

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Черемных Елена Николаевна

Решение начально – краевых задач
о совместном движении трех вязких
теплопроводных жидкостей в плоском канале

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Андреев Виктор
Константинович

Иркутск — 2015

Содержание

Введение	3
1 Вспомогательные результаты	14
1.1 Преобразование Лапласа	14
1.2 Методы численного обращения преобразования Лапласа . .	16
1.3 Обобщение неравенства Фридрикса на область, состоящую из трёх отрезков	18
2 Решение начально – краевой задачи, возникающей при сов- местном однонаправленном движении трёх жидкостей	26
2.1 Постановка задачи	26
2.2 Стационарное решение	28
2.3 Априорные оценки при заданном перепаде давления	31
2.4 Решение нестационарной задачи методом преобразования Лапласа	40
2.5 Стационарное термокапиллярное течение Куэтта в слоях . .	47
2.6 Сходимость решения к стационарному	49
2.7 Решение нестационарной задачи методом преобразования Ла- пласа	54
2.8 Комбинированное движение	57
3 Свойства решений двумерных уравнений термокапилляр- ных движений в плоском канале	60
3.1 Постановка задачи и её преобразование	60
3.2 Априорные оценки	63
3.3 Стационарное решение	78
3.4 Свойства нестационарного решения	86
Заключение	97
Литература	98

Введение

Актуальность проблемы. Среди множества моделей, используемых в механике жидкости и газа, можно выделить так называемые классические модели, к которым относятся уравнения газовой динамики, уравнения Эйлера, Навье – Стокса, Обербека – Буссинеска, пограничного слоя Прандтля. Среди постановок начально – краевых задач для уравнений названных моделей особое место занимают задачи, описывающие движения жидких сред с поверхностями раздела. Из известных примеров таких движений можно привести следующие: внутренние волны [45], совместные движения систем типа вода – нефть [9], плёночные течения [8]. Исследование такого рода задач связано с большими математическими трудностями: нелинейность уравнений и граничных условий на поверхностях раздела, неизвестность областей определения решений. В связи с этим является актуальной задача качественного исследования уравнений подмоделей, содержащих меньшее число независимых переменных. В частности, точные решения всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Эти решения часто используют в качестве "тестовых задач" для проверки корректности и оценки точности различных асимптотических, приближенных и численных методов, а также имеют чрезвычайно важное значение при изучении устойчивости течений.

В условиях, близком к невесомости, существенное влияние на устойчивость её равновесия и движения жидкостей с поверхностью раздела или со свободной поверхностью оказывают зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры и порождаемый ею термокапиллярный эффект. Несмотря на то, что о существовании этого эффекта известно уже давно (см. подробный обзор в [66]), интенсивное изучение данного явления началось несколько десятилетий назад. В 1956 году Блок [58], анализируя результаты собственных экспериментальных исследований условий возникновения движений в тонких слоях жидкости со свободной поверхностью, а также проведённых ранее опытов Бенара [57], пришёл к заключению, что в этих случаях существенную роль играет зависимость коэффициента поверхностного натяжения от температуры. В 1958 году выходит первая теоретическая работа, выполненная Пирсоном [63], в которой исследован механизм неустойчивости подогреваемого снизу слоя жидкости со свободной поверхностью при отсутствии массовых сил. В этой работе был получен принципиальный результат: наличие только термокапиллярных сил может приводить к возникновению движения в жидкости. Дальнейшее теоретическое изучение влияния термокапиллярного эффекта на устойчивость рав-

новесия было продолжено рядом авторов L. E. Scriven, C. V. Sterling (1964), J. C. Berg (1972), А. А. Непомнящий, И. Б. Симановский (1985, 1986), [10].

В последние годы, в связи с развитием космической технологии значительно возросла необходимость теоретического и экспериментального изучения термокапиллярного эффекта (см. монографии [[50], [1], [15] и цитируемую в них литературу). В отсутствии гидростатического давления в условиях невесомости форма жидкости определяется только её поверхностным натяжением, что позволяет осуществлять плавление и затвердевание веществ без физического контакта со стенками.

В связи с развитием современной технологии появились новые задачи, когда необходимо учитывать термокапиллярный эффект и в земных условиях. Например, при лазерном отжиге полупроводников или при лазерной обработке материалов с плавлением, которая применяется для легирования поверхностного слоя металла [20]. При этом на поверхности материала появляются относительно протяжённые тонкие слои расплава (глубиной порядка нескольких мкм), в которых, согласно [65], [64], термокапиллярные силы доминируют над силами термогравитации. Возникающие здесь вопросы термокапиллярной устойчивости интенсивно исследуются в [17], [52].

Из вышесказанного следует, что оценка эффекта Марангони (влияние термокапиллярных сил) в той или иной выбранной модели является актуальной задачей.

Диссертационная работа посвящена исследованию одного инвариантного и частично – инвариантного решения уравнений вязкой теплопроводной жидкости, когда на поверхностях раздела трёх несмешивающихся жидкостей коэффициенты поверхностного натяжения линейно зависят от температуры, а также источником движения являются нестационарные градиенты давления.

Математическая модель трёхслойных движений используется при анализе течений и волн в жидких и сыпучих средах. В работе [53] рассматривается трёхслойная среда — два слоя идеальной однородной жидкости, грунт. Нижняя жидкость имеет плотность ρ_1 , верхняя — ρ_2 , $\rho_1 > \rho_2$. На поверхности раздела верхний слой — воздух (свободная поверхность), и на поверхности раздела двух слоёв образуются волны. При движении нижнего слоя происходит взаимодействие жидкости с грунтом, в результате чего частицы донного слоя также приходят в движение.

Отметим, что задача об однонаправленном движении двух вязких жидкостей изучена в работах [5, 6]. Задача о термокапиллярном движении капли одной жидкости в другой жидкости, занимающей все пространство исследовалось в работах И. В. Денисовой [59] – [61]. В этих работах получены априорные оценки решений.

В качестве математической модели в диссертации используются уравнения двумерных движений вязкой теплопроводной жидкости [10]

$$u_t + uu_x + vv_y + \frac{1}{\rho}p_x = \nu(u_{xx} + u_{yy}), \quad (1)$$

$$v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho}p_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}), \quad (2)$$

$$u_x + v_y = 0, \quad (3)$$

$$\Theta_t + u\Theta_x + v\Theta_y = \chi(\Theta_{xx} + \Theta_{yy}), \quad (4)$$

где $u(x, y, t), v(x, y, t)$ — компоненты вектора скорости, $p(x, y, t)$ — давление, $\Theta(x, y, t)$ — температура, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность жидкости. Величины ρ, ν, χ представляются постоянными.

Поскольку целью работы является исследование свойств решений начально-краевых задач, описывающих специальные термокапиллярные движения трёх несмешивающихся жидкостей в плоских слоях, то приведём полную постановку задачи. Для этого в системе (1) – (4) введём индекс j , фиксирующий жидкость, $j = 1, 2, 3$. Тогда

$$u_{jt} + u_j u_{jx} + v_j u_{jy} + \frac{1}{\rho_j} p_{jx} = \nu_j (u_{jxx} + u_{jyy}),$$

$$v_{jt} + u_j v_{jx} + v_j v_{jy} + \frac{1}{\rho_j} p_{jy} = \nu_j (v_{jxx} + v_{jyy}), \quad (5)$$

$$u_{jx} + v_{jy} = 0,$$

$$\Theta_{jt} + u_j \Theta_{jx} + v_j \Theta_{jy} = \chi_j (\Theta_{jxx} + \Theta_{jyy}).$$

Пусть $y = l_n(x, t), n = 1, 2$ — функции, описывающие положение границ раздела, тогда на них должны быть выполнены следующие соотношения [9]

$$u_1(x, l_1(x, t)) = u_2(x, l_1(x, t)), \quad v_1(x, l_1(x, t)) = v_2(x, l_1(x, t)), \quad (6)$$

$$u_2(x, l_2(x, t)) = u_3(x, l_2(x, t)), \quad v_2(x, l_2(x, t)) = v_3(x, l_2(x, t))$$

равенства скоростей;

$$l_{1t} + u_1(x, l_1)l_{1x} = v_1(x, l_1), \quad l_{2t} + u_2(x, l_2)l_{2x} = v_2(x, l_2) \quad (7)$$

кинематические условия;

$$\Theta_1(x, l_1(x, t)) = \Theta_2(x, l_1(x, t)), \quad (8)$$

$$\Theta_2(x, l_2(x, t)) = \Theta_3(x, l_2(x, t))$$

равенства температур;

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial \Theta_1(x, l_1(x, t))}{\partial n_1} &= k_2 \frac{\partial \Theta_2(x, l_1(x, t))}{\partial n_1}, \\ k_2 \frac{\partial \Theta_2(x, l_2(x, t))}{\partial n_2} &= k_3 \frac{\partial \Theta_3(x, l_2(x, t))}{\partial n_2} \end{aligned} \quad (9)$$

равенства потоков тепла, где $k_j > 0$ постоянные коэффициенты теплопроводности, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ — нормали к линиям $y = l_1(x, t), y = l_2(x, t)$, соответственно. Нормаль \mathbf{n}_1 направлена из жидкости "1" в жидкость "2", \mathbf{n}_2 направлена из жидкости "2" в жидкость "3" (см. рис. 1), так что

$$\mathbf{n}_n = \frac{(-l_{nx}, 1)}{\sqrt{1 + l_{nx}^2}}, \quad n = 1, 2. \quad (10)$$

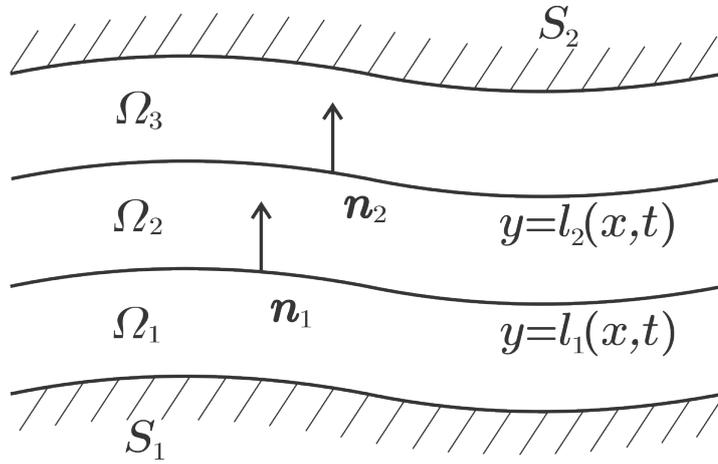


Рис. 1: Схема области движения

$$(p_1 - p_2)\mathbf{n}_1 + [2\rho_2\nu_2 D(\mathbf{u}_2) - 2\rho_1\nu_1 D(\mathbf{u}_1)]\mathbf{n}_1 = 2\sigma_1(\Theta_1)K_1\mathbf{n}_1 + \nabla_{11}\sigma_1 \quad (11)$$

динамическое условие при $y = l_1(x, t)$;

$$(p_2 - p_3)\mathbf{n}_2 + [2\rho_3\nu_3 D(\mathbf{u}_3) - 2\rho_2\nu_2 D(\mathbf{u}_2)]\mathbf{n}_2 = 2\sigma_2(\Theta_2)K_2\mathbf{n}_2 + \nabla_{11}\sigma_2 \quad (12)$$

динамическое условие при $y = l_2(x, t)$.

В (11), (12) D — тензор скоростей деформаций и в декартовых прямоугольных координатах он имеет вид ($\mathbf{u}_j = (u_j, v_j)$)

$$D(\mathbf{u}_j) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right) & \frac{\partial u_j}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

В правых частях (11), (12) $\nabla_{11} = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}$ обозначает поверхностный градиент, величины K_1, K_2 — средние кривизны поверхностей раздела $y = l_n(x)$ [24]:

$$K_n = \frac{\partial}{\partial x} \frac{l_{nx}}{\sqrt{1 + l_{nx}^2}} = \frac{l_{nxx}}{(1 + l_{nx}^2)^{3/2}}, \quad (13)$$

а $\sigma_1(\Theta_1), \sigma_2(\Theta_2)$ — коэффициенты поверхностных натяжений, зависящие от температуры. Для большинства реальных жидких сред зависимость $\sigma_n(\Theta_n)$ хорошо аппроксимируется линейной

$$\sigma_n(\Theta_n) = \sigma_n^0 - \alpha_n \Theta_n, \quad n = 1, 2, \quad (14)$$

где $\alpha_n > 0$ — температурные коэффициенты поверхностного натяжения линий $y = l_n(x, t)$. Они предполагаются постоянными и определяются экспериментальными методами. В главах 2, 3 будут приведены их конкретные значения для некоторых жидкостей.

На твёрдых неподвижных стенках S_1, S_2 заданы условия прилипания

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 |_{S_1} = 0, \quad \mathbf{u}_3 |_{S_2} = 0 \\ \Theta_1 |_{S_1} = \Theta_{10}(\mathbf{x}, t), \quad \Theta_3 |_{S_2} = \Theta_{30}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (15)$$

Для полной постановки задачи к соотношениям (5) — (15) следует добавить начальные условия

$$\begin{aligned} l_n(x, 0) = l_{n0}(x), \\ \mathbf{u}_j(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_{0j}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j, \quad \text{div } \mathbf{u}_{0j} = 0, \\ \Theta_j(\mathbf{x}, 0) = \Theta_{0j}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_j. \end{aligned} \quad (16)$$

Цель диссертационной работы заключается в исследовании решений сопряжённых начально – краевых задач, описывающих движение трёх вязких теплопроводных жидкостей в плоском канале, построение точных решений этих задач, выводу априорных оценок, а также численное решение поставленных задач.

Методы исследования. В данной работе для нахождения точных решений использовались метод преобразования Лапласа, метод априорных оценок, а также методы общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что численные результаты здесь носят, в основном, вспомогательный иллюстративный характер.

Научная новизна. В диссертации впервые исследованы начально – краевые задачи, описывающие нестационарное однонаправленное и двумерное движение трёх вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое. Получены априорные оценки и доказаны теоремы о сходимости нестационарных решений к стационарным режимам. Установлены, на основе доказанного неравенства Фридрихса для области, состоящей из трех отрезков,

оптимальные оценки скорости сходимости. В изображениях по Лапласу для всех задач получены аналитические выражения для решений. Численное решение задач хорошо подтверждает качественные результаты.

Теоретическая и практическая значимость. Примененная методика априорных оценок для рассмотренных начально – краевых задач может быть использована и для изучения движений жидкостей со многими поверхностями раздела и в другой геометрии, в частности, цилиндрической. Заметим, что в последние годы изучение сопряжённых движений жидких сред является актуальной темой ввиду их приложений в природных (слои в океанах и атмосфере) и технологических (изготовление пленок, нанесение покрытий и т. д.) процессах.

Обоснованность и достоверность полученных результатов, содержащихся в диссертации, обеспечивается использованием классических математических моделей механики сплошных сред и математических методов их исследования, а также согласованием аналитических решений и данных численных расчетов.

Перейдём к описанию структуры и содержания диссертационной работы. **Первая глава** является вспомогательной. В течение всей работы используются преобразование Лапласа и его численное обращение, а также обобщённые неравенства Фридрихса для области состоящей из трёх отрезков, необходимые при получении априорных оценок. В пунктах 1.1, 1.2 даны известные определения и теоремы о преобразовании Лапласа и описан один из численных методов его обращения, используемый в диссертации.

В пункте 1.3 обобщено неравенство Фридрихса на случай области, состоящей из трёх конечных отрезков. С помощью вариационного принципа определена наименьшая постоянная в правой части этого неравенства, что позволило получить не улучшаемые априорные оценки решений рассматриваемых задач. Заметим, что для случая двух отрезков обобщённое неравенство Фридрихса установлено в [7].

Во **второй главе** изучена начально – краевая задача, возникающая при совместном однонаправленном движении трёх вязких жидкостей под действием термокапиллярных сил и перепада давления. Жидкости ограничены твёрдыми неподвижными стенками и контактируют по плоским поверхностям раздела. Движение возникает под действием градиента давления и термокапиллярных сил из состояния покоя. Для описания однонаправленного совместного движения этой системы используются система уравнений (5), граничные условия (6) – (9), (11), (12), а также условия на неподвижных твёрдых стенках (15) и начальные данные (16), где $\mathbf{u}_j = (u_j(y, t), 0, 0)$, $p_j = \rho_j f_j(t)x + \alpha_j(t)$, $\Theta_j = -A_j x + T_j(y, t)$ с произвольными f_j, α_j и $A_j, j = 1, 2, 3$. Анализ движения сводится к решению

линейных сопряжённых начально – краевых задач для систем параболических уравнений для скоростей $u_j(y, t)$ и возмущений температур $T_j(y, t)$. Рассматриваемое решение является инвариантным относительно однопараметрической подгруппы непрерывных преобразований, соответствующей оператору $\partial/\partial x + \rho f(t)\partial/\partial p - A\partial/\partial \Theta$, который допускается системой (1) – (4). Поскольку полученная задача является линейной, то влияние перепада давления и термокапиллярных сил происходит независимо друг от друга. Поэтому сначала рассмотрен случай, когда источник движения – только градиент давления ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), а затем – термокапиллярный эффект ($f_j(t) = 0$).

В пунктах 2.2, 2.5 найдено точное стационарное решение задач. В пункте 2.3 доказано, что если градиент давления в одной из жидкости имеет конечный предел, более точно

$$\int_0^{\infty} |f_j^0 - f_j(t)| e^{\delta t} dt < \infty, \quad \delta = \min(\rho_j^{-1}),$$

то решение всегда выходит на стационарный режим с ростом времени и получена экспоненциальная оценка скорости сходимости для $u_j(y, t), T_j(y, t)$, равномерные на своих областях определения.

Для получения более точной информации о поведении функций скорости в пунктах 2.4, 2.7 применяется преобразование Лапласа, в результате чего приходим к краевой задаче для изображений. Общее решение для функций – изображений находится без труда. Полученные явные выражения для функций – изображений удовлетворяют свойствам преобразования Лапласа, которые описаны в пункте 1.1. Установлено, что при больших временах скорости и возмущения температур стремятся к стационарному режиму, найденному в пунктах 2.2, 2.5. Оригиналы функций скорости и возмущения температур восстанавливаются по формуле обращения преобразования Лапласа. Обратное преобразование Лапласа в явном виде выполнить затруднительно, поэтому численное обращение преобразования Лапласа выполняется при помощи квадратурной формулы наивысшей степени точности. Расчёты проводились для системы силикон ($j = 1$) – вода ($j = 2$) – воздух ($j = 3$) при температуре $20^\circ C$ и показывают, что если $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f^0 = const$, то решение выходит на стационарный режим, а если предел не существует, то решение не будет сходиться к стационарному. В случае, когда градиент давления в одной из жидкостей достаточно быстро стремится к нулю, то происходит торможение жидкостей за счёт вязкого трения. В пункте 2.6 показано, что, в случае, когда источник движения является термокапиллярный эффект, решения всегда выходит на стационарный режим.

В пункте 2.8 рассмотрено комбинированное движение: движение под действием градиента давления и термокапиллярных сил. Для получения решения достаточно суммировать полученные выражения для скоростей и возмущений температур в пунктах 2.2, 2.5 – в случае стационарного течения, и в пунктах 2.4, 2.7 – для нестационарного. После обезразмеривания в выражениях возникнут параметр $N = f_1^0 l_1 l_3^2 / 2\nu_1^2$, который отвечает за влияние перепада давления и параметры a_1, a_2, a_3 – за влияние термокапиллярных сил. Поэтому в случае, $|N| \ll |a_j|$, когда преобладают термокапиллярные силы, имеем почти линейный профиль скоростей – течение Куэтта. При $|N| \gg |a_j|$, главными становятся градиенты давления в слоях и профили близки к параболическим – течения Пуазейля.

Глава 3 посвящена исследованию одного частично инвариантного решения ранга два и дефекта три уравнения вязкой теплопроводной жидкости, построенного на четырёхмерной подалгебре Ли $\langle \partial_x, t\partial_u + \partial_x, \partial_p, \partial_{\Theta_j} \rangle$, допускаемой системой уравнений (1) – (4) двумерных движений. Оно интерпретируется как движение трёх несмешивающихся жидкостей в плоском канале, ограниченном твёрдыми неподвижными стенками, на которых известно распределение температур. Таким образом, частично инвариантное решение ищется в виде

$$u_j = xw_j(y, t), \quad v_j = v_j(y, t), \quad \frac{1}{\rho_j}p_j = d_j(y, t) - \frac{f_j(t)}{2}x^2, \\ \Theta_j = a_j(y, t)x^2 + b_j(y, t).$$

Начально – краевая задача для функций $w_j(y, t), a_j(y, t), f_j(t)$ является неклассической (часть граничных условий содержит интегралы по областям), нелинейной и обратной, т. к. функции $f_j(t)$ являются искомыми. Функции $v_j(y, t), d_j(y, t), b_j(y, t)$ определяются по известным $w_j(y, t), a_j(y, t), f_j(t)$. Для движения одной жидкости в канале произвольного сечения обратная задача об определении градиента давления при заданном расходе решена в работе [46]. Переходя к безразмерным переменным, в уравнениях (5) при нелинейных слагаемых и в кинематических условиях (7) при линейных членах, содержащих скорости, появится множитель

$$M = \frac{\alpha_1 a^0 l_1^{03}}{\mu_1 \nu_1},$$

называемый числом Марангони, $l_1^0 = const > 0$ – среднее значение толщины первого слоя жидкости при $t = 0$, $a^0 = \max_{t \geq 0} |a_{k0}(t)| > 0$ или $a^0 = \max_j \max_y |a_{0j}(y)| > 0$, $k = 1, 3$, $a_{k0}(t)$ – значения функции $a_k(y, t)$ на твёрдых стенках: $a_1(0, t) = a_{10}(t)$, $a_3(l_3, t) = a_{30}(t)$, $a_{0j}(t)$ – значения функции $a_j(y, t)$ в начальный момент времени. Проектируя динамические условия

(11), (12) на нормали $\mathbf{n}_{1,2}$ и переходя к безразмерным параметрам в правых частях появятся числа Вебера

$$We_n = \frac{\sigma_n^0}{a^0 l_1^2 \alpha_1}, \quad n = 1, 2.$$

Предполагая, что температурные коэффициенты поверхностного натяжения сравнимы по величине $\alpha_1 \sim \alpha_2$ и $M \ll 1$ (это выполнено в тонких слоях, либо при очень больших вязкостях), а также $We_n \gg 1$ задача заменяется линейной. Также предполагается, что поверхности раздела являются плоскими.

В пункте 3.2 получены априорные оценки решений $a_j(y, t), w_j(y, t)$ поставленных задач, равномерные на своих областях определения, и показано, что, если сходятся интегралы

$$\int_0^\infty e^{\delta\tau} |a_{k0}(\tau)| d\tau, \quad \int_0^\infty e^{\delta\tau} |a'_{k0}(\tau)| d\tau, \quad \int_0^\infty e^{\delta\tau} |a''_{k0}(\tau)| d\tau, \quad k = 1, 3, \quad (17)$$

где $\delta = M_0^{-1} \min((\rho_j c_j)^{-1})$, c_j — коэффициенты удельной теплоёмкости, M_0 — постоянная из неравенства Фридрихса, то решения стремятся к нулевому — происходит торможение за счёт вязкого трения. В пункте 3.3 найдено стационарное точное решение и показано, что решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим $a_j^0(y), w_j^0(y)$ и f_j^0 , при условии сходимости последних двух интегралов (17) и интеграла

$$\int_0^\infty e^{\delta\tau} |a_{k0}^0 - a_{k0}(\tau)| d\tau, \quad k = 1, 3,$$

$a_1^0(0) = a_{10}^0, a_3^0(l_3) = a_{30}^0$. В изображениях по Лапласу получено точное решение нестационарной задачи в пункте 3.4. Его качественный и численный анализ хорошо подтверждает стремление при $t \rightarrow \infty$ решения к стационарному.

Основные результаты работы сформулированы в виде 11 теорем и утверждений.

