полосы корректно определяется его

плотность:
$$D = \frac{\mu \left(\bigcup_{m=1}^k S_m \right)}{\mu(F)}.$$

Полоса покрыта *внешним образом*, если центры кругов покрытия лежат вне полосы или на ее границе. При исследовании конкретных моделей дополнительно оговариваются ограничения на количество разных размеров кругов и особенности расположения центров этих кругов в данном типовом фрагменте. В общем виде формулируется следующая

Проблема. Для данной прямолинейной полосы SP шириной h и некоторого подходящего типового фрагмента F , удовлетворяющего условию (6.3.1), найти регулярное круговое покрытие полосы наименьшей плотности D при некоторых известных ограничениях на систему кругов покрытия.

При решении задачи о покрытии полосы внешним образом верны следующие очевидные утверждения.

Лемма 6.1. Для поиска покрытия полосы минимальной плотности необходимо центры кругов располагать на границе полосы (условие L1). В противном случае плотность покрытия всегда можно уменьшить.

Лемма 6.2. Каждое регулярное покрытие полосы внешним образом с условием L1 определяет регулярное покрытие всей плоскости, получающегося многократным отражением исходного покрытия полосы относительно ее границ. При этом плотность покрытия полосы в два раза больше соответствующей плотности покрытия плоскости.

Поясним последнее утверждение с помощью рис 6.8. Каждый круг «участвует» в покрытии полосы только своей половинкой. Соответствующее покрытие плоскости использует полные круги.

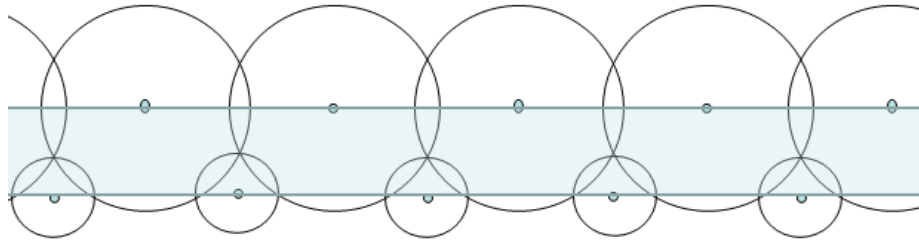


Рис 6.8. Пример регулярного покрытия полосы внешним образом

Из Леммы 6.2 следует, что все эффективные покрытия полосы внешним образом для каждого отдельного класса могут быть найдены из соответствующего оптимального покрытия плоскости. При этом можно использовать известные показатели плотности и важные параметры покрытия. С другой стороны, не каждое оптимальное покрытие плоскости определенного вида порождает некоторое «хорошее» покрытие полосы. Покрытие плоскости со сложным расположением кругов различных радиусов не позволяет «вырезать» полосу так, чтобы все покрывающие ее круги участвовали в покрытии своими половинками.

Для исследований удобно вернуться к ранее введенной классификации для классов моделей и соответствующим обозначениям:

$\text{Cov}_F(\mathbf{n}: k_1/p_1, k_2/p_2, \dots, k_n/p_n)$, где n – число различных размеров кругов, применяемых в покрытии; k_i – число кругов вида i , участвующих в покрытии типового фрагмента F , p_i – доли кругов вида i , покрывающих фрагмент F .

6.3.2 Внешнее покрытие полосы кругами одного радиуса

Рассмотрим оптимальное покрытие плоскости кругами одного радиуса, имеющую правильную решетку расположения кругов. Легко заметить, что оно порождает два оптимальных покрытия полосы SA-1(1) и SA-1(2) с одинаковыми плотностями, но разными структурами (рис 6.9).

Приведем основные характеристики моделей.

Модель SA-1(1): $D_{SA-1(1)} = 2D_{A-1} = 4\pi/\sqrt{27} \approx 2.4184$, $R = 2h/3 \approx 0.6667h$.

Модель SA-1(2): $D_{SA-1(2)} = 2D_{A-1} = 4\pi/\sqrt{27} \approx 2.4184$, $R = 2h$.

Заметим, что эти результаты можно было бы получить с помощью рассмотрения элементарных фрагментов покрытия, которые при разной укладке в полосу определяют два указанных варианта покрытия. Далее мы продемонстрируем этот метод для более сложных моделей.

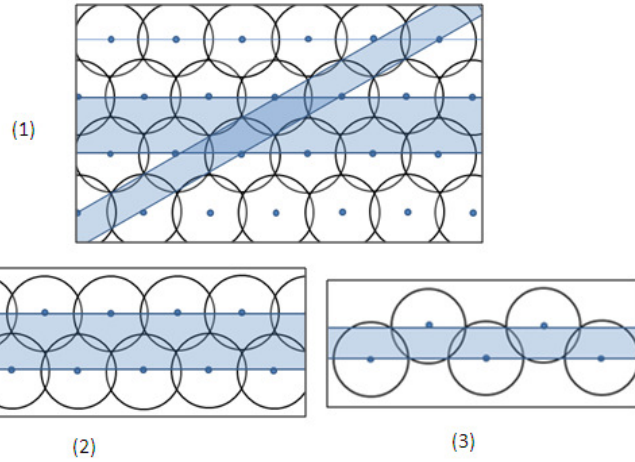


Рис 6.9. (1) Модель A-1 покрытия плоскости кругами одного радиуса и соответствующие модели покрытия полосы: (2) Модель SA-1(1), (3) Модель SA-1(2)

6.3.4 Внешнее покрытие полосы кругами двух радиусов

При покрытии плоскости кругами двух радиусов имеется две конструктивные модели: *Модель A-2* и *Модель B-2* (рис 6.10). Напомним основные характеристики этих покрытий.

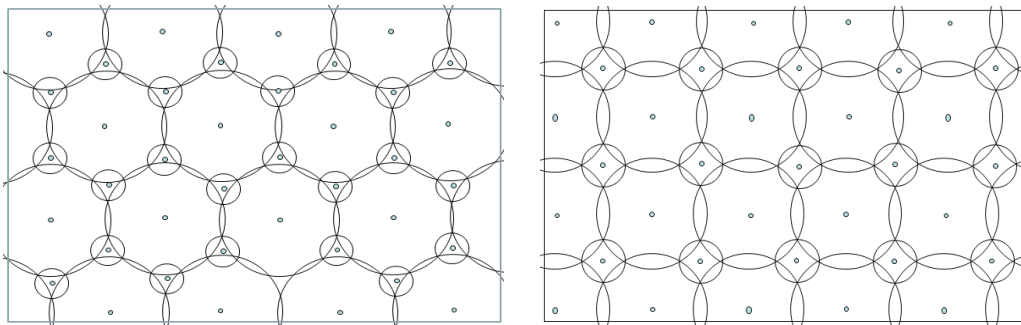


Рис 6.10. Модели A-2 и B-2 покрытия плоскости

$$\text{Модель A-2: } D_{A-2} = \frac{11\pi}{18\sqrt{3}} \approx 1,1084, \quad r = \frac{R}{\sqrt{31}} \approx 0,1796R.$$

$$\text{Модель B-2: } D_{B-2} = \frac{3\pi}{8} \approx 1,1781, \quad r = \frac{R}{\sqrt{5}} \approx 0,4472R..$$

Модель A-2 порождает единственную эффективную *Модель SA-2* покрытия полосы внешним образом (рис 6.11), а *Модель B-2* определяет две

Модели $SB-2(1)$ и $SB-2(2)$ для покрытия полос разным способом, но с одинаковой плотностью (рис 6.12).

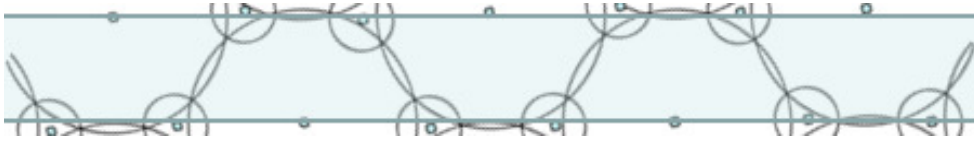


Рис 6.11. Модель $SA-2$ покрытия полосы внешним образом

$$\text{Модель } SA-2: D_{SA-2} = \frac{11\pi}{9\sqrt{3}} \approx 2,2168, R = \frac{h\sqrt{31}}{3\sqrt{3}} \approx 1.0715h, r = \frac{h}{3\sqrt{3}} \approx 0,19245h.$$

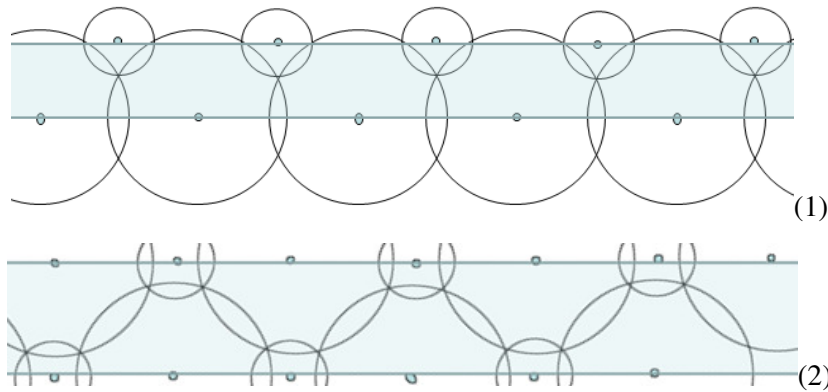


Рис 6.12. Модели $SB-2(1)$ и $SB-2(2)$ покрытия полосы внешним образом

$$\text{Модель } SB-2(1): D_{SB-2(1)} = \frac{3\pi}{4} \approx 2,3562, R = \frac{h\sqrt{5}}{2} \approx 1.1180h, r = \frac{h}{2}.$$

$$\text{Модель } SB-2(2): D_{SB-2(2)} = \frac{3\pi}{4} \approx 2,3562, R = \frac{h\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \approx 0.7906h, r = \frac{h}{2\sqrt{2}} \approx 0.3536h.$$

Проведем расчеты для *Моделей* $A-2$ и $SA-2$ через минимальный фрагмент (рис 6.13).

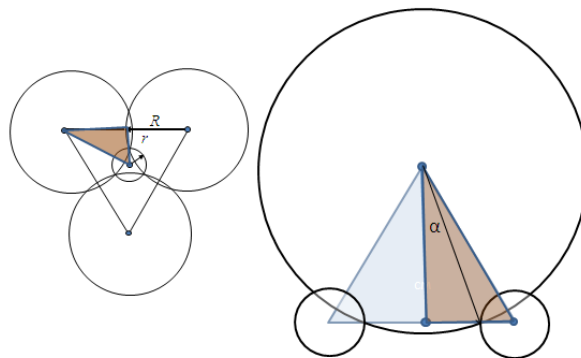


Рис 6.13. Фрагменты Моделей $A-3$ и $SA-3$ из класса $Cov_F(2; 1_{12}, 1_6)$

Минимальный фрагмент F является прямоугольным треугольником с острыми углами 30 и 60 градусов. Если гипотенуза равна a и угол α определяет взаимное положение кругов покрытия, то

$$\mu(F) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}, \quad \mu(S) = \frac{\pi \cdot R^2}{12} + \frac{\pi \cdot r^2}{6},$$

где $R = \frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$, $r = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha)$. После необходимых расчетов получаем соотношение для плотности покрытия:

$$D(\alpha)_{A-2} = \frac{\mu(S)}{\mu(F)} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} (5 + 9 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha - 4\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha) = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \left(\left(3 \cdot \operatorname{tg}\alpha - \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{11}{3} \right).$$

Следовательно,

$$\min D_{A-2} = \frac{11\pi}{18\sqrt{3}} \approx 1.108433, \quad \min D_{SA-2} = \frac{11\pi}{9\sqrt{3}} \approx 2.216866, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Замечание 6.5. Обозначение покрытия $\operatorname{Cov}_F(2: 1_{12}, 1_6)$ позволяет определить среднее соотношение между количествами кругов разных размеров: $k_1 : k_2 = \frac{1}{12} : \frac{1}{6} = 1 : 2$. Таким образом, на один большой круг приходится два маленьких круга. Для других классов покрытий это процедура тоже корректна.

6.3.5 Покрытие полосы кругами трех радиусов

Рассмотрим специальное покрытие плоскости кругами трех радиусов. На рис 6.14 изображены элемент этого покрытия и его минимальный фрагмент: модель класса $\operatorname{Cov}_F(3:1_4, 1_2, 1_2)$. Легко видеть, что такое покрытие плоскости определяет Модель SA-3 покрытия полосы внешним образом с использованием кругов трех разных радиусов. Особенность модели состоит еще и в том, что размер фрагмента (соотношение между катетами прямоугольного треугольника) так же является параметром оптимизации. Заметим, что круги большого размера имеют одинаковый радиус, но при оптимальных параметрах покрытия шестиугольник, изображенный на рис 6.14, немного растянется вдоль горизонтали. С учетом обозначений фрагмента это значит, что выполняется соотношения для углов: $\alpha > 30^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Проведем расчеты с соответствующими пояснениями. Для удобства считаем сторону BC равной a (для полосы это будет ширина h). Тогда

$AC = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, $AB = a / \sin \alpha = 2R \cos \varphi$. Из последнего соотношения получаем выражение для большого радиуса: $R = \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \varphi}$.

