На правах рукописи

Шеметова Валентина Владимировна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КЛАССА ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ИРКУТСК — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Научный руководитель: **Демиденко Геннадий Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Федоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Челябинский государственный университет», заведующий кафедрой математического анализа

Сидоров Николай Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Иркутский государственный университет», профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Защита диссертации состоится 9 июня 2026 г.в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.1.060.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте ИДСТУ СО РАН: http://www.idstu.irk.ru

Автореферат разослан « _ » _____ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.060.01,
кандидат физико-математических наук Т.В. Груздева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Теория краевых задач для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, начала развиваться во второй половине XX столетия. Первыми глубокими исследованиями таких уравнений были работы С.Л. Соболева[1], посвященные изучению задачи о малых колебаниях вращающейся жидкости. В этих работах С.Л. Соболев рассмотрел задачу Коши, первую и вторую краевые задачи для одного уравнения и системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени, изучил свойства их решений, поставил ряд новых задач математической физики. В литературе это уравнение и система называются уравнением Соболева и системой Соболева соответственно, а уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, часто называют уравнениями соболевского типа. В последующие годы интерес к подобным уравнениям постоянно возрастал, поскольку они возникали при решении важных прикладных задач в гидродинамике, физике атмосферы, физике плазмы, теории упругости и др. Поэтому естественно возникла необходимость в построении теории краевых задач для таких уравнений.

Первой монографией, которая была посвящена общей теории краевых задач для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, являлась книга Г.В. Демиденко, С.В. Успенского[2] (1998 г.). В этой монографии была введена классификация таких уравнений и систем, в частности, были определены классы уравнений: уравнения соболевского типа, псевдопараболические уравнения, псевдогиперболические уравнения. Для уравнений соболевского и псевдопараболического типов были изложены результаты о разрешимости задачи Коши и широкого круга краевых задач в четверти пространства. Для строго псевдогиперболических уравнений с постоянными коэффициентами были получены первые теоремы о разрешимости задачи Коши в соболевских пространствах.

В настоящее время имеется огромное число теоретических и прикладных работ, посвященных изучению уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. После выхода монографии [2] вышло

[1] Соболев С.Л. Избранные труды. Т. I. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 2003.

[2] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

уже более десятка монографий, посвященных этой тематике (см., например, [3, 4, 5]). Существует достаточно развитая теория краевых задач для уравнений соболевского типа и псевдопараболических уравнений. Но для псевдогиперболических уравнений в литературе имеется лишь небольшое количество результатов о разрешимости конкретных краевых задач в частных случаях. Однако уравнения этого типа представляют большой интерес, поскольку возникают при решении ряда прикладных задач теории упругости (уравнения и система уравнений Власова, описывающие изгибно-крутильные колебания стержня), задач гидродинамики (обобщенное уравнение Буссинеска, описывающее распространение волн с учетом поверхностного натяжения), при конструировании волноводов (уравнение Рэлея-Бишопа) и др. Поэтому построение теории краевых задач является важной проблемой в уравнениях с частными производными. В диссертации мы проводим исследования в этом направлении для псевдогиперболических уравнений четвертого порядка.

Цели и задачи исследования. Основная цель диссертации — изучение корректности класса смешанных краевых задач для псевдогиперболических уравнений четвертого порядка в четверти пространства. Рассматриваются классы граничных операторов, удовлетворяющие условию типа Лопатинского. Выделяются классы регулярных и нерегулярных смешанных краевых задач. Для них исследуются следующие задачи:

1. Нахождение условий однозначной разрешимости смешанных краевых задач в анизотропном соболевском пространстве с экспоненциальным весом $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$.
2. Построение формул решений.
3. Получение оценок решений.

Объектом исследования являются смешанные краевые задачи для псевдогиперболических уравнений четвертого порядка.

Предметом исследования является исследование корректности смешанных краевых задач для класса псевдогиперболических уравнений четвертого порядка.

Основные положения, выносимые на защиту. Теоремы об одно-

[3]Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, 1999.

[4]Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht, Boston, Koln: VSP, 2003.

[5]Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.

значной разрешимости класса смешанных краевых задач для псевдогиперболических уравнений четвертого порядка в анизотропном соболевском пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, интегральные представления решений и оценки их норм.