Заключение содержит результаты и выводы проделанной работы.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Доказательство неравенства Фридрихса на случай области, состоящей из трёх конечных отрезков, и определение, с помощью вариационного принципа, наименьшей постоянной в правой части этого неравенства.

2. Получение априорных оценок решений начально — краевых задач, описывающих как одномерное так и двумерное движение трёх вязких несмешивающихся теплопроводных жидкостей в плоском канале.

3. Определение стационарного движения и доказательство того факта, что решение нестационарной задачи при больших временах выходит на стационарный режим.

4. Нахождение решения нестационарной задачи методом преобразования Лапласа в виде конечных аналитических формул. Получение путём численного обращения преобразования Лапласа эволюции полей скоростей и возмущений температур к стационарному режиму для конкретных жидких сред.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях, семинарах:

- Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2010),
- Научная конференция Герценовские чтения - 2011 “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования” (С.-Петербург, 2011),
- VII всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Молодежь и наука” (Красноярск, 2011),
- IV Всероссийская конференция “Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения” (Бийск, 2011),
- VIII Всероссийская научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Молодежь и наука” (Красноярск, 2012),
- 15 – ая международная научная конференция "Современный групповой анализ" (Турция, 2012),
- Научная конференция Герценовские чтения - 2013 “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования” (С.-Петербург, 2013),
- Открытая конференция молодых учёных ИВМ СО РАН по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2013),
- 8th International topical team workshop "Two – phase systems for ground and space applications" (Germany, 2013),
- Всероссийская конференция "Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение" (Новосибирск, 2014),
- 7th Conference of the International Marangoni Association (Vienna, 2014),
- XXXI Сибирский теплофизический семинар (Новосибирск, 2014).
- Семинар Института Вычислительного моделирования СО РАН "Математическое моделирование в механике" под руководством профессора В. К. Андреева.
- Семинар Института математики и фундаментальной информати-

ки сибирского федерального университета "Обратные задачи" под руководством профессора Ю. Я. Белова, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в работах [31] – [41], [54], [55].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д. ф. – м. н., профессору В. К. Андрееву за постановку задачи, помощь и ценные советы при работе над диссертацией.

Результаты диссертации получены в рамках проектов РФФИ № 08-01-00762, № 11-01-00283, № 14-01-00067 и интеграционных проектов СО РАН №38, № 65, № 116,

1 Вспомогательные результаты

В течение всей работы используются преобразование Лапласа и его численное обращение, а также неравенство Фридрихса для получения априорных оценок. Поэтому в данной главе приведены основные свойства преобразования Лапласа и доказано интегральное неравенство Фридрихса для области, состоящей из трёх отрезков. Доказательство проводится вариационным методом.

1.1 Преобразование Лапласа

В течении нескольких последних десятилетий в математике, механике и технике для решения многих задач стали особенно часто и успешно применяться операционные методы на основе преобразования Лапласа [12], [13].

Операционный метод решения задач можно подразделить на четыре этапа:

- 1) от искомой функции-оригинала $f(t)$ переходят к функции-изображению $F(p)$;
- 2) над $F(p)$ производят операции, соответствующие операциям над $f(t)$, после чего получают уравнение относительно $F(p)$, которое часто бывает значительно проще уравнения для оригинала, в частности, допускает явное интегрирование;
- 3) полученное уравнение для изображений решают относительно $F(p)$;
- 4) от найденного изображения $F(p)$ переходят к оригиналу $f(t)$, который является искомой функцией.

Во многих случаях самым трудным является четвертый этап — нахождение оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$, то есть задача обращения преобразования Лапласа.

Определение 1. *Функцией – оригиналом будем называть любую комплексную функцию $f(t)$ действительного аргумента t , удовлетворяющую следующим условиям:*

1. *функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера всюду на оси t , кроме отдельных точек, где она имеет разрывы первого рода, причем на каждом конечном интервале таких точек конечное число. Это означает, что для каждого t (кроме указанных исключительных точек) существуют положительные постоянные $A, \alpha \leq 1, h_0$ такие, что*

$$|f(t+h) - f(t)| \leq A|h|^\alpha$$

для всех $h, |h| \leq h_0$.

2. *$f(t) = 0$ для всех отрицательных t .*

3. $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, то есть существуют такие постоянные $M > 0, s_0 \geq 0$, что для всех t

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}.$$

Число s_0 называется показателем роста $f(t)$; для ограниченных оригиналов можно принять $s_0 = 0$.

Последнее условие заведомо выполнено для многих задач.

Определение 2. Изображением функции $f(t)$ (по Лапласу) называют функцию комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемую соотношением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (1.1.1)$$

где интеграл берется по положительной полуоси.

Определение 3. Выражение (1.1.1) ставит в соответствие каждой однозначной функции $f(t)$, для которой несобственный интеграл (1.1.1) сходится, единственную функцию $F(p)$, определенную в полуплоскости $\text{Re } p > s_0$.

Теорема 1. Если функция $f(t)$ является оригиналом, то есть удовлетворяет условиям 1,2,3 определения 1, и $F(p)$ служит ее изображением, то в любой точке t , где $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, справедливо равенство

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (1.1.2)$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\text{Re } p = a > s_0$ и понимается в смысле главного значения, то есть как предел интеграла вдоль отрезка $(a - ib, a + ib)$ при $b \rightarrow \infty$.

Формула (1.1.2) называется формулой обращения Лапласа. Доказательство теоремы 1 можно найти в [29].

Сформулируем некоторые свойства преобразования Лапласа.

Теорема 2. Предельные соотношения.

Если $f(t)$ является оригиналом вместе со своей производной $f'(t)$ и $F(p)$ изображение $f(t)$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0), \quad (1.1.3)$$

где $p \rightarrow \infty$ внутри угла $|\arg p| < \pi/2 - \delta$ и $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$; если, кроме того, существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(\infty), \quad (1.1.4)$$

где $p \rightarrow 0$ внутри того же угла.

Доказательство теоремы 2 можно найти в [29].

1.2 Методы численного обращения преобразования Лапласа

Если $f(y, t)$ является оригиналом, а $F(y, p)$ его изображением по Лапласу, то для вычисления оригинала по его изображению можно пользоваться комплексным интегралом

$$f(y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(y, p) e^{pt} dp \quad (1.2.1)$$

где a есть абсцисса в полуплоскости абсолютной сходимости интеграла Лапласа [29]. Для непосредственного вычисления функции $f(y, t)$ использовать формулу (1.2.1) затруднительно. Но поскольку (1.2.1) является интегралом от аналитической функции, взятым по контуру в комплексной плоскости, его можно преобразовать, применив для этого методы, известные из теории функций комплексного переменного. Такого рода преобразования в некоторых случаях позволяют получить практически удобное выражение для оригинала, из которого можно получить важные свойства функций, определяемой комплексным интегралом.

Рассмотрим один из методов вычисления оригинала при помощи таких преобразований комплексного интеграла (1.2.1). Этот метод основан на замене подинтегральной функции $F(y, p)$ другой функцией, которая интерполирует $F(y, p)$ по значениям её в некоторых точках. Погрешность вычисления интеграла (1.2.1) будет зависеть, главным образом, от той точности, с которой мы можем интерполировать функцию $F(y, p)$. Чтобы получить хорошую точность, важно согласовать способ интегрирования со свойствами функции $F(y, p)$, которая является не произвольной, а функцией изображением.

Численное обращение преобразования Лапласа выполняется при помощи квадратурной формулы наивысшей точности, построенной для интеграла Римана-Меллина (1.2.1) [27].

Пусть функция-изображение $F(y, p)$ — регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$. Преобразуем интеграл (1.2.1), чтобы параметры квадратурной формулы не зависели от α и t . Для этого делается замена переменной $p = p'/t + \alpha$. После этой замены интеграл (1.2.1) преобразуется к виду

$$f(y, t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{\alpha t}}{t} \int_{\varepsilon+i\infty}^{\varepsilon-i\infty} F^*(y, p') e^{p' t} dp',$$

$$\varepsilon > 0, F^*(y, p') = F(y, p'/t + \alpha) = F(y, p).$$

Далее везде штрих будем опускать. Предполагается, что $F^*(y, p)$ представима в виде

$$F^*(y, p) = \frac{1}{p^s} \varphi(y, p)$$

где $s > 0$, а функция $\varphi(y, p)$ регулярна в полуплоскости $Re p > 0$ и имеет конечное предельное значение при $p \rightarrow \infty$: $\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(y, p) = \varphi(y, \infty)$. Тогда для вычисления интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon+i\infty}^{\varepsilon-i\infty} p^{-s} \varphi(y, p) e^p dp$$

строится квадратурная формула следующего вида:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon+i\infty}^{\varepsilon-i\infty} p^{-s} \varphi(y, p) e^p dp \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(y, p_k)$$

причем A_k и узлы p_k зависят от s и n . Так как $\varphi(y, p_k) = p_k^s F^*(y, p_k) = p_k^s F(y, p_k/t + \alpha)$, то

$$f(y, t) = \frac{e^{\alpha t}}{t} \sum_{k=1}^n A_k p_k^s F(y, p_k/t + \alpha) \quad (1.2.2)$$

Коэффициенты A_k и узлы p_k вычисляются по формулам:

$$A_k = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!(2n+s-2)}{\Gamma(n+s-1)P_{n-1}(1/p_k)P'_n(1/p_k)}, \quad (1.2.3)$$

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{2}{p_k - p_j} + 1 - \frac{2n+s-2}{p_k} = 0. \quad (1.2.4)$$

В (1.2.3) $P_n(1/p) = \sum_{k=0}^n C_k^n (-1)^{n-k} (n+s-1) \dots (n+s+k-2) / p_k$, который записан в соответствующей форме для многочленов Лежандра, $P'_n(1/p) = n(n+s-1)P_{n-1}^{s+2}(1/p)$. Если (1.2.4) записать для всех k ($k = 1, 2, \dots, n$), получим систему уравнений для определения узлов квадратурной формулы p_k . В таблицах 1 и 2 книги [28] представлены значения узлов и коэффициентов квадратурной формулы (1.2.2), которые мы используем при численном обращении.

1.3 Обобщение неравенства Фридрикса на область, состоящую из трёх отрезков

Во многих задачах математической физики хорошо известна роль неравенства

$$\int_{\Omega} u^2(y) dy \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u(y)|^2 dy \quad (1.3.1)$$

справедливого для любой ограниченной области $\Omega \subset R^n$ и любой функции $u(y) \in W_2^1(\Omega)$. В (1.3.1) число λ_1 — наименьшее положительное собственное значение спектральной задачи

$$-\Delta w = \lambda w, \quad y \in \Omega, \quad w|_{\Gamma} = 0, \quad (1.3.2)$$

где Γ — граница Ω .

Для симметричных областей задача (1.3.2) решается методом разделения переменных, и λ_1 легко находится. В общем же случае нетрудно получить оценку

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{d^2}, \quad (1.3.3)$$

где d — ширина n -мерной полосы, в которую можно заключить область Ω . Тем самым условие ограниченности Ω в неравенстве (1.3.1) является существенным.

Неравенство (1.3.1) часто называют неравенством Фридрикса или неравенством Пуанкаре — Фридрикса, а иногда неравенством Стеклова.

В одномерном случае $\Omega = (a, b) \subset R^1$ (считаем $a < b$), $u(a) = u(b) = 0$ имеем $\lambda_1 = \pi^2/(b-a)^2$, значит

$$\int_a^b u^2(y) dy \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b u'^2(y) dy. \quad (1.3.4)$$

Нужно отметить, что в правой части (1.3.1) нельзя заменить λ_1^{-1} меньшим числом. Это следует из того, что λ_1^{-1} находится из решения вариационной задачи

$$\lambda_1^{-1} = \sup_{w \in W_2^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} w^2(y) dy}{\int_{\Omega} |\nabla w(y)|^2 dy}. \quad (1.3.5)$$

Задачей Эйлера для λ_1^{-1} и является в точности спектральная задача (1.3.2). В теоретических же работах часто вместо λ_1^{-1} пишут просто: найдется такая

постоянная $c > 0$, что

$$\int_{\Omega} u^2(y) dy \leq c \int_{\Omega} |\nabla u(y)|^2 dy.$$

Например, в одномерном случае можно показать, что

$$\int_a^b u^2(y) dy \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b u'^2(y) dy. \quad (1.3.6)$$

Здесь $c = (b-a)^2/8 > (b-a)^2/\pi^2 = \lambda_1^{-1}$. Если только лишь $u(b) = 0$ или $u(a) = 0$, то имеем оценку

$$\int_a^b u^2(y) dy \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b u'^2(y) dy \quad (1.3.7)$$

с еще большей постоянной в правой части. Априорные оценки (1.3.6), (1.3.7) получаются с помощью формулы Ньютона – Лейбница, неравенства Коши – Буняковского и не требуют решения уравнений Эйлера. Заметим, что не во всех случаях можно найти точные решения уравнений Эйлера.

При рассмотрении, например, однонаправленного движения в плоских слоях $0 < y < l_1$, $l_1 < y < l_2$, $l_2 < y < l_3$ с общими границами раздела $y = l_1$, $y = l_2$ и твёрдыми стенками $y = 0$, $y = l_3$ возникает следующая начально - краевая задача:

$$u_{1t} = \nu_1 u_{1yy} - f_1(t), \quad 0 < y < l_1, \quad (1.3.8)$$

$$u_{2t} = \nu_2 u_{2yy} - f_2(t), \quad l_1 < y < l_2, \quad (1.3.9)$$

$$u_{3t} = \nu_3 u_{3yy} - f_3(t), \quad l_2 < y < l_3, \quad (1.3.10)$$

$$u_j(y, 0) = 0, \quad (1.3.11)$$

$$\mu_1 u_{1y}(l_1, t) - \mu_2 u_{2y}(l_1, t) = 0, \quad (1.3.12)$$

$$\mu_2 u_{2y}(l_2, t) - \mu_3 u_{3y}(l_2, t) = 0, \quad (1.3.13)$$

$$u_1(l_1, t) = u_2(l_1, t), \quad u_2(l_2, t) = u_3(l_2, t), \quad (1.3.14)$$

$$u_1(0, t) = 0, \quad u_3(l_3, t) = 0, \quad (1.3.15)$$

где функции $f_j(t)$ связаны равенствами $\rho_1 f_1 = \rho_2 f_2 = \rho_3 f_3$.

Используя условия (1.3.12) – (1.3.15), можно показать, что кинетическая энергия системы

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho_1 \int_0^{l_1} u_1^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_{l_1}^{l_2} u_2^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_3 \int_{l_2}^{l_3} u_3^2(y, t) dy \quad (1.3.16)$$

удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} + \mu_1 \int_0^{l_1} u_{1y}^2(y, t) dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} u_{2y}^2(y, t) dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} u_{3y}^2(y, t) dy = \\ = -\rho_1 f_1(t) \left(\int_0^{l_1} u_1(y, t) dy + \int_{l_1}^{l_2} u_2(y, t) dy + \int_{l_2}^{l_3} u_3(y, t) dy \right). \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Если сумма трёх интегральных слагаемых левой части уравнения (1.3.17) больше или равна $2\delta E(t)$ ($\delta = \text{const} > 0$), то из (1.3.17) можно получить неравенство $dE/dt + 2\delta E \leq \delta_1 \sqrt{E} |f(t)|$, откуда

$$E(t) \leq \frac{\delta_1^2}{4} C e^{-2\delta t}, \quad (1.3.18)$$

где $\delta_1 = \text{const} > 0$, $C \equiv \left(\int_0^\infty |f_1(t)| e^{\delta t} dt \right)^2$. Поэтому желательно, чтобы в априорной оценке (1.3.18) δ было как можно больше. Это приводит к установлению неравенства (переменная t выступает как параметр и ниже в рассуждениях не указывается)

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} u_1^2(y) dy + \int_{l_1}^{l_2} u_2^2(y) dy + \int_{l_2}^{l_3} u_3^2(y) dy \leq M \left(\mu_1 \int_0^{l_1} u_{1y}^2(y) dy + \right. \\ \left. + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} u_{2y}^2(y) dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} u_{3y}^2(y) dy \right) \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

и определению минимальной положительной постоянной M_0 среди всех $M > 0$. В (1.3.19) $u_j(y)$ удовлетворяют условиям (1.3.12) – (1.3.15). Неравенство (1.3.19) есть обобщение классического неравенства Фридрихса на случай составных областей. Справедлива

Лемма 1. *Имеет место неравенство (1.3.19) с постоянной M_0 не зависящей от $u_j(y)$ и являющейся решением вариационной задачи*

$$M_0 = \sup_{w_j \in V} \left[\frac{\int_0^{l_1} w_1^2(y) dy + \int_{l_1}^{l_2} w_2^2(y) dy + \int_{l_2}^{l_3} w_3^2(y) dy}{\mu_1 \int_0^{l_1} w_{1y}^2(y) dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2(y) dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2(y) dy} \right], \quad (1.3.20)$$

где множество V – подпространство прямого произведения $W_2^1(0, l_1) \times W_2^1(l_1, l_2) \times W_2^1(l_2, l_3)$ и для $w_j(y)$ выполнены граничные условия (1.3.12) – (1.3.15).

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$F(w_1, w_2, w_3) = \frac{\int_0^{l_1} w_1^2(y) dy + \int_{l_1}^{l_2} w_2^2(y) dy + \int_{l_2}^{l_3} w_3^2(y) dy}{\mu_1 \int_0^{l_1} w_{1y}^2(y) dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2(y) dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2(y) dy}, \quad (1.3.21)$$

с $w_j \in V$. Очевидно, что функция $f(\tau) = F(w_1 + \tau h_1, w_2 + \tau h_2, w_3 + \tau h_3)$ имеет производную при $\tau = 0$ для всех $h_j \in V, j = 1, 2, 3$, а F дифференцируем по Фреше. Тогда существует первая вариация по Лагранжу функционала F в точке (w_1, w_2, w_3) и $\delta F(w_1, w_2, w_3)(h_1, h_2, h_3) = f'(0)$. Нетрудно показать, что

$$\delta F(w_1, w_2, w_3)(h_1, h_2, h_3) = \frac{2}{Z} \left[\int_0^{l_1} w_1 h_1 dy + \int_{l_1}^{l_2} w_2 h_2 dy + \int_{l_2}^{l_3} w_3 h_3 dy - \right. \\ \left. - F(w_1, w_2, w_3) \left(\mu_1 \int_0^{l_1} w_{1y} h_{1y} dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} w_{2y} h_{2y} dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y} h_{3y} dy \right) \right],$$

где Z — знаменатель в формуле (1.3.21).

Пусть теперь на w_j достигается равенство (1.3.20). Имеем $F(w_1, w_2, w_3) = M_0$ и $\delta F(w_1, w_2, w_3)(h_1, h_2, h_3) = 0$. Пользуясь произволом функций $h_1 \in W_2^1(0, l_1), h_2 \in W_2^1(l_1, l_2), h_3 \in W_2^1(l_2, l_3)$, положим сначала $h_2 = h_3 = 0, h_1(0) = 0, h_1(l_1) = 0$, а затем $h_1 = h_3 = 0, h_2(l_1) = 0, h_2(l_2) = 0$, и, наконец, $h_1 = h_2 = 0, h_3(l_2) = 0, h_3(l_3) = 0$. Получим равенства

$$\int_0^{l_1} (w_1 h_1 - \mu_1 M_0 w_{1y} h_{1y}) dy = 0, \quad \int_{l_1}^{l_2} (w_2 h_2 - \mu_2 M_0 w_{2y} h_{2y}) dy = 0, \\ \int_{l_2}^{l_3} (w_3 h_3 - \mu_3 M_0 w_{3y} h_{3y}) dy = 0.$$

По лемме Дюбуа-Реймона [3] отсюда следуют уравнения Эйлера вариационной задачи (1.3.20) (по этой лемме вторые производный w_{jyy} существуют)

$$\begin{aligned} -\mu_1 w_{1yy} &= \frac{1}{M_0} w_1, & 0 < y < l_1, \\ -\mu_2 w_{2yy} &= \frac{1}{M_0} w_2, & l_1 < y < l_2, \\ -\mu_3 w_{3yy} &= \frac{1}{M_0} w_3, & l_2 < y < l_3. \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

Общие решения уравнений (1.3.22) имеют вид ($j = 1, 2, 3$)

$$w_j(y) = C_1^j \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_j M_0}} y\right) + C_2^j \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_j M_0}} y\right).$$

С учётом граничных условий (1.3.12) – (1.3.15) получим систему линейных однородных уравнений на постоянные C_1^j, C_2^j

$$\begin{aligned} C_1^2 &= \sqrt{\bar{\mu}_1} C_1^1, \quad C_2^1 = C_2^2, \quad C_2^1 \cos(a_1 z) = C_1^1 \sin(a_1 z), \\ C_1^2 \sin(a_3 z) + C_2^2 \cos(a_3 z) - C_1^3 \sin(z) - C_2^3 \cos(z) &= 0, \\ \sqrt{\bar{\mu}_2} (C_1^2 \cos(a_3 z) - C_2^2 \sin(a_3 z)) - C_1^3 \cos(z) + C_2^3 \sin(z) &= 0, \\ C_1^3 \sin(a_2 z) + C_2^3 \cos(a_2 z) &= 0. \end{aligned}$$

Нетривиальное решение последней системы существует тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{\mu}_2} \sin(a_2 z) \left[\sqrt{\bar{\mu}_1} \cos(a_3 z) \cos(a_1 z) - \sin(a_1 z) \sin(a_3 z) \right] - \\ - \cos(a_2 z) \left[\sqrt{\bar{\mu}_1} \sin(a_3 z) \cos(a_1 z) + \sin(a_1 z) \cos(a_3 z) \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

где $z = l_2/(\mu_3 M_0)^{1/2}$, $a_1 = l_1(\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2)^{-1/2}/l_2$, $a_2 = l_3/l_2$, $a_3 = (\bar{\mu}_2)^{-1/2}$, $\bar{\mu}_1 = \mu_1/\mu_2$, $\bar{\mu}_2 = \mu_2/\mu_3$.

Приведём вид функций $w_j(y)$ на которых достигается супремум в (1.3.20)

$$\begin{aligned} w_1(y) &= \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1 M_0}}(y - l_1) + a_1 z\right), \\ w_2(y) &= \sqrt{\bar{\mu}_1} \cos(a_1 z) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2 M_0}} \tilde{y}\right) + \sin(a_1 z) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_2 M_0}} \tilde{y}\right), \\ w_3(y) &= \frac{(\sqrt{\bar{\mu}_1} \cos(a_1 z) \sin(a_3 z) + \sin(a_1 z) \cos(a_3 z)) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_3 M_0}} y - a_2 z\right)}{\sin(a_2(1 - z))}, \end{aligned}$$

$$\tilde{y} = \frac{l_2 - l_1}{l_2} y + l_1.$$

Заметим, что если z - корень уравнения (1.3.23), то и $-z$ - корень того же уравнения. Поэтому достаточно найти только положительные решения. Минимальное среди них z_0 является искомым и $M_0 = l_2^2/(\mu_3 z_0^2)$.

Рассмотрим случай “смазки” то есть, когда $\mu_1 = \mu_3$, $l_1 = l_3 - l_2$ (толщины и вязкости первого и третьего слоя совпадают соответственно). Тогда уравнение (1.3.23) примет вид

$$\sin(a_3 z)(\mu_1 \sin^2 a_1 z + \cos^2 a_1 z) = 0$$

и будет иметь один минимальный корень $z_0 = \pi/a_3$ и, соответственно, $M_0 = l_2^2/\mu_2\pi^2$.

Заметим, что для случая двух отрезков обобщённое неравенство Фридрихса установлено в работе [7].