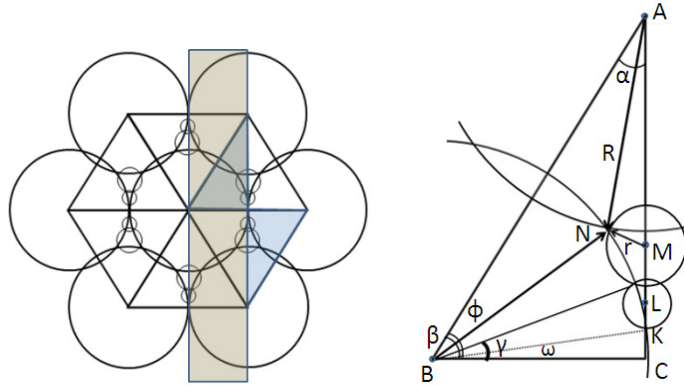


Рис 6.14. Элемент покрытия полосы кругами трех радиусов и структура его минимального фрагмента $\text{Cov}_F(3: 1_4, 1_2, 1_2)$

Из треугольника ВСК получаем, что $\cos \omega = a / R$. Следовательно,

$$\omega = \arccos \frac{a}{R} = \arccos(2 \sin \alpha \cos \varphi).$$

Если L является центром маленького круга, то $\angle CBL = \omega + (\gamma - \omega) / 2 = (\omega + \gamma) / 2$. Далее определяем малый радиус:

$$\rho = a \cdot \operatorname{tg} \angle CBL - a \cdot \operatorname{tg} \omega = a \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\omega + \gamma}{2} \right) - \operatorname{tg} \omega \right).$$

Найдем выражение для среднего радиуса r, как расстояние между точками M и N. Легко видеть, что

$$x_M = a, \quad y_M = a \cdot \operatorname{tg} \angle CBM = a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\beta - \varphi}{2} + \gamma \right) = a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha - \varphi}{2} + \gamma \right),$$

$$x_N = R \cos(\beta - \varphi) = R \cos(90^\circ - \alpha - \varphi) = \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \varphi} \sin(\alpha + \varphi) = \frac{a}{2} (1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi),$$

$$y_N = R \cdot \operatorname{tg}(\beta - \varphi) = R \cdot \operatorname{ctg}(\alpha + \varphi) = \frac{a}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha \cos \varphi},$$

$$r^2 = a^2 \left(\left(1 - \frac{1 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{2} \right)^2 + \left(\operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha - \varphi}{2} + \gamma \right) - \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{2 \sin \alpha \cos \varphi} \right)^2 \right).$$

С учетом того, что $\mu(S) = \frac{\pi R^2}{4} + \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi \rho^2}{2}$, $\mu(F) = \frac{a^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha$, получаем

выражение для плотности покрытия: $D(\alpha, \varphi, \gamma) = D_1 + D_2 + D_3$, где

$$D_1 = \frac{\pi \cdot \operatorname{tg} \alpha}{8(\sin \alpha \cos \varphi)^2}, D_2 = \pi \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \left(\left(\frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \varphi}{2} \right)^2 + \left(\operatorname{tg} \left(\frac{90^\circ - \alpha - \varphi}{2} + \gamma \right) - \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{2 \sin \alpha \cos \varphi} \right)^2 \right),$$

$$D_3 = \pi \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\omega + \gamma}{2} \right) - \operatorname{tg} \omega \right)^2, \quad \omega = \arccos(2 \sin \alpha \cdot \cos \varphi).$$

После определения экстремума для функции плотности покрытия, получаем следующие оптимальные параметры:

$$\begin{aligned} \min D_{A-3} &\approx 1.0928276, \quad \min D_{SA-4} \approx 2.185655 \quad \text{їдї} \quad \alpha \approx 29.79^\circ, \quad \beta \approx 60.21^\circ, \\ R &\approx 1.0644a, \quad r \approx 0.2003a, \quad \rho \approx 0,0305a. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще одно покрытие плоскости кругами трех радиусов: Модель В-3 класса $\operatorname{Cov}_F(3:1_4, 1_4, 1_2)$. На рис 6.15 изображены элемент этого покрытия и его минимальный фрагмент, который является прямоугольником близким по форме к квадрату. Структурные свойства этого покрытия также позволяют определить Модель SB-3 покрытия полосы внешним образом с использованием кругов трех разных радиусов.

Проведем расчеты, используя обозначения рис 9. Из прямоугольного треугольника с углом α получаем $R = h / \cos \alpha$. Аналогично, из прямоугольного треугольника с углом β получаем выражение для стороны прямоугольника: $AD = R \cdot \cos \beta = h \cdot \cos \beta / \cos \alpha$. Следовательно, можно определить площадь фрагмента: $\mu(F) = h^2 \cos \beta / \cos \alpha$.

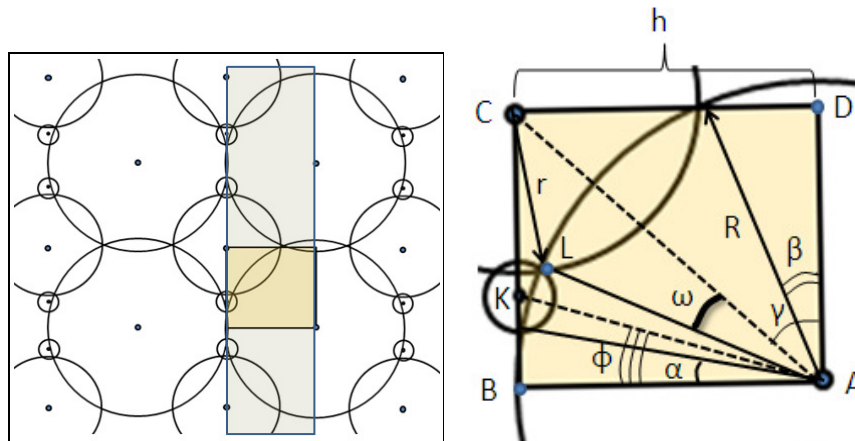


Рис 6.15. Элемент покрытия плоскости кругами трех радиусов и структура его минимального фрагмента $\operatorname{Cov}_F(3: 1_4, 1_4, 1_2)$

Далее, проведем вычисления для двух других радиусов:

$$r = h - R \cdot \sin \beta = h(1 - \sin \beta / \cos \alpha), \quad \rho = h \cdot \operatorname{tg} \varphi - h \cdot \operatorname{tg} \alpha = h \cdot (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha).$$

Можно показать, что $\varphi = 45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} - \gamma = 45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta}\right)$.

Для площади покрытия фрагмента получаем:

$$\mu(S) = \pi \left(\frac{R^2}{4} + \frac{r^2}{4} + \frac{\rho^2}{2} \right) = \frac{h^2 \pi}{4} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \left(1 - \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}\right)^2 + 2 \left(\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) \right) - \operatorname{tg} \alpha \right)^2 \right).$$

Это позволяет записать функцию плотности покрытия:

$$D(\alpha, \beta) = \frac{\mu(S)}{\mu(F)} = \frac{\pi \cdot \cos \alpha}{4 \cos \beta} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \left(1 - \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}\right)^2 + 2 \left(\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha + \beta}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) \right) - \operatorname{tg} \alpha \right)^2 \right).$$

После определения экстремума для функции плотности покрытия, получаем следующие оптимальные параметры:

$$\min D_{B-3} \approx 1.15453, \quad \min D_{SB-3} \approx 2.30906 \quad \text{їдї} \quad \alpha \approx 16.56^\circ, \quad \beta \approx 30.4221^\circ, \\ R \approx 1.043265h, \quad r \approx 0.471695h, \quad \rho \approx 0,075886h..$$

Замечание 2. При сравнении построенных моделей покрытий полосы внешним образом можно заметить, что при добавлении нового размера круга, мы используем обобщение предыдущих моделей. По этой причине можно утверждать, что нами рассмотрены все рациональные покрытия кругами одного, двух и трех радиусов. При построении моделей с большим числом различных кругов возрастает сложность (рис 6.16), но незначительно улучшается плотность.

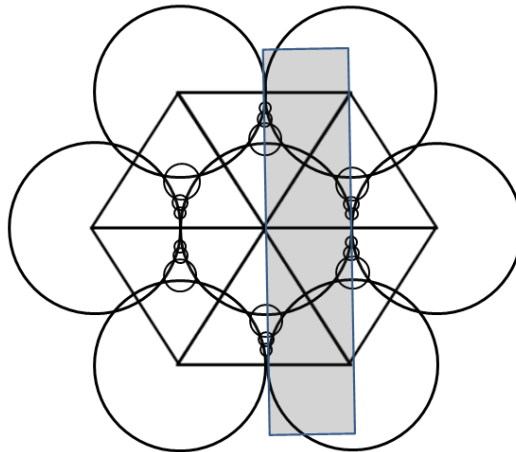


Рис 6.16. Элемент покрытия плоскости и полосы кругами четырех $\text{Cov}(4: 1_4, 1_2, 1_2, 1_2)$

6.3.6 Краткий анализ моделей внешнего мониторинга

В работе рассмотрены восемь моделей покрытия полосы внешним образом, имеющих наилучшие показатели для своего класса. Задача внешнего покрытия областей очень тесно связана с покрытиями плоскостей. В каком-то смысле, она более цельная и поиск эффективных вариантов покрытий ведется на более «компактном» логическом пространстве. Можно заведомо точно указать все возможные варианты определенного класса покрытий для указанных типов фрагментов и выбрать среди них лучшие. Следующим шагом для задач внешнего мониторинга может быть рассмотрение ограниченных полос (прямоугольников), кругов или произвольных выпуклых областей. Строгое решение таких проблем достаточно трудоемкое и сводится к задачам дискретной геометрии. Интересно, что чем «круглее» область, тем труднее добиться малой плотности покрытия. Нами доказано, что при внешнем покрытии круга кругами произвольного размера минимальная плотность равна 3. Например, для квадрата этот показатель меньше, так как в этом случае «дотянуться» до центральной части области немного легче. Для произвольных выпуклых областей можно успешно применять рассмотренные нами конструкции внешнего мониторинга полосы, делая приближенные оценки.

Далее мы приведем сводную таблицу результатов, которая позволяет более наглядно сравнить характеристики моделей круговых покрытий полосы внешним образом.

№	Модель покрытия полосы	Класс покрытия	Минимальная плотность покрытия	Радиусы кругов	Соотношение количеств кругов ($k_1:k_2$) или ($k_1:k_2:k_3$)
1	SA-1(1)	$Cov(1:1_{12})$	$D \approx 2.4184$	$R = 2h/3$	-
2	SA-1(2)	$Cov(1:1_{12})$	$D \approx 2.4184$	$R = 2h$	-
3	SB-2(1)	$Cov(2: 1_4, 1_4)$	$D \approx 2.3562$	$R \approx 1.12h, r = 0.5h$	1:1
4	SB-2(2)	$Cov(2: 1_4, 1_4)$	$D \approx 2.3562$	$R \approx 0.79h, r \approx 0.35h$	1:1

5	SA-2	$Cov(2: I_{12}, I_6)$	$D \approx 2.2169$	$R \approx 1.08h, r \approx 0.19h$	1:2
6	SA-3	$Cov(3: I_4, I_2, I_2)$	$D \approx 2.18366$	$R \approx 1.06h, r \approx 0.20h,$ $p \approx 0.03h$	1:2:2
7	SB-3	$Cov(3: I_4, I_4, I_2)$	$D \approx 2.30906$	$R \approx 1.04h, r \approx 0.47h,$ $p \approx 0.076h$	1:1:2

6.4 Общий анализ результатов по сенсорным покрытиям

Проблема покрытия сенсорами плоской области сводится к минимизации плотности покрытия плоскости кругами различных радиусов. В данной работе предложены несколько новых классов регулярных покрытий, использующих круги двух и трех радиусов, которые оказались рекордными или даже оптимальными в соответствующих классах покрытий. Эти модели с небольшой модификацией использовались также для покрытия полосы. Были получены новые результаты, которые естественным образом можно обобщить для покрытия других плоских фигур. Постановка задач по внешнему мониторингу областей ранее не рассматривалась. Нам удалось получить достаточно полное исследование этой проблемы для полосы. Кроме того, нами введена классификация регулярных покрытий и система обозначений, которая систематизировала известные классы моделей и способствовала нахождению новых эффективных моделей.

