

УТВЕРЖДАЮ

Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт механики  
им. Р.Р. Мавлютова  
Уфимского научного центра РАН  
д.ф.-м.н., профессор



С. Ф. Урманчеев

«13» \_\_\_\_\_ 2015 г.

### ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу Черемных Е. Н. «Решение начально-краевых задач о совместном движении трех вязких теплопроводных жидкостей в плоском канале», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности из протокола заседания 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Диссертация Черемных Е. Н. «Решение начально-краевых задач о совместном движении трех вязких теплопроводных жидкостей в плоском канале» соответствует 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, является завершенным научным исследованием, имеет научную ценность и практическую значимость.

**1. Актуальность темы.** Среди постановок начально-краевых задач для уравнений названных моделей жидких сред особое место занимают задачи, описывающие движения с поверхностями раздела. Из известных примеров таких движений можно привести следующие: внутренние волны, совместные движения систем типа вода-нефть, плёночные течения. К ним же относятся и движения, порождаемые термокапиллярным эффектом, когда поверхностное натяжение зависит от температуры, что является важным для технологических процессов в невесомости, а также в тонких слоях в земных условиях. Исследование подобного рода задач связано с большими математическими трудностями: высокий порядок, нелинейность уравнений и граничных условий на поверхностях раздела, неизвестность областей определения решений. В связи с этим является актуальной задача качественного исследования уравнений подмоделей, содержащих меньшее число независимых переменных. В частности, точные решения всегда играли

и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Эти решения часто используют в качестве "тестовых задач" для проверки корректности и оценки точности различных асимптотических, приближенных и численных методов, а также имеют чрезвычайно важное значение при изучении устойчивости течений.

В работе Черемных Е. Н. исследовано инвариантное и частично-инвариантное решения уравнений вязкой теплопроводной жидкости, когда на поверхностях раздела трёх несмешивающихся жидкостей коэффициенты поверхностного натяжения линейно зависят от температуры, а также источником движения являются нестационарные градиенты давления.

**2. Содержание работы.** Диссертация Черемных Е. Н. изложена на 103 страницах (включая таблицы и иллюстрации) и состоит из введения, трех глав, краткого перечня основных результатов и списка литературы.

Во **введении** дается обоснование актуальности работы, приведен обзор литературы по теме исследования, описана структура диссертации и изложены ее основные результаты. Приведена математическая формулировка краевой задачи о движении трех несмешивающихся несжимаемых вязких теплопроводных жидкостей в плоских слоях.

**Первая глава** является вспомогательной. В течение всей работы используются преобразование Лапласа и его численное обращение, а также обобщенное неравенство Фридрикса для составной области из трёх отрезков, **необходимое при получении априорных оценок**. В пунктах 1.1, 1.2 даны известные определения и теоремы о преобразовании Лапласа и описан один из численных методов его обращения, используемый в диссертации. В пункте 1.3 доказано неравенство Фридрикса на случай области, состоящей из трёх конечных отрезков. С помощью вариационного принципа определена наименьшая постоянная в правой части этого неравенства, что позволило получить не улучшаемые априорные оценки решений рассматриваемых во 2 и 3 главах задач.

Во **второй главе** исследуется краевая задача, возникающая при совместном однонаправленном движении трёх вязких жидкостей под действием термокапиллярных сил и перепада давления. Найдено точное стационарное решение задачи. Решение нестационарной задачи получено в виде конечных аналитических формул в изображениях по Лапласу. Доказано, что если градиент давления в одной из жидкостей имеет конечный предел, то решение всегда выходит на стационарный режим с ростом времени и получена экспоненциальная оценка скорости сходимости с показателем зависящим от физических свойств сред и толщин слоёв. Путём численного обращения преобразования Лапласа получена эволюция полей скоростей и возмущений температур к стационарному режиму для конкретных жидких сред.

**Третья глава** посвящена исследованию частично инвариантного решения ранга два и дефекта три для четырехмерной подалгебры уравнения вязкой теплопроводной жидкости. Оно интерпретируется как двумерное



движение трёх несмешивающихся жидкостей в плоском канале, ограниченном твёрдыми неподвижными стенками, на которых известно распределение температур. С математической точки зрения, возникающая краевая задача является нелинейной и обратной. Условия инвариантности линеаризует задачу. Для неё получены априорные оценки, найдено стационарное точное решение и доказано, что с ростом времени решение выходит на этот стационарный режим, если стабилизируются со временем температуры на стенках. В изображениях по Лапласу получено точное решение. Его качественный и численный анализ хорошо подтверждает стремление решения к стационарному с ростом времени.

В конце диссертации сформулированы ее основные результаты.