Докажем, что M_0 есть супремум функционала (1.3.21). Вычислим вторую вариацию

$$\begin{aligned} \delta^2 F(w_1, w_2, w_3)(h_1, h_2, h_3) = f''(0) = \frac{2}{Z} \left[\int_0^{l_1} h_1^2 dy + \int_{l_1}^{l_2} h_2^2 dy + \int_{l_2}^{l_3} h_3^2 dy - \right. \\ \left. - M_0 \left(\mu_1 \int_0^{l_1} h_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} h_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} h_{3y}^2 dy \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

Остается показать, что выражение в квадратных скобках отрицательно, когда $M_0 = 1/\lambda_1$, а λ_1 есть минимальное положительное собственное значение краевой задачи (1.3.8) — (1.3.15). Действительно, запишем эту задачу в операторном виде

$$Au = \lambda u, \quad u = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad (1.3.25)$$

где

$$Au = \begin{cases} -\mu_1 w_{1yy}, & y \in (0, l_1); \\ -\mu_2 w_{2yy}, & y \in (l_1, l_2); \\ -\mu_3 w_{3yy}, & y \in (l_2, l_3). \end{cases}$$

$u \in V$ — подпространство прямого произведения $W_2^1(0, l_1) \times W_2^1(l_1, l_2) \times W_2^1(l_2, l_3)$, описанное в лемме 1. Легко видеть, что оператор A является самосопряженным: $(Au, v)_0 = (u, Av)_0$, где $(u, v)_0 = \int_0^{l_1} u_1 \bar{v}_1 dy + \int_{l_1}^{l_2} u_2 \bar{v}_2 dy +$

$\int_{l_2}^{l_3} u_3 \bar{v}_3 dy$; ограниченным ($\|Au\|_0 \leq c\|u\|_V$) и положительным ($(Au, u)_0 \geq c_1\|u\|_V^2$). Значит его собственные значения неотрицательны. Докажем только неравенства. Для этого введем новое скалярное произведение в V

$$(Au, v)_0 = \mu_1 \int_0^{l_1} \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial w_2}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial y} dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} \frac{\partial w_3}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial y} dy \equiv (u, v)_1.$$

Покажем, что оно эквивалентно скалярному произведению в V

$$(u, v)_V = (u, v)_0 + (u_y, v_y)_0.$$

Ясно, что

$$\|u\|_1^2 \leq \max(\mu_j) \|u\|_V^2.$$

С другой стороны

$$\int_0^{l_1} w_1^2 dy \leq \frac{l_1^2}{2} \int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy, \quad \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy \leq \frac{(l_3 - l_2)^2}{2} \int_0^{l_1} w_{3y}^2 dy,$$

$$\int_{l_1}^{l_2} w_2^2 dy \leq (l_2 - l_1) \max(l_2 - l_1; 2l_1) \left(\int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy + \int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy \right).$$

Первые два неравенства есть следствия того, что $w_1(0) = 0$, $w_3(l_3) = 0$, а последнее из равенства $w_1(l_1) = w_2(l_1)$. Значит

$$\|u\|_1^2 = \mu_1 \int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy \geq c_1^2 \|u\|_V^2,$$

где

$$c_1^2 = \min \left(\min\left(\frac{\mu_1}{3}, \frac{\mu_2}{2}, \frac{\mu_3}{2}\right); \frac{1}{\delta}; \frac{2\mu_1}{3(l_3 - l_2)^2}; \frac{2\mu_1}{3l_1^2} \right),$$

$$\delta = (l_2 - l_1) \max(l_2 - l_1; 2l_1) \max\left(\frac{3}{\mu_1}; \frac{2}{\mu_2}\right).$$

Следовательно

$$c_1 \|u\|_V \leq \|u\|_1 = \sqrt{(Au, u)_0} \leq \sqrt{\max(\mu_j)} \|u\|_V.$$

Далее, действуем аналогично главе 6 [43], так как наша задача (1.3.25) эквивалентна отысканию обобщенных собственных функций задачи $(Au, v)_0 = (u, v)_1 = \lambda(u, v)_0, \forall v \in V$. Согласно [43]

$$\lambda_1 = \inf_{\|u\|_V \neq 0} \frac{(Au, u)_0}{\|u\|^2}.$$

Поэтому, взяв $M_0 = \frac{1}{\lambda_1}$ получим, что $\delta^2 F(w_1, w_2, w_3)(h_1, h_2, h_3) < 0$.

Замечание 1. Неравенство (1.3.19) можно вывести из обычного неравенства Фридрикса для функции $w(y)$, совпадающей с $w_j(y), j = 1, 2, 3$ на областях определения. Если $w_j(y) \in W_2^1$, то в силу граничных условий (1.3.14) $w(y) \in W_2^1$ уже на всём интервале $(0, l_3)$, причём $w(0) = w(l_3) = 0$. Следовательно

$$\int_0^{l_3} w^2(y) dy \leq \frac{l_3^2}{\pi^2} \int_0^{l_3} w_y^2(y) dy,$$

откуда и следует неравенство (1.3.19) с постоянной

$$M_{01} = \frac{l_3^2 \max(\mu_j^{-1})}{\pi^2}.$$

Указанная конструкция годится и для n слоёв. Конечно, эта постоянная больше постоянной M_0 , определяемой из решения уравнения (1.3.23). Например, для системы силикон–вода–воздух постоянная $M_{01} \approx 0.05(\text{м}^3 \cdot \text{с})/\text{кг}$, а $M_0 \approx 1.5 \cdot 10^{-3}(\text{м}^3 \cdot \text{с})/\text{кг}$.

Замечание 2. Задачу (1.3.8) – (1.3.15) можно интерпретировать как распространение тепла в составном стержне с заданными источниками тепла; μ_1, μ_2, μ_3 – коэффициенты теплопроводности.

2 Решение начально – краевой задачи, возникающей при совместном однонаправленном движении трёх жидкостей

Во второй главе исследуется начально – краевая задача, возникающая при совместном однонаправленном движении трёх вязких жидкостей под действием термокапиллярных сил и перепада давления. Найдено точное стационарное решение задачи. Решение нестационарной задачи получено в виде конечных аналитических формул в изображениях по Лапласу. Доказано, что если градиент давления в одной из жидкостей имеет конечный предел, то решение всегда выходит на стационарный режим с ростом времени и получена экспоненциальная оценка скорости сходимости с показателем зависящим от физических свойств сред и толщин слоёв. Путём численного обращения преобразования Лапласа получена эволюция полей скоростей и возмущений температур к стационарному режиму для конкретных жидких сред.

2.1 Постановка задачи

Предположим, что имеются три слоя несжимаемой вязкой теплопроводной жидкости толщиной $l_1, l_2 - l_1, l_3 - l_2$ с общей границей раздела $y = l_1, y = l_2$ и твёрдыми стенками $y = 0, y = l_3$ (рис. 2).

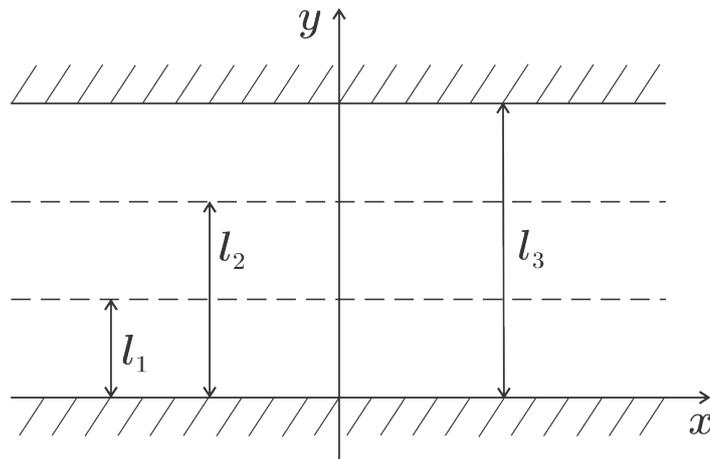


Рис. 2: Геометрия течения жидкостей

Движение возникает из состояния покоя под действием перепада давления и термокапиллярных сил. Однонаправленное совместное движение этой системы описывается решением следующей начально – краевой задачи (см. (5) – (9), (11), (12), (15), (16), где $\mathbf{u}_j = (u_j(y, t), 0, 0), p_j = \rho_j f_j(t)x +$

$\alpha_j(t), \Theta_j = -A_j x + T_j(y, t)$ с произвольными f_j, α_j и $A_j, j = 1, 2, 3$)

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy} - f_j(t), \quad (2.1.1)$$

$$T_{jt} = \chi_j T_{jyy} + A_j u_j. \quad (2.1.2)$$

Условия непрерывности скоростей и температур на поверхностях раздела дают равенства

$$u_1(l_1, t) = u_2(l_1, t), \quad u_2(l_2, t) = u_3(l_2, t), \quad (2.1.3)$$

$$T_1(l_1, t) = T_2(l_1, t), \quad T_2(l_2, t) = T_3(l_2, t). \quad (2.1.4)$$

Кроме того, на них равны потоки тепла

$$k_1 T_{1y}(l_1, t) = k_2 T_{2y}(l_1, t), \quad k_2 T_{2y}(l_2, t) = k_3 T_{3y}(l_2, t) \quad (2.1.5)$$

и имеется скачок касательных напряжений

$$\mu_2 u_{2y}(l_1, t) - \mu_1 u_{1y}(l_1, t) = -A \alpha_1, \quad \mu_3 u_{3y}(l_2, t) - \mu_2 u_{2y}(l_2, t) = -A \alpha_2. \quad (2.1.6)$$

В уравнении (2.1.2) и граничном условии (2.1.6) $A \equiv A_1 = A_2 = A_3$ (это следствие равенства температур при $y = l_1$ и $y = l_2$, см. (8)). Условия для нормальных напряжений сводятся к равенству давлений в жидкостях, причём $\rho_1 f_1(t) = \rho_2 f_2(t) = \rho_3 f_3(t)$, а кинематические условия при $y = l_1, y = l_2$ выполняются тождественно.

Так как стенки $y = 0, y = l_3$ твёрдые и неподвижные, то условия прилипания запишутся в виде

$$u_1(0, t) = 0, \quad u_3(l_3, t) = 0, \quad (2.1.7)$$

кроме того считаем, что на них приложен только постоянный градиент температуры, то есть

$$T_1(0, t) = 0, \quad T_3(l_3, t) = 0. \quad (2.1.8)$$

Далее предполагаем, что движение возникает под действием градиента давления и термокапиллярных сил из состояния покоя, поэтому

$$u_j(y, 0) = 0, \quad (2.1.9)$$

$$T_j(y, 0) = 0. \quad (2.1.10)$$

Видно, что уравнения (2.1.1) – (2.1.10) образуют две последовательно решаемые задачи для скоростей $u_j(y, t)$ и возмущений температур $T_j(y, t)$.

Поскольку задача (2.1.1) – (2.1.10) является линейной, то влияние перепада давления и термокапиллярных сил происходит независимо друг от друга. Поэтому сначала рассмотрим случай, когда источник движения —

только градиент давления, а затем — термокапиллярный эффект. В первом случае $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, а во втором $f_j(t) = 0$.

Замечание 3. Рассматриваемое решение является инвариантным относительно однопараметрической подгруппы непрерывных преобразований, соответствующей оператору $\partial/\partial x + \rho_j f_j(t)\partial/\partial p_j - A\partial/\partial \Theta_j$ [4], который допускает системой (1) – (4).

2.2 Стационарное решение

При рассмотрении случая, когда источником движения является только перепад давления уравнения (2.1.1), (2.1.2) и соотношения (2.1.3) – (2.1.5), (2.1.7), (2.1.8) остаются без изменения, а условие (2.1.6) примет вид

$$\mu_2 u_{2y}(l_1, t) - \mu_1 u_{1y}(l_1, t) = 0, \quad \mu_3 u_{3y}(l_2, t) - \mu_2 u_{2y}(l_2, t) = 0. \quad (2.2.1)$$

В этом пункте предположим, что скорость, температура и давление не зависят от времени — стационарное течение, тогда начальные условия (2.1.9), (2.1.10) не ставятся. Поэтому $u_j = u_j^0(y)$, $T_j = T_j^0(y)$, $f_j = f_j^0 = const$ и уравнения (2.1.1), (2.1.2) примут вид

$$u_{jyy}^0 = f_j^0/\nu_j, \quad T_{jyy}^0 = -\frac{A}{\chi_j}u_j^0.$$

Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} u_j^0 &= \frac{f_j^0}{2\nu_j}y^2 + C_j^1 y + C_j^2, \\ T_j^0 &= -\frac{A}{2\chi_j} \left(\frac{f_j^0}{12\nu_j}y^4 + \frac{C_j^1}{3}y^3 + C_j^2 y \right) + \tilde{C}_j^1 y + \tilde{C}_j^2. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Постоянные C_j^1 и C_j^2 определим из граничных условий (2.1.3), (2.1.7), (2.2.1) (использованы равенства $\rho_1 f_1^0 = \rho_2 f_2^0 = \rho_3 f_3^0$)

$$\begin{aligned} C_1^1 &= \frac{\rho_1 f_1^0 l_3}{2\mu_1} g, \quad C_1^2 = 0, \\ C_2^1 &= \bar{\mu}_1 C_1^1, \quad C_2^2 = (1 - \bar{\mu}_1) \left(\frac{\rho_1 f_1^0 l_1^2}{2\mu_1} + C_1^1 l_1 \right), \\ C_3^1 &= \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 C_1^1, \quad C_3^2 = -C_3^1 l_3 - \frac{\rho_1 f_1^0 l_3^2}{2\mu_3}, \\ g &= -\frac{(1 - \bar{\mu}_2)\bar{\mu}_1 \bar{l}_2^2 + \bar{l}_1^2(1 - \bar{\mu}_1) + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2}{(1 - \bar{\mu}_2)\bar{\mu}_1 \bar{l}_2 + \bar{l}_1(1 - \bar{\mu}_1) + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2}, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

а постоянные $\tilde{C}_j^1, \tilde{C}_j^2$ — из (2.1.4), (2.1.5), (2.1.8)

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_1^1 &= \tilde{A}g_1, \quad \tilde{C}_1^2 = 0, \quad \tilde{C}_2^1 = \bar{k}_1\tilde{C}_1^1 - \frac{\tilde{A}\bar{l}_1}{6}d_1, \\
\tilde{C}_2^2 &= \tilde{C}_1^1(1 - \bar{k}_1) + \frac{\tilde{A}\bar{l}_1}{12}(2d_1 - d_2), \\
\tilde{C}_3^1 &= \bar{k}_1\bar{k}_2\tilde{C}_1^1 - \frac{\tilde{A}}{6\bar{l}_1}(\bar{l}_2d_3 + \bar{l}_1^2\bar{k}_2d_1), \\
\tilde{C}_3^2 &= -\frac{\tilde{A}\bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2}{12\bar{l}_1^2}(5 + 4g) - \frac{\tilde{C}_3^1}{\bar{l}_1},
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

где введены вспомогательные обозначения

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{1}{12\bar{l}_1(\bar{l}_1 + \bar{k}_1(\bar{l}_2 - \bar{l}_1 - \bar{k}_2(\bar{l}_2 - 1)))} \left(\bar{\chi}_1\bar{l}_2^2(\bar{\mu}_1\bar{l}_2^2 + 2\bar{\mu}_1g\bar{l}_2 + 6(1 - \bar{\mu}_1) \times \right. \\
&\times (\bar{l}_1 + g)) - \bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2(\bar{l}_2^4 + 2\bar{l}_2^2g(\bar{l}_2 - 3) - 6\bar{l}_2^2 + 5 + 4g) + \bar{l}_1^2(\bar{l}_1\bar{l}_2 + 2d_1(\bar{l}_2 - \bar{l}_1 - \\
&\left. - \bar{k}_2(\bar{l}_2 - 1))) - 2\bar{l}_2d_3(\bar{l}_2 - 1) \right),
\end{aligned}$$

$$d_1 = (2\bar{l}_1 + 3g)(\bar{k}_1 - \bar{\chi}_1\bar{\mu}_1) - 6\bar{\chi}_1(1 - \bar{\mu}_1)(\bar{l}_1 + g), \tag{2.2.5}$$

$$d_2 = (\bar{l}_1 + 2g)(1 - \bar{\chi}_1\bar{\mu}_1) - 6\bar{\chi}_1(1 - \bar{\mu}_1)(\bar{l}_1 + g),$$

$$\begin{aligned}
d_3 &= \bar{\chi}_1\bar{k}_2(2\bar{\mu}_1\bar{l}_2^2 + 3\bar{\mu}_1\bar{l}_2g + 6\bar{l}_1(1 - \bar{\mu}_1)(\bar{l}_1 + g)) - \\
&- \bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2(2\bar{l}_2^2 + g(3\bar{l}_2 - 6) - 6),
\end{aligned}$$

$\bar{l}_1 = l_1/l_3$, $\bar{l}_2 = l_2/l_3$, $\bar{\mu}_1 = \mu_1/\mu_2$, $\bar{\mu}_2 = \mu_2/\mu_3$, $\bar{k}_1 = k_1/k_2$, $\bar{k}_2 = k_2/k_3$, $\bar{\chi}_1 = \chi_1/\chi_2$, $\bar{\chi}_2 = \chi_1/\chi_3$, $\tilde{A} = Af_1^0l_1l_3^2/2\chi_1\nu_1$.

Теперь из (2.2.2) находим представления для скоростей

$$\begin{aligned}
u_1^0(y) &= \frac{\rho_1 f_1^0 l_3^2}{2\mu_1} \left[\frac{\bar{l}_1^2 y^2}{\bar{l}_1^2} + \frac{\bar{l}_1 g y}{\bar{l}_1} \right], \\
u_2^0(y) &= \frac{\rho_1 f_1^0 l_3^2}{2\mu_1} \left[\frac{\bar{\mu}_1 \bar{l}_1^2 y^2}{\bar{l}_1^2} + \frac{\bar{\mu}_1 \bar{l}_1 g y}{\bar{l}_1} + (1 - \bar{\mu}_1)(\bar{l}_1^2 + \bar{l}_1 g) \right], \\
u_3^0(y) &= \frac{\rho_1 f_1^0 l_3^2}{2\mu_1} \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \left[\frac{\bar{l}_1^2 y^2}{\bar{l}_1^2} + g \left(\frac{\bar{l}_1 y}{\bar{l}_1} - 1 \right) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

и возмущений температур

$$\begin{aligned}
T_1^0(y) &= -\frac{Af_1^0 l_1^2 l_3^2}{2\chi_1 \nu_1} \left[\frac{\bar{l}_1^2 y^4}{12\bar{l}_1^4} + \frac{\bar{l}_1 g y^3}{6\bar{l}_1^3} - \frac{g_1 y}{\bar{l}_1} \right], \\
T_2^0(y) &= -\frac{Af_1^0 l_1^2 l_3^2}{2\chi_1 \nu_1} \left[\frac{\bar{\chi}_1 \bar{l}_1 y^2}{2\bar{l}_1^2} \left(\frac{\bar{\mu}_1 \bar{l}_1 y^2}{6\bar{l}_1^2} + \frac{\bar{\mu}_1 g y}{3\bar{l}_1} + (1 - \bar{\mu}_1)(\bar{l}_1 + g) \right) - \frac{y}{\bar{l}_1} \left(\bar{k}_1 g_1 - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\left. -\frac{\bar{l}_1}{6}g_2\right) - g_1(1 - \bar{k}_1) - \frac{\bar{l}_1}{12}(2g_2 - g_3) \Big], \quad (2.2.7)$$

$$T_3^0(y) = -\frac{Af_1^0l_1^2l_3^2}{2\chi_1\nu_1} \left[\frac{\bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2y^2}{2l_1^2} \left(\frac{\bar{l}_1^2y^2}{6l_1^2} + g\left(\frac{\bar{l}_1y}{3l_1} - 1\right) - 1 \right) - \frac{1}{6\bar{l}_1} \left(\frac{1}{\bar{l}_1} - \frac{y}{l_1} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\bar{\chi}_1\bar{k}_2\bar{l}_2d_1 - \bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\bar{l}_2d_2 - 6\bar{l}_1\bar{k}_1g_1 + \bar{l}_1^2g_2 \right) + \frac{\bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2}{12\bar{l}_1^2}(5 + 4g) \right]$$

Из (2.2.6), (2.2.7) следует, что решение описывает течение Пуазейля в слоях при наличии переноса тепла.

Проведем обезразмеривание всех скоростей на $\frac{\rho_1f_1^0l_3^2}{2\mu_1}$

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^0(\xi) &= \frac{u_1(y)2\mu_1}{\rho_1f_1^0l_3^2} = \bar{l}_1\xi(\bar{l}_1\xi + g), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi = \frac{y}{l_1}, \\ \bar{u}_2^0(\xi) &= \frac{u_2(y)2\mu_1}{\rho_1f_1^0l_3^2} = \bar{\mu}_1\bar{l}_1^2\xi^2 + \bar{\mu}_1\bar{l}_1g\xi + \bar{l}_1(1 - \bar{\mu}_1)(\bar{l}_1 + g), \quad 1 \leq \xi \leq \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1}, \\ \bar{u}_3^0(\xi) &= \frac{u_3(y)2\mu_1}{\rho_1f_1^0l_3^2} = \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2(\bar{l}_1^2\xi^2 + g(\bar{l}_1\xi - 1) - 1), \quad \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} \leq \xi \leq \frac{1}{\bar{l}_1} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

и возмущений температур на $\tilde{A}l_1$

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^0(\xi) &= \frac{T_1(y)}{\tilde{A}l_1} = -\frac{\bar{l}_1^2}{12}\xi^4 - \frac{\bar{l}_1g}{6}\xi^3 + g_1\xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\ \bar{T}_2^0(\xi) &= \frac{T_2(y)}{\tilde{A}l_1} = -\frac{\bar{\chi}_1\bar{l}_1\xi^2}{12} \left(\bar{\mu}_1\bar{l}_1\xi^2 + 2\bar{\mu}_1g\xi + 6(1 - \bar{\mu}_1)(\bar{l}_1 + g) \right) + \xi \left(\bar{k}_1g_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{l}_1g_2}{6} \right) + g_1(1 - \bar{k}_1) + \frac{\bar{l}_1}{12}(2g_2 - g_3), \quad 1 \leq \xi \leq \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1}, \quad (2.2.9) \\ \bar{T}_3^0(\xi) &= \frac{T_3(y)}{\tilde{A}l_1} = -\frac{\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\xi^2}{12} \left(\bar{l}_1^2\xi^2 + g(2\bar{l}_1\xi - 6) - 6 \right) + \frac{1}{6\bar{l}_1} \left(\frac{1}{\bar{l}_1} - \xi \right) \left(\bar{\chi}_1\bar{k}_2\bar{l}_2d_1 - \right. \\ &\quad \left. - \bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\bar{l}_2d_2 - 6\bar{l}_1\bar{k}_1g_1 + \bar{l}_1^2g_2 \right) - \frac{\bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2}{12\bar{l}_1^2}(5 + 4g), \quad \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} \leq \xi \leq \frac{1}{\bar{l}_1}. \end{aligned}$$

На рис. 3 приведён вид профилей безразмерных скоростей (2.2.8) (кривая 1) и возмущений температур (2.2.9) (кривая 2) в слоях для системы силикон ($j = 1$) – вода ($j = 2$) – воздух ($j = 3$) при температуре 20°C. Соответствующие значения определяющих параметров приведены в таблице в пункте 2.4.