Предполагается, что сенсорная сеть состоит из большого числа сенсоров, каждый из которых имеет ограниченный запас энергии. Энергия тратится, когда сенсор находится в активном состоянии, а в состоянии сна потери энергии сенсора пренебрежительно малы. Каждый сенсор, находясь в активном состоянии, способен осуществлять наблюдение, обработку полученной информации и передачу данных по сети, порожденной активными сенсорами. Основная цель сенсорной сети - это мониторинг, который осуществляется подмножеством связанных активных сенсоров. Время жизни сенсорной сети - это отрезок времени, в течение которого осуществляется

мониторинг области и/или объектов подмножествами активных сенсоров. Основная цель - максимизация времени жизни сенсорной сети. В связи с этим возникает множество задач, одна из которых заключается в построении связанных покрытий с теми или иными свойствами.

Задача о минимальном покрытии является классическим представителем NP-трудных проблем, и для ее решения не существует хороших полиномиальных приближенных алгоритмов (относительная погрешность порядка логарифма от числа элементов множества является не улучшаемой). Если в сенсорной сети задан центральный пункт сбора информации (базовая станция), то число ребер в любом пути в центр (радиус сети), как правило, ограничено некоторым наперед заданным числом. На практике, это число часто не превышает двух. Тогда сенсорную сеть можно представить в виде иерархической сети, на нижнем (нулевом) уровне которой находятся объекты наблюдения, на первом и втором - сенсоры, а на третьем - центр. Для такой сети можно рассматривать различные допустимые покрытия без учета ресурсов сенсоров.

Область мониторинга каждого сенсора - это круг определенного радиуса с центром в месте расположения сенсора. Говорится, что сенсор покрывает этот круг. Весьма остро стоит вопрос об экономии энергии сенсоров, и поэтому её траты тесно связаны с геометрическими параметрами сети. Эффективность покрытия плоской области характеризуется суммарным перекрытием кругов мониторинга сенсоров. Подавляющее большинство известных моделей размещения сенсоров исходит из предположения, что радиусы мониторинга R всех сенсоров одинаковы. В этом случае минимум энергоёмкости мониторинга достигается, когда каждая тройка соседних сенсоров является вершинами равностороннего треугольника со стороной $R\sqrt{3}$. Появление сенсоров с регулируемым радиусом мониторинга дает

дополнительные возможности для повышения эффективности функционирования сенсорных сетей.

Рассмотрим особенности правильных регулярных покрытий $COV_k(p,q)$, когда вся область разбивается на правильные k -угольники (плитки), образуя бесконечную регулярную решетку. При этом все k -угольники покрываются одинаково p кругами q различных радиусов, поэтому достаточно оценить плотность покрытия одной плитки.

Существуют три типа - T , Q и H - решеток, которые замощают плоскость правильными многоугольниками, соответственно треугольная ($k=3$), квадратная ($k=4$) и гексагональная ($k=6$). Поскольку третий тип сводится к первому, далее рассматриваются решетки двух типов - T и Q .

Рассматриваемая задача $P_k(p,q)$ состоит в поиске регулярного покрытия $COV_k(p,q)$ минимальной плотности.

При этом для T -решеток и Q -решеток задачу $P_k(p,q)$ обозначим соответственно через $T(p,q)$ и $Q(p,q)$. Покрытия для задач $T(3,1)$ и $Q(4,1)$ обозначим через $T1$ и $Q1$, и отнесем к первому уровню. Покрытия для задач $T(4,2)$ и $Q(5,2)$ - ко второму уровню и обозначим их $T2$ и $Q2$, если круги с центрами в смежных вершинах плитки ("главные круги") касаются, и к третьему уровню (обозначим - $T3$ и $Q3$), если главные круги с центрами в смежных вершинах многоугольника пересекаются.

Известно наименее плотное покрытие $T1$ плоскости одинаковыми кругами¹³, которое в наших обозначениях является оптимальным решением задачи $T(3,1)$, а также асимптотически оптимальное решение задачи $T(p,2)$ и нижняя оценка плотности покрытия в задаче $T(p,p)$ [56]. В общем же случае (при произвольных значениях параметров p и q) оптимальные решения для задачи $P_k(p,q)$ не известны.

¹³ R. Kershner. The Number of Circles Covering a Set. // American Journal of Mathematics, 1939, v. 61, No. 3, p. 665-671.

Покрытия T_1 , T_2 , Q_1 и Q_2 рассматривались в литературе ранее. Покрытия T_3 и Q_3 предложены нами впервые, и они дают существенное уменьшение плотности покрытия по сравнению с ранее известными регулярными покрытиями.

В статье [117] рассмотрены три регулярных покрытия, но оценка эффективности этих покрытий осуществлена некорректно. В частности, авторы утверждают, что предложенное ими регулярное покрытие, в котором используются круги трех радиусов, является наилучшим из известных ранее. В нашей работе¹⁴ проведен корректный анализ, который показал, что это не так, плотность предложенного покрытия выше, чем у покрытия плоскости одинаковыми кругами.

По нашему мнению проблема покрытия полосы кругами интересна с практической точки зрения. Нам удалось сформулировать корректную постановку задачи и показать, что соответствует задаче «гарантированного» покрытия протяженной линии. Задача покрытия полосы возникает при эффективном мониторинге периметров зданий, границ, дорог, трубопроводов и т.п. Однако математические результаты по этой тематике ранее практически отсутствовали. Представленные нами модели относятся к конкретным типам покрытий, но дают, тем не менее, представление об общей ситуации. Существенно, что вариативность радиусов покрытия оказалась актуальной и перспективной в сенсорных сетях.

Задача покрытия плоскости кругами разных радиусов исследована не достаточно полно. Достоинством покрытия является не только его малая плотность, но и его конструктивность: простое построение решетки покрытия и не очень большое различие между размерами различных кругов. В работе¹⁵ определена нижняя граница плотности покрытия $d \approx 1.018955$ кругами двух

¹⁴ Асстраков С.Н.

¹⁵ Toth F.G. Covering the Plane with Two Kinds of Circles. // Discrete & Computational Geometry, 1995, v. 13, No. 3, p. 445-457.

видов без ограничения на соотношение между размерами кругов. Однако предложенный там способ покрытия предполагает использование большого числа кругов малого радиуса (непокрытое пространство между тремя соседними кругами большего радиуса покрывается большим количеством одинаковых кругов меньшего радиуса, и нижняя оценка плотности достигается в пределе, когда маленький радиус стремится к нулю). Даже с учетом вышесказанного, указанная приближенная оценка очень важна в качестве сравнительного ориентира с результатами других моделей. Заметим, что нам удалось получить точное аналитическое значение этого показателя:

$$d = \frac{2\pi}{\sqrt{27}} \left(1 - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{27}}{12} \right) \right) \approx 1.018955892.$$

Доказательство этого факта рассмотрено в Приложении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены следующие основные результаты.

1. Разработаны принципы моделирования распределенных ресурсных систем на графах и создан математический аппарат для описания таких систем. Модели позволяют исследовать прикладные задачи конфликтного характера, реализуя интересы и стратегии любого количества независимых участников (элементов) системы.
2. Доказан ряд теорем об условиях существования и единственности равновесных состояний; определен аналитический вид предельных и равновесных состояний для различных классов *динамических ресурсных систем*.
3. Разработаны итерационные вычислительных алгоритмы поиска равновесных состояний в распределенных ресурсных системах, позволяющих делать расчеты и проводить численные эксперименты при различных условиях *развития* системы.
4. Приведены содержательные примеры из разных областей деятельности, отражающие возможности предлагаемой равновесной методики для принятия рациональных решений (конкурентные взаимодействия, обслуживание коммуникационных сетей, модели системы страхования).
5. Определены оптимальные модели мониторинга плоских областей сенсорными сетями, допускающие сенсоры двух и трех радиусов действия. Получены обобщенные модели треугольной (серия А) и квадратной (серия В) структур.
6. Разработан приближенный способ расчета оптимального количества сенсорных датчиков для мониторинга ограниченных областей на основе Моделей А-2 и В-2 с учетом стоимостных характеристик (цена устройств, затраты на монтаж и эксплуатацию).
7. Для различных классов покрытий протяженных объектов найдены эффективные модели внутреннего и внешнего мониторинга.

8. Разработана универсальная классификация регулярных покрытий, позволяющая группировать модели по уровню сложности.
9. Определен аналитический вид точной нижней оценки плотности d_2 покрытия кругами двух различных видов, уточняющий известный результат Тота (G.F. Toth, 1995).
10. Создан Комплекс программ для определения равновесных состояния в распределенных ресурсных системах (Свидетельство о государственной регистрации в Федеральной службе по интеллектуальной собственности №2013611966 от 11.02.2013).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акофф Р. Планирование будущего корпорации [Текст] / Р. Акофф. - М.: Наука, 1985.
2. Арутюнов А.В. Задача оптимального распределения ресурсов по множеству независимых операций [Текст] / А.В. Арутюнов, В.Н. Бурков, А.Ю. Заложнев, Д.Ю. Карамзин // Автоматика и телемеханика, 2002, №5. – с. 108-119.
3. Астафьев Н.Н. Оптимизационный и маргинальный анализ балансовой модели Леонтьева [Текст] / Н.Н. Астафьев // Оптимизация, управление, интеллект, 2005, №1(9). - с. 28-35.
4. Астраков, С.Н. Одна модель взаимодействия элементов системы [Текст] / С.Н. Астраков, А.И. Ерзин // Материалы Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения», Омск, 2003. - с. 74.
5. Астраков, С.Н. Одна модель саморегулирующейся системы [Текст] / С.Н. Астраков, А.И. Ерзин // Математические структуры и моделирование, 2004, №13. - с. 30-38.
6. Астраков С.Н. Моделирование устойчивых взаимоотношений на графах [Текст] / С.Н. Астраков, А.И. Ерзин // Материалы 13-й Байкальской школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, 2005, т. 1. - с. 413-420.
7. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов [Текст] / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. – М.: Мир, 1979.
8. Басакер Р. Конечные графы и сети [Текст] / Р. Басакер, Т. Саати. – М.: Наука, 1974.
9. Берж К. Теория графов и ее применение [Текст] / К. Берж. – М.: Мир, 1962.
10. Богданов А.А. Тектология [Текст] / А.А. Богданов, М.: Мир, 1989.
11. Вереникин А.О. Дискретная модель монополистической конкуренции [Текст] / А.О. Вереникин // Информационная экономика и управление динамикой сложных систем, под ред. Е.Ю. Иванова, Р.М. Нижегородова. – М.: Бизнес-Юнитек, 2004. – с. 40-53.
12. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков [Текст] / Н.Н. Воробьев. – М.: Наука, 1985.
13. Воронин А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость [Текст] / А.А. Воронин. – М.: Наука, 1979. – 315 с.
14. Воронин А.А. Модель оптимального управления структурными изменениями организационной системы [Текст] / А.А. Воронин, С.П. Мишин // Автоматика и телемеханика, 2002, №8. – с. 136-150.

15. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. - М.: Наука, 1966.
16. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами [Текст] / Ю.Б. Гермейер. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
17. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры [Текст] / С.К. Годунов. - Новосибирск: Научная книга, 1997.
18. Губко М.В. Теория игр в управлении организационными системами [Текст] / М.В. Губко, Д.А. Новиков. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.
19. Данилов В.И. Конкурентные равновесия в коалиционных играх [Текст] / В.И. Данилов, А.И. Сотсков // Категория общественной полезности: вопросы методологии и структуризации. – М.: ИЭМИ АН СССР, 1983. – с. 147-167.
20. Дмитриев В.К. Экономические очерки [Текст] / В.К. Дмитриев. - М.: ГУ ВШЭ, 2001.
21. Дюсуше О.М. Статичное равновесие Курно-Нэша и рефлексивные игры олигополии: случай линейных функций спроса и издержек [Текст] / О.М. Дюсуше // Экономический журнал Высшей школы экономики, 2006, т. 10, № 1. - с. 3-32.
22. Ерешко Ф.И. Моделирование рефлексивных стратегий в управляемых системах [Текст] / Ф.И. Ерешко. – М.: ВЦ РАН, 2001. – 37 с.
23. Ерзин А.И. Одна задача функционирования распределенной сети [Текст] / А.И. Ерзин, С.Н. Астраков, И.И. Тахонов, О.А. Гадяцкая // Материалы межд.семинара «Вычислительные методы и решение оптимизационных задач», Бишкек, Кырг. респ. 2004.- с. 77-82.
24. Ерзин А.И., Равновесное распределение ресурсов сетевой модели [Текст] / А.И. Ерзин, И.И. Тахонов // Сибирский журнал индустриальной математики, 2005. т. 8, №3(23). - с. 58-68.
25. Ерзин А.И. Задача поиска сбалансированного потока [Текст] / А.И. Ерзин, И.И. Тахонов // Сибирский журнал индустриальной математики, 2006, т. 9, №4(28). - с. 50-63.
26. Иванилов В.Ю. Имитация конфликтов [Текст] / В.Ю. Иванилов, В.Ф. Огарышев, Ю.Н. Павловский. - ВЦ РАН, 1993.
27. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ [Текст] / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. - Центр непрерывного математического образования, 2000.
28. Котов В.Е. Сети Петри [Текст] / В.Е. Котов. - М.: Наука, 1984.
29. Кристофидис Н. Теория графов [Текст] / Н. Кристофидис. – М.: Мир, 1978.