Методология и методы исследования. При получении результатов использовались методы современного анализа и теории функций, методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Аппаратом для исследования послужили методы теории уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, развитые в монографии [2].

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и снабжены доказательствами. Получены первые результаты о разрешимости широкого класса смешанных задач в четверти пространства для псевдогиперболических уравнений четвертого порядка.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны при изучении конкретных краевых задач, возникающих для уравнений псевдогиперболического типа.

Степень достоверности результатов. Достоверность результатов обосновывается строгостью доказательств, а также согласованностью полученных результатов с известными в исследованных ранее частных случаях.

Апробация результатов. Результаты, вошедшие в диссертационную работу, были представлены и обсуждались на семинарах ИМ СО РАН и НГУ: «Избранные вопросы математического анализа» (руководитель: д.ф.-м.н., проф. Г. В. Демиденко) и «Дифференциальные и разностные уравнения» (руководители: д.ф.-м.н., проф. Г. В. Демиденко, д.ф.-м.н. И. И. Матвеева). Результаты исследования были представлены на следующих конференциях: Российско-Китайская конференция «Дифференциальные и разностные уравнения» (Новосибирск, 31 октября–6 ноября 2025); International Conference on Computational Modeling and Applied Mathematics «Differential Equations and Applications» (Далянь, Китай, 2–4 августа 2024); VIII Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 24–28 июня 2024); Российско-Китайская конференция «Дифференциальные и разностные уравнения» (Новосибирск, 2–6 ноября 2023); Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения-2023» (Могилев, Беларусь, 23–27 мая 2023); Международная научная студенческая конференция (Новосибирск, 17–26 апреля 2023); Конференция «Женщины в математике» (Новосибирск, 6 июня 2022).

Публикации. По теме диссертации в изданиях, индексируемых в базах данных РИНЦ, WoS или Scopus, опубликовано 10 печатных работ, в том числе 4 статьи [1–4] в журналах, рекомендованных ВАК, 6 тезисов докладов [5–10] в трудах международных и всероссийских конференций.

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В совместной работе [4] теоремы 1, 2, 3, 4 доказаны автором диссертации, соавтором Л.Н. Бондарь доказаны теоремы $1'$, $2'$ и все замечания. Теоремы $1'$, $2'$ и все замечания в тексте диссертации не упоминаются и не используются.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 151 страницу. Список литературы состоит из 82 наименований.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Г.В. Демиденко за постановку задачи и за помощь в работе, а также к.ф.-м.н. Л.Н. Бондарь за ценные советы и полезные дискуссии, д.ф.-м.н. И.И. Матвеевой и к.ф.-м.н. М.А. Скворцовой за внимание к работе.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во *введении* обоснована актуальность темы исследования, приведен краткий обзор литературы по рассматриваемой проблеме, сформулированы цели и задачи работы. Представлены необходимые вспомогательные сведения справочного характера, а также кратко изложены основные результаты диссертации.

В **первой главе** рассматриваются смешанные краевые задачи для псевдогиперболического уравнения следующего вида:

$$\begin{array}{l} (\varepsilon\mathbb{I} - D_x^2)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x>0, \quad t>0, \\ (b_{11}u + b_{12}D_x u + b_{13}D_x^2 u + b_{14}D_x^3 u)\big|_{x=0} = 0, \\ (b_{21}u + b_{22}D_x u + b_{23}D_x^2 u + b_{24}D_x^3 u)\big|_{x=0} = 0, \\ u\big|_{t=0} = 0, \quad D_t u\big|_{t=0} = 0, \end{array} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b_{jk} \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, $k = 1, \ldots, 4$. Предполагается, что рассматриваемая задача удовлетворяет условию Лопатинского. Пусть

$$\begin{aligned} A_1 &= b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \quad A_2 = b_{11}b_{23} - b_{13}b_{21}, \\ A_3 &= b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}, \quad A_4 = b_{11}b_{24} - b_{14}b_{21}, \\ A_5 &= b_{12}b_{24} - b_{14}b_{22}, \quad A_6 = b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23}. \end{aligned}$$

Будем называть смешанные краевые задачи (1) *регулярными*, если выполняется одно из условий:

1) $|b_{14}| + |b_{24}| \neq 0$ и $A_4 - A_5 + A_6 \neq 0$;

2) $|b_{14}| + |b_{24}| = 0$ и при этом коэффициенты A_1, A_2, A_3 одновременно не обращаются в нуль и не все равны друг другу.