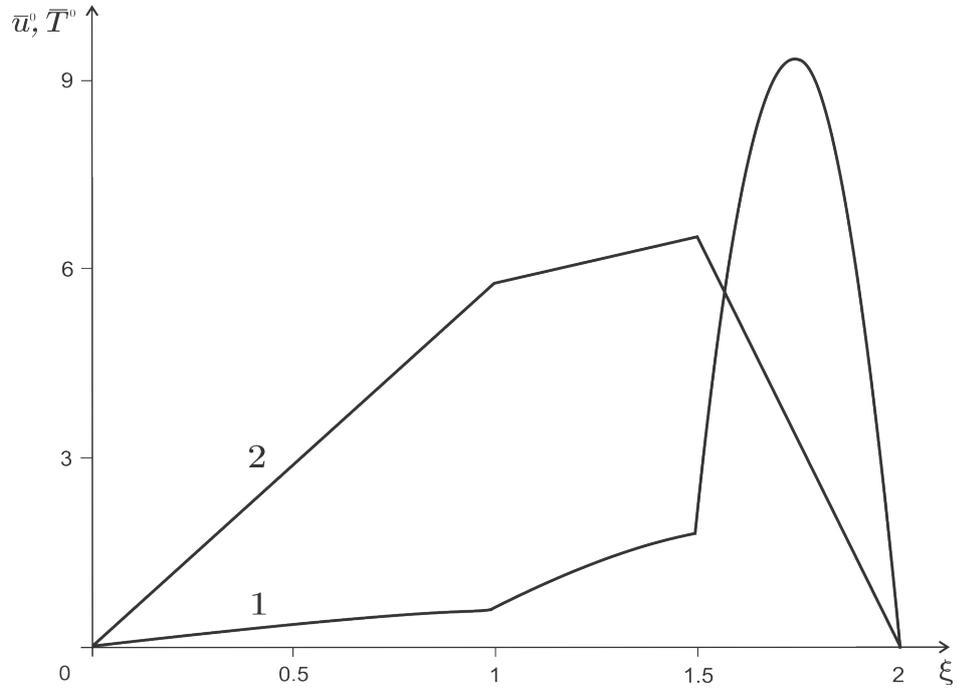


Рис. 3: Стационарные профили скоростей (кривая 1) и возмущений температур (кривая 2), определяемые действием градиента давления

2.3 Априорные оценки при заданном перепаде давления

Получим сначала некоторые априорные оценки решения задачи (2.1.1), (2.1.3), (2.1.7), (2.1.9), (2.2.1). Умножим уравнения (2.1.1) на $\rho_1 u_1$, $\rho_2 u_2$, $\rho_3 u_3$, соответственно, и проинтегрируем по y по своим областям определения. Складывая полученные равенства и используя граничные условия (2.1.3), (2.1.7), (2.2.1), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} + \mu_1 \int_0^{l_1} u_{1y}^2(y, t) dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} u_{2y}^2(y, t) dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} u_{3y}^2(y, t) dy = \\ - \rho_1 f_1(t) \left(\int_0^{l_1} u_1(y, t) dy + \int_{l_1}^{l_2} u_2(y, t) dy + \int_{l_2}^{l_3} u_3(y, t) dy \right), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

где

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho_1 \int_0^{l_1} u_1^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_{l_1}^{l_2} u_2^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_3 \int_{l_2}^{l_3} u_3^2(y, t) dy \quad (2.3.2)$$

есть суммарная кинетическая энергия трёх слоёв.

На самом деле равенство (2.3.1) позволяет установить, при некоторых ограничениях на функцию $f(t)$, асимптотическое поведение решения

при $t \rightarrow \infty$. Действительно, для функций $u_j(y, t)$ справедливо неравенство Фридрихса (1.3.19). Используя это неравенство, неравенство Коши - Буняковского, из (2.3.1) получим (поскольку $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$, $a, b, c \geq 0$) неравенство

$$\frac{dE(t)}{dt} + 2\delta E(t) \leq \delta_1 \sqrt{E(t)} |f_1(t)|, \quad (2.3.3)$$

где $\delta = \min(\rho_j^{-1})/M_0$, $\delta_1 = \sqrt{6} \max(\sqrt{l_1/\rho_1}, \sqrt{(l_2 - l_1)/\rho_2}, \sqrt{(l_3 - l_2)/\rho_3})$. В силу начальных условий (2.1.9) из (2.3.2) $E(0) = 0$, и (2.3.3) даёт оценку

$$E(t) \leq \frac{\delta_1^2}{4} \left(\int_0^t |f_1(t)| e^{\delta t} dt \right)^2 e^{-2\delta t}. \quad (2.3.4)$$

Следовательно, если сходится интеграл

$$\int_0^\infty |f_1(t)| e^{\delta t} dt \equiv C_1 > 0, \quad (2.3.5)$$

то неравенство (2.3.4) примет вид

$$E(t) \leq (\delta_1^2 C_1^2 e^{-2\delta t})/4 \quad (2.3.6)$$

для всех $t \geq 0$. Из этой оценки и (2.3.2) следует экспоненциальное убывание при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (2.1.1), (2.1.3), (2.1.7), (2.1.9), (2.2.1) в интегральной метрике L_2 .

Для получения оценок $|u_j(y, t)|$ необходимо получить оценки интегралов

$$\int_0^{l_1} u_{1y}^2 dy, \quad \int_{l_1}^{l_2} u_{2y}^2 dy, \quad \int_{l_2}^{l_3} u_{3y}^2 dy.$$

Пусть $u(y, t)$ является решением уравнения $u_t = \nu u_{yy} + F(y, t)$, $y \in [a, b]$, тогда имеет место тождество

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_a^b (u_t^2 + \nu^2 u_{yy}^2) dy dt + \nu \int_a^b u_y^2 dy = 2\nu \int_0^t (u_t u_y)|_a^b dt + \nu \int_a^b (u_y^0)^2 dy + \\ + \int_0^t \int_a^b F^2(y, t) dy dt, \quad (2.3.7) \end{aligned}$$

где $u^0(y) = u(y, 0)$. Тождество (2.3.7) вытекает из равенств

$$\int_0^t \int_a^b (u_t - \nu u_{yy})^2 dy dt = \int_0^t \int_a^b F^2(y, t) dy dt,$$

$u_t u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(u_t u_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}(u_y^2)$ и интегрирования по частям.

Положим сначала в (2.3.7) $u = u_1, a = 0, b = l_1, \nu = \nu_1, F = f_1(t)$ и все умножим на ρ_1 ; затем возьмём $u = u_2, a = l_1, b = l_2, \nu = \nu_2, F = \bar{\rho}_1 f_1(t)$ и все умножим на ρ_2 ; и наконец $u = u_3, a = l_2, b = l_3, \nu = \nu_3, F = \bar{\rho}_2 f_1(t)$ и все умножим на ρ_3 . После сложения приходим к другому интегральному тождеству для задачи (2.1.1), (2.1.3), (2.1.7), (2.1.9), (2.2.1):

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^t \int_0^{l_1} (u_{1t}^2 + \nu_1^2 u_{1yy}^2) dy dt + \rho_2 \int_0^t \int_{l_1}^{l_2} (u_{2t}^2 + \nu_2^2 u_{2yy}^2) dy dt + \rho_3 \int_0^t \int_{l_2}^{l_3} (u_{3t}^2 + \\ & + \nu_3^2 u_{3yy}^2) dy dt + \mu_1 \int_0^{l_1} u_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} u_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} u_{3y}^2 dy = \rho_1 l_3 \int_0^t f_1^2(t) dt. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

При выводе (2.3.8) были учтены граничные условия (2.1.3), (2.1.7), (2.2.1) и начальные условия (2.1.9). Следовательно для всех $t \geq 0$

$$\int_0^{l_1} u_{1y}^2 dy \leq \frac{E_1(t)}{\mu_1}, \quad \int_{l_1}^{l_2} u_{2y}^2 dy \leq \frac{E_1(t)}{\mu_2}, \quad \int_{l_2}^{l_3} u_{3y}^2 dy \leq \frac{E_1(t)}{\mu_3}, \quad (2.3.9)$$

где $E_1(t)$ - правая часть (2.3.8). Поэтому если дополнительно к (2.3.5)

$$\int_0^\infty f_1^2(t) dt \equiv C_2 > 0, \quad (2.3.10)$$

то имеют место оценки, равномерные по y :

$$|u_1(y, t)| \leq \left(2\delta_1 \sqrt{C_1^2 C_2 \frac{l_3}{2\mu_1}} \right)^{1/2} e^{-\frac{\delta t}{2}}, \quad (2.3.11)$$

$$|u_3(y, t)| \leq \left(2\delta_1 \sqrt{C_1^2 C_2 \frac{\rho_1 l_3}{2\rho_3 \mu_3}} \right)^{1/2} e^{-\frac{\delta t}{2}}. \quad (2.3.12)$$

Последние оценки получаются с помощью равенств

$$u_1^2(y, t) = 2 \int_0^y u_1(y, t) u_{1y}(y, t) dy, \quad u_2^2(y, t) = -2 \int_y^{l_3} u_3(y, t) u_{3y}(y, t) dy,$$

неравенств (2.3.6), (2.3.9), (2.3.10) и Коши–Буняковского.

Замечание 4. Из сходимости интеграла (2.3.5) следует сходимость интеграла (2.3.10).

Для получения оценки $|u_2(y, t)|$ применим принцип максимума [21]. Рассмотрим смешанную задачу для уравнения параболического типа

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(p \nabla u) - qu + F(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u|_{\Gamma} &= v(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma \times [0, \infty). \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Пусть $u(x, t)$ — классическое решение задачи (2.3.13) и $F \in C(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$. Фиксируем $T > 0$ и обозначим

$$A = \|F\|_{C(\bar{\Omega} \times [0, T])}, \quad A_0 = \|u_0\|_{C(\bar{\Omega})}, \quad A_1 = \|v\|_{C(\Gamma \times [0, T])}. \quad (2.3.14)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega} \times [0, T])} \leq \max(A_0, A_1) + A \frac{T}{\rho_0}, \quad (2.3.15)$$

где $\rho_0 = \min(\rho(x)) > 0, x \in \bar{\Omega}$.

В нашем случае:

$$\begin{aligned} \rho &= 1, \quad p = \nu_2, \quad q = 0, \quad F = f_2, \quad \Gamma = l_1 \cup l_2, \quad u_{20} = 0, \\ u_2(l_1, t) &= u_1(l_1, t), \quad u_2(l_2, t) = u_3(l_2, t). \end{aligned}$$

Согласно определениям (2.3.14) и неравенству (2.3.15) получим оценку

$$\begin{aligned} |u_2(y, t)| \leq \max(0, |u_1(l_1, t)|, |u_3(l_2, t)|) + tm_0 e^{-\delta t} = \max(C_3, C_4) e^{-\frac{\delta t}{2}} + \\ + tm_0 e^{-\delta t}, \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

$$C_3 = \left(2\delta_1 \sqrt{C_1^2 C_2 \frac{l_3}{2\mu_1}} \right)^{1/2}, \quad C_4 = \left(2\delta_1 \sqrt{C_1^2 C_2 \frac{\rho_1 l_3}{2\rho_3 \mu_3}} \right)^{1/2}.$$

Нами доказана

Теорема 3. Решение задачи (2.1.1), (2.1.3), (2.1.7), (2.1.9), (2.2.1) при выполнении условия (2.3.5) и $t \rightarrow \infty$ стремится к нулевому решению, причем справедливы оценки скорости сходимости (2.3.11), (2.3.12) и (2.3.16), равномерные в промежутках $[-l_1, 0]$, $[0, l_2]$, $[l_2, l_3]$.

Значит, если градиент давления в одной из жидкостей достаточно быстро стремится к нулю, то происходит торможение жидкостей за счет вязкого трения по законам (2.3.11), (2.3.12), (2.3.16).

Покажем, что при некоторых условиях поле скоростей стремится к стационарному (2.2.6) с ростом времени. Для этого введём разности

$$\begin{aligned} w_j(y, t) &= u_j^0(y) - u_j(y, t), \\ g_j(t) &= f_j^0 - f_j(t) \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Тогда функции $w_j(y, t)$ будут удовлетворять начально – краевой задаче

$$\begin{aligned} w_{jt} &= \nu_j w_{jyy} - g_j(t), \\ w_j(y, 0) &= u_j^0(y), \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

$$\mu_1 w_{1y}(l_1, t) - \mu_2 w_{2y}(l_1, t) = 0, \quad \mu_2 w_{2y}(l_2, t) - \mu_3 w_{3y}(l_2, t) = 0,$$

$$w_1(l_1, t) = w_2(l_1, t), \quad w_2(l_2, t) = w_3(l_2, t), \quad (2.3.19)$$

$$w_1(0, t) = 0, \quad w_3(l_3, t) = 0.$$

Отметим, что теперь начальные данные не нулевые и $E(0) \neq 0$, а функции $g_j(t)$, также как и $f_j(t)$, удовлетворяют условию $\rho_1 g_1 = \rho_2 g_2 = \rho_3 g_3$. Тогда из (2.3.3) получим оценку

$$E(t) \leq \left(\sqrt{E(0)} + \frac{\delta_1}{2} \int_0^t |g_1(t)| e^{\delta t} dt \right)^2 e^{-2\delta t}, \quad (2.3.20)$$

$$E(0) = \frac{1}{2} \rho_1 \int_0^{l_1} (u_1^0(y))^2 dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_{l_1}^{l_2} (u_2^0(y))^2 dy + \frac{1}{2} \rho_3 \int_{l_2}^{l_3} (u_3^0(y))^2 dy.$$

Следовательно, если сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} |g_1(t)| e^{\delta t} dt \equiv C_5, \quad (2.3.21)$$

то неравенство (2.3.20) примет вид

$$E(t) \leq \left(\sqrt{E(0)} + \frac{\delta_1}{2} C_5 \right)^2 e^{-2\delta t} \equiv \tilde{C}_5 e^{-2\delta t}, \quad (2.3.22)$$

для всех $t \geq 0$. Для оценки L^2 – норм w_{jy} также применим тождество (2.3.7)

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^t \int_0^{l_1} (w_{1t}^2 + \nu_1^2 w_{1yy}^2) dy dt + \rho_2 \int_0^t \int_{l_1}^{l_2} (w_{2t}^2 + \nu_2^2 w_{2yy}^2) dy dt + \rho_3 \int_0^t \int_{l_2}^{l_3} (w_{3t}^2 + \\ & + \nu_3^2 w_{3yy}^2) dy dt + \mu_1 \int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy = \\ & = D + \rho_1 l_3 \int_0^t f_1^2(t) dt, \quad (2.3.23) \end{aligned}$$

$$D = \mu_1 \int_0^{l_1} (u_{1y}^0(y))^2 dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} (u_{2y}^0(y))^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} (u_{3y}^0(y))^2 dy.$$

При выводе (2.3.23) были учтены начальные условия (2.3.18) и граничные условия (2.3.19). Следовательно для всех $t \geq 0$

$$\int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy \leq \frac{E_2(t)}{\mu_1}, \quad \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy \leq \frac{E_2(t)}{\mu_2}, \quad \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy \leq \frac{E_2(t)}{\mu_3}, \quad (2.3.24)$$

где $E_2(t)$ – правая часть (2.3.23). Поэтому если дополнительно к (2.3.21)

$$\int_0^\infty g_1^2(t) dt \equiv C_6 > 0, \quad (2.3.25)$$

то из (2.3.22), (2.3.24), (2.3.25) и неравенства Коши – Буняковского получим априорные оценки

$$\begin{aligned} w_1^2(y, t) &= \int_0^y (w_1^2)_y dy \leq 2 \left(\int_0^{l_1} w_1^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sqrt{\frac{8\tilde{C}_5\tilde{C}_6}{\mu_1\rho_1}} \right) e^{-\delta t}, \\ w_3^2(y, t) &= - \int_y^{l_3} (w_3^2)_y dy \leq 2 \left(\int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sqrt{\frac{8\tilde{C}_5\tilde{C}_6}{\mu_3\rho_3}} \right) e^{-\delta t}, \end{aligned}$$

где $\tilde{C}_6 = D + \rho_1 l_3 C_6$.

Используя условие $w_1(l_1, t) = w_2(l_1, t)$ (см. (2.3.18)) и предыдущую оценку для $w_1^2(y, t)$, найдем

$$\begin{aligned} w_2^2(y, t) &= \int_{l_1}^y (w_2^2)_y dy + w_1^2(y, t) \leq 2 \left(\int_{l_1}^{l_2} w_2^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy \right)^{1/2} + \\ &+ w_1^2(l_1, t) \leq \sqrt{8\tilde{C}_5\tilde{C}_6} e^{-\delta t} \left((\rho_1\mu_1)^{-1/2} + (\rho_2\mu_2)^{-1/2} \right). \end{aligned}$$

Поэтому имеют место оценки

$$\begin{aligned} |w_1(y, t)| &\leq \left(\frac{8\tilde{C}_5\tilde{C}_6}{\mu_1\rho_1} \right)^{1/4} e^{-\frac{\delta t}{2}}, \\ |w_2(y, t)| &\leq \left(\sqrt{8\tilde{C}_5\tilde{C}_6} \left((\rho_1\mu_1)^{-1/2} + (\rho_2\mu_2)^{-1/2} \right) \right)^{1/2} e^{-\frac{\delta t}{2}}, \quad (2.3.26) \\ |w_3(y, t)| &\leq \left(\frac{8\tilde{C}_5\tilde{C}_6}{\mu_3\rho_3} \right)^{1/4} e^{-\frac{\delta t}{2}}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к замене (2.3.17), приходим к следующему результату

Теорема 4. *Решение начально – краевой задачи (2.1.1), (2.1.3), (2.1.7), (2.1.9), (2.2.1) при условии, что $\int_0^\infty |f_1(t) - f_1^0| e^{\delta t} dt < \infty$ и $t \rightarrow \infty$ выходит на стационарный режим (2.2.6), причём справедливы оценки скорости сходимости (2.3.26).*

Получим аналогичные (2.3.26) априорные оценки решения задачи (2.1.2), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.8), (2.1.10). Замена $N_j(y, t) = T_j^0(y) - T_j(y, t)$ приводит к следующей начально – краевой задаче

$$N_{jt} = \chi_j N_{jyy} - A w_j, \quad (2.3.27)$$

$$k_1 N_{1y}(l_1, y) = k_2 N_{2y}(l_1, y), \quad k_2 N_{2y}(l_2, y) = k_3 N_{3y}(l_2, y), \quad (2.3.28)$$

$$N_1(l_1, t) = N_2(l_1, t), \quad N_2(l_2, t) = N_3(l_2, t), \quad (2.3.29)$$

$$N_1(0, t) = 0, \quad N_3(l_3, t) = 0, \quad (2.3.30)$$

$$N_j(y, 0) = T_j^0(y). \quad (2.3.31)$$

Умножим уравнения (2.3.27) на $\rho_j c_{0j} N_j$, где c_{0j} – коэффициенты удельной теплоёмкости и проинтегрируем по y . Так как $\chi_j = k_j / \rho_j c_{0j}$, то складывая полученные равенства и используя граничные условия (2.3.28)

– (2.3.30), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{dE_3(t)}{dt} + k_1 \int_0^{l_1} N_{1y}^2(y, t) dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} N_{2y}^2(y, t) dy + k_3 \int_{l_2}^{l_3} N_{3y}^2(y, t) dy = \\ & = -A \left(\rho_1 c_{01} \int_0^{l_1} w_1 N_1(y, t) dy + \rho_2 c_{02} \int_{l_1}^{l_2} w_2 N_2(y, t) dy + \rho_3 c_{03} \int_{l_2}^{l_3} w_3 N_3(y, t) dy \right), \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

$$E_3(t) = \frac{1}{2} \rho_1 c_{01} \int_0^{l_1} N_1^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_2 c_{02} \int_{l_1}^{l_2} N_2^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_3 c_{03} \int_{l_2}^{l_3} N_3^2(y, t) dy.$$

Для функций $N_j(y, t)$ также справедливо неравенство вида (1.3.19) с другой постоянной M_0 . Поэтому из (2.3.32), (2.3.26) приходим к неравенству

$$\frac{dE_3(t)}{dt} + 2\delta_2 E_3 \leq 2\delta_3 \sqrt{E_3} e^{-\delta t}, \quad (2.3.33)$$

где $\delta_2 = \min(\rho_j^{-1} c_{0j}^{-1})/M_0$, $\delta_3 = |A| \sqrt{3\tilde{C}_5} \max(\sqrt{c_{0j}})$. Откуда

$$E_3(t) \leq e^{-2\delta_2 t} \left(\sqrt{E_3(0)} + \begin{cases} \frac{\delta_3}{\delta_2 - \delta} (e^{(\delta_2 - \delta)t} - 1), & \delta_2 \neq \delta; \\ \delta_3 t, & \delta_2 = \delta. \end{cases} \right)^2. \quad (2.3.34)$$

Оценки интегралов

$$\int_0^{l_1} N_{1y}^2 dy, \quad \int_{l_1}^{l_2} N_{2y}^2 dy, \quad \int_{l_2}^{l_3} N_{3y}^2 dy$$

получаются из тождества (2.3.7), где надо ν_j заменить на χ_j , u_j на N_j , а F_j на $-Aw_j$. Результаты их умножения на $\rho_j c_{0j}$ и сложения приводит к тождеству

$$\begin{aligned} & \rho_1 c_{01} \int_0^t \int_0^{l_1} (N_{1t}^2 + \chi_1^2 N_{1yy}^2) dy dt + \rho_2 c_{02} \int_0^t \int_{l_1}^{l_2} (N_{2t}^2 + \chi_2^2 N_{2yy}^2) dy dt + \\ & + \rho_3 c_{03} \int_0^t \int_{l_2}^{l_3} (N_{3t}^2 + \chi_3^2 N_{3yy}^2) dy dt + k_1 \int_0^{l_1} N_{1y}^2 dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} N_{2y}^2 dy + k_3 \int_{l_2}^{l_3} N_{3y}^2 dy = \\ & = D_1 + A^2 \left(\rho_1 c_{01} \int_0^t \int_0^{l_1} w_1^2 dy dt + \rho_2 c_{02} \int_0^t \int_{l_1}^{l_2} w_2^2 dy dt + \rho_3 c_{03} \int_0^t \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy dt \right). \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

Используя неравенства (2.3.22), из (2.3.35) найдем

$$\int_0^{l_1} N_{1y}^2 dy \leq \frac{1}{k_1} (D_1 - \delta_4 (e^{-2\delta t} - 1)), \quad \int_{l_1}^{l_2} N_{2y}^2 dy \leq \frac{1}{k_2} (D_1 - \delta_4 (e^{-2\delta t} - 1)),$$

$$\int_{l_2}^{l_3} N_{3y}^2 dy \leq \frac{1}{k_3} (D_1 - \delta_4 (e^{-2\delta t} - 1))$$

с постоянными

$$D_1 = k_1 \int_0^{l_1} (T_{1y}^0)^2 dy + k_1 \int_{l_1}^{l_2} (T_{2y}^0)^2 dy + k_1 \int_{l_2}^{l_3} (T_{3y}^0)^2 dy,$$

$$\delta_4 = \frac{A^2 \tilde{C}_5}{\delta} (c_{01} + c_{02} + c_{03}).$$

Далее, как и ранее для w_j , получаем оценки

$$|N_1(y, t)| \leq \left(\frac{8E_3(t)}{\rho_1 c_{01} k_1} (D_1 + \delta_4) \right)^{1/4},$$

$$|N_2(y, t)| \leq \left(8E_3(t) (D_1 + \delta_4) \left((\rho_1 c_{01} k_1)^{-1/2} + (\rho_2 c_{02} k_2)^{-1/2} \right) \right)^{1/4}, \quad (2.3.36)$$

$$|N_3(y, t)| \leq \left(\frac{8E_3(t)}{\rho_3 c_{03} k_3} (D_1 + \delta_4) \right)^{1/4},$$

Теорема 5. *Решение начально – краевой задачи (2.1.2), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.8), (2.1.10) при условии, что $\int_0^\infty |f_1(t) - f_1^0| e^{\delta t} dt < \infty$ и $t \rightarrow \infty$ выходит на стационарный режим (2.2.7), причём справедливы оценки скорости сходимости (2.3.36).*

Более того, вместо (2.3.21) достаточно потребовать, чтобы $|f_1^0 - f_1(t)| \leq \frac{\alpha}{(t + \gamma)^k}$, $k > 1$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ – постоянные.

Замечание 5. Из (2.3.34) при $t \rightarrow \infty$ имеем

$$E_3(t) \sim \begin{cases} \frac{\delta_3^2}{(\delta_2 - \delta)^2} e^{-2\delta t}, & \delta_2 \neq \delta; \\ \delta_3^2 t^2 e^{-2\delta t}, & \delta_2 = \delta. \end{cases}$$

Следовательно, и возмущения температуры выходят на стационарный режим с ростом времени по закону (2.3.36). Полученные оценки (2.3.36) вместе с результатами теоремы 4 можно интерпретировать, как устойчивость стационарного течения относительно однонаправленных нестационарных возмущений.