30. Культигин В. Теория рационального выбора – возникновение и современное состояние [Текст] / В. Культигин // Социологические исследования, 2004, №1. – с. 27-37.
31. Кукушкин Н.С. Теория неантагонистических игр [Текст] / Н.С. Кукушкин, В.В. Морозов. – М.: МГУ, 1984. – 104 с.
32. Куратовский К. Теория множеств [Текст] / К. Куратовский, А. Мостовский. – М.: Мир, 1970.
33. Лефевр В.А. Конфликтующие структуры [Текст] / В.А. Лефевр. – М.: Советское радио, 1973. – 158 с.
34. Леонтьев В.В. Межотраслевая экономика [Текст] / В.В. Леонтьев. - М.: Экономика, 1997.
35. Макеев С.П. О реализуемости взвешенных графов с заданными весами вершин [Текст] / С.П. Макеев // Управляемые системы, ИМ СО РАН, 1993, №13. - с. 40-52.
36. Минский М. Вычисления и автоматы [Текст] / М. Минский. - М.: Мир, 1971.
37. Миронов А.А. О свойствах наборов степеней вершин обобщенных графов [Текст] / А.А. Миронов // Доклады АН, 1992, т. 324, № 5. - с. 959-963.
38. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики [Текст] / Э. Мулен. - М.: Мир, 1985.
39. Нейлор Т. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем [Текст] / Т. Нейлор. – М.: Мир, 1975. – 502 с.
40. Нейман Дж. Теория игр и экономическое поведение [Текст] / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука. 1970. – 708 с.
41. Нейман Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов [Текст] / Дж фон Нейман. - М.: Мир, 1971.
42. Новиков Д.А. Курс теории активных систем [Текст] / Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили. – М.: Синтег, 1999.
43. Новиков Д.А. Рефлексивные игры [Текст] / Д.А. Новиков, А.Г. Чхартишвили. – М.: Синтег, 2003.
44. Нэш Д. Бескоалиционные игры [Текст] / Д. Нэш // Матричные игры, под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Физматгиз, 1961.
45. Олсон М. Логика коллективных действий. Общественные блага и теория групп [Текст] / М. Олсон. – М.: ФЭИ, 1995.
46. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения [Текст] / В.И. Опойцев. – М.: Наука, 1977.

47. Павловский Ю.Н. Имитационные модели и системы [Текст] / Ю.Н. Павловский. - М.: ФАЗИС, ВЦ РАН, 2000.
48. Печерский С.Л. Проблема оптимального распределения в социально-экономических задачах и кооперативные игры [Текст] / С.Л. Печерский, А.И. Соболев. – Л.: Наука, 1983.
49. Полтерович В.М. Кризис экономической теории [Текст] / В.М. Потерович // Труды семинара «Неизвестная экономика», Отделение экономики РАН. – М.: ИЭМИ РАН, 1997.
50. Попов В.П. Основы теории цепей [Текст] / В.П. Попов. - М.: Высшая школа, 1985.
51. Ролз Дж. Теория справедливости [Текст] / Дж. Ролз. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1995.
52. Свами М. Графы, сети, алгоритмы [Текст] / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984.
53. Смольяков Э.Р. Равновесные модели при несовпадающих интересах участников [Текст] / Э.Р. Смольяков. - М.: Наука, 1986.
54. Тахонов И.И. Устойчивость предельных состояний двух распределенных систем [Текст] / И.И. Тахонов // Материалы XLV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (секция Математика), Новосибирск, НГУ, 2007. - с. 170-171.
55. Тахонов И.И. Распределение ресурсов в сетевой модели с переменными потенциалами [Текст] / И.И. Тахонов // Материалы 14-й Байкальской школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, 2008, т. 5. - с. 608-617.
56. Тот Л.Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве [Текст] / Л.Ф. Тот. - М.: Изд. Физ.-мат. Литературы, 1958. - 365 с.
57. Тоффоли Т. Машины клеточных автоматов [Текст] / Т.Тоффоли, Н.М. Марголус. – М.: Мир, 1991.
58. Форд Л.Р. Потоки в сетях [Текст] / Л.Р. Форд, Д.Р. Фалкерсон. – М.: Мир, 1966.
59. Хаками С.Л. О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа [Текст] / С.Л. Хаками // Кибернетика. Сб. Новая серия, М.: Мир, 1966, №2. - с. 40-53.
60. Хорн Р. Матричный анализ [Текст] / Р. Хорн, Ч.М. Джонсон. - М.: Мир, 1989.
61. Цвиркун А.Д. Основы синтеза структуры сложных систем [Текст] / А.Д. Цвиркун. – М.: Наука, 1982.
62. Эрроу К. Информация и экономическое поведение [Текст] / К. Эрроу // Вопросы экономики, 1995, №5. – с. 98-107.

63. Adamidou E. A. A game theoretic/network equilibrium solution approach for the railroad freight car management problem [Текст] / E.A. Adamidou, A.L. Kornhauser, Y.A. Koskosidis // *Transportation Research, Part B: Methodological*, 1993, N.27(3). - pp. 237-252.
64. Ackoff R.L. Reflection on systems and their models [Текст] / R.L. Ackoff, S. Gharajedaghi // *Systems Research*, 1996, v. 13, N.1. – pp. 13-23.
65. Arrow K. *Social Choice and Individual Values* [Текст] / K. Arrow. – New York: Wiley, 1951.
66. Arrow K. Existence of Equilibrium for a Competitive Economy [Текст] / K. Arrow, G. Debreu // *Econometrica*, 1954, N.25. – pp. 265-290.
67. Aubin J.P. *Mathematical Methods of Game and Economic Theory* [Текст] / J.P. Aubin. – Amsterdam: North Holland, 1979.
68. Aumann R.J. and Maschler M. *Game Theoretic Analysis of bankruptcy Problem from the Talmud* [Текст] / R.J. Aumann, M. Maschler // *Journal of Economic Theory*, 1985, N.36. - pp. 195-213.
69. Lansberg T. Stability and Nash Solution [Текст] / T. Lansberg // *J. Econ. Theory*, 1988, N.45, - pp. 330-341.
70. Aumann, R.J. Voting for Public Goods [Текст]. / R. Auman, M. Kurz, A. Neyman // *Review of Economic Studies*, 1983, N.50.- pp. 677-694.
71. Aumann, R.J. Economic Application of the Shapley Value [Текст] / R. Auman // *Game Theoretic Methods in General Equilibrium Analysis*, edited by J.-F. Mertens and S. Sorin, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994. - pp. 121-133.
72. Albin P.S. Theoretical reconciliation of equilibrium and structural approaches [Текст] / P.S. Albin, F.Z. Hormozi // *Mathematical Social Sciences*, 1983, v.6, N. 2. - pp. 261-284.
73. Burt R. S. *Structural Holes: The Social Structure of Competition* [Текст] / R.S. Burt. – Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1992.
74. Bertalanffy L. *Problems of Life*. – New York, 1960. – p. 148.
75. Binmore K. Modeling Rational Players, I [Текст] / K. Binmore // *Economics and Philosophy*, 1987, N.3. – pp. 179-214.
76. Binmore K. Modeling Rational Players, II [Текст] / K. Binmore // *Economics and Philosophy*, 1988, N.4. – pp. 9-55.
77. Cardei M. Improving Wireless Sensor Network Lifetime through Power Aware Organization [Текст] / M. Cardei, D.-Z. Du // *ACM Wireless Networks*, 2005, N.11(3). – pp. 333-340.

78. Cardei M. Improving Network Lifetime using Sensors with Adjustable Sensing Ranges [Текст] / M. Cardei, J. Wu, M. Lu // International Journal of Sensor Networks, 2006, N.1. – pp. 41-49.
79. Cardei M. Energy-efficient Coverage Problems in Wireless Ad-hoc Sensor Networks [Текст] / M. Cardei, J. Wu // Computer Communication, 2006, N.20. – pp. 413-420.
80. Carle J. Energy-Efficient Area Monitoring by Sensor Networks [Текст] / J. Carle, D. Simplot // IEEE Computer, 2004, N.37(2), – pp. 40-46.
81. Chun Y. The proportional solution for rights problems [Текст] / Y. Chun // Mathematical Social Sciences, 1988, N.15. – pp. 231-246.
82. Cobb J.A. A Stabilizing Solution to the Stable Path Problem [Текст] / J.A. Cobb, M.G. Gouda, R. Musunuri // Proc. of 6th International Symposium «Self-Stabilizing Systems», San Francisco, USA, 2003. - pp. 169-183.
83. Dolev S. Self-Stabilizing Group Communication in Directed Networks [Текст] / S. Dolev, E. Schiller // Proc. of 6th International Symposium «Self-Stabilizing Systems». San Francisco, USA, 2003. - pp. 61-76.
84. Erzin A.I., Equilibrium resource Distribution in a Network Model [Текст] / A.I. Erzin, I.I. Takhonov // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2007, v.1, N.3. - pp 293-302.
85. Fabrikant A. The Complexity of Pure Nash Equilibria [Текст] / A. Fabrikant, Ch. Papadimitriou, K. Talwar // Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing, 2004. - pp. 604-612.
86. Flood R.L. Dealing with Complexity. An Introduction to the Theory and Application of Systems Science [Текст] / R.L. Flood, E.R. Carson. – New York: Plenum, 1993.
87. Fudenberg D. Game Theory [Текст] / D. Fudenberg, J. Tirole. - Massachusetts: MIT Press, 1991.
88. Gibbons R. Game Theory for Applied Economists [Текст] / R. Gibbons. - Princeton: Princeton University Press, 1992.
89. Groeber P. How Groups Can Foster Consensus: The Case of Local Cultures [Текст] / P. Groeber, F. Schweitzer, K. Press // Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 2009, N.12(2). – pp. 74-79.
90. Hopfield J.J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities [Текст] / J.J. Hopfield // Proceedings of the National Academy of Sciences, 1982, v.79, N.8. - pp. 2554-2558.
91. Howard N. Theory of meta-games [Текст] / N. Howard // General systems, 1966, N.11. – pp. 187-200/

92. Jahan S. The determination of stability and similarity of Markovian land use change processes: a theoretical and empirical analysis [Текст] / S. Jahan // *Social-Economic Planning Sciences*, 1986, v.20, N.4. - pp. 243-251.
93. Kershner R. The Number of Circles Covering a Set [Текст] / R. Kershner // *American Journal of Mathematics*, 1939, v. 61, N. 3. - pp. 665-671.
94. Klein L.R. *Economic fluctuation in the United States, 1921-1941* [Текст] / L.R. Klein. - New York, 1950.
95. Lefevre V.A. Sketch of reflexive game theory [Текст] / V.A. Lefevre // *Proc. of Workshop on Multi-Reflexive Models of Agent Behavior*, Los Alamos, New Mexico, USA, 1998. – pp. 1-44.
96. Lensberg T. Stability and the Nash Solution [Текст] / T. Lensberg // *Journal of Economic Theory*, 1988, N.45. – pp. 330-341.
97. Lunberg E. On the concept of economic equilibrium [Текст] / E. Lunberg // *Structural Change and Economic Dynamics*, 1996, v.7, N.3. - pp. 361-390.
98. Maynard S.J. *Evolution and the Theory of Games* [Текст] / S.J. Maynard. – Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
99. Meyer F. The dynamics of long-term growth [Текст] / F. Meyer, J. Vallee // *Technological Forecasting and Social Change*, 1975, - v.7, N. 3. - pp. 285-300.
100. Miravete E.J. Choosing the Wrong Calling Plan: Ignorance and Learning [Текст] / E.J. Miravete // *American Economic Review*, 2003, v. 93, N.1. – pp. 297-310.
101. Moulin H. Equal or proportional division of surplus and other methods [Текст] / H. Moulin // *International Journal of Game Theory*, 1987, v. 16, N.3. – pp. 161-186.
102. Myerson R.B. *Game theory: analysis of conflict* [Текст] / R.B. Myerson. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.
103. Nash J.F. The bargaining problem [Текст] / J.F. Nash // *Econometrica*, 1950, N.28. – pp. 155-162.
104. Nishikawa T. Nonlinear phenomena in a self-organizing model [Текст] / T. Nishikawa, M. Imai, S. Shimuzu // *Computers and Mathematics with Applications*, 1997, v.33, N.3. - pp. 73-79.
105. Pawlak Z. *About conflicts* [Текст] / Z. Pawlak. - Warsaw: Prace IPI PAN, N.451, 1981.
106. Pottie G.J. Wireless Integrated Network Sensors [Текст] / G.J. Pottie, W.J. Kaiser // *Communications ACM*, 2000, N.43(5). – pp. 51-58.
107. Pujol J. How Can Social Networks Ever Become Complex? Modeling the Emergence of Complex Networks from Local Social Exchanges [Текст] / J.