В противном случае задачи (1) будем называть *нерегулярными*.

Цель данной главы состоит в том, чтобы рассмотреть классы смешанных краевых задач и доказать их однозначную разрешимость в соболевском пространстве с экспоненциальным весом $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, получить оценки решений.

В начале главы описывается построение решения вспомогательной задачи, а именно — начально-краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, которое получается применением преобразования Лапласа по переменной t.

Далее проводится анализ поведения корней характеристического многочлена, соответствующего рассматриваемой вспомогательной задаче. Отметим, что доказанные леммы служат основой для дальнейшего доказательства теорем данной главы. Формулируется условие Лопатинского. Перечислим основные результаты этой главы.

Теорема 1.1. *Пусть выполнено условие Лопатинского для регулярной краевой задачи* (1), *тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что для любой* $f(t, x) \in W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, $f(t, x)\big|_{t=0} = 0$, *регулярная краевая задача* (1) *однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D^2_t D^2_x u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})$, *и для решения* $u(t, x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t, x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| + \|D^2_t D^2_x u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\| \\ \leq c(\gamma_0)\|f(t, x), W^{1,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от функции* $f(t, x)$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнено условие Лопатинского для нерегулярной краевой задачи* (1) *и*

$$A_4 - A_5 + A_6 = 0, A_2 - A_3 + A_6 \neq 0, \text{ либо}$$

$$A_4 = A_5 \neq 0, A_6 = 0, A_2 = A_3,$$

тогда существует $\gamma_0 > 0$ *такое, что для любой*

$$f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{2,0}(\mathbb{R}_{++}^2), \quad \gamma > \gamma_0, \quad f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

краевая задача (1) *однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства* $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$, *и для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \leq c(\gamma_0)\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{2,0}(\mathbb{R}_{++}^2)\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от функции* $f(t,x)$.

Теорема 1.3. *Пусть выполнено условие Лопатинского для нерегулярной краевой задачи* (1) *и* $A_4 - A_5 + A_6 = 0$, $A_2 - A_3 + A_6 = 0$, $A_6 \neq 0$, *тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что для любой* $f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{3,0}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$,

$$f(t,x)\big|_{t=0} = D_t f(t,x)\big|_{t=0} = D_t^2 f(t,x)\big|_{t=0} = 0,$$

краевая задача (1) *однозначно разрешима в классе функций из соболевского пространства* $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_{++}^2)$, *и для решения* $u(t,x)$ *справедлива оценка:*

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)\| \leq c(\gamma_0)\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{3,0}(\mathbb{R}_{++}^2)\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от функции* $f(t,x)$.

После доказательства основных теорем приведены примеры, подтверждающие непустоту рассматриваемых классов смешанных краевых задач.

Особое внимание уделено построению примеров, демонстрирующих существенность условий на функцию $f(t,x)$ по времени: показано, что при ослаблении требований к гладкости этой функции решение смешанной задачи не будет принадлежать соболевскому пространству $W_{2,\gamma}^{2,4}(\mathbb{R}_{++}^2)$.

Завершается глава результатами, связанными с моделированием крутильных колебаний упругого стержня. В рамках данного раздела сформулированы и доказаны теоремы о существовании и единственности решения краевой задачи для жесткого и шарнирного закрепления стержня.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию начально-краевых задач в четверти пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{++}$ для певдогиперболического дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\begin{aligned}
&\big(\varepsilon\mathbb{I} - L_0(D_x)\big)D_t^2 u + [L_0(D_x)]^2 u + \sum_{|\beta|\le 3} b_\beta D_x^\beta u = f(t,x),\\
&(b_{11}u + b_{12}D_{x_n}u + b_{13}D_{x_n}^2 u)\big|_{x_n=0} = 0,\\
&(b_{21}u + b_{22}D_{x_n}u + b_{23}D_{x_n}^2 u)\big|_{x_n=0} = 0,\\
&u\big|_{t=0} = 0, \quad D_t u\big|_{t=0} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $b_\beta \in \mathbb{C}$, $\varepsilon \ge 0$ и $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$. $L_0(D_x) = L_0(D_{x'}, 0) + aD_{x_n}^2$ — однородный эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, $a > 0$, при этом справедлива оценка