2.4 Решение нестационарной задачи методом преобразования Лапласа

Для получения более точной информации о поведении $u_j(y, t)$ применим преобразование Лапласа к задаче (2.1.1), (2.1.3), (2.1.7), (2.1.9), (2.2.1). В силу полученных в предыдущем разделе оценок $|u_j(y, t)|, |T_j(y, t)|$ это преобразование можно использовать, см. пункт 1.1. При этом изображения $U_j(y, p)$ функций $u_j(y, t)$ суть решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$U_{jyy} - \frac{pU_j}{\nu_j} = \frac{F_j}{\nu_j}, \quad (2.4.1)$$

где $F_j = F_j(p)$ — изображения функций $f_j(t)$; использованы свойство связи дифференцирования оригинала (см. пункт 1.1) и начальные условия (2.1.9). В результате применения преобразования Лапласа к граничным условиям получим равенства касательных напряжений

$$\mu_1 U_{1y}(l_1, p) - \mu_2 U_{2y}(l_1, p) = 0, \quad \mu_2 U_{2y}(l_2, p) - \mu_3 U_{3y}(l_2, p) = 0, \quad (2.4.2)$$

кинематические условия:

$$U_1(l_1, p) = U_2(l_1, p), \quad U_2(l_2, p) = U_3(l_2, p), \quad (2.4.3)$$

условия прилипания:

$$U_1(0, p) = 0, \quad U_3(l_3, p) = 0. \quad (2.4.4)$$

Общее решение уравнения (2.4.1) имеет вид

$$U_j(y, p) = C_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}} y + C_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}} y - \frac{F_j}{p}. \quad (2.4.5)$$

Постоянные C_1^j, C_2^j определим из граничных условий (2.4.2) – (2.4.4):

$$C_3^1 = \frac{\frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\nu_2}} \left(C_2^1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 + C_2^2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3 - \frac{F_3}{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_3 - l_2)},$$

$$C_3^2 = \frac{\frac{F_3}{p} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2 - \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\nu_2}} \left(C_2^1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 + C_2^2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_3 - l_2)},$$

$$C_2^1 = \frac{1}{\Delta} \left[b_1 \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 - \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right) + \right. \\ \left. + a_2 \left(b_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 - b_2 \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right) \right], \quad (2.4.6)$$

$$C_2^2 = \frac{1}{\Delta} \left[b_1 \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right) - \right. \\ \left. - a_1 \left(b_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 - b_2 \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right) \right], \quad C_1^2 = \frac{F_1}{p},$$

$$C_1^1 = \frac{1}{\Delta} \left[-b_1 - \left(a_2 b_2 + a_1 b_3 \right) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 + \left(a_2 b_3 + a_1 b_2 \right) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right].$$

Здесь вспомогательные величины a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 и Δ имеют вид

$$a_1 = \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 + \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_3 - l_2) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2, \\ a_2 = \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 + \frac{\bar{\mu}_2}{\sqrt{\bar{\nu}_2}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_3 - l_2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2, \\ b_1 = \frac{F_3}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_3 - l_2) p} + \frac{F_2 - F_3}{p}, \quad b_2 = \frac{1}{p} \left[F_1 \left(1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right) - F_2 \right], \\ b_3 = -\frac{\bar{\mu}_1 F_1}{p \sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1, \quad (2.4.7)$$

$$\Delta = a_2 \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right) + \\ + a_1 \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 - \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right).$$

где $\bar{\nu}_1 = \nu_1/\nu_2, \bar{\nu}_2 = \nu_2/\nu_3$.

Предположим, что существует $\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t) = f_1^0 = \text{const}$, тогда (см. пункт 1.1)

$$\lim_{p \rightarrow 0} p F_1(p) = f_1^0. \quad (2.4.8)$$

Докажем, что нестационарное решение (2.4.5) – (2.4.7) при условии (2.4.8) сходится к стационарному (2.2.6), то есть $\lim_{p \rightarrow 0} p U_j(y, p) = u_j^0(y)$. Проведём

доказательство для $U_1(y, p)$. Для этого воспользуемся тем, что при $x \rightarrow 0$ $\text{ch } x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$, $\text{sh } x \approx x + \frac{x^3}{3}$. Тогда из формулы (2.4.7) имеем

$$\begin{aligned} a_1 &\approx \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} \left(l_2 + \bar{\mu}_2(l_3 - l_2) \right), \quad a_2 \approx 1 + \frac{pl_2}{2\nu_2} \left(l_2 + 2\bar{\mu}_2(l_3 - l_2) \right), \\ b_1 &\approx \frac{1}{p} \left(F_2 - \frac{(l_3 - l_2)^2 F_3}{2\nu_3} p \right), \quad b_2 \approx -\frac{1}{p} \left(F_2 + \frac{F_1 l_1^2}{2\nu_1} p \right), \quad b_3 \approx -\frac{F_1 \bar{\mu}_1 \sqrt{\nu_2} l_1}{\nu_1 \sqrt{p}}. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Для Δ достаточно удерживать только первые члены разложения:

$$\begin{aligned} \Delta &\approx \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} \frac{\bar{\mu}_1 l_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} - \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 - \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\bar{\nu}_1}} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 + \bar{\mu}_2(l_3 - l_2)) = \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} (\bar{\mu}_1 l_1 - l_1 - \\ &- \bar{\mu}_1(l_2 + \bar{\mu}_2(l_3 - l_2))) = -\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_3 \left[(1 - \bar{\mu}_2) \bar{\mu}_1 \bar{l}_2 + \bar{l}_1 (1 - \bar{\mu}_1) + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \right]. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Проводя аналогичные вычисления и используя (2.4.9), получим при $p \rightarrow 0$

$$C_1^1 \approx \frac{F_1 l_3^2}{2\nu_1 \Delta} \left[(1 - \bar{\mu}_2) \bar{\mu}_1 \bar{l}_2^2 + \bar{l}_1^2 (1 - \bar{\mu}_1) + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \right], \quad (2.4.11)$$

где Δ надо заменить приближением (2.4.10).

Выражения в квадратных скобках в (2.4.10), (2.4.11) есть в точности знаменатель и числитель g , соответственно (см. формулу (2.2.3)). Тогда

$$pU_1 \approx C_1^1 \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\nu_1}} y + C_1^2 \left(p + \frac{p^2}{2\nu_1} y^2 \right) - F_1.$$

Поскольку $C_1^2 = F_1/p$, в силу соотношений (2.4.8), (2.4.10), (2.4.11) при $p \rightarrow 0$ из предыдущей асимптотики имеем

$$pU_1 \approx \frac{f_1^0 l_3}{2\nu_1} g y + \frac{f_1^0}{2\nu_1} y^2 = \frac{\rho_1 f_1^0 l_3^2}{2\mu_1} \left[\frac{\bar{l}_1^2 y^2}{l_1^2} + \frac{\bar{l}_1 g y}{l_1} \right] = u_1^0(y),$$

то есть $\lim_{p \rightarrow 0} pU_1(y, p) = u_1^0(y)$, см. первую формулу (2.2.6).

Аналогичным способом можно получить предельные равенства для pU_2, pU_3 . Значит, решения $u_j(y, t)$ нестационарной задачи (2.1.1), (2.1.3), (2.1.7), (2.1.9), (2.2.1), в этом случае, сходятся к решениям (2.2.6) стационарной задачи; это ещё раз подтверждает результат теоремы 4.

На рис. 4, 5 приведены профили безразмерных скоростей в слоях для системы силикон ($j = 1$) — вода ($j = 2$) — воздух ($j = 3$) при температуре 20°C . Соответствующие значения определяющих параметров приведены в таблице. В первом случае (рис. 4) расчёты показывают, что уже при $\tau =$

3 скорости практически выходят на стационарный решение (2.2.8); $\tau = \nu_1 t / l_1^2$ — безразмерное время. А во втором (рис. 5) решение не сходится к стационарному, так как $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sin \tau$ не существует, что и следовало ожидать.

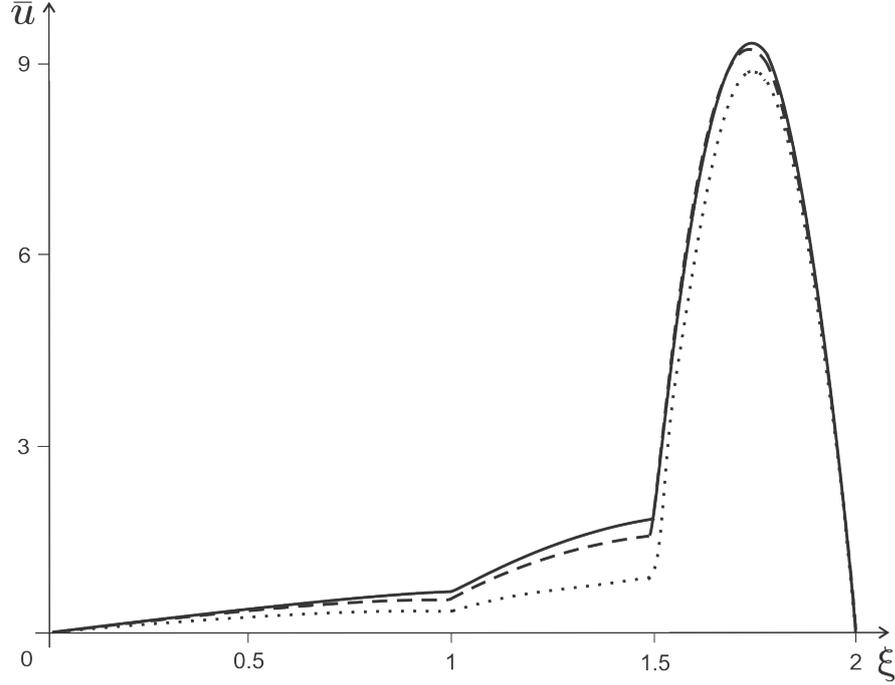


Рис. 4: Профили скоростей при заданном перепаде давления $f_1(\tau) = 1 + e^{-\tau} \sin \tau$: $\tau = 1(\dots)$, $\tau = 3(- - -)$, стационарное решение $(-)$

j	$\rho_j, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\nu_j \times 10^{-6}, \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$k_j, \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^3 \cdot \text{К}}$	$\chi_j \times 10^{-6}, \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$\alpha_j \times 10^{-5}, \frac{\text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}$
1	956	10.2	0.133	0.0675	6.4
2	998	1.004	0.597	0.143	15.14
3	1.205	15.11	0.0257	21	—

Таблица

Применение преобразования Лапласа к задаче (2.1.2), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.8), (2.1.10) приводит к краевой задаче для изображений

$$p\hat{T}_j = \chi_j \hat{T}_{jyy} + AU_j(y, p), \quad (2.4.12)$$

$$\hat{T}_1(l_1, p) = \hat{T}_2(l_1, p), \quad \hat{T}_2(l_2, p) = \hat{T}_3(l_2, p), \quad (2.4.13)$$

$$k_1 \hat{T}_{1y}(l_1, p) = k_2 \hat{T}_{2y}(l_1, p), \quad k_2 \hat{T}_{2y}(l_2, p) = k_3 \hat{T}_{3y}(l_2, p), \quad (2.4.14)$$

$$\hat{T}_1(0, p) = 0, \quad \hat{T}_3(l_3, p) = 0. \quad (2.4.15)$$

Решение уравнения (2.4.12) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \hat{T}_j(y, p) &= \hat{C}_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} y + \hat{C}_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} y + \hat{T}_{\text{ч}j}, \\ \hat{T}_{\text{ч}j} &= \frac{A}{\sqrt{p\chi_j}} \int_{\Omega_j} U_j(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} (z - y) dz, \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

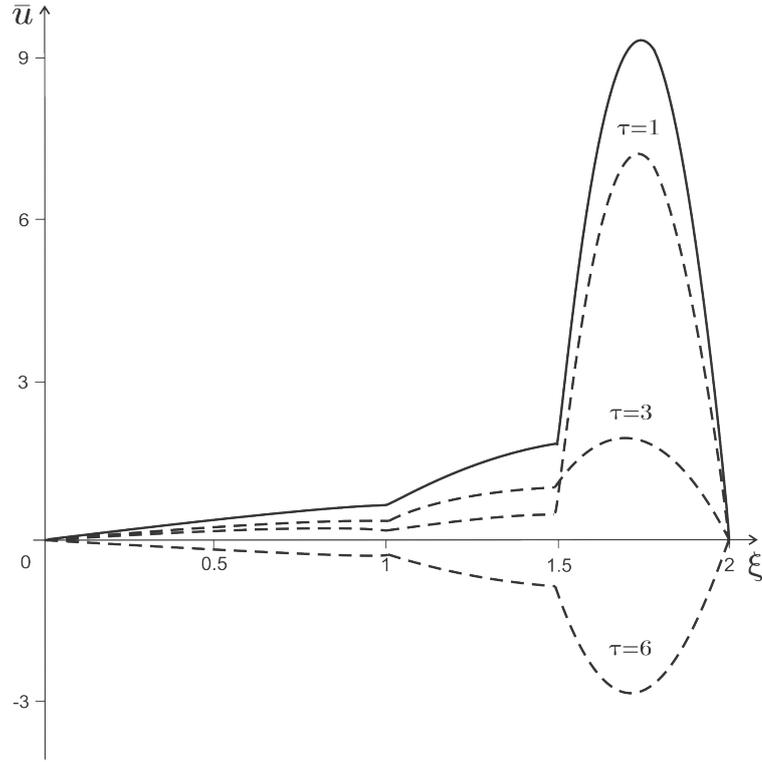


Рис. 5: Профили скоростей при заданном перепаде давления $f_1(\tau) = \sin \tau$, стационарное решение (—)

где $\hat{T}_{\tau j}$ — частное решение уравнения. Из граничных условий (2.4.13) – (2.4.15)

$$\hat{C}_1^1 = \frac{s_4 d_6 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 T_{\tau 3}(l_3, p)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} - s_3 d_4 + d_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 - T_{\tau 2}(l_2, p)}{d_3 s_3 + d_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 - d_5 s_4}, \quad (2.4.17)$$

$$\hat{C}_1^2 = 0, \quad \hat{C}_2^2 = \hat{C}_1^1 d_3 + d_4, \quad \hat{C}_2^1 = \hat{C}_1^1 d_1 - d_2 - \hat{C}_2^2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1,$$

$$\hat{C}_3^1 = \hat{C}_1^1 d_5 + d_6, \quad \hat{C}_3^2 = -\hat{C}_3^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3 - \frac{T_{\tau 3}(l_3, p)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3}.$$

Здесь вспомогательные величины $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, s_1, s_2, s_3, s_4$ имеют вид

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\bar{k}_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1}{\sqrt{\chi_1} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1}, \quad d_2 = \frac{A \bar{k}_1}{\sqrt{p \chi_1} \chi_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} \int_0^{l_1} U_1(z, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} (z - l_1) dz, \\
d_3 &= \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 - d_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 (1 - \operatorname{th}^2 \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1)}, \quad d_4 = \frac{d_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 + T_{\chi_1}(l_1, p)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 (1 - \operatorname{th}^2 \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1)}, \\
d_5 &= \frac{\bar{k}_2 \sqrt{\chi_1} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2}{\sqrt{\chi_2} s_1} (d_1 + d_3 s_2), \quad s_1 = \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3,
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

$$\begin{aligned}
d_6 &= \frac{\operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 T_{\chi_3}(l_3, p)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3 - \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} + \frac{\bar{k}_2 \sqrt{\chi_1} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2}{\sqrt{\chi_2} s_1} \left(-d_2 + s_2 d_4 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{T_{\chi_2 y}(l_2, p)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2} \right), \quad s_2 = \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 - \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1, \\
s_3 &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 (1 - \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1), \\
s_4 &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 (\operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3).
\end{aligned}$$

Аналогично, как и для $U_j(y, p)$, из полученных формул (2.4.16) – (2.4.18) доказывается, что $\lim_{t \rightarrow \infty} T_j(y, t) = T_j^0(y)$, то есть с ростом времени возмущения температур в слоях выходят на стационарный режим, если $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f^0$. Для этого достаточно вычислить пределы $\lim_{p \rightarrow 0} p \hat{T}_j(y, p)$. В качестве примера приведём выкладки для $T_1(y, p)$. С этой целью несколько преобразуем выражение (2.4.16) для $j = 1$ учитывая, что $\hat{C}_1^2 = 0$

$$\hat{T}_1(y, p) = \hat{C}_1^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} y + \frac{A}{\sqrt{p \chi_1}} \int_0^y U_1(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} (z - y) dz. \tag{2.4.19}$$

Далее можно подставить $U_1(y, p)$ из выражений (2.4.5) – (2.4.7) в формулу (2.4.19) и получить явное выражение для $\hat{T}_1(y, p)$, которое очень громоздкое и здесь не приводится. Однако есть более простой путь вычисления предела $\lim_{p \rightarrow 0} p \hat{T}_1(y, p)$ исходя из выражения (2.4.19) и уже найденного предела

$\lim_{p \rightarrow 0} pU_1(y, p) = u_1^0(y)$. Второе слагаемое в формуле (2.4.19), умноженное на p при $p \rightarrow 0$ имеет пределом выражение ($\text{sh } x \approx x, \text{ch } x \approx 1, x \rightarrow 0$)

$$\frac{A}{\chi_1} \int_0^y u_1^0(z)(z - y) dz = -\frac{Af_1^0 l_1^2 l_3^2}{2\chi_1 \nu_1} \left[\frac{\bar{l}_1^2 y^4}{12l_1^4} + \frac{\bar{l}_1 g y^3}{6l_1^3} \right]. \quad (2.4.20)$$

И остаётся доказать, что $p\hat{C}_1^1 \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} y \approx \frac{Af_1^0 l_1^2 l_3^2}{2\chi_1 \nu_1} \frac{g_1 y}{l_1}$ при $p \rightarrow 0$. Из формул (2.4.18) имеем последовательно

$$\begin{aligned} d_1 &\approx \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{\chi}_1}}, \quad d_2 \approx \frac{\bar{k}_1 A}{\sqrt{\chi_1 \bar{\chi}_1 p}} \int_0^{l_1} U_1(z, p) dz, \quad d_3 \approx \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 (1 - \bar{k}_1), \\ d_4 &\approx \frac{A \bar{k}_1 l_1}{\chi_1} \int_0^{l_1} U_1(z, p) dz + \frac{A}{\chi_1} \int_0^{l_1} U_1(z, p)(z - l_1) dz, \quad d_5 \approx \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2}{\sqrt{\bar{\chi}_2}}, \\ d_6 &\approx -\frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 A}{\sqrt{p \chi_1 \bar{\chi}_1}} \int_0^{l_1} U_1(z, p) dz - \frac{\bar{k}_2 \sqrt{\bar{\chi}_1} A}{\sqrt{p \chi_2 \bar{\chi}_2}} \int_{l_1}^{l_2} U_2(z, p) dz, \\ s_1 &\approx 1 - \frac{p}{\chi_3} l_2 l_3, \quad s_2 \approx \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - l_1), \quad s_3 \approx 1 - \frac{p}{\chi_2} l_1 l_2, \quad s_4 \approx \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} (l_2 - l_3). \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Используя полученные асимптотики и выражение для \hat{C}_1^1 (см. (2.4.17)) при $p \rightarrow 0$ найдем

$$\begin{aligned} p\hat{C}_1^1 \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} y &\approx \frac{y}{l_3(\bar{l}_1 + \bar{k}_1(\bar{l}_2 - \bar{l}_1 - \bar{k}_2(\bar{l}_2 - 1)))} \left[\bar{k}_1(\bar{l}_2 - \bar{l}_1 - \bar{k}_2(\bar{l}_2 - 1)) \times \right. \\ &\times \int_0^{l_1} u_1^0(z) dz - \bar{k}_2 \bar{\chi}_1 (\bar{l}_2 - 1) \int_{l_1}^{l_2} u_2^0(z) dz - \frac{\bar{\chi}_2}{l_3} \int_{l_2}^{l_3} u_3^0(z)(z - l_3) dz - \\ &\left. - \frac{1}{l_3} \int_0^{l_1} u_1^0(z)(z - l_1) dz - \frac{\bar{\chi} - 1}{l_3} \int_{l_1}^{l_2} u_2^0(z)(z - l_2) dz \right] \end{aligned}$$

Входящие в квадратных скобках интегралы легко вычисляются с помощью формул (2.2.4)

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\hat{C}_1^1 \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} y = \frac{Af_1^0 l_1^2 l_3^2}{2\chi_1 \nu_1} \frac{g_1 y}{l_1}. \quad (2.4.22)$$

Суммируя (2.4.20), (2.4.22) приходим в точности к формуле (2.2.7) для $T_1^0(y)$. Аналогично показывается, что и $\lim_{p \rightarrow 0} p\hat{T}_2(y, p) = T_2^0(y)$, $\lim_{p \rightarrow 0} p\hat{T}_3(y, p) = T_3^0(y)$.

На рис. 6 приведены профили безразмерных возмущений температур в слоях.

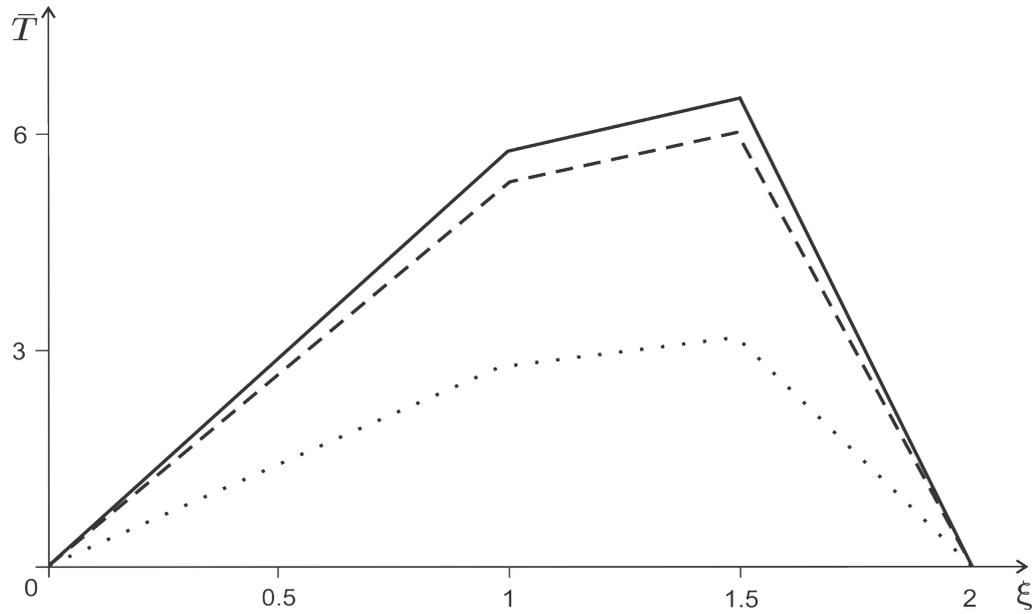


Рис. 6: Профили возмущений температур при заданном перепаде давления $f_1(\tau) = 1 + e^{-\tau} \sin \tau$:, $\tau = 1(\dots)$, $\tau = 3(- - -)$, стационарное решение $(-)$

2.5 Стационарное термокапиллярное течение Куэтта в слоях

Далее будем рассматривать случай, когда источником движения является только термокапиллярный эффект: в уравнении (2.1.1) $f_j(t) = 0$

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy}, \quad (2.5.1)$$

а уравнение (2.1.2) и условия (2.1.3) – (2.1.8) остаются без изменения.