- Pujol, A. Flache, J Delgado, R. Sanguesa // *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 2005, N.8(4). – pp. 12-19.
108. Roemer J. The Mismatch of Bargaining Theory and Distributive Justice [Текст] / J. Roemer // *Ethics*, 1986, v.97. – pp. 88-110.
109. Rawls J. A Theory of Justice [Текст] / J. Rawls. – Harvard: Harvard University Press, 1971.
110. Sasser W.E. Computer simulation of economic systems [Текст] / W.E. Sasser, T.H. Naylor // *Simulation*, 1967, N.8. – pp. 21-32.
111. Sen A. Collective Choice and Social Welfare [Текст] / A. Sen. – San Francisco: Holden Day, 1970.
112. Shapley L. A value for n-person game [Текст] / L. Shapley // *Contributions to the Theory of Games II*, edited by H.W. Kuhn, A.W. Tucker. – Princeton: Princeton University Press, 1953. – pp. 307-317.
113. Shapley L. On Market Games [Текст] / L. Shapley, M. Shubik // *Journal Economic Theory*, 1966, N.1. – pp. 9-25.
114. Shelling T.C. The Strategy of Conflict [Текст] / T.C. Shelling. – Harvard: Harvard University Press, 1960
115. Vanberg V.J. Rules and Choice in Economics [Текст] / V.J. Vanberg/ - London; New York: Routledge, 1994
116. Wang L. A Survey of Energy-Efficient Scheduling Mechanisms in Sensor Networks [Текст] / L. Wang, X. Yang // *Mobile Networks and Applications*, 2006, N.11, - pp. 723-740.
117. Wu J. Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges [Текст] / J. Wu, S. Yang // *Int. J. of Foundations of Computer Science*, 2005, N.16(1), - pp. 3-17.
118. Wu J. Virtual Backbone Construction in MANETs using Adjustable Transmission Ranges [Текст] / J. Wu, F. Dai // *IEEE Trans. On Mobile Computing*, 2006, N.5(9). – pp. 1188-1200.
119. Young H.P. On Dividing an Amount According to Individual Claims or Liabilities [Текст] / H.P. Young // *Mathematics of Operation Research*, 1987, N.12. – pp. 398-414.
120. Young H.P. Distributive justice in taxation [Текст] / H.P. Young // *Journal of Economic Theory*, N.48. – pp. 321-335.

121. Zafirovski M. Extending the rational choice model from the economy to society [Текст] / M Zafirovski // *Economy and Society*, 2000, N.2. – pp. 181-206.
122. Zhang H. Maintaining Sensing Coverage and Connectivity in Large Sensor Networks [Текст] / H. Zhang, J.C. Hou // *Ad Hoc & Sensor Wireless Networks*, 2005, N.1, - pp. 89-124.
123. www.econlib.org [Электронный ресурс]: сайт «Library of Economics and Liberty».
124. www.ecsoc.ru [Электронный ресурс]: сайт Центра экономической социологии.
125. www.ie.boom.ru [Электронный ресурс]: сайт Института национальной модели экономики.
126. www.mtas.ru [Электронный ресурс]: сайт «Теория управления организационными системами».
127. www.ecsocman.edu.ru [Электронный ресурс]: сайт Федерального образовательного портала «Экономика. Социология. Менеджмент».
128. www.forecast.ru [Электронный ресурс]: сайт Центра макроэкономического анализа и краткосрочного прогнозирования
129. www.eerc.ru [Электронный ресурс]: сайт Консорциума экономических исследований и образования.
130. www.gdnet.org [Электронный ресурс]: сайт «The Global Development Network (GDN)».
131. www.ratio.huji.ac.il [Электронный ресурс]: сайт «The Center for the Study of Rationality».
132. www.uisrussia.msu.ru [Электронный ресурс]: сайт «Университетская информационная система "Россия"»
133. www.worldcrisis.ru [Электронный ресурс]: Общественный сайт «Мировой кризис».

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СПЕЦИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

При исследовании динамических свойств ресурсных систем приходится применять квадратные матрицы порядка n следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & v_1 & \dots & v_1 & v_1 \\ v_2 & d_2 & \dots & v_2 & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & v_n & \dots & v_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Докажем несколько важных утверждений, связанных с такими матрицами.

Свойство 1. *Определитель матрицы A вычисляется через его элементы по следующей формуле:*

$$\Delta = \prod_{i=1}^n (d_i - v_i) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{d_i - v_i}\right).$$

Доказательство. Преобразуем определитель, вынося в каждой строке соответствующие множители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & v_1 & \dots & v_1 & v_1 \\ v_2 & d_2 & \dots & v_2 & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & v_n & \dots & v_n & d_n \end{vmatrix} = v_1 v_2 \dots v_n \begin{vmatrix} e_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e_2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & e_n \end{vmatrix}, \text{ где } e_i = \frac{d_i}{v_i}.$$

В новом определителе сделаем элементарные преобразования (вычтем первую строку из всех других):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & e_2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & e_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -w_1 & w_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -w_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & w_n \end{vmatrix} \text{ где } w_i = e_i - 1.$$

Вычисляя определитель по первому столбцу, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= e_1 (w_2 w_3 \dots w_n) + w_1 \left(\frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \dots + \frac{1}{w_n} \right) w_2 w_3 \dots w_n = \\ &= w_1 w_2 w_3 \dots w_n \left(\frac{e_1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \dots + \frac{1}{w_n} \right) = w_1 w_2 w_3 \dots w_n \left(\frac{w_1 + 1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \dots + \frac{1}{w_n} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta_1 = \prod_{i=1}^n w_i \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{w_i}\right)\right) = \prod_{i=1}^n (e_i - 1) \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{e_i - 1}\right)\right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d_i}{v_i} - 1\right) \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\frac{d_i}{v_i} - 1}\right)\right).$$

Далее, получаем требуемое:

$$\Delta = v_1 v_2 \dots v_n \Delta_1 = v_1 v_2 \dots v_n \prod_{i=1}^n \left(\frac{d_i}{v_i} - 1\right) \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\frac{d_i}{v_i} - 1}\right)\right) = \prod_{i=1}^n (d_i - v_i) \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{d_i - v_i}\right)\right).$$

Следствие 1. Применяя Свойство 1 для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} & \beta_1 & \beta_1 & \dots & \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha_{21} + \alpha_{22} & \beta_2 & \dots & \beta_2 \\ \beta_3 & \beta_3 & \alpha_{31} + \alpha_{32} & \dots & \beta_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n & \beta_n & \beta_n & \dots & \alpha_{n1} + \alpha_{n2} \end{pmatrix},$$

рассмотренной в Главе 3, п. 3.4, получим значение определителя:

$$\Delta = \prod_{i=1}^n (\alpha_{i1} + \alpha_{i2} - \beta_i) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\beta_i}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2} - \beta_i}\right)\right).$$

Следствие 2. Рассмотрим матрицу A , определяющую итерационный процесс для системы $S4$ (см. п. 3.5.4. Главы 3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & \dots & v_1 & v_1 \\ v_2 & 0 & \dots & v_2 & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & v_n & \dots & v_n & 0 \end{pmatrix}, \quad v_i = \frac{\beta_i}{\alpha_{i1} + \alpha_{i2}}.$$

Тогда его характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & v_1 & \dots & v_1 & v_1 \\ v_2 - \lambda & \dots & v_2 & v_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & v_n & \dots & v_n & -\lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (-\lambda - v_i) \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{v_i}{-\lambda - v_i}\right)\right).$$

ВАРИАНТ МОДИФИКАЦИИ МОДЕЛИ А-2

Эффективность покрытия плоскости кругами двух регулируемых размеров может быть улучшена и точно рассчитана с помощью еще одной модификации. В большей степени этот результат является теоретическим. Вполне вероятно, что в дальнейшем он может найти практическое применение.

Рассмотрим типовой фрагмент *Модели А-2* (см. рис. 1).

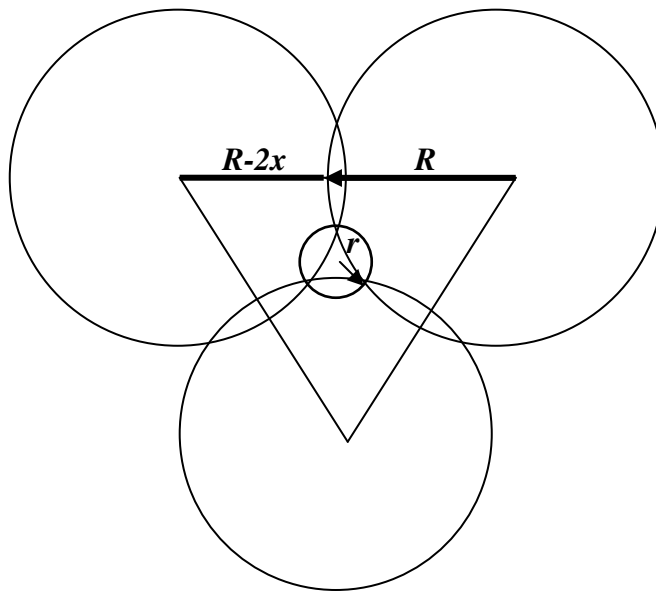


Рис. 1. Типовой фрагмент *Модели А-2*

Вместо одного центрального круга радиуса r можно взять три круга радиуса $r/2$ и вписать их соответствующим образом (см. рис. 2).

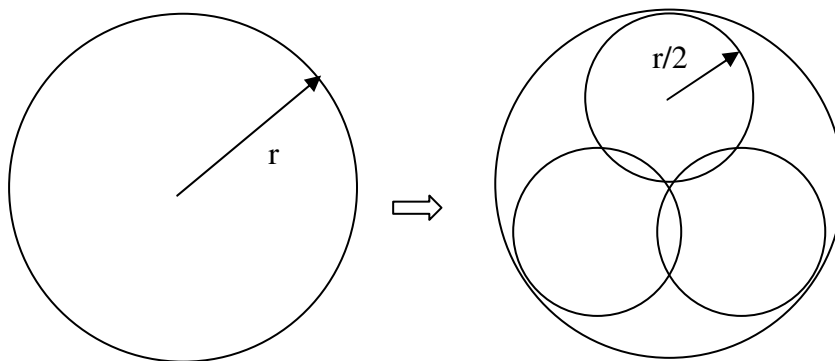


Рис. 2. Замена центрального фрагмента в *Модели А-2*

Площадь одного центрального круга равна πr^2 , а площадь трех маленьких равна $3\pi r^2/4$. За счет этого можно улучшить эффективность покрытия. Легко видеть, что такая конструкция закрывает криволинейный треугольник, образованный большими окружностями.

Точных расчеты показали, что надо не просто заменить одну конструкцию на другую, но и совершить небольшое «раздвижение» больших кругов. Проведем строгие построения.

- Покрываем заданную область кругами радиуса R так, что их центры находятся в узлах заданной «треугольной» решетки, а перекрытие больших соседних кругов образует некоторую (небольшую) одинаковую для всех зону перекрытия.
- Между большими кругами образуется открытая симметричная область G , которая покрывается тремя кругами радиуса $r/2$, имеющими одну общую точку в центре фрагмента, где r – радиус круга описанного вокруг области G , имеющей форму криволинейного треугольника.
- Находя оптимальное расположение больших кругов, можно определить соотношения между радиусами и наилучшее эффективное покрытие модифицированной *Модели 3-А-М* (см. рис. 3).

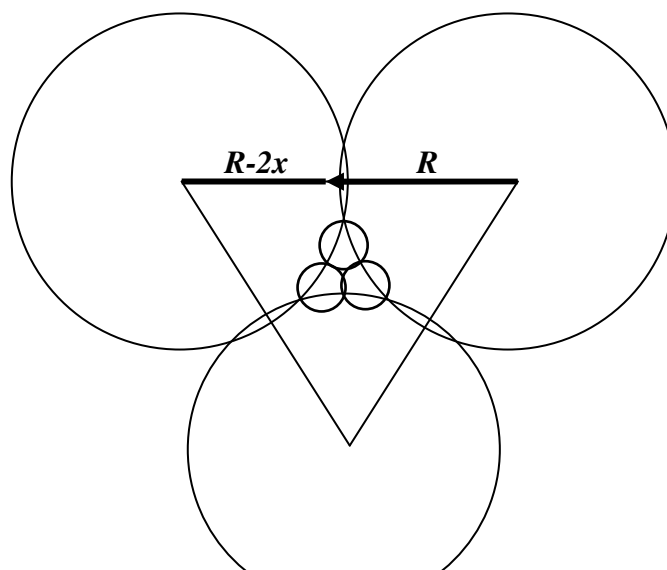


Рис. 1. Типовой фрагмент *Модели А-2.-М*

Имеет место следующий результат.