**3. Научные результаты и их новизна.** В диссертационной работе Черемных Е. Н.

1. Доказано неравенство Фридрикса на случай области, состоящей из трёх конечных отрезков, определена наименьшая постоянная в правой части этого неравенства с помощью вариационного принципа.

2. Изучена начально-краевая задача, возникающая при совместном однонаправленном движении трех вязких жидкостей под действием термокапиллярных сил и перепада давления:

- найдено точное стационарное решение задачи;

- доказано, что если градиент давления в одной из жидкостей имеет конечный предел, то решение всегда выходит на стационарный режим с ростом времени и получена экспоненциальная оценка скорости сходимости с показателем, зависящим от физических постоянных сред и толщин слоев;

- решение нестационарной задачи найдено в виде конечных аналитических формул в изображениях по Лапласу и изучены его свойства;

- путем численного обращения преобразования Лапласа построена эволюция полей скоростей и возмущений температур к стационарному режиму.

3. Впервые исследована начально-краевая задача, возникающая при двумерном движении трех несмешивающихся жидкостей в плоском канале, ограниченном твердыми неподвижными стенками, на которых известно распределение температур:

- дан вывод априорных оценок решения нестационарной задачи;

- найдено точное стационарное решение и доказано, что с ростом времени решение выходит на этот стационарный режим, если стабилизируются температуры на стенках;

- в изображениях по Лапласу решение нестационарной задачи получено в явном виде. Численное обращение преобразования Лапласа подтверждает стремление решения к стационарному с ростом времени.

**4. Достоверность и обоснованность результатов.** Достоверность и обоснованность результатов, содержащихся в диссертации, обеспечивается использованием классических математических моделей механики сплошных сред и математических методов их исследования, строгими доказательствами

теорем, а также согласованием аналитических решений и данных численных расчетов.

**5. Значимость для науки и практики выводов и рекомендаций диссертанта.** Примененная методика априорных оценок для рассмотренных начально-краевых задач может быть использована и для изучения движений жидкостей со многими поверхностями раздела и в другой геометрии, в частности, цилиндрической. Полученные результаты имеют также и практическую значимость ввиду их приложений в природных (слои в океанах и атмосфере) и технологических (изготовление пленок, нанесение покрытий и т. д.) процессах.

**6. Соответствие автореферата содержанию диссертации.** Автореферат диссертации соответствует ее содержанию.

**7. Подтверждение опубликованных основных результатов диссертации в научной печати.** Основные результаты диссертации доложены на всероссийских и международных конференциях и напечатаны в виде полнотекстовых публикаций докладов, опубликованы в 13 работах, которые соответствуют теме диссертации и с достаточной полнотой отражают содержание, выводы и заключение диссертации. Из них 5 статей напечатаны в журналах из списка ВАК РФ для предоставления результатов кандидатской диссертации.

**8. Недостатки по содержанию и оформлению диссертации.**

1) Имеются опечатки, не влияющие на содержание и выводы диссертации, на страницах 5, 16, 18, 27, 28, 31, 60, 61.

2) Для основной системы уравнений на странице 5 рассмотрены решения, полученные с использованием допускаемой группы, но сама группа не представлена. В трех слоях действует трехкратная группа. Как она действует на краевых условиях можно только догадываться.

3) Сложные краевые условия на подвижных поверхностях раздела на рассмотренных простейших решениях являются простой формальностью.

**9. Соответствие работы требованиям, предъявляемым к диссертациям.** Диссертационная работа является завершенным научным исследованием, выполнена на достаточно высоком научном уровне. Учитывая актуальность тематики, новизну и практическое значение полученных результатов, считаю, что диссертация «Решение начально-краевых задач о совместном движении трех вязких теплопроводных жидкостей в плоском канале» удовлетворяет всем требованиям ВАК России, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор Е. Н. Черемных заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Отзыв составлен заведующим лабораторией дифференциальных уравнений механики Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН д.ф.-м.н., профессором Хабировым Салаватом Валеевичем.

Диссертация, автореферат и отзыв на диссертацию обсуждены **составом** лаборатории дифференциальных уравнений механики Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН на семинаре «Групповой анализ уравнений механики».

Зав. лабораторией  
дифференциальных  
уравнений механики  
Институт механики  
им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН  
д.ф.-м.н., профессор



С.В. Хабиров

«13» апреля 2015 г.

Подпись С. В. Хабирова удостоверяю:

Ученый секретарь Института механики  
им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН  
к. ф.-м. н.



Д. М. Зарипов

Адрес: Россия, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, 71, Институт механики  
им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН  
Тел.: (347) 235-52-55  
E-mail: habirov@anrb.ru