Как и в пункте 2.2 предположим, что скорость и температура не зависят от времени. Поэтому $u_j = u_j^0(y)$, $T_j = T_j^0(y)$ и уравнения (2.1.2), (2.5.1) примут вид

$$u_{jyy}^0 = 0, \quad T_{jyy}^0 = -\frac{A}{\chi_j} u_j^0. \quad (2.5.2)$$

Интегрируя уравнения (2.5.2) по y получим

$$\begin{aligned} u_j^0 &= C_j^1 y + C_j^2, \\ T_j^0 &= -\frac{A}{\chi_j} \left(\frac{C_j^1}{6} y^3 + \frac{C_j^2}{2} y^2 \right) + C_j^3 + C_j^4. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Постоянные $C_j^1, C_j^2, C_j^3, C_j^4$ определим из граничных условий (2.1.3) – (2.1.8) и, после некоторых вычислений, из (2.5.3) найдем представления для

скоростей

$$\begin{aligned}
u_1^0(\xi) &= \frac{\nu_1}{l_1} a_1 \xi, \\
u_2^0(\xi) &= \frac{\nu_1}{l_1} \left(\frac{a_2 \bar{l}_2}{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} (\xi - 1) + a_1 \right), \\
u_3^0(\xi) &= \frac{\nu_1 a_3}{l_1} \left(\xi - \frac{1}{\bar{l}_1} \right)
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

и возмущений температур

$$\begin{aligned}
T_1^0(\xi) &= \tilde{A} \left[-\frac{a_1}{6} \left((\xi - 1)^3 + 3(\xi - 1)^2 - 2 \right) + \frac{b_3}{b_2} \xi \right], \\
T_2^0(\xi) &= \tilde{A} \left[-\frac{\bar{\chi}_1}{6} \left(a_2 \tilde{\xi}^3 + 3a_1 \tilde{\xi}^2 \right) + \frac{b_3}{b_2} \left(\bar{k}_1 \tilde{\xi} + 1 \right) + \frac{a_1}{3} \right],
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

$$\begin{aligned}
T_3^0(\xi) &= \tilde{A} \left[-\frac{\bar{\chi}_2 a_3}{6} \left(\xi^3 - \frac{3\xi^2}{\bar{l}_1} \right) + \left(\frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 b_3}{b_2} + \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{\chi}_2 a_3}{\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1 \right) - \bar{\chi}_1 \bar{k}_2 \left(a_1 + \right. \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1} \right) \right) \right) \xi - \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 b_3}{b_2 \bar{l}_1} - \frac{1}{\bar{l}_1^2} \left(\frac{\bar{\chi}_2 \bar{l}_2 a_3}{\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1 \right) - \bar{\chi}_1 \bar{k}_2 \bar{l}_2 \left(a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1} \right) + \frac{\bar{\chi}_2 a_3}{3\bar{l}_1} \right) \right].
\end{aligned}$$

Величины $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ имеют вид

$$\begin{aligned}
b_1 &= \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{l}_2 - 1) - \bar{\mu}_1 \bar{l}_2 - \bar{l}_1, \quad b_2 = \bar{k}_1 \bar{k}_2 (1 - \bar{l}_2) + \bar{k}_1 \bar{l}_2 + \bar{l}_1, \\
b_3 &= \frac{\bar{\chi}_2 \bar{l}_2 a_3}{\bar{l}_1^2} \left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1 \right) (\bar{l}_2 - 1) - \frac{\bar{\chi}_1 \bar{k}_2 \bar{l}_2}{\bar{l}_1} \left(a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1} \right) (\bar{l}_2 - 1) - \frac{\bar{\chi}_2 a_3}{3\bar{l}_1^2} + \frac{\bar{\chi}_1 \bar{l}_2^2}{2\bar{l}_1} \left(a_1 + \right. \\
&\left. \frac{\bar{l}_2 a_2}{3\bar{l}_1} \right) - \frac{\bar{\chi}_2 \bar{l}_2^2 a_3}{2\bar{l}_1^2} \left(\frac{\bar{l}_2}{3} - 1 \right) - \frac{a_1 \bar{l}_1}{3}, \quad a_1 = \frac{1}{b_1} \left[(\bar{l}_2 + \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_2 \bar{l}_2) M_1 + (1 - \bar{l}_2) \bar{\mu}_2 M_2 \right], \\
a_2 &= -\frac{1}{b_1} \left[\bar{l}_1 M_1 + \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (\bar{l}_2 - 1) M_2 \right], \quad a_3 = -\frac{\bar{\mu}_2}{b_1} \left[\bar{l}_1 M_1 + (\bar{l}_1 + \bar{\mu}_1 \bar{l}_2) M_2 \right].
\end{aligned}$$

В формулах (2.5.4) – (2.5.5) использованы обозначения

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \frac{Al_1 \nu_1}{\chi_1}, \quad \tilde{\xi} = \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} (\xi - 1), \quad \xi = \frac{y}{l_1}, \quad \bar{l}_n = \frac{l_n}{l_3}, \quad \bar{\mu}_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}, \quad \bar{k}_n = \frac{k_n}{k_{n+1}}, \quad \bar{\chi}_n = \frac{\chi_1}{\chi_{n+1}}, \\
M_n &= \frac{A \alpha_n l_1^2}{\nu_1 \mu_2}, \quad n = 1, 2, \quad M_1 \text{ и } M_2 \text{ — числа Марангони.}
\end{aligned}$$

Безразмерные скорости и возмущения температур останутся непрерывными в своих областях и будут иметь вид

$$\begin{aligned}
u_1^0(\xi) &= \frac{u_1^0(y) l_1}{\nu_1} = a_1 \xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\
u_2^0(\xi) &= \frac{u_2^0(y) l_1}{\nu_1} = \frac{a_2 \bar{l}_2}{\bar{l}_2 - \bar{l}_1} (\xi - 1) + a_1, \quad 1 \leq \xi \leq \bar{l}_2 / \bar{l}_1, \\
u_3^0(\xi) &= \frac{u_3^0(y) l_1}{\nu_1} = a_3 \left(\xi - \frac{1}{\bar{l}_1} \right), \quad \bar{l}_2 / \bar{l}_1 \leq \xi \leq 1 / \bar{l}_1,
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

$$\begin{aligned}
\bar{T}_1^0(\xi) &= \frac{T_1^0(\xi)}{\tilde{A}} = -\frac{a_1}{6} \left((\xi - 1)^3 + 3(\xi - 1)^2 - 2 \right) + \frac{b_3}{b_2} \xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\
\bar{T}_2^0(\xi) &= \frac{T_2^0(\xi)}{\tilde{A}} = -\frac{\bar{\chi}_1}{6} \left(a_2 \tilde{\xi}^3 + 3a_1 \tilde{\xi}^2 \right) + \frac{b_3}{b_2} \left(\bar{k}_1 \tilde{\xi} + 1 \right) + \frac{a_1}{3}, \quad 1 \leq \xi \leq \bar{l}_2/\bar{l}_1, \\
\bar{T}_3^0(\xi) &= \frac{T_3^0(\xi)}{\tilde{A}} = -\frac{\bar{\chi}_2 a_3}{6} \left(\xi^3 - \frac{3\xi^2}{\bar{l}_1} \right) + \left(\frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 b_3}{b_2} + \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{\chi}_2 a_3}{\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1 \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \bar{\chi}_1 \bar{k}_2 \left(a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1} \right) \right) \right) \xi - \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 b_3}{b_2 \bar{l}_1} - \frac{1}{\bar{l}_1^2} \left(\frac{\bar{\chi}_2 \bar{l}_2 a_3}{\bar{l}_1} \left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1 \right) - \bar{\chi}_1 \bar{k}_2 \bar{l}_2 \left(a_1 + \frac{\bar{l}_2 a_2}{2\bar{l}_1} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{\chi}_2 a_3}{3\bar{l}_1} \right), \quad \bar{l}_2/\bar{l}_1 \leq \xi \leq 1/\bar{l}_1.
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Формулы (2.5.6) описывают стационарное термокапиллярное течение Куэтта в слоях. На рис. 7 приведён вид профилей безразмерных скоростей (2.5.6) (кривая 1) и возмущений температур (2.5.7) (кривая 2) в слоях.

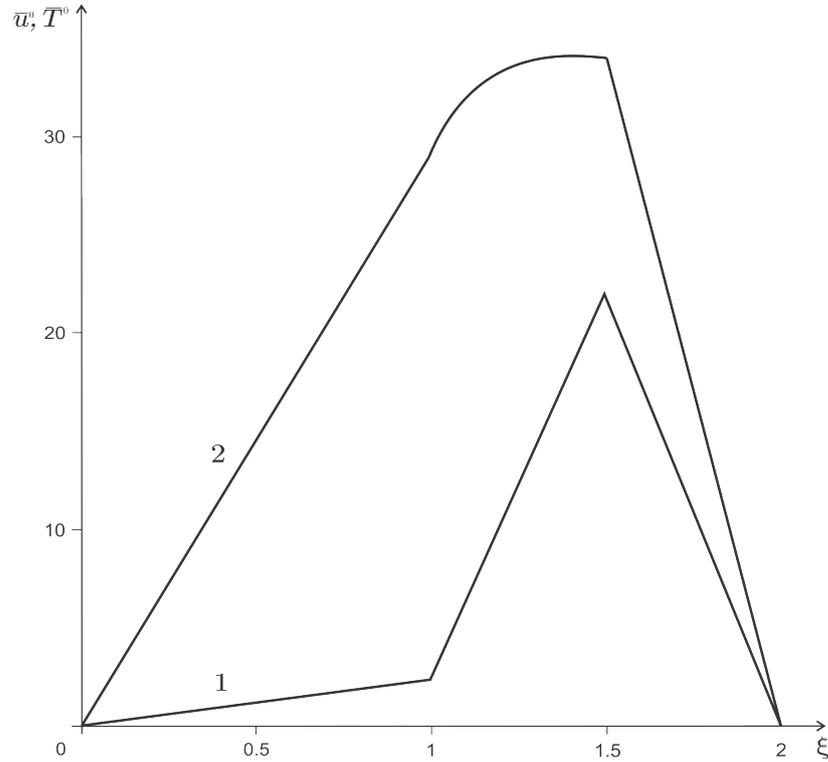


Рис. 7: Стационарные профили скоростей (кривая 1) и возмущений температур (кривая 2), определяемые термокапиллярными силами

2.6 Сходимость решения к стационарному

Получим сначала априорные оценки задачи (2.5.1), (2.1.3), (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9). Для этого введем новые функции

$$w_j(y, t) = u_j^o(y) - u_j(y, t). \tag{2.6.1}$$

Тогда $w_j(y, t)$ — решение задачи

$$w_{jt} = \nu_j w_{jyy}, \quad (2.6.2)$$

$$\mu_1 w_{1y}(l_1, t) - \mu_2 w_{2y}(l_1, t) = 0, \quad \mu_2 w_{2y}(l_2, t) - \mu_3 w_{3y}(l_2, t) = 0, \quad (2.6.3)$$

$$w_1(l_1, t) = w_2(l_1, t), \quad w_2(l_2, t) = w_3(l_2, t), \quad (2.6.4)$$

$$w_1(0, t) = 0, \quad w_3(l_3, t) = 0, \quad (2.6.5)$$

$$w_j(y, 0) = u_j^0(y). \quad (2.6.6)$$

Отметим, что теперь начальные данные ненулевые, а граничные условия (2.1.6) выполнены для любых $t > 0$; при $t = 0$ их правые части равны $A\alpha_1$ и $A\alpha_2$, соответственно.

Умножим уравнения (2.6.2) на $\rho_j w_j$, проинтегрируем по y и результаты сложим. Получим

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} + \mu_1 \int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy = \\ = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ -\frac{\nu_1 A}{l_1} \left(a_1 \alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{a_2 l_2}{l_2 - l_1} \left(\frac{l_2}{l_1} - 1 \right) + a_1 \right) \right), & t = 0 \end{cases}, \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

где

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho_1 \int_0^{l_1} w_1^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_{l_1}^{l_2} w_2^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_3 \int_{l_2}^{l_3} w_3^2(y, t) dy. \quad (2.6.8)$$

Для функций $w_j(y, t)$, удовлетворяющих условиям (2.6.4), (2.6.5), справедливо обобщенное неравенство Фридрикса (1.3.19). Используя это неравенство из (2.6.7) получим

$$\frac{dE(t)}{dt} + 2\delta E \leq h(t), \quad (2.6.9)$$

где $h(t)$ — правая часть равенства (2.6.7), $\delta = \min(\rho_j^{-1}/M)$, (интеграл от $h(t)$ равен нулю). Интегрируя неравенство (2.6.9) при учете начальных условий (2.6.6), найдем

$$E(t) \leq E(0)e^{-2\delta t}. \quad (2.6.10)$$

Откуда

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} w_1^2 dy \leq \frac{2E(0)e^{-2\delta t}}{\rho_1}, \quad \int_{l_1}^{l_2} w_2^2 dy \leq \frac{2E(0)e^{-2\delta t}}{\rho_2}, \\ \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy \leq \frac{2E(0)e^{-2\delta t}}{\rho_3}. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Для оценок L^2 -норм w_{jy} применим тождество (2.3.7) (см. пункт 2.3), в котором $F = 0$. Используя условия (2.6.3) – (2.6.5), приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^t \int_0^{l_1} (w_{1t}^2 + \nu_1^2 w_{1yy}^2) dy dt + \rho_2 \int_0^t \int_{l_1}^{l_2} (w_{2t}^2 + \nu_2^2 w_{2yy}^2) dy dt + \rho_3 \int_0^t \int_{l_2}^{l_3} (w_{3t}^2 + \\ & + \nu_3^2 w_{3yy}^2) dy dt + \mu_1 \int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy = D, \\ & D = \mu_1 \int_0^{l_1} (u_{1y}^0)^2 dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} (u_{2y}^0)^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} (u_{3y}^0)^2 dy. \end{aligned}$$

Значит

$$\int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy \leq \frac{D}{\mu_1}, \quad \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy \leq \frac{D}{\mu_2}, \quad \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy \leq \frac{D}{\mu_3}. \quad (2.6.12)$$

Замечание 6. При выводе неравенства (2.6.10) было использовано неравенство Гронуолла [30]. Его можно использовать, поскольку $h(t)$ – суммируемая, неотрицательная функция и интеграл от неё просто равен нулю.

Теперь из неравенств (2.6.11), (2.6.12) и неравенства Коши – Буняковского получим априорные оценки

$$\begin{aligned} w_1^2(y, t) &= \int_0^y (w_1^2)_y dy \leq 2 \left(\int_0^{l_1} w_1^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{8DE(0)}{\mu_1 \rho_1} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\delta t}, \\ w_3^2(y, t) &= - \int_y^{l_3} (w_3^2)_y dy \leq 2 \left(\int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{8DE(0)}{\mu_3 \rho_3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\delta t}, \end{aligned}$$

Используя первое условия (2.6.4) и оценку для $w_1^2(y, t)$, имеем

$$\begin{aligned} w_2^2(y, t) &= \int_{l_1}^y (w_2^2)_y dy + w_1^2(y, t) \leq 2 \left(\int_{l_1}^{l_2} w_2^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy \right)^{1/2} + \\ &+ w_1^2(l_1, t) \leq \sqrt{8E(0)} \left(\left(\frac{D}{\rho_1 \mu_1} \right)^{1/2} + \left(\frac{D}{\rho_2 \mu_2} \right)^{1/2} \right) e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
|w_1(y, t)| &\leq \left(\frac{8DE(0)}{\mu_1\rho_1} \right)^{1/4} e^{-\frac{\delta t}{2}}, \\
|w_2(y, t)| &\leq \left(\sqrt{8E(0)} \left(\left(\frac{D}{\rho_1\mu_1} \right)^{1/2} + \left(\frac{D}{\rho_2\mu_2} \right)^{1/2} \right) \right)^{1/2} e^{-\frac{\delta t}{2}}, \\
|w_3(y, t)| &\leq \left(\frac{8DE(0)}{\mu_3\rho_3} \right)^{1/4} e^{-\frac{\delta t}{2}}.
\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Возвращаясь к замене (2.6.1), приходим к следующему результату

Теорема 6. *Решение начально – краевой задачи (2.5.1), (2.1.3), (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9) при $t \rightarrow \infty$ выходит на стационарный режим (2.5.4), причём справедливы оценки скорости сходимости (2.6.13).*

Можно получить аналогичные (2.6.13) априорные оценки решения для возмущения температур, задачи (2.1.2), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.8), (2.1.10). Замена $N_j(y, t) = T_j^0(y) - T_j(y, t)$, где T_j^0 – стационарное решение (2.5.5), приводит к следующей задаче

$$N_{jt} = \chi_j N_{jyy} - Aw_j, \tag{2.6.14}$$

$$k_1 N_{1y}(l_1, t) - k_2 N_{2y}(l_1, t) = 0, \quad k_2 N_{2y}(l_2, t) - k_3 N_{3y}(l_2, t) = 0, \tag{2.6.15}$$

$$N_1(l_1, t) = N_2(l_1, t), \quad N_2(l_2, t) = N_3(l_2, t), \tag{2.6.16}$$

$$N_1(0, t) = 0, \quad N_3(l_3, t) = 0, \tag{2.6.17}$$

$$N_j(y, 0) = T_j^0(y). \tag{2.6.18}$$

Умножим уравнения (2.6.14) на $\rho_j c_{0j} N_j$, где c_{0j} – коэффициенты удельной теплоёмкости и проинтегрируем по y . Так как $\chi_j = k_j / \rho_j c_{0j}$, складывая полученные равенства и используя граничные условия (2.6.15) – (2.6.17), приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
&\frac{dE_1(t)}{dt} + k_1 \int_0^{l_1} N_{1y}^2(y, t) dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} N_{2y}^2(y, t) dy + k_3 \int_{l_2}^{l_3} N_{3y}^2(y, t) dy = \\
&= -A \left(\rho_1 c_{01} \int_0^{l_1} w_1 N_1(y, t) dy + \rho_2 c_{02} \int_{l_1}^{l_2} w_2 N_2(y, t) dy + \rho_3 c_{03} \int_{l_2}^{l_3} w_3 N_3(y, t) dy \right),
\end{aligned} \tag{2.6.19}$$

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \rho_1 c_{01} \int_0^{l_1} N_1^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_2 c_{02} \int_{l_1}^{l_2} N_2^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_3 c_{03} \int_{l_2}^{l_3} N_3^2(y, t) dy.$$

Для функций $N_j(y, t)$ также справедливо неравенство вида (1.3.19) с другой постоянной M_0 . Поэтому из (2.6.19) приходим к неравенству

$$\frac{dE_1(t)}{dt} + 2\delta_1 E_1 \leq 2\delta_2 \sqrt{E_1} e^{-\delta t}, \quad (2.6.20)$$

где $\delta_1 = \min(\rho_j^{-1} c_{0j}^{-1})/M_0$, $\delta_2 = |A| \sqrt{3E(0)} \max(\sqrt{\rho_j c_{0j}})$. Откуда

$$E_1(t) \leq e^{-2\delta_1 t} \left(\sqrt{E_1(0)} + \begin{cases} \frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta} (e^{(\delta_1 - \delta)t} - 1), & \delta_1 \neq \delta; \\ \delta_2 t, & \delta_1 = \delta. \end{cases} \right)^2. \quad (2.6.21)$$

Оценки интегралов

$$\int_0^{l_1} N_{1y}^2 dy, \quad \int_{l_1}^{l_2} N_{2y}^2 dy, \quad \int_{l_2}^{l_3} N_{3y}^2 dy$$

получаются из тождества (2.3.7), где надо ν_j заменить на χ_j , u_j на N_j , а F_j на $-Aw_j$. Результаты их умножения на $\rho_j c_{0j}$ и сложения приводит к тождеству

$$\begin{aligned} & \rho_1 c_{01} \int_0^t \int_0^{l_1} (N_{1t}^2 + \chi_1^2 N_{1yy}^2) dy dt + \rho_2 c_{02} \int_0^t \int_{l_1}^{l_2} (N_{2t}^2 + \chi_2^2 N_{2yy}^2) dy dt + \\ & + \rho_3 c_{03} \int_0^t \int_{l_2}^{l_3} (N_{3t}^2 + \chi_3^2 N_{3yy}^2) dy dt + k_1 \int_0^{l_1} N_{1y}^2 dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} N_{2y}^2 dy + k_3 \int_{l_2}^{l_3} N_{3y}^2 dy = \\ & = D_1 + A^2 \left(\rho_1 c_{01} \int_0^t \int_0^{l_1} w_1^2 dy dt + \rho_2 c_{02} \int_0^t \int_{l_1}^{l_2} w_2^2 dy dt + \rho_3 c_{03} \int_0^t \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy dt \right). \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

Используя неравенства (2.6.11), из (2.6.22) найдем

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} N_{1y}^2 dy & \leq \frac{1}{k_1} (D_1 - \delta_3 (e^{-2\delta t} - 1)), \quad \int_{l_1}^{l_2} N_{2y}^2 dy \leq \frac{1}{k_2} (D_1 - \delta_3 (e^{-2\delta t} - 1)), \\ \int_{l_2}^{l_3} N_{3y}^2 dy & \leq \frac{1}{k_3} (D_1 - \delta_3 (e^{-2\delta t} - 1)) \end{aligned}$$

с постоянными

$$D_1 = k_1 \int_0^{l_1} (T_{1y}^0)^2 dy + k_1 \int_{l_1}^{l_2} (T_{2y}^0)^2 dy + k_1 \int_{l_2}^{l_3} (T_{3y}^0)^2 dy,$$

$$\delta_3 = \frac{A^2 E(0)}{\delta} (c_{01} + c_{02} + c_{03}).$$

Далее, как и ранее для w_j , получаем оценки

$$|N_1(y, t)| \leq \left(\frac{8E_1(t)}{\rho_1 c_{01} k_1} (D_1 + \delta_3) \right)^{1/4},$$

$$|N_2(y, t)| \leq \left(8E_1(t) (D_1 + \delta_3) \left((\rho_1 c_{01} k_1)^{-1/2} + (\rho_2 c_{02} k_2)^{-1/2} \right) \right)^{1/4}, \quad (2.6.23)$$

$$|N_3(y, t)| \leq \left(\frac{8E_1(t)}{\rho_3 c_{03} k_3} (D_1 + \delta_3) \right)^{1/4}.$$

Следовательно, и возмущения температуры экспоненциально затухают со временем по закону (2.6.23). Нами доказана

Теорема 7. *Решение начально – краевой задачи (2.1.2), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.8), (2.1.10) при $t \rightarrow \infty$ выходит на стационарный режим (2.5.5), причём справедливы оценки скорости сходимости (2.6.23).*

Замечание 7. *Из (2.6.21) при больших t имеем*

$$E_1(t) \sim \begin{cases} \frac{\delta_2^2}{(\delta_1 - \delta)^2} e^{-2\delta t}, & \delta_1 \neq \delta; \\ \delta_2^2 t^2 e^{-2\delta t}, & \delta_1 = \delta; \end{cases}.$$

2.7 Решение нестационарной задачи методом преобразования Лапласа

Применим преобразование Лапласа к задаче (2.5.1), (2.1.2) – (2.1.10). Используя начальные условия (2.1.9), (2.1.10), получим для изображений $\hat{U}_j(y, p)$ и $\hat{T}_j(y, p)$ уравнения

$$p\hat{U}_j(y, p) = \nu_j \hat{U}_{jyy}(y, p), \quad p\hat{T}_j(y, p) = \chi_j \hat{T}_{jyy}(y, p) + A\hat{U}_j(y, p) \quad (2.7.1)$$

к которым добавляются преобразованные условия (2.1.3) – (2.1.8) для изображений

$$\mu_2 \hat{U}_{2y}(l_1, p) - \mu_1 \hat{U}_{1y}(l_1, p) = -\frac{A\alpha_1}{p}, \quad \mu_3 \hat{U}_{3y}(l_2, p) - \mu_2 \hat{U}_{2y}(l_2, p) = -\frac{A\alpha_2}{p},$$

$$\hat{U}_1(l_1, p) = \hat{U}_2(l_1, p), \quad \hat{U}_2(l_2, p) = \hat{U}_3(l_2, p), \quad (2.7.2)$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}_1(0, p) &= 0, \quad \hat{U}_3(l_3, p) = 0, \\
k_1 \hat{T}_{1y}(l_1, p) &= k_2 \hat{T}_{2y}(l_2, p), \quad k_2 \hat{T}_{2y}(l_2, p) = k_3 \hat{T}_{3y}(l_2, p), \\
\hat{T}_1(l_1, p) &= \hat{T}_2(l_1, p), \quad \hat{T}_2(l_2, p) = \hat{T}_3(l_2, p), \\
\hat{T}_1(0, p) &= 0, \quad \hat{T}_3(l_3, p) = 0.
\end{aligned} \tag{2.7.3}$$