Теорема. *Оптимальное расположение кругов в Модели А-2-М, определяющее наилучшие показатели плотности покрытия K и энергии мониторинга E , задается следующими условиями:*

$$\rho=r/2 = \frac{R}{2\sqrt{21}} \approx 0,1091R; \quad 2x = \frac{R(2\sqrt{7}-5)}{\sqrt{7}} \approx 0,1102R; \quad (1)$$

$$a=2(R-x) = \frac{5R}{\sqrt{7}} \approx 1,8898R,$$

где $2x$ – размер радиального перекрытия двух больших кругов, a – расстояние между центрами двух больших соседних кругов (сторона равностороннего треугольника, соответствующего типовому фрагменту).

При этих условиях получаем следующие показатели

$$Sp = \frac{R^2 25\sqrt{3}}{28}; \quad Sf = \frac{\pi R^2 15}{28}; \quad K = \frac{5\sqrt{3}}{3\pi} \approx 0,9189; \quad E \approx 1,0883\mu. \quad (2)$$

Доказательство. Используя обозначения, введенные при расчетах Модели 3-А, получаем

$$r = \frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{R^2 - t^2}; \quad \text{где } t = R - x;$$

$$Sp = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = (R - x)^2 \sqrt{3} = t^2 \sqrt{3}; \quad Sf = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{3}{4} \pi \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{R^2 - t^2} \right)^2;$$

$$\frac{1}{K(t)} = \frac{Sf}{Sp} = \frac{\frac{\pi R^2}{2} + \frac{3}{4} \pi \left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{R^2 - t^2} \right)^2}{t^2 \sqrt{3}} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \left(\frac{5R^2}{2t^2} - 2 - 2\sqrt{3} \sqrt{\frac{R^2}{t^2} - 1} \right) \rightarrow \min.$$

Решая экстремальную задачу, находим оптимальное значение

$t = \frac{5}{2\sqrt{7}} R$ и другие характеристические размеры:


$$x = R - t = \frac{R(2\sqrt{7} - 5)}{2\sqrt{7}}; r = \frac{t}{\sqrt{3}} - \sqrt{R^2 - t^2} = \frac{R}{\sqrt{21}}, \rho = \frac{R}{2\sqrt{21}}.$$

Далее легко получить (2). Что и требовалось показать.

Следствие 1. Коэффициенты эффективности Модели 3-А-М является наилучшим из известных моделей с двумя типами сенсорных кругов в классе $\text{Cov}(2: 3_6; 3_1)$. Это обозначает, что три сенсора обслуживают треугольный фрагмент своими шестью частями, а другие три – своими целыми частями.

По сравнению с эффективностью Модели А-2 произошло улучшение на величину

$$\frac{K_{A-2} - K_{A-2-M}}{K_{A-2}} \cdot 100\% \approx \frac{0,9189 - 0,9022}{0,9022} \cdot 100\% \approx 1,851\%.$$

НОМЕР ПРОЕКТА 08-07-91300		УЧЕТНАЯ КАРТОЧКА
НАЗВАНИЕ ПРОЕКТА Алгоритмы построения и функционирования надежных мобильных беспроводных сенсорных сетей		
ОБЛАСТЬ ЗНАНИЯ 07 - информационные технологии и вычислительные системы		КОД(Ы) КЛАССИФИКАТОРА 07-680 01-204 01-104
ВИД КОНКУРСА ИНД_а - Конкурс совместных российско-индийских исследовательских проектов		
ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО РУКОВОДИТЕЛЯ ПРОЕКТА Ерзин Адиль Ильясович		ТЕЛЕФОН РУКОВОДИТЕЛЯ ПРОЕКТА (383)3634682
ПОЛНОЕ НАЗВАНИЕ ОРГАНИЗАЦИИ, ГДЕ ВЫПОЛНЯЕТСЯ ПРОЕКТ Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук		
ПОЛНОЕ НАЗВАНИЕ ОРГАНИЗАЦИИ, ЧЕРЕЗ КОТОРУЮ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ФИНАНСИРОВАНИЕ Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук		
ОБЪЕМ СРЕДСТВ, ФАКТИЧЕСКИ ПОЛУЧЕННЫХ ЗА 2009 г. 350000 руб.		
ЧИСЛО УЧАСТНИКОВ ПРОЕКТА (включая руководителя) 6	ЧИСЛО УЧАСТНИКОВ, ИМЕЮЩИХ УЧЕНУЮ СТЕПЕНЬ 4	ЧИСЛО МОЛОДЫХ (до 35 лет включительно) УЧАСТНИКОВ 2
Шамардин Юрий Владиславович		
Астраков Сергей Николаевич		
Алдын-оол Татьяна Андреевна		
Тахонов Иван Иванович		
Залюбовский Вячеслав Валерьевич		
ПОДПИСЬ РУКОВОДИТЕЛЯ ПРОЕКТА		ДАТА ПОДАЧИ ОТЧЕТА 19.02.2010
ПРОХОЖДЕНИЕ ОТЧЕТА (заполняется в РФФИ)		
РЕШЕНИЕ СОВЕТА ФОНДА По результатам рассмотрения на заседании Совета Фонда проект к финансированию:- принят		ПРЕДСЕДАТЕЛЬ СОВЕТА ФОНДА

ОТЧЕТ ЗА 2009 ГОД ПО ПРОЕКТУ РФФИ 08-07-91300-ИНД_а

Статус отчета: зарегистрирован

Дата подписания: 19.02.2010

Подписал: Ерзин Адиль Ильясович

Дата регистрации: 01.03.2010

Отчет распечатан: 21.03.2010

Номер проекта: 08-07-91300

Вид конкурса: ИНД_а - Конкурс совместных российско-индийских исследовательских проектов

Руководитель проекта: Ерзин Адиль Ильясович

Название проекта: Алгоритмы построения и функционирования надежных мобильных беспроводных сенсорных сетей

Организация: Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Вид отчета: итоговый (2008-2009 гг.)

Аннотация: Цели проекта выполнены в целом. Получены следующие результаты.

Адаптированы известные и разработаны новые эвристические эффективные алгоритмы построения связных покрытий, учитывающие специфику сенсорных сетей.

Осуществлена математическая постановка задачи максимизации времени жизни сенсорной сети в случае заданного избыточного множества покрытий. Доказана NP-трудность этой задачи. Разработаны полиномиальные приближенные алгоритмы ее решения. Найдены новые частные случаи полиномиальной разрешимости задачи.

Детально исследована проблема покрытия сенсорами плоской области, которая сводится к минимизации плотности покрытия плоскости кругами. Предложены два новых класса регулярных покрытий, использующих круги двух радиусов, которые оказались рекордными или даже оптимальными в

соответствующих классах покрытий. Результаты распространены на случай покрытия полосы.

Впервые корректно поставлена задача построения оптимального коммуникационного дерева для беспроводной сенсорной сети и доказана её NP-трудность. Найдены частные случаи, когда оптимальное коммуникационное дерево строится с полиномиальной трудоемкостью. Найдены условия неаппроксимируемости задачи. Предложен 2-оптимальный полиномиальный алгоритм. Разработан эвристический алгоритм, который строит рекордные решения для тестовых примеров.

Проведен вероятностный анализ эффективности покрытия при случайном распределении сенсоров в области мониторинга. Введено понятие Q -покрытия, когда каждая точка области покрыта с вероятностью не менее Q . Найдена зависимость Q , радиуса мониторинга и количества случайно (равномерно) распределенных сенсоров. Предложено три модели случайного покрытия, осуществлена оценка времени жизни сенсорной сети для этих моделей.

Исследована надежность последовательно-параллельных сетей в решетчатых графах. Найдены рекордные нижние оценки надежности в общем случае, которые уточнены для некоторых частных случаев.

Предложены модели покрытий мобильными сенсорами. Осуществлен сравнительный анализ стационарного случая (когда сенсоры неподвижны) и двух моделей с мобильными сенсорами.

Оценивая проделанную работу, можно сделать вывод, что в рамках проекта получены результаты мирового уровня. В частности, уточнены известные результаты; поставлены новые задачи оптимизации и функционирования сенсорных сетей и исследована их труднорешаемость; предложены новые модели регулярного покрытия с рекордными показателями качества; разработаны новые алгоритмы максимизации времени жизни сенсорных сетей; проведен вероятностный анализ функционирования сенсорных сетей при случайном распределении сенсоров в области мониторинга, а также

осуществлен апостериорный анализ, подтверждающий правомерность использования случайных покрытий в среднем; исследованы мобильные сенсорные сети при случайном распределении сенсоров, осуществлена оценка времени их жизни.

По результатам исследований сделано 17 докладов на 12 различных научных форумах, опубликовано 25 научных работ, одна статья принята в печать, готовится 3 статьи в рецензируемые журналы.

В ходе выполнения проекта поставлен ряд новых задач, которые планируется решить в рамках следующего проекта. В частности, планируется провести апостериорный анализ разработанного эвристического алгоритма построения оптимального коммуникационного дерева в сенсорной сети; провести вероятностный анализ случайных моделей покрытия, когда необходимо покрыть заданную долю или конечное множество точек области; рассмотреть задачу максимизации времени жизни сенсорной сети при мобильной базовой станции.

Объявленные ранее цели проекта на 2009 год: Разработка эффективных приближенных алгоритмов построения различных покрытий сенсорами и их анализ.

Степень выполнения поставленных в проекте задач: Поставленные задачи выполнены практически полностью.

Однако в процессе выполнения проекта возник ряд новых задач, связанных с оптимизацией мобильных беспроводных сенсорных сетей. Исследованием новых задач планируется заняться в рамках следующего проекта.

Полученные за отчетный период важнейшие результаты:

- (1) Адаптированы известные и разработаны новые эвристические эффективные алгоритмы построения связных покрытий в специальных взвешенных графах, учитывающие специфику сенсорных сетей.
- (2) Осуществлена математическая постановка задачи максимизации времени жизни сенсорной сети в случае заданного избыточного множества покрытий.

Доказана NP-трудность этой задачи. Разработаны полиномиальные приближенные алгоритмы ее решения. Найдены ранее неизвестные частные случаи полиномиальной разрешимости задачи. Предложены способы уменьшения размерности задачи. Разработан алгоритм генерации различных покрытий, что позволяет построить множество покрытий - входные данные для упомянутой выше задачи.

(3) Детально исследована проблема покрытия сенсорами плоской области, которая сводится к минимизации плотности покрытия плоскости кругами различных радиусов. Предложены два новых класса регулярных покрытий, использующих круги двух радиусов, которые оказались рекордными или даже оптимальными в соответствующих классах покрытий. Эти модели с небольшой модификацией использовались также для покрытия полосы. Были получены новые результаты, которые планируется обобщить и развить для покрытия других плоских фигур.

(4) Осуществлена корректная постановка задачи построения оптимального коммуникационного дерева в сенсорной сети и доказана её NP-трудность. Найдены частные случаи, когда оптимальное коммуникационное дерево строится с полиномиальной трудоемкостью. Предложен 2-полиномиальный алгоритм построения приближенного решения. Показана 1.00048-неаппроксимируемость задачи. Разработан эвристический полиномиальный алгоритм, который строит хорошие (рекордные) решения на тестовых примерах. В дальнейшем для апостериорного анализа этого алгоритма планируется провести широкомасштабный численный эксперимент.

(5) Проведен вероятностный анализ эффективности покрытия в среднем при случайном равномерном распределении сенсоров в области мониторинга. Введено понятие Q-покрытия, в котором каждая точка области мониторинга покрывается сенсорами с вероятностью не менее Q. Осуществлен анализ Q-покрытий. Предложено 3 модели таких покрытий и найдены нижние оценки времени их жизни. Проводится численный эксперимент для оценки доли покрытой области. Планируется рассмотреть модель, в которой требуется

покрыть не все точки области (это очень жесткое требование), а лишь узлы заданной решетки.

(6) Исследована надежность последовательно-параллельных сетей в решетчатых графах. Этот результат планируется использовать для оценки надежности коммуникационной сети регулярной сенсорной сети, когда сенсоры выходят из строя с заданной вероятностью и независимо друг от друга.

(7) Предложена модель мобильной сенсорной сети для случая, когда каждый сенсор способен перемещаться, и удельные затраты энергии на движение пропорциональны скорости. В этой модели сенсоры перемещаются с целью создания покрытия близкого к регулярному. Проведен сравнительный анализ стационарного случая (когда сенсоры неподвижны) и двух моделей с подвижными сенсорами. Планируется рассмотрение модели, в которой сенсоры неподвижны, а базовая станция (куда передаются результаты мониторинга) способна перемещаться в пространстве.