$$-r_2|\xi|^2 \le L_0(i\xi) \le -r_1|\xi|^2,$$

здесь $r_2 \ge r_1 > 0$. Как и в первой главе, определим следующие коэффициенты:

$$A_1 = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}, \quad A_2 = b_{11}b_{23} - b_{13}b_{21}, \quad A_3 = b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}.$$

Будем называть смешанные краевые задачи (2) *регулярными*, если выполняются условия $A_1 = A_3 = 0$, $A_2 \ne 0$.

Цель данной главы состоит в том, чтобы рассмотреть регулярные смешанные краевые задачи и доказать их однозначную разрешимость в соболевском пространстве с экспоненциальным весом $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, получить оценки решений.

Далее изучаются свойства корней характеристического уравнения. На основе полученных оценок формируется аналитический аппарат, используемый для доказательства основных утверждений главы.

Затем рассматривается вспомогательная краевая задача, когда $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$, на полупрямой $x_n > 0$, с параметрами $\tau \in \mathbb{C}^+_\gamma$, $\gamma > 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Эта задача является результатом применения оператора Лапласа по t и преобразования Фурье по x' к исходной задаче, а именно

$$\begin{aligned}
&L(\tau, i\xi', D_{x_n})v = \tilde{f}(\tau, \xi', x_n), \quad x_n > 0,\\
&(b_{11}v + b_{12}D_{x_n}v + b_{13}D_{x_n}^2 v)\big|_{x_n=0} = 0,\\
&(b_{21}v + b_{22}D_{x_n}v + b_{23}D_{x_n}^2 v)\big|_{x_n=0} = 0,\\
&v \in W_2^4(\mathbb{R}_+),
\end{aligned}$$

здесь

$$L(\tau, i\xi', D_{x_n}) = D^4_{x_n} - \big(\tau^2 - 2L_0(i\xi',0)\big)D^2_{x_n} \\ + \big(\varepsilon\tau^2 - L_0(i\xi',0)\tau^2 + [L_0(i\xi',0)]^2\big).$$

Основным результатом этого этапа является вывод явных формул для решений данной краевой задачи и доказательство ряда вспомогательных лемм.

Затем рассматривается класс регулярных смешанных краевых задач при $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$. Разрешимость устанавливается посредством следующей схемы: (1) получено эквивалентное представление частного решения в интегральной форме; (2) доказана ключевая лемма, содержащая оценки решений; (3) на основе полученных оценок доказана теорема о существовании и единственности решения выделенного класса регулярных смешанных краевых задач. Отметим, что нумерация теорем соответствует нумерации теорем в тексте диссертации.

Теорема 2.1. *Пусть $\varepsilon > 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$, $A_1 = A_3 = 0$, $A_2 \ne 0$. Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что задача (2) однозначно разрешима в пространстве функций $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, таких, что $D^2_t D^2_{x_i} u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1,\dots,n$, для любой $f(t,x',x_n) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, такой, что $f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$. Для решения $u(t,x)$ выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D^2_t D^2_{x_i} u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$

$$\le c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ не зависит от $f(t,x)$.

Результат, сформулированный в теореме 2.1, справедлив также для более общей краевой задачи, а именно при $b_\beta \ne 0$, $|\beta| \le 3$.

Далее изучается регулярная смешанная краевая задача для псевдогиперболического уравнения (2) при $\varepsilon = 0$ и $b_\beta = 0$ при $|\beta| \le 3$.

Теорема 2.3. *Пусть $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$, $A_2 \ne 0$, $A_1 = A_3 = 0$ и $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что задача (2) однозначно разрешима в пространстве функций $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, таких, что $D^2_t D^2_{x_i} u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1,\dots,n$, для любой $f(t,x',x_n) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ такой, что $f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$, $f(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1}))$.*

Для решения $u(t,x)$ выполнена оценка:

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D^2_t D^2_{x_i} u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$\leq c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ не зависит от $f(t,x)$.