Общее решение первого уравнения (2.7.1), имеет вид

$$\hat{U}_j(y, p) = C_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}} \bar{y}_j + C_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}} \bar{y}_j, \tag{2.7.4}$$

второго

$$\begin{aligned}
\hat{T}_j(y, p) &= \hat{C}_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} \bar{y}_j + \hat{C}_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} \bar{y}_j + \hat{T}_{j\text{ч}}, \\
\hat{T}_{j\text{ч}} &= \frac{A}{\sqrt{p\chi_j}} \int_{\Omega_j} \hat{U}_j(z, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} (z - \bar{y}_j),
\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

где $\hat{T}_{j\text{ч}}$ — частное решение уравнения, $\bar{y}_1 = y - l_1$, $\bar{y}_2 = \frac{l_2}{l_2 - l_1}(y - l_1)$, $\bar{y}_3 = y$. Постоянные $C_j^1, C_j^2, \hat{C}_j^1, \hat{C}_j^2$ определяются из граничных условий для изображений (2.7.2), (2.7.3)

$$\begin{aligned}
C_1^1 &= \frac{A\sqrt{\nu_3}}{\mu_2 p \sqrt{p}} \left(\frac{q_1 \bar{\alpha}_1 \sqrt{\nu_2} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 - q \bar{\mu}_2 \bar{\alpha}_2 - q \bar{\mu}_2 \bar{\alpha}_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2}{q_1 Q_1 - \frac{q \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2}{\sqrt{\nu_1 \nu_2}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 - \frac{q \bar{\mu}_2}{\sqrt{\nu_2}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1} \right), \\
C_2^2 &= C_1^2 = C_1^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1, \quad C_2^1 = \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\nu_1}} C_1^1 - \frac{A \bar{\alpha}_1 \sqrt{\nu_2}}{\mu_2 p \sqrt{p}}, \\
C_3^1 &= \frac{C_1^1}{q} q_2 - \frac{A \bar{\alpha}_1 \sqrt{\nu_2}}{q \mu_2 p \sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2, \quad C_3^2 = -C_3^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3, \\
\hat{C}_1^1 &= \frac{\sqrt{p} \hat{T}'_* q_6 - q_7 - \sqrt{\nu_3} q_5 \bar{k}_2 \left(\bar{k}_1 \hat{T}'_{1\text{ч}y}(0, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 + \hat{T}'_{2\text{ч}y}(l_2, p) \right) - q_3}{\frac{q_5 \bar{k}_2 \sqrt{p}}{\sqrt{\chi_2}} \left(\bar{k}_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 + \sqrt{\chi_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \right) - \sqrt{p} q_4 q_6}, \\
\hat{C}_1^2 &= C_1^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1, \quad \hat{C}_2^1 = \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\chi_1}} C_1^1 + \frac{\bar{k}_1 \sqrt{\chi_2}}{\sqrt{p}} \hat{T}'_{1\text{ч}y}(0, p), \\
\hat{C}_2^2 &= C_1^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 + \hat{T}_{1\text{ч}(0,p)}, \quad \hat{C}_3^1 = \frac{1}{q_5} (C_1^1 q_4 + \hat{T}'_*), \\
\hat{C}_3^2 &= -C_3^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3 - \frac{\hat{T}'_{3\text{ч}}(l_3, p)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3},
\end{aligned} \tag{2.7.6}$$

Здесь вспомогательные величины $q, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, \hat{T}_*$ имеют вид

$$\begin{aligned}
q &= \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3, & q_1 &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3, \\
q_2 &= \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\nu_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1, & q_3 &= \frac{q_5 \bar{k}_2 \sqrt{p \bar{\chi}_1} \hat{T}_{1\text{ч}}(0, p)}{\sqrt{\bar{\chi}_2}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2, \\
q_4 &= \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\bar{\chi}_1}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1, & q_5 &= \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3, \\
q_6 &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3, & q_7 &= \frac{\sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \hat{T}_{3\text{ч}}(l_3, p) q_5}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3}, \\
\hat{T}_* &= \frac{\bar{k}_1 \sqrt{\chi_2}}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \hat{T}'_{1\text{ч}}(0, p) + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \hat{T}_{1\text{ч}}(0, p) + \hat{T}_{2\text{ч}}(l_2, p) + q_8, \\
q_8 &= \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} \hat{T}_{3\text{ч}}(l_3, p).
\end{aligned}$$

Путем аналогичных выкладок, как в п. 2.4, доказываются предельные равенства

$$\lim p \hat{U}_j(y, p) = u_j^0, \quad \lim p \hat{T}_j(y, p) = T_j^0 \quad \text{при } p \rightarrow 0, \quad (2.7.7)$$

На рис. 8, 9 приведены профили безразмерных скоростей и возмущения температур в слоях для системы силикон ($j = 1$) — вода ($j = 2$) — воздух ($j = 3$) при температуре 20°C . Видно, что с ростом безразмерного времени $\tau = \nu_1 t / l_1^2$ решение выходит на стационарный режим (2.5.6), (2.5.7).

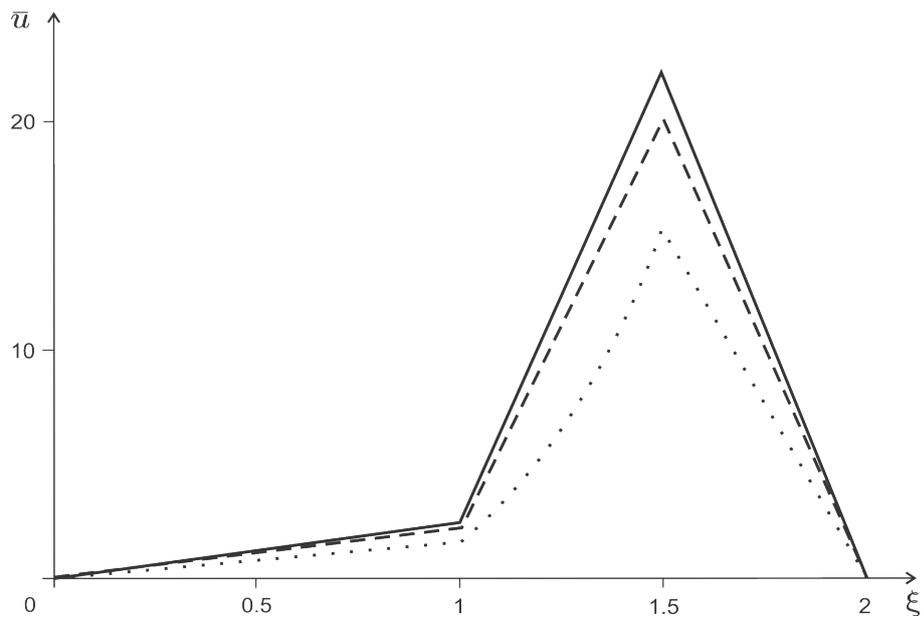


Рис. 8: Профили скоростей при $M_1 = 10, M_2 = 14$: $\tau = 5(\dots)$, $\tau = 15(---)$, стационарное решение ($-$)

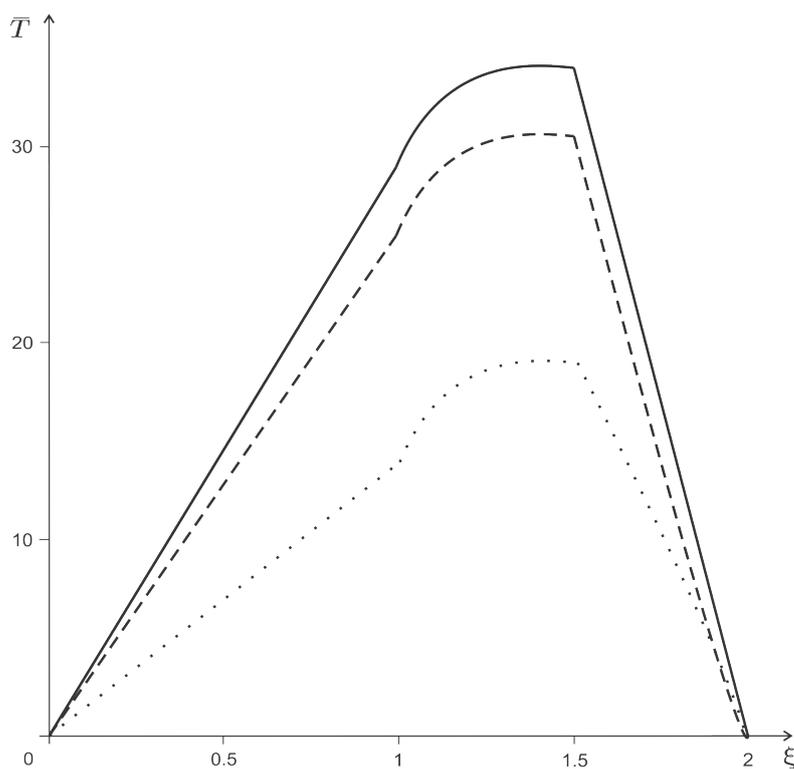


Рис. 9: Профили возмущений температур при $M_1 = 10, M_2 = 14$: $\tau = 5(\dots)$, $\tau = 15(---)$, стационарное решение ($-$)

2.8 Комбинированное движение

Для определения движения под действием градиента давления и термокапиллярных сил достаточно суммировать полученные выражения для

скоростей (2.2.8), (2.5.6) и возмущений температур (2.2.9), (2.5.7). Стационарные поля скоростей определяются формулами

$$\begin{aligned}\bar{u}_1(\xi) &= N(\bar{l}_1\xi(\bar{l}_1\xi + g)) + a_1\xi, 0 \leq \xi \leq 1, \\ \bar{u}_2(\xi) &= N(\bar{\mu}_1\bar{l}_1^2\xi^2 + \bar{\mu}_1\bar{l}_1g\xi + \bar{l}_1(1 - \bar{\mu}_1)(\bar{l}_1 + g)) + \frac{a_2\bar{l}_2}{\bar{l}_2 - \bar{l}_1}(\xi - 1) + a_1, \\ &1 \leq \xi \leq \bar{l}_2/\bar{l}_1, \\ \bar{u}_3(\xi) &= N(\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2(\bar{l}_1^2\xi^2 + g(\bar{l}_1\xi - 1) - 1)) + a_3(\xi - \frac{1}{\bar{l}_1}), \bar{l}_2/\bar{l}_1 \leq \xi \leq 1/\bar{l}_1.\end{aligned}\tag{2.8.1}$$

А возмущения температур

$$\begin{aligned}\bar{T}_1(\xi) &= -N\left[-\frac{\bar{l}_1^2}{12}\xi^4 - \frac{\bar{l}_1g}{6}\xi^3 + g_1\xi\right] - \frac{a_1}{6}\left((\xi - 1)^3 + 3(\xi - 1)^2 - 2\right) + \\ &+ \frac{b_3}{b_2}\xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \\ \bar{T}_2(\xi) &= -N\left[-\frac{\bar{\chi}_1\bar{l}_1\xi^2}{12}\left(\bar{\mu}_1\bar{l}_1\xi^2 + 2\bar{\mu}_1g\xi + 6(1 - \bar{\mu}_1)(\bar{l}_1 + g)\right) + \xi\left(\bar{k}_1g_1 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\bar{l}_1g_2}{6}\right) + g_1(1 - \bar{k}_1) + \frac{\bar{l}_1}{12}(2g_2 - g_3)\right] - \frac{\bar{\chi}_1}{6}\left(a_2\xi^3 + 3a_1\xi^2\right) + \\ &+ \frac{b_3}{b_2}\left(\bar{k}_1\xi + 1\right) + \frac{a_1}{3}, \quad 1 \leq \xi \leq \bar{l}_2/\bar{l}_1, \\ \bar{T}_3(\xi) &= -N\left[-\frac{\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\xi^2}{12}\left(\bar{l}_1^2\xi^2 + g(2\bar{l}_1\xi - 6) - 6\right) + \frac{1}{6\bar{l}_1}\left(\frac{1}{\bar{l}_1} - \xi\right)\left(\bar{\chi}_1\bar{k}_2\bar{l}_2d_1 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2\bar{l}_2d_2 - 6\bar{l}_1\bar{k}_1g_1 + \bar{l}_1^2g_2\right) - \frac{\bar{\chi}_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2}{12\bar{l}_1^2}(5 + 4g)\right] - \frac{\bar{\chi}_2a_3}{6}\left(\xi^3 - \frac{3\xi^2}{\bar{l}_1}\right) + \\ &+ \left(\frac{\bar{k}_1\bar{k}_2b_3}{b_2} + \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1}\left(\frac{\bar{\chi}_2a_3}{\bar{l}_1}\left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1\right) - \bar{\chi}_1\bar{k}_2\left(a_1 + \frac{\bar{l}_2a_2}{2\bar{l}_1}\right)\right)\right)\xi - \frac{\bar{k}_1\bar{k}_2b_3}{b_2\bar{l}_1} - \\ &- \frac{1}{\bar{l}_1^2}\left(\frac{\bar{\chi}_2\bar{l}_2a_3}{\bar{l}_1}\left(\frac{\bar{l}_2}{2} - 1\right) - \bar{\chi}_1\bar{k}_2\bar{l}_2\left(a_1 + \frac{\bar{l}_2a_2}{2\bar{l}_1}\right) + \frac{\bar{\chi}_2a_3}{3\bar{l}_1}\right), \quad \bar{l}_2/\bar{l}_1 \leq \xi \leq 1/\bar{l}_1.\end{aligned}\tag{2.8.2}$$

Параметр $N = f_1^0 l_1 l_3^2 / 2\nu_1^2$ отвечает за влияние на поле скоростей перепада давления, а параметры a_1, a_2, a_3 – за влияние термокапиллярных сил. Поэтому в случае, когда $|N| \ll |a_j|$, тогда преобладают термокапиллярные силы и имеем почти линейный профиль скоростей – течение Куэтта. А когда $|N| \gg |a_j|$, тогда главными становятся градиенты давления в слоях и профили являются параболическими – течение Пуазейля.

Аналогичные результаты имеют место и для нестационарного решения. Заметим только, что выход на стационарный режим (2.8.1), (2.8.2) имеет место только при выполнении условий теорем 4, 5.

Отметим, что в силу полученных априорных оценок (см. п. 2.3, 2.6), решения задач (2.1.1) – (2.1.10) являются классическими, $u_j(y, t), T_j(y, t) \in C^2(\Omega_j) \cap C^1(0, T]$, $\Omega_1 = [0, l_1]$, $\Omega_2 = [l_1, l_2]$, $\Omega_3 = [l_2, l_3]$. Нетрудно также показать непрерывность следующих производных $u_{jt}, u_{jy}, u_{jyy}, T_{jt}, T_{jy}$, и T_{jyy} . Для того, чтобы получить равномерные оценки для u_{jt} и T_{jt} продифференцируем уравнения (2.1.1), (2.1.2) по t и введем замену

$$\varphi_j(y, t) = u_{jt}(y, t), \quad \psi_j(y, t) = T_{jt}(y, t).$$

Полученные задачи для функций $\varphi_j(y, t), \psi_j(y, t)$ будут подобны задачам (2.1.1) – (2.1.10) для функций $u_j(y, t), T_j(y, t)$, соответственно. Поэтому оценки для функций $\varphi_j(y, t), \psi_j(y, t)$ получаются аналогично, как и для $u_j(y, t), T_j(y, t)$ (см. п. 2.3, 2.6) и условие (2.3.5) примет вид

$$\int_0^{\infty} |f_{1t}(t)| e^{\delta t} dt < \infty. \quad (2.8.3)$$

Оценки для u_{jyy}, T_{jyy} найдутся из уравнений (2.1.1), (2.1.2), причем из условия (2.3.5) $f_j(t) \leq h_j(t) e^{-\delta t}$, $\int_0^{\infty} |h_j(t)| dt < \infty$. В силу полученных оценок для u_{jyy} имеем

$$|u_{jy}(y_1, t) - u_{jy}(y_2, t)| = \left| \int_{y_1}^{y_2} u_{jyy} dy \right| \leq |y_1 - y_2| \max_{y \in \Omega_j, t \in (0, T]} |u_{jyy}|.$$

для любых $y_1, y_2 \in \Omega_j$. Следовательно, функции $u_{jy}(y, t)$ непрерывны на своих областях определения и граничные условия для касательных напряжений (2.1.6) выполнены в смысле непрерывных функций. Оценки для T_{jy} получаются аналогично.

3 Свойства решений двумерных уравнений термокапиллярных движений в плоском канале

Данная глава посвящена исследованию одного частично инвариантного решения ранга два и дефекта три уравнения вязкой теплопроводной жидкости. Оно интерпретируется как движение трёх несмешивающихся жидкостей в плоском канале, ограниченном твёрдыми неподвижными стенками, на которых известно распределение температур. С математической точки зрения, возникающая начально – краевая задача является нелинейной и обратной. При некоторых (часто выполняющихся в практических приложениях) предположениях задача заменяется линейной. Для неё получены априорные оценки, найдено стационарное точное решение и доказано, что с ростом времени решение выходит на этот стационарный режим, если стабилизируются со временем температуры на стенках. В изображениях по Лапласу получено точное решение. Его качественный и численный анализ хорошо подтверждает стремление при $t \rightarrow \infty$ решения к стационарному.

3.1 Постановка задачи и её преобразование

Система уравнений (1) – (4) двумерных движений допускает четырёхмерную подалгебру Ли $\langle \partial_x, t\partial_u, +\partial_x, \partial_p, \partial_\Theta \rangle$. Её инварианты суть t, y, v и частично инвариантное решение ранга два и дефекта три следует искать в виде

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(y, t), \quad p = p(x, y, t), \quad \Theta = \Theta(x, y, t).$$

Подстановка точного вида решения в систему (1) – (3) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} u &= w(y, t)x + u_1(y, t), \quad w + v_y = 0, \\ w_t + vw_y + w^2 &= f(t) + \nu w_{yy}, \quad \frac{1}{\rho}p = d(y, t) - \frac{f(t)}{2}x^2, \\ d_y &= \nu v_{yy} - v_t - vv_y, \quad u_{1t} + vu_{1y} + u_1w = 0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

с пока произвольной функцией $f(t)$.

Относительно поля температур предположим, что оно имеет вид

$$\Theta = a(y, t)x^2 + a_1(y, t)x + b(y, t). \quad (3.1.2)$$

Далее, для простоты, предполагаем, что $u_1(y, t) \equiv 0, a_1(y, t) \equiv 0$. Последнее означает, что температурное поле имеет в точке $x = 0$ экстремум: при $a(y, t) < 0$ – максимум, а при $a(y, t) > 0$ – минимум. Вновь вводя индекс $j = 1, 2, 3$, фиксирующий жидкость, с помощью представлений (3.1.1), (3.1.2) из общей постановки (5) – (16) получим начально – краевую задачу:

в своих областях определения неизвестные удовлетворяют системам уравнений

$$w_{jt} + v_j w_{jy} + w_j^2 = \nu_j w_{jyy} + f_j(t), \quad (3.1.3)$$

$$v_{jt} + v_j v_{jy} + d_{jy} = \nu_j v_{jyy}, \quad (3.1.4)$$

$$w_j + v_{jy} = 0, \quad (3.1.5)$$

$$a_{jt} + 2w_j a_j + v_j a_{jy} = \chi_j a_{jyy}, \quad (3.1.6)$$

$$b_{jt} + v_j b_{jy} = \chi_j b_{jyy} + 2\chi_j a_j; \quad (3.1.7)$$

на поверхностях раздела $y = l_n(x, t)$ выполнены условия

$$w_1(l_1(x, t), x, t) = w_2(l_1(x, t), x, t), \quad w_2(l_2(x, t), x, t) = w_3(l_2(x, t), x, t), \quad (3.1.8)$$

$$v_1(l_1(x, t), x, t) = v_2(l_1(x, t), x, t), \quad v_2(l_2(x, t), x, t) = v_3(l_2(x, t), x, t), \quad (3.1.9)$$

$$l_{1t} + x w_1(l_1(x, t), x, t) l_{1x} = v_1(l_1(x, t), x, t), \quad (3.1.10)$$

$$l_{2t} + x w_2(l_2(x, t), x, t) l_{2x} = v_2(l_2(x, t), x, t),$$

$$a_1(l_1(x, t), x, t) = a_2(l_1(x, t), x, t), \quad a_2(l_2(x, t), x, t) = a_3(l_2(x, t), x, t), \quad (3.1.11)$$

$$k_1 \frac{\partial a_1}{\partial n_1} = k_2 \frac{\partial a_2}{\partial n_1}, \quad k_2 \frac{\partial a_2}{\partial n_2} = k_3 \frac{\partial a_3}{\partial n_2}, \quad (3.1.12)$$

$$b_1(l_1(x, t), x, t) = b_2(l_1(x, t), x, t), \quad b_2(l_2(x, t), x, t) = b_3(l_2(x, t), x, t), \quad (3.1.13)$$

$$k_1 \frac{\partial b_1}{\partial n_1} = k_2 \frac{\partial b_2}{\partial n_1}, \quad k_2 \frac{\partial b_2}{\partial n_2} = k_3 \frac{\partial b_3}{\partial n_2}, \quad (3.1.14)$$

где $\mathbf{n}_n = (1 + l_{nx}^2)^{-1/2}(-l_{nx}, 1)$, $n = 1, 2$.

Динамические условия (11), (12) имеют векторный вид. Проектируя их на касательные направления $\boldsymbol{\tau}_n = (1 + l_{nx}^2)^{-1/2}(1, l_{nx})$ с учётом зависимостей (14) и равенств (3.1.1) получим

$$[\mu_2 D(\mathbf{u}_2) - \mu_1 D(\mathbf{u}_1)] \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 = -\varkappa_1 \nabla_{11} \Theta_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \quad (3.1.15)$$

при $y = l_1(x, t)$ и

$$[\mu_3 D(\mathbf{u}_3) - \mu_2 D(\mathbf{u}_2)] \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = -\varkappa_2 \nabla_{11} \Theta_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \quad (3.1.16)$$

при $y = l_2(x, t)$, где $\mu_j = \rho_j \nu_j$ — динамические вязкости жидкостей, $\mathbf{u}_j = (x w_j(y, t), v_j(y, t))$.

Проекция на нормали $\mathbf{n}_{1,2}$ даёт соотношения

$$\rho_1 d_1(l_1(x, t), t) + \frac{\rho_2 f_2(t) - \rho_1 f_1(t)}{2} - \rho_2 d_2(l_1(x, t), t) + [2\mu_2 D(\mathbf{u}_2) -$$

$$- 2\mu_1 D(\mathbf{u}_1)] \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = (\sigma_1^0 - \varkappa_1 [a_1(l_1(x, t), t) x^2 + b_1(l_1(x, t), t)]) \frac{l_{1xx}}{(1 + l_{1x}^2)^{3/2}}, \quad (3.1.17)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2 d_2(l_2(x, t), t) + \frac{\rho_3 f_3(t) - \rho_2 f_2(t)}{2} - \rho_3 d_3(l_2(x, t), t) + [2\mu_3 D(\mathbf{u}_3) - \\ & - 2\mu_2 D(\mathbf{u}_2)] \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = (\sigma_2^0 - \varkappa_2 [a_2(l_2(x, t), t) x^2 + b_2(l_2(x, t), t)]) \frac{l_{2xx}}{(1 + l_{2x}^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Граничные условия на твёрдых стенках таковы

$$u_1(0, t) = 0, \quad u_3(l_3^0, t) = 0, \quad v_1(0, t) = 0, \quad v_3(l_3^0, t) = 0, \quad (3.1.19)$$

$$a_1(0, t) = a_{10}(t), \quad a_3(0, t) = a_{30}(t), \quad (3.1.20)$$

$$b_1(0, t) = b_{10}(t), \quad b_3(0, t) = b_{30}(t), \quad (3.1.21)$$

с заданными функциями $a_{10}(t), a_{30}(t), b_{10}(t), b_{30}(t), l_3^0 = const > 0$ — расстояние между твёрдыми стенками.