Методы и подходы, использованные в ходе выполнения проекта:

Сенсорная сеть состоит из большого числа сенсоров, каждый из которых имеет ограниченный запас энергии, которая тратится, когда сенсор находится в активном состоянии. В состоянии сна потери энергии сенсора пренебрежительно малы. Каждый сенсор, находясь в активном состоянии, способен осуществлять наблюдение, обработку полученной информации и передачу данных по сети, порожденной активными сенсорами. А мобильный сенсор в дополнение способен перемещаться. Основная цель сенсорной сети - это мониторинг, который осуществляется подмножеством связанных активных сенсоров. Время жизни сенсорной сети - это отрезок времени, в течение которого осуществляется мониторинг области и/или объектов подмножествами активных сенсоров. Основная цель - максимизация времени жизни сенсорной сети. В связи с этим возникает множество задач, одна из которых заключается в построении связанных покрытий с теми или иными свойствами.

(1) Задача о минимальном покрытии является классическим представителем NP-трудных проблем, и для ее решения не существует хороших полиномиальных приближенных алгоритмов (относительная погрешность порядка логарифма от числа элементов множества является неулучшаемой). В рамках проекта проведен анализ существующих полиномиальных алгоритмов построения минимальных покрытий и доминирующих множеств на графах. Проведена адаптация этих алгоритмов с учетом структуры сенсорных сетей. В частности, если в сенсорной сети задан центральный пункт сбора информации (базовая станция), то число ребер в любом пути в центр (радиус сети), как правило, ограничено некоторым наперед заданным числом. На практике, это число часто не превышает двух. Тогда сенсорную сеть можно представить в виде иерархической сети, на нижнем (нулевом) уровне которой находятся объекты наблюдения, на первом и втором - сенсоры, а на третьем - центр. Для такой сети предложен алгоритм генерации различных допустимых покрытий без учета ресурсов сенсоров. В результате получается множество допустимых покрытий, которое является входом для следующей задачи.

(2) Пусть:

J - множество сенсоров;

I - множество покрытий;

r_j - целочисленный ресурс сенсора j (время работы сенсора);

параметр $a_{ij}=1$, если сенсор j принадлежит покрытию i и $a_{ij}=0$ в противном случае.

Введем переменные x_i - время активности покрытия i . Тогда задача максимизации времени жизни сенсорной сети записывается в виде:

$$\sum_{j \in J} x_j \rightarrow \min; \quad x_i \in Z_0^+$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq r_j, \quad j \in J.$$

Если переменные принимают непрерывные значения, то поставленная задача является задачей линейного программирования и, следовательно, может быть

решена за полиномиальное время. Однако на практике в сенсорных сетях, как и во многих других технических системах, время измеряется временными раундами. Для поставленной задачи это означает целочисленность переменных x_j . Для доказательства NP-трудности задачи в этом случае к частному ее случаю ($r_j=1, j \in J$) была сведена NP-трудная задача о максимальном независимом множестве. Причем было показано полиномиальное сведение в обе стороны, что позволяет решать частный случай задачи максимизации времени жизни сенсорной сети (с одинаковыми ресурсами сенсоров) как задачу нахождения максимального независимого множества. Для последней задачи известен целый ряд частных случаев полиномиальной разрешимости.

Для решения задачи в общем случае разработан полиномиальный эвристический алгоритм с оценками точности, а также найдена верхняя оценка времени жизни сенсорной сети, как величина максимального потока в специально построенной сети с ограниченными пропускными способностями дуг.

В 2009 г. удалось найти дополнительные частные случаи полиномиальной разрешимости задачи. В частности, было доказано, что условие двудольности графа пересечений покрытий является достаточным для полиномиальной разрешимости задачи при произвольных значениях ресурсов сенсоров.

(3) Значительное внимание исполнителей уделено задаче энергоэффективного регулярного покрытия плоской области сенсорами с двумя выбираемыми радиусами мониторинга. В математическом плане поставлены и решены задачи покрытия плоскости кругами в духе классических работ Л.Ф. Тота о расположениях на плоскости; последние тесно связаны с геометрией чисел. Рассмотренные задачи, относясь к конкретным типам покрытий, дают, тем не менее, представление об общей ситуации. Существенно, что вариативность радиусов покрытия оказалась актуальной и перспективной в сенсорных сетях.

Пусть область мониторинга каждого сенсора - это круг определенного радиуса с центром в месте расположения сенсора. Говорится, что сенсор покрывает этот круг. Весьма остро стоит вопрос об экономии энергии сенсоров, и поэтому её траты тесно связаны с геометрическими параметрами сети. Эффективность покрытия плоской области характеризуется суммарным перекрытием кругов мониторинга сенсоров. Подавляющее большинство известных моделей размещения сенсоров исходит из предположения, что радиусы мониторинга R всех сенсоров одинаковы. В этом случае минимум энергоёмкости мониторинга достигается, когда каждая тройка соседних сенсоров является вершинами равностороннего треугольника со стороной $R\sqrt{3}$. Появление сенсоров с регулируемым радиусом мониторинга дает дополнительные возможности для повышения эффективности функционирования сенсорных сетей.

Задача покрытия плоскости кругами разных радиусов исследована сравнительно мало. В работе [F.G. Toth. Covering the Plane with Two Kinds of Circles. // Discrete & Computational Geometry, 1995, v. 13, No. 3, p. 445-457] найдена нижняя оценка плотности покрытия кругами двух радиусов. Однако предложенный там способ покрытия предполагает использование большого числа кругов малого радиуса (непокрытое пространство между тремя соседними кругами большего радиуса покрывается большим количеством одинаковых кругов меньшего радиуса, и нижняя оценка плотности достигается в пределе, когда маленький радиус стремится к нулю). Это делает его неприемлемым для практического применения.

Назовем покрытием плоской области S такую совокупность кругов C , что каждая точка области принадлежит хотя бы одному из них. Определим плотность покрытия как отношение площади всех кругов C к площади области S . Под регулярным покрытием $COV_k(p,q)$ будем понимать такое покрытие плоскости кругами, при котором вся область может быть разбита на правильные k -угольники (плитки), образуя бесконечную регулярную решетку. При этом все k -угольники покрываются одинаково p кругами q

различных радиусов, и каждый узел решетки (вершина k -угольника) является центром одного круга; поэтому достаточно оценить плотность покрытия одной плитки.

Существуют три типа - T , Q и H - решеток, которые замощают плоскость правильными многоугольниками, соответственно треугольная ($k=3$), квадратная ($k=4$) и гексагональная ($k=6$). Поскольку третий тип сводится к первому, далее рассматриваются решетки двух типов - T и Q .

Рассматриваемая задача $P_k(p,q)$ состоит в поиске регулярного покрытия $COV_k(p,q)$ минимальной плотности.

При этом для T -решеток и Q -решеток задачу $P_k(p,q)$ условимся обозначать соответственно через $T(p,q)$ и $Q(p,q)$. Покрытия для задач $T(3,1)$ и $Q(4,1)$ обозначим через $T1$ и $Q1$, и отнесем к первому уровню. Покрытия для задач $T(4,2)$ и $Q(5,2)$ - ко второму уровню и обозначим через их $T2$ и $Q2$, если круги с центрами в смежных вершинах плитки ("главные круги") касаются, и к третьему уровню (обозначим - $T3$ и $Q3$), если главные круги с центрами в смежных вершинах многоугольника пересекаются.

Известно наименее плотное покрытие $T1$ плоскости одинаковыми кругами [R. Kershner. The Number of Circles Covering a Set. // American Journal of Mathematics, 1939, v. 61, No. 3, p. 665-671], которое в наших обозначениях является оптимальным решением задачи $T(3,1)$, а также асимптотически оптимальное решение задачи $T(p,2)$ [F.G. Toth. Covering the Plane with Two Kinds of Circles. // Discrete & Computational Geometry, 1995, v. 13, No. 3, p. 445-457] и нижняя оценка плотности покрытия в задаче $T(p,p)$ [Л.Ф. Тот. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. - М.: Изд. Физ.-мат. литературы. 1958]. В общем же случае (при произвольных значениях параметров p и q) оптимальные решения для задачи $P_k(p,q)$ не известны.

Покрытия $T1$, $T2$, $Q1$ и $Q2$ рассматривались в литературе ранее. Покрытия $T3$ и $Q3$ предложены нами впервые, и они дают существенное уменьшение плотности покрытия по сравнению с ранее известными регулярными покрытиями.

Описанные модели исследовались для покрытия полосы. В результате получен ряд новых рекордных результатов, которые готовятся к публикации.

(4) В беспроводных сенсорных сетях энергозатраты сенсора на передачу данных на расстояние d пропорциональны d^b , где $b \in [2,6]$. Пусть T - коммуникационное дерево, порожденное активными сенсорами. В настоящий момент в качестве коммуникационного дерева в литературе используется остовное дерево минимального веса, где вес ребра (i,j) - это расстояние d_{ij} между смежными (в T) сенсорами $i, j \in V$. Однако если обозначить через $V_i(T)$ множество вершин, смежных с вершиной i в дереве T , то дальность передачи сенсора i должна быть равна $\max_{j \in V_i(T)} d_{ij}$. Значит, оптимальное коммуникационное дерево (при котором энергозатраты на передачу данных минимальны) является решением задачи

$$\sum_{i \in V} \max_{j \in V_i(T)} c_{ij} \rightarrow \min_T,$$

где $c_{ij} = d_{ij}^b$. Нами доказано, что эта задача принадлежит классу NP-трудных проблем. Найдены частные случаи, когда оптимальное решение строится с полиномиальной трудоемкостью, в частности, когда минимальный остов является оптимальным коммуникационным деревом. Предложен полиномиальный приближенный алгоритм с гарантированной оценкой точности.

Дополнительно была доказана полиномиальная сводимость к рассматриваемой задаче задачи о минимальном вершинном покрытии. Это позволило доказать, что задача построения решения с относительной погрешностью менее 0,00048 является NP-трудной.

Разработан полиномиальный приближенный алгоритм, точность которого не удалось установить аналитически (априори), поэтому планируется провести апостериорный анализ, после чего результаты будут организованы в статью.

(5) В труднодоступных или опасных для человека местах не всегда удается разместить сенсоры в определенных позициях. Например, сенсоры могут разбрасываться с самолета или вертолета, и их местоположение оказывается

случайным. Рассмотрена модель случайного равномерного распределения сенсоров в области мониторинга. Найдено математическое ожидание среднего и максимального расстояний от узла регулярной решетки до ближайшего сенсора, что позволило найти зависимость энергоэффективности покрытия от числа распределенных сенсоров. Для этого введены две модели случайного покрытия в среднем, в которых в качестве активных выбираются сенсоры ближайšie к определенным местам, и их радиусы мониторинга зависят от найденных характеристик. Осуществлена оценка времени жизни этих моделей, а также проведено сравнение предложенных моделей и осуществлен численный эксперимент, подтверждающий правомерность использования моделей покрытия в среднем.

Введено также понятие Q -покрытия, в котором вероятность покрытия каждой точки области не менее Q . Предложены три модели Q -покрытий и найдена зависимость между количеством и радиусом мониторинга сенсоров. Для подтверждения теоретического результата проводится численный эксперимент. В силу невозможности оценить численно вероятность покрытия всех точек, в эксперименте оценивается доля покрытой области, что естественно отличается от вероятности покрытия каждой точки. В связи с этим планируется осуществить также теоретическую оценку покрытой доли, а также рассмотреть модель, в которой требуется покрыть лишь узлы заданной решетки. Готовится статья.

(6) Сенсорные сети, а также некоторые другие технические системы, иногда представляются в виде регулярных решеток, с ненадежными элементами. Пусть имеется решетчатый граф с одним источником и одним приемником, и заданы вероятности срабатывания ребер. Подграфом решетки назовем сеть, связывающую источник и приемник подмножеством ребер решетки. Требуется найти максимально надежный последовательно-параллельный подграф решетки. При этом под надежностью сети понимается вероятность существования хотя бы одного исправного пути из источника в приемник.

Рассмотрение такой проблемы обусловлено тем фактом, что вычисление надежности решетчатого графа остается NP-трудной проблемой, а надежность последовательно-параллельных сетей вычисляется с полиномиальной трудоемкостью. В связи с этим оценку надежности решетки можно осуществить в два этапа. Сначала найти максимально надежную последовательно-параллельную сеть, а затем вычислить ее надежность. Это и будет оценкой снизу для надежности всей решетки. Предложены специальные конструкции последовательно-параллельных сетей, с помощью которых удалось получить рекордные по точности оценки надежности решетки.

(7) Современные сенсоры наряду с возможностью менять свой радиус мониторинга и дальность передачи, иногда способны перемещаться. Мобильный сенсор тратит энергию пропорционально скорости движения. Однако в случаях, когда невозможно поместить сенсоры в определенные позиции целесообразно перемещение сенсоров в направлении некоторых заданных точек. Это позволяет продлить время жизни мобильной сенсорной сети. Нами впервые предложены модели покрытия области мобильными сенсорами, когда они перемещаются в направлении узлов регулярной решетки. Найдены оценки времени жизни каждого сенсора и сенсорной сети в целом.