Теорема 2.4. *Пусть $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \leq 3$, $A_2 \neq 0$, $A_1 = A_3 = 0$ и $n = 2,3,4$. Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что задача (2) однозначно разрешима в пространстве функций $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, таких, что $D^2_t D^2_{x_i} u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1,\ldots,n$, для любой $f(t,x',x_n) \in W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, такой, что $f(t,x',x_n)|_{t=0} = 0$, $(1+|x'|^{|\alpha|})f(t,x',x_n) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1}))$, при этом*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} x'^{\alpha} f(t,x',x)dx' = 0,$$

где $|\alpha| = 0$ при $n = 3,4$, $|\alpha| = 1$ при $n = 2$. Для решения $u(t,x)$ выполнена оценка:

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D^2_t D^2_{x_i} u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$\leq c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{1,0,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$+\|\|(1+|x'|^{|\alpha|})f(t,x',x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ не зависит от $f(t,x)$.

Отметим, что класс регулярных смешанных краевых задач характеризуется тем, что к правой части уравнения предъявляются те же требования гладкости, что и в задаче Коши.

Третья глава посвящена изучению смешанных краевых задач для псевдогиперболических уравнений, которые не удовлетворяют условию регулярности. Будем называть такие задачи *нерегулярными.*

Основная цель главы состоит в том, чтобы изучить нерегулярные классы смешанных краевых задач и доказать их однозначную разрешимость в соболевском пространстве с экспоненциальным весом $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, получить оценки решений.

Для достижения цели построена интегральная форма решения и получены оценки решения. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $\varepsilon > 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$ *и числа* A_i, $i = 1, 2, 3$, *не удовлетворяют условиям из теоремы 2.1, при этом не все* A_i *одинаковые. Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (2) *однозначно разрешима в пространстве функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \dots, n$, *для любой* $f(t, x', x_n)$ *из соболевского пространства функций* $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ *такой, что* $f(t, x', x_n)|_{t=0} = D_t f(t, x', x_n)|_{t=0} = 0$. *Для решения* $u(t, x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| \le c(\gamma_0)\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|,$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t, x)$.

Построен пример, показывающий, что при ослаблении условий гладкости, наложенных на правую часть, согласно теореме 3.1, рассматриваемая смешанная задача не будет иметь решения в пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$. Этот результат имеет важное значение, поскольку показывает, что для однозначной разрешимости смешанных краевых задач требования на данные задачи могут быть более жесткими, чем при рассмотрении задачи Коши.

Результат, сформулированный в теореме 3.1, справедлив также для более общей краевой задачи, а именно при $b_\beta \ne 0$, $|\beta| \le 3$.

Затем проводится анализ нерегулярных смешанных краевых задач для псевдогиперболического уравнения (2) при $\varepsilon = 0$ и $b_\beta = 0$ при $|\beta| \le 3$. Для достижения цели используется интегральная форма представления решения, которая была получена ранее в этой главе, и установлены оценки решения.

Теорема 3.3. *Пусть* $n > 4$, $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \le 3$ *и* A_i, $i = 1, 2, 3$, *не удовлетворяют условиям из теоремы 2.3, при этом не все* A_i *одинаковые. Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (2) *однозначно разрешима в классе функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$ *таких, что* $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \dots, n$, *для любой* $f(t, x', x_n)$ *из соболевского пространства функций* $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$ *такой, что* $f(t, x', x_n)|_{t=0} = D_t f(t, x', x_n)|_{t=0} = 0$ *и* $f(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1}))$. *Для решения* $u(t, x)$

выполнена оценка:

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$\leq c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \|\|f(t,x), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

Теорема 3.4. *Пусть* $n = 2, 3, 4$, $\varepsilon = 0$, $b_\beta = 0$, $|\beta| \leq 3$ *и* A_i, $i = 1, 2, 3$, *не удовлетворяют условиям из теоремы 2.4, при этом не все* A_i *одинаковые. Тогда существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что задача* (2) *однозначно разрешима в пространстве функций* $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $\gamma > \gamma_0$, *таких, что* $D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, $i = 1, \ldots, n$, *для любой* $f(t, x', x_n)$ *из соболевского пространства функций* $W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$, *такой, что* $f(t, x', x_n)|_{t=0} = D_t f(t, x', x_n)|_{t=0} = 0$, *и при этом*

$$(1 + |x'|^{|\alpha|}) f(t, x', x_n) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++}; L_1(\mathbb{R}^{n-1})), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} x'^{\alpha} f(t, x', x) dx' = 0,$$

где $|\alpha| = 0$ *при* $n = 3, 4$, $|\alpha| = 1$ *при* $n = 2$. *Для решения* $u(t,x)$ *выполнена оценка:*

$$\|u(t,x), W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\| + \sum_{i=1}^{n} \|D_t^2 D_{x_i}^2 u(t,x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$\leq c(\gamma_0)\big(\|f(t,x), W^{2,2,0}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})\|$$
$$+\|\|(1 + |x'|^{|\alpha|}) f(t, x', x_n), L_1(\mathbb{R}^{n-1})\|, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2_{++})\|\big),$$

где положительная константа $c(\gamma_0)$ *не зависит от* $f(t,x)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе проведено исследование корректности смешанных краевых задач для класса псевдогиперболических уравнений четвертого порядка в четверти пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{++}$. Основные научные результаты:

1. Выделены и исследованы классы регулярных и нерегулярных смешанных краевых задач, удовлетворяющих условию Лопатинского.

2. Установлены достаточные условия, обеспечивающие существование и единственность решений рассматриваемых задач в анизотропном весовом соболевском пространстве $W^{2,4}_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{++})$. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости.

3. Получены явные формулы решений и их оценки для смешанных краевых задач с помощью применения аналитического подхода, основанного на преобразовании Фурье-Лапласа.

Таким образом, настоящая работа представляет собой систематическое исследование корректности смешанных краевых задач для класса псевдогиперболических уравнений четвертого порядка. Полученные результаты вносят вклад в развитие теории уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по времени.

Статьи, включенные в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

[1] Шеметова В. В. Одна краевая задача для псевдогиперболического уравнения в четверти пространства // Математические труды. – 2025. – Т. 28, № 2. – С. 102–123.

[2] Shemetova V. V. Solvability Conditions for an Initial-boundary Value Problem a Pseudo-hyperbolic Equation with Nonzero Initial Conditions // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2025. – Т. 46, № 4. – P. 1910–1919.

[3] Шеметова В. В. Об одной краевой задаче для псевдогиперболического уравнения // Математические труды. – 2023. – Т. 26, № 1. – С. 192–207.

[4] Бондарь Л. Н., Шеметова В. В. О краевых задачах в четверти плоскости для одного псевдогиперболического уравнения // Математические труды. – 2022. – Т. 25, № 2. – С. 3–30.

Тезисы и материалы конференций

[5] Demidenko G. V., Shemetova V. V. On the unique solvability of a class of boundary value problems for a pseudohyperbolic equation // Differential and Difference Equations. Russian-Chinese Conference. – Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2025. – P. 41.

[6] Shemetova V. V. On solvability conditions for boundary value problems for the Vlasov-Rayleigh-Bishop equation // 2024 International Conference on Computational Modeling and Applied Mathematics – Chinese-Russian Conference «Differential Equations and Applications». – Dalian, China – P. 34.

[7] Shemetova V. V. Boundary value problems for a class of pseudohyperbolic equations // Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2024). Proceedings of the 8th International School-Seminar. – Irkutsk: Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS, 2024. – P. 246–247.

[8] Шеметова В. В. Смешанные задачи в четверти пространства для одного псевдогиперболического уравнения // Материалы 61-й Международной научной студенческой конференции. – Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2023. – С. 112.

[9] Шеметова В. В. Об одной краевой задаче в четверти пространства для псевдогиперболического уравнения // Материалы конференции. Том 2. – Могилев: Белорусско-Российский университет, 2023. – С. 35–36.

[10] Shemetova V. V. An initial-boundary value problem for a pseudohyperbolic equation // Differential and Difference Equations. Russian-Chinese Conference. – Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2023. – P. 146.