Начальные условия для скоростей являются нулевыми (изучаются свойства решения задачи, моделирующей движение только под действием термокапиллярных сил)

$$u_j(y, 0) = 0, \quad v_j(y, 0) = 0. \quad (3.1.22)$$

Кроме того

$$l_n(x, 0) = l_{n0}(x), \quad (3.1.23)$$

$$a_j(y, 0) = a_{0j}(y), \quad b_j(y, 0) = b_{0j}(y), \quad (3.1.24)$$

причём $a_{0j} \neq 0$ хотя бы для одного значения индекса j , чтобы "включался" термокапиллярный эффект при $t = 0$.

Отметим следующие особенности поставленной задачи. Она нелинейная и обратная, т. к. функции $f_j(t)$ являются искомыми. Это легко понять, если из уравнений (3.1.5) исключить $v_j(y, t)$. Тогда задача сводится к сопряжённой задаче для функций $w_j(y, t), a_j(y, t)$ и $l_n(x, t), j = 1, 2, 3; n = 1, 2$. Задача для функций $b_j(y, t)$ при известных v_j и a_j отделяется. Функции $d_j(y, t)$ восстанавливаются квадратурой из уравнений (3.1.4) с точностью до функций времени. Итак, функции w_j, a_j есть решения нелинейных параболических уравнений с граничными условиями (3.1.8) – (3.1.12) и начальными данными (3.1.19), (3.1.20). Три из них: (3.1.9) и последнее из (3.1.19) являются дополнительными на функции $f_j(t)$.

Для упрощения задачи (3.1.3) – (3.1.24) введём характерные масштабы длины, времени, функций w_j, v_j, a_j, d_j, f_j именно величины

$$l_1^0, \quad \frac{l_1^{02}}{\nu_1}, \quad \frac{\varkappa_1 a^0 l_1^0}{\mu_1}, \quad \frac{\varkappa_2 a^0 l_1^{02}}{\mu_1}, \quad a^0, \quad \frac{\varkappa_1 a^0 l_1^0}{\rho_1}, \quad \frac{\varkappa_1 a^0}{\rho_1 l_1^0} \quad (3.1.25)$$

соответственно, где $l_1^0 = const > 0$ — среднее значение толщины первого слоя жидкости при $t = 0$, $a^0 = \max_{t \geq 0} |a_{30}(t) - a_{10}(t)| > 0$ или $a^0 = \max_j \max_y |a_{j0}(t)| > 0$.

В безразмерных переменных при нелинейных слагаемых в уравнениях (3.1.3), (3.1.4), (3.1.6), (3.1.7) появится сомножитель

$$M = \frac{\varkappa_1 a^0 l_1^{03}}{\mu_1 \nu_1}, \quad (3.1.26)$$

называемый числом Марангони. То же самое будет и в кинематических условиях (3.1.10) уже при линейных членах, содержащих скорости. Предположим, что температурные коэффициенты поверхностного натяжения сравнимы по величине $\varkappa_1 \sim \varkappa_2$ и $M \ll 1$. Последнее выполнено в тонких, либо при очень больших вязкостях. Тогда нелинейными слагаемыми в уравнениях можно пренебречь и они становятся линейными. В частности, кинематические условия будут $l_{nt} = 0$, т. е. $l_n = l_n(x)$, $n = 1, 2$.

Обратимся к динамическим условиям (3.1.17), (3.1.18). После перехода к безразмерным переменным в правых частях вместо σ_1^0 и σ_2^0 появятся числа Вебера

$$We_n = \frac{\sigma_n^0}{a^0 l_1^{02} \varkappa_1}. \quad (3.1.27)$$

В реальных условиях для большинства жидких сред $We_n \gg 1$, например, для системы вода – воздух $We \sim 10^6$. Поэтому при таких числах Вебера условия (3.1.17), (3.1.18) принимают вид $l_{nxx} = 0$, т. е. $l_n(x) = \alpha_n x + l_n^0$, $n = 1, 2$.

Далее считаем, что $\alpha_n = 0$ и поверхности раздела есть плоскости $y = l_1^0, y = l_2^0 > l_1^0$, параллельные твёрдым стенкам $y = 0, y = l_3^0$; ниже индекс "0" у l_j^0 будем опускать.

3.2 Априорные оценки

Выпишем полностью полученную линейную задачу в размерном виде, учитывая что из (3.1.5)

$$v_1(y, t) = - \int_0^y w_1(y, t) dy, \quad v_2(y, t) = - \int_{l_1}^y w_2(y, t) dy,$$

$$v_3(y, t) = - \int_{l_2}^y w_3(y, t) dy.$$

Она имеет вид

$$w_{jt} = \nu_j w_{jyy} + f_j(t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.2.1)$$

$$w_j(y, 0) = 0, \quad (3.2.2)$$

$$w_1(0, t) = 0, \quad (3.2.3)$$

$$w_3(l_3, t) = 0, \quad (3.2.4)$$

$$w_1(l_1, t) = w_2(l_1, t), \quad (3.2.5)$$

$$\mu_2 w_{2y}(l_1, t) - \mu_1 w_{1y}(l_1, t) = -2\alpha_1 a_1(l_1, t), \quad (3.2.6)$$

$$w_2(l_2, t) = w_3(l_2, t), \quad (3.2.7)$$

$$\mu_3 w_{3y}(l_2, t) - \mu_2 w_{2y}(l_2, t) = -2\alpha_2 a_2(l_2, t), \quad (3.2.8)$$

$$\int_0^{l_1} w_1(y, t) dy = 0, \quad (3.2.9)$$

$$\int_{l_1}^{l_2} w_2(y, t) dy = 0, \quad (3.2.10)$$

$$\int_{l_2}^{l_3} w_3(y, t) dy = 0, \quad (3.2.11)$$

где $0 < y < l_1$ для $j = 1$, $l_1 < y < l_2$ для $j = 2$ и $l_2 < y < l_3$ для $j = 3$. Условия (3.2.6) и (3.2.8) следуют из (3.1.15), (3.1.16), поскольку $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = (1, 0)$ и $\nabla_{11} \Theta_{1,2} \cdot \boldsymbol{\tau}_{1,2} = 2a_{1,2}x$. Равенства (3.2.9) и (3.2.10) означают, что $v_1(l_1, t) = v_2(l_2, t) = 0$, а (3.2.11) есть условие прилипания: $v_3(l_3, t) = 0$.

Выпишем задачу для функций $a_j(y, t)$

$$a_{jt} = \chi_j a_{jyy}, \quad (3.2.12)$$

$$a_j(y, 0) = a_{0j}(y), \quad (3.2.13)$$

$$a_1(0, t) = a_{10}(t), \quad (3.2.14)$$

$$a_3(l_3, t) = a_{30}(t), \quad (3.2.15)$$

$$a_1(l_1, t) = a_2(l_1, t), \quad (3.2.16)$$

$$k_1 a_{1y}(l_1, t) = k_2 a_{2y}(l_1, t), \quad (3.2.17)$$

$$a_2(l_2, t) = a_3(l_2, t), \quad (3.2.18)$$

$$k_2 a_{2y}(l_2, t) = k_3 a_{3y}(l_2, t). \quad (3.2.19)$$

Чтобы получить априорные оценки для функций $w_j(y, t)$ и $f_j(t)$ решения задачи (3.2.1) – (3.2.11), необходимо получить сначала оценки, в отличие от от Главы 2, начально – краевой задачи (3.2.12) – (3.2.19). Произведём в ней замену переменных

$$\begin{aligned} a_1(y, t) &= \tilde{a}_1(y, t) + \frac{a_{10}(t)}{l_1^2} (y - l_1)^2, & a_2(y, t) &= \tilde{a}_2(y, t), \\ a_3(y, t) &= \tilde{a}_3(y, t) + \frac{a_{30}(t)}{(l_3 - l_2)^2} (y - l_2)^2. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Функции $\tilde{a}_j(y, t)$ в своих областях определения удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{a}_{1t} = \chi_1 \tilde{a}_{1yy} + \frac{2\chi_1 a_{10}(t)}{l_1^2} - \frac{a'_{10}(t)(y - l_1)^2}{l_1^2}, \quad (3.2.21)$$

$$\tilde{a}_{2t} = \chi_2 \tilde{a}_{2yy}, \quad (3.2.22)$$

$$\tilde{a}_{3t} = \chi_3 \tilde{a}_{3yy} + \frac{2\chi_3 a_{30}(t)}{(l_3 - l_2)^2} - \frac{a'_{30}(t)(y - l_2)^2}{(l_3 - l_2)^2}, \quad (3.2.23)$$

где штрих означает дифференцирование по времени.

Граничные условия (3.2.14) и (3.2.15) для \tilde{a}_1 и \tilde{a}_3 становятся *однородными*, а (3.2.16) – (3.2.19) сохраняют свой вид. Изменяются начальные условия (3.2.13) для функций \tilde{a}_1, \tilde{a}_3 :

$$\tilde{a}_1(y, 0) = a_{01}(y) - \frac{a_{01}(0)}{l_1^2} (y - l_1)^2 \equiv \tilde{a}_{01}(y), \quad (3.2.24)$$

$$\tilde{a}_3(y, 0) = a_{03}(y) - \frac{a_{03}(0)}{(l_3 - l_2)^2} (y - l_2)^2 \equiv \tilde{a}_{03}(y).$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} g_1(y, t) &= \frac{2\chi_1 a_{10}(t)}{l_1^2} - \frac{a'_{10}(t)(y - l_1)^2}{l_1^2}, \\ g_3(y, t) &= \frac{2\chi_3 a_{30}(t)}{(l_3 - l_2)^2} - \frac{a'_{30}(t)(y - l_2)^2}{(l_3 - l_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Умножим уравнения (3.2.21)–(3.2.23) на $\rho_1 c_1 \tilde{a}_1, \rho_2 c_2 \tilde{a}_2, \rho_3 c_3 \tilde{a}_3$, затем проинтегрируем по отрезкам $[0, l_1], [l_1, l_2], [l_2, l_3]$ с учётом граничных условий и результаты сложим. Получим соотношение

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} + k_1 \int_0^{l_1} \tilde{a}_{1y}^2 dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_{2y}^2 dy + k_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_{3y}^2 dy &= \rho_1 c_1 \int_0^{l_1} g_1(y, t) \tilde{a}_1(y, t) dy + \\ &+ \rho_3 c_3 \int_{l_2}^{l_3} g_3(y, t) \tilde{a}_3(y, t) dy, \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

$$A(t) = \frac{1}{2} \rho_1 c_1 \int_0^{l_1} \tilde{a}_1^2 dy + \frac{1}{2} \rho_2 c_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_2^2 dy + \frac{1}{2} \rho_3 c_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_3^2 dy, \quad (3.2.27)$$

$c_j = k_j / \rho_j \chi_j$ — коэффициенты удельных теплоёмкостей. Поскольку на твёрдых стенках $\tilde{a}_1(0, t) = 0$, $\tilde{a}_3(l_3, t) = 0$ и для функций \tilde{a}_1 , \tilde{a}_2 , \tilde{a}_3 выполнены условия (3.2.16) – (3.2.19), то (см. Главу 1, неравенство (1.2.12))

$$\int_0^{l_1} \tilde{a}_1^2 dy + \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_2^2 dy + \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_3^2 dy \leq M_1 \left(k_1 \int_0^{l_1} \tilde{a}_{1y}^2 dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_{2y}^2 dy + k_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_{3y}^2 dy \right).$$

Поэтому левая часть в (3.2.26) больше или равна

$$\frac{dA(t)}{dt} + 2\delta A(t), \quad \delta = \frac{1}{M_1} \min_j \left(\frac{\chi_j}{k_j} \right). \quad (3.2.28)$$

Что касается правой части, то она не превосходит

$$\begin{aligned} & \rho_1 c_1 \left(\int_0^{l_1} g_1^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_0^{l_1} \tilde{a}_1^2 dy \right)^{1/2} + \rho_3 c_3 \left(\int_{l_2}^{l_3} g_3^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_3^2 dy \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \left[\left(2\rho_1 c_1 \int_0^{l_1} g_1^2 dy \right)^{1/2} + \left(2\rho_3 c_3 \int_{l_2}^{l_3} g_3^2 dy \right)^{1/2} \right] \sqrt{A(t)} \equiv G(t) \sqrt{A(t)}. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Таким образом, из (3.2.26) с помощью (3.2.28), (3.2.29) выводим неравенство

$$\frac{dA(t)}{dt} + 2\delta A(t) \leq G(t) \sqrt{A(t)},$$

откуда

$$A(t) \leq \left[\sqrt{A(0)} + \frac{1}{2} \int_0^t e^{\delta\tau} G(\tau) d\tau \right]^2 e^{-2\delta t}. \quad (3.2.30)$$

Согласно (3.2.27)

$$A(0) = \frac{1}{2} \rho_1 c_1 \int_0^{l_1} \tilde{a}_{01}^2(y) dy + \frac{1}{2} \rho_2 c_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_{02}^2(y) dy + \frac{1}{2} \rho_3 c_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_{03}^2(y) dy,$$

где $\tilde{a}_{01}(y)$, $\tilde{a}_{03}(y)$ даются выражениями (3.2.24). Далее, используя (3.2.25),

получим неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} g_1^2(y, t) dy &\leq \frac{4\chi_1^2 a_{10}^2(t)}{l_1^3} + \frac{1}{5} l_1 (a'_{10}(t))^2, \\ \int_{l_2}^{l_3} g_3^2(y, t) dy &\leq \frac{4\chi_3^2 a_{30}^2(t)}{(l_3 - l_2)^3} + \frac{1}{5} (l_3 - l_2) (a'_{30}(t))^2. \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

Из определения функции $G(t)$ (см. (3.2.29)) получим оценку

$$\begin{aligned} G(t) &\leq 2\sqrt{\rho_1 c_1} \left[\frac{4\chi_1^2 a_{10}^2(t)}{l_1^3} + \frac{1}{5} l_1 (a'_{10}(t))^2 \right]^{1/2} + \\ &+ 2\sqrt{\rho_3 c_3} \left[\frac{4\chi_3^2 a_{30}^2(t)}{(l_3 - l_2)^3} + \frac{1}{5} (l_3 - l_2) (a'_{30}(t))^2 \right]^{1/2} \leq \\ &\leq 2\sqrt{\rho_1 c_1} \left(\frac{2\chi_1 |a_{10}(t)|}{l_1^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{l_1} |a'_{10}(t)| \right) + \\ &+ 2\sqrt{\rho_3 c_3} \left(\frac{2\chi_3 |a_{30}(t)|}{(l_3 - l_2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{(l_3 - l_2)} |a'_{30}(t)| \right), \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

так как $\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$ для всех $x, y \in R^1$.

Замечание 8. Если сходятся интегралы

$$\int_0^\infty e^{\delta\tau} |a_{k0}(\tau)| d\tau, \quad \int_0^\infty e^{\delta\tau} |a'_{k0}(\tau)| d\tau, \quad k = 1, 3, \quad (3.2.33)$$

то согласно (3.2.30) – (3.2.33) функция $A(t)$ с ростом времени стремится к нулю по экспоненциальному закону. Физически это означает, что тепловые эффекты достаточно малы.

В силу полученной оценки (3.2.32) для функции $G(t)$ неравенство (3.2.30) примет вид

$$\begin{aligned} A(t) &\leq \left[\sqrt{A(0)} + \sqrt{\rho_1 c_1} \left(\frac{2\chi_1}{l_1^{3/2}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a_{10}(\tau)| d\tau + \sqrt{\frac{l_1}{5}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a'_{10}(\tau)| d\tau \right) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\rho_3 c_3} \left(\frac{2\chi_3}{(l_3 - l_2)^{3/2}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a_{30}(\tau)| d\tau + \sqrt{\frac{l_3 - l_2}{5}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a'_{30}(\tau)| d\tau \right) \right]^2 e^{-2\delta t}. \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

Перепишем уравнения (3.2.21) – (3.2.23) в виде $\tilde{a}_{jt} - \chi_j \tilde{a}_{jyy} = g_j(y, t)$, $g_2 = 0$, возведём каждое из них в квадрат и домножим на $\rho_j c_j$, затем проинтегрируем по времени и по переменной y в своих областях определения и результаты сложим. Используя граничные и начальные условия, приходим к интегральному равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\rho_1 c_1 \int_0^{l_1} \left(\tilde{a}_{1t}^2 + \chi_1^2 \tilde{a}_{1yy}^2 \right) dy + \rho_2 c_2 \int_{l_1}^{l_2} \left(\tilde{a}_{2t}^2 + \chi_2^2 \tilde{a}_{2yy}^2 \right) dy + \right. \\ & \left. + \rho_3 c_3 \int_{l_2}^{l_3} \left(\tilde{a}_{3t}^2 + \chi_3^2 \tilde{a}_{3yy}^2 \right) dy \right] dt + k_1 \int_0^{l_1} \tilde{a}_{1y}^2(y, t) dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_{2y}^2(y, t) dy + \\ & + k_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_{3y}^2(y, t) dy = k_1 \int_0^{l_1} \tilde{a}_{10y}^2(y) dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_{20y}^2(y) dy + k_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_{30y}^2(y) dy + \\ & + \rho_1 c_1 \int_0^t \int_0^{l_1} g_1^2(y, t) dy dt + \rho_3 c_3 \int_0^t \int_{l_2}^{l_3} g_3^2(y, t) dy dt. \quad (3.2.35) \end{aligned}$$

Учитывая неравенства (3.2.31), из (3.2.35) получим оценки

$$\int_0^{l_1} \tilde{a}_{1y}^2(y, t) dy \leq \frac{F(t)}{k_1}, \quad \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_{2y}^2(y, t) dy \leq \frac{F(t)}{k_2}, \quad \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_{3y}^2(y, t) dy \leq \frac{F(t)}{k_3} \quad (3.2.36)$$

с функцией

$$\begin{aligned} F(t) = & k_1 \int_0^{l_1} \tilde{a}_{01y}^2(y) dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_{02y}^2(y) dy + k_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_{03y}^2(y) dy + \\ & + 2\rho_1 c_1 \left[\frac{4\chi_1^2}{l_1^3} \int_0^t a_{10}^2(\tau) d\tau + \frac{1}{5} l_1 \int_0^t (a'_{10}(\tau))^2 d\tau \right] + \\ & + 2\rho_3 c_3 \left[\frac{4\chi_3^2}{(l_3 - l_2)^2} \int_0^t a_{30}^2(\tau) d\tau + \frac{1}{5} (l_3 - l_2)^2 \int_0^t (a'_{30}(\tau))^2 d\tau \right]. \quad (3.2.37) \end{aligned}$$

Замечание 9. Из сходимости интегралов (3.2.33) следует сходимость при $t \rightarrow \infty$ и интегралов, входящих в выражение для функции $F(t)$ (3.2.37).

Поскольку

$$\tilde{a}_1^2(y, t) = 2 \int_0^y \tilde{a}_1(y, t) \tilde{a}_{1y}(y, t) dy, \quad \tilde{a}_3^2(y, t) = -2 \int_y^{l_3} \tilde{a}_3(y, t) \tilde{a}_{3y}(y, t) dy,$$

$$\tilde{a}_2^2(y, t) = 2 \int_{l_1}^y \tilde{a}_2(y, t) \tilde{a}_{2y}(y, t) dy + \tilde{a}_1^2(l_1, t).$$

то, возвращаясь к замене (3.2.20), из оценок (3.2.30), (3.2.32), (3.2.36), (3.2.38) и неравенства Коши – Буняковского получим равномерные по y оценки

$$|a_1(y, t)| \leq \left(\frac{8A(t)F(t)}{\rho_1 c_1 k_1} \right)^{1/4} + h_1(t) e^{-\delta t}, \quad (3.2.38)$$

$$|a_3(y, t)| \leq \left(\frac{8A(t)F(t)}{\rho_3 c_3 k_3} \right)^{1/4} + h_3(t) e^{-\delta t}, \quad (3.2.39)$$

$$|a_2(y, t)| \leq (8A(t)F(t))^{1/4} \left((\rho_2 c_2 k_2)^{-1/2} + (\rho_1 c_1 k_1)^{-1/2} \right)^{1/2}. \quad (3.2.40)$$

Замечание 10. Так как интегралы (3.2.33) сходятся, то

$$a_{j0}(\tau) \leq h_j(\tau) e^{-\delta \tau}, \quad a'_{j0}(\tau) \leq h_j^1(\tau) e^{-\delta \tau} \text{ причём } \int_0^\infty |h_j(\tau)| d\tau < \infty \text{ и}$$

$$\int_0^\infty |h_j^1(\tau)| d\tau < \infty.$$

Справедлива

Теорема 8. Решение задачи (3.2.12) – (3.2.19) при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулевому, если сходятся интегралы (3.2.33), причём справедливы оценки скорости сходимости (3.2.38) – (3.2.40).

Действительно, согласно (3.2.37) функция $F(t)$ ограничена постоянной, из (3.2.34) $A(t) \sim e^{-2\delta t}$, поэтому оценки (3.2.38) – (3.2.40) и доказывают теорему.

Вернёмся к задаче (3.2.1)–(3.2.11); для неё имеет место тождество

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} + \mu_1 \int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy + \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy = \\ = 2\alpha_1 a_1(l_1, t) w_1(l_1, t) + 2\alpha_2 a_3(l_2, t) w_3(l_2, t), \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

где $E(t)$ — суммарная кинетическая энергия системы,

$$E(t) = \frac{1}{2} \rho_1 \int_0^{l_1} w_1^2 dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_{l_1}^{l_2} w_2^2 dy + \frac{1}{2} \rho_3 \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy. \quad (3.2.42)$$

Заметим, что в силу замены (3.2.20) в (3.2.41) $a_1(l_1, t) = \tilde{a}_1(l_1, t)$, $a_3(l_2, t) = \tilde{a}_3(l_2, t)$. Далее,

$$|w_1(l_1, t)| \leq \sqrt{l_1} \left(\int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy \right)^{1/2},$$

$$|w_3(l_2, t)| \leq \sqrt{l_3 - l_2} \left(\int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy \right)^{1/2},$$

поэтому правая часть в (3.2.41) оценивается сверху так $\forall \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$:

$$\begin{aligned} & |2\alpha_1 \tilde{a}_1(l_1, t) w_1(l_1, t) + 2\alpha_2 \tilde{a}_3(l_2, t) w_3(l_2, t)| \leq \\ & \leq \frac{\alpha_1}{\varepsilon_1} \tilde{a}_1^2(l_1, t) + \alpha_1 \varepsilon_1 w_1^2(l_1, t) + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_2} \tilde{a}_3^2(l_2, t) + \alpha_2 \varepsilon_2 w_3^2(l_2, t) \leq \\ & \leq \frac{\alpha_1}{\varepsilon_1} \tilde{a}_1^2(l_1, t) + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_2} \tilde{a}_3^2(l_2, t) + \alpha_1 l_1 \varepsilon_1 \int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy + \alpha_2 (l_3 - l_2) \varepsilon_2 \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy. \end{aligned}$$

Выбирая $\varepsilon_1 < \mu_1 / \alpha_1 l_1$, $\varepsilon_2 < \mu_2 / \alpha_2 (l_3 - l_2)$ и пользуясь оценками (3.2.38), (3.2.39), из (3.2.41) получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} + (\mu_1 - \alpha_1 l_1 \varepsilon_1) \int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy + [\mu_3 - \alpha_2 (l_3 - l_2) \varepsilon_2] \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy \leq \\ \leq 4 \left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{\rho_1 c_1 k_1}} + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{\rho_3 c_3 k_3}} \right) \sqrt{A(t)F(t)}. \quad (3.2.43) \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^{l_1} w_1^2 dy + \int_{l_1}^{l_2} w_2^2 dy + \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy \leq \frac{l_3^2}{2} \left(\int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy + \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy + \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy \right),$$

то неравенство (3.2.43) примет вид

$$\frac{dE}{dt} + 4\delta_1 E \leq H(t), \quad (3.2.44)$$

где

$$\delta_1 = \frac{1}{l_3^2} \min \left\{ \frac{\mu_1 - \varkappa_1 l_1 \varepsilon_1}{\rho_1}, \frac{\mu_2}{\rho_2}, \frac{\mu_3 - \varkappa_2 (l_3 - l_2) \varepsilon_2}{\rho_3} \right\}, \quad (3.2.45)$$

$$H(t) = 4 \left(\frac{\varkappa