Степень новизны полученных результатов: Разработаны новые полиномиальные алгоритмы построения связных покрытий, обладающих различными дополнительными свойствами и учитывающие специфику сенсорных сетей.

Доказана NP-трудность задачи максимизации времени жизни сенсорной сети в случае заданного множества покрытий. Найдены частные случаи полиномиальной разрешимости. Предложены эффективные эвристические алгоритмы решения этой задачи. Разработан алгоритм построения различных покрытий, дающий исходные данные задачи.

Поставлена общая задача регулярного покрытия области сенсорами с регулируемыми радиусами мониторинга. Предложены две новые модели регулярного покрытия, которые имеют минимальную плотность среди известных регулярных покрытий и являются оптимальными в некоторых классах покрытий.

Впервые корректно поставлена задача построения оптимального коммуникационного дерева сенсорной сети. Показано, что минимальный остов не всегда является решением этой задачи, и что в общем случае задача принадлежит классу NP-трудных проблем в сильном смысле. Найдены частные случаи полиномиальной разрешимости задачи, а также предложен полиномиальный приближенный алгоритм с гарантированной оценкой точности. Найдена нижняя оценка аппроксимируемости задачи. Разработан эвристический алгоритм, строящий рекордные задачи на тестовых примерах.

Для варианта случайного распределения сенсоров, предложено понятие случайного покрытия в среднем и предложено два случайных покрытия и осуществлена оценка их эффективности. Введено понятие случайного Q-покрытия. Найдена зависимость качества случайного покрытия от радиуса мониторинга и количества случайно распределенных сенсоров.

Предложен новый метод нахождения нижней оценки надежности решетчатого графа, которая оказалась рекордной по точности среди известных ранее.

Предложена модель мобильной сенсорной сети, когда сенсоры перемещаются в узлы регулярной решетки. Проведен сравнительный анализ стационарной и двух мобильных моделей сенсорной сети.

Сопоставление полученных результатов с мировым уровнем:

Полученные результаты имеют мировой уровень. В настоящий момент значительное количество ученых занимаются различными аспектами оптимизации сенсорных сетей. Среди тех кто исследует оптимизационные задачи сенсорных сетей такие известные ученые как P. Berman, O. Calinescu, M. Cardie, J. Carle, G. Pottie, C. Shah, D. Simplot, J. Wu, A. Zelikovsky, H Zhang

и многие другие. При разработке алгоритмов построения связанных покрытий нами использовались результаты S. Guha, S. Khuller, D. Drake, S. Hougardy.

В статье [P. Berman и др. Power efficient monitoring management in sensor networks. // Proc. Wireless Communications and Networking Conference (WCNC). 2004, 2329-2334] поставлена и решается задача максимизации времени жизни сенсорной сети для случая, когда множество покрытий не задано, а переменные принимают непрерывные значения. Нами рассмотрена задача с заданным множеством покрытий и целочисленными переменными.

В статье [J. Wu, S. Yang. Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges. // Int. J. of Foundations of Computer Science, 2005, v. 16, No. 1, p. 3-17] рассмотрены 3 регулярные покрытия, но оценка эффективности этих покрытий осуществлена некорректно. В частности, авторы утверждают, что предложенное ими регулярное покрытие, в котором используются круги трех радиусов, является наилучшим из известных ранее. Нами проведен корректный анализ, который показал, что это не так, плотность предложенного покрытия выше, чем у покрытия плоскости одинаковыми кругами. Кроме этого, в указанной статье для оценки энергоемкости передачи в качестве коммуникационной сети используется минимальное остовное дерево. Нами показано, что это недопустимо, т.к. минимальный остов не является оптимальной коммуникационной сетью в случае использования трех радиусов мониторинга.

В работе [F.G. Toth. Covering the Plane with Two Kinds of Circles. // Discrete & Computational Geometry, 1995, v. 13, No. 3, p. 445-457] автор для покрытия плоскости использует круги двух радиусов и предлагаем модель, в которой непокрытое пространство в форме правильного криволинейного треугольника между тремя соседними кругами большего радиуса покрывается большим количеством кругов меньшего радиуса. Заявленная в работе плотность получается в пределе, когда радиусы малых кругов стремятся к нулю. С теоретической точки зрения это интересный результат, но он не имеет практической ценности для сенсорных сетей. В

предложенных нами моделях используется минимальное число кругов двух радиусов для покрытия одной плитки.

Нижняя оценка надежности сети впервые предложена Эзари Дж. и Прошан Ф. [Райншке К., Ушаков И.А. Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988] , а также Полесским В.П. в [Полесский В.П. Об одном способе построения структурно-надежной сети связи. // Сб. "Дискретные автоматы и сети связи". М.: Наука, 1970, с. 13-19]. Нами получена более точная нижняя оценка надежности решетчатого графа, чем дают упомянутые выше. Кроме того, получен ряд качественных результатов по последовательно-параллельным сетям в решетчатых графах.

Нами рассмотрены проблемы покрытия кругами полосы. Задача возникает при эффективном мониторинге периметров зданий, границ, дорог, трубопроводов и т.п. Однако математические результаты практически отсутствуют.

Другое недостаточно разработанное направление - это использование мобильных сенсоров. В мобильных сенсорных сетях могут перемещаться как сенсоры, так и базовая станция. Нами пока рассмотрен случай перемещения сенсоров к узлам регулярной решетки. Это новый результат.

Библиографический список публикаций по проекту:

1. A.I. Erzin, V.V. Zalyubovskiy, H. Choo. Maximizing Lifetime for a Sensor Network // Proc. of the 2-nd Int. Conf. on Ubiquitous Information Management and Communication, 2008, SKKU, Suwon, Korea, 453-457.
2. Ерзин А.И. Залюбовский В.В. Задача выбора совокупности связных покрытий в беспроводных сенсорных сетях // Труды ИВМиМГ СО РАН. Серия: Информатика. Вып. 8. 2008. Новосибирск. 23-28.
3. Алдын-оол Т.А., Ерзин А.И. О надежности последовательно-параллельных сетей в решетчатых графах // Материалы 14 Байкальская межд. shk.-сем. Методы оптимизации и их приложения. Т. 1: Мат. программирование. 2008. Иркутск. 312-321.

4. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В., Раха С. Модели и методы регулярного покрытия в сенсорных сетях // Мат. 14 Байкальская межд. шк.-сем. Методы оптимизации и их приложения. Т. 1: Мат. программирование. 2008. Иркутск. 322-331.
5. Ерзин А.И. Залюбовский В.В. Максимизация времени функционирования беспроводных сенсорных сетей // Мат. 14 Байкальская межд. шк.-сем. Методы оптимизации и их приложения. Т. 1: Мат. программирование. 2008. Иркутск. 363-369.
6. Тахонов И.И. Распределение ресурсов в сетевой модели с переменными потенциалами // Мат. 14 Байкальская межд. шк.-сем. Методы оптимизации и их приложения. Т. 5: Математическая экономика. 2008. Иркутск. 608-616.
7. Тахонов И.И. Энергоэффективные фрактальные модели покрытия в сенсорных сетях // Мат. 10 конф. Проблемы функционирования информационных сетей. Новосибирск, 2008. 159-162.
8. Astrakov S.N. Search for Intelligent Methods of Equilibrium Distribution // Program and Abstracts of Int. conference Operations Research 2008, 2008, University of Augsburg, 215-215.
9. Zalyubovskiy V., Erzin A., Astrakov S., Choo H. Energy-efficient Area Coverage by Sensors with Adjustable Ranges // Sensors, 9(4), 2009, 2446-2460.
10. Алдын-оол Т.А., Ерзин А.И. О надежности последовательно-параллельных сетей в решетчатых графах // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика, 9(2), 2009, 3-14.
11. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций, 6(3), 2009, 3-19.
12. Zalyubovskiy V., Erzin A., Astrakov S., Choo H. Energy-Efficient Area Coverage by Sensors with Two Adjustable Ranges // 7th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc, and Wireless Networks (WiOpt 09), Seoul, Korea, 2009, 8 pages на CD.

13. Ерзин А.И., Шамардин Ю.В. Построение оптимального коммуникационного дерева в беспроводной сенсорной сети // 4 Всерос. конф. Проблемы оптимизации и экономические приложения Омск, 2009, 40-44.
14. Алдын-оол Т.А., Ерзин А.И. Максимизация времени жизни сенсорной сети при случайном распределении сенсоров // 4 Всерос. конф. Проблемы оптимизации и экономические приложения Омск, 2009, 108-108.
15. Ерзин А.И., Чу Х. Алгоритм выбора оптимальных типов соединений в сигнальном дереве на основе модели Эльмора // Автоматика и телемеханика, 10, 2009, 172-183.
16. Erzlin A.I., Chu H. Elmore Model-based Algorithm to Select Optimal Connections on the Clock Tree // Automation and Remote Control, 70(10), 2009, 1749-1759.
17. Астраков С.Н., Ерзин А.И. Покрытие бесконечной полосы кругами одного и двух радиусов // Труды ИВМиМГ, Информатика, 9, Новосибирск, 2009, 143-148.
18. Erzlin A.I. Close to regular plane covering by mobile sensors // Abstracts. Int. conf. Optimization and Applications (OTIMA-2009), Petrovac, Montenegro, 2009, 25-26.
19. Erzlin A.I., V.N. Muralidhara, S. Raha. Close to Regular Covering by Mobile Sensors with Adjustable Ranges // 17 Int. Conf. on Advanced Computing and Communication (ADCOM 2009), Bangalore, India, 4 pages на CD.
20. Астраков С.Н. Равновесные методы поиска рациональных распределений // Вестник Российского государственного торгово-экономического университета, 32(5), 2009, 45-50.
21. Астраков С.Н., Анисова М.А. Математическое моделирование экономических взаимодействий на графах // Вестник Российского государственного торгово-экономического университета, 33(6), 2009, 39-43.
22. Тахонов И.И. Построение k-оптимального дерева в рамках модели Эльмора // Материалы IV Всероссийской конференции Проблемы оптимизации и экономические приложения, 2009, 165-165.

23. Тахонов И.И. Анализ сходимости итерационных процессов для некоторых задач построения равновесных систем / Диссертация на соискание степени кандидата физ.-мат. наук, 2009, 110 с.
24. Тахонов И.И. Анализ сходимости итерационных процессов для некоторых задач построения равновесных систем / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2009, 15 с.
25. Nguyen N.D., Zalyubovskiy V., Ha M.T., Choo H. Area coverage patterns for node scheduling problem to extend the network lifetime // Proc. Int. Conference on Information Networking 2010 (ICOIN 2010), Jan. 27-29, 2010, Busan, Korea, CD-ROM, 5 стр.
26. Nguyen N.D., Zalyubovskiy V., Ha M.T., Choo H. Energy-efficient models for coverage problem using sensors with adjustable sensing range // Proc. IEEE Wireless Communication and Networking Conference (WCNC 2010), April 18-21, 2010, Sydney, Australia, CD-ROM, 6 стр. (принята в печать)

Форма 511. ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЗАВЕРШЕННОГО ПРОЕКТА РФФИ В ПРИКЛАДНОЙ ОБЛАСТИ

11.1. Номер проекта

08-07-91300 *11.2.1. Приоритетное направление развития науки, технологий и техники РФ, в котором, по мнению исполнителей, могут быть использованы результаты завершенного проекта*

информационно-телекоммуникационные системы 11.2.2. Критическая технология РФ, в которой, по мнению исполнителей, могут быть использованы результаты завершенного проекта

базовые и критические военные, специальные и промышленные технологии

11.3. Предлагаемое авторами название работы в прикладной области

Теоретические основы мониторинга с использованием мобильных

беспроводных сенсорных сетей 11.4. Ожидаемые результаты работы в прикладной области

Сенсорные сети могут быть использованы, например,:

- 1) при автономном мониторинге охраняемой территории/объектов;*
- 2) для определения степени химического, бактериологического, радиационного и др. заражения;*
- 3) для измерения температуры, влажности, давления, задымленности... в труднодоступных или опасных для человека местах;*
- 4) при охране границы, мониторинге железнодорожных и автомобильных дорог, трубопроводов.*

Использование сенсорных сетей позволит осуществлять эффективный мониторинг и передачу данных без участия человека. 11.5. Планируемая продолжительность работы

до 3 лет 11.6. Предполагаемые авторами пути дальнейшего продвижения проекта

участие в программах министерств, ведомств, малых академий 11.7.

Информация, связанная с интеллектуальной собственностью

патентование не требуется 11.8. Реквизиты охранных документов (номер патента, исходящий номер заявки на патент)

Подпись руководителя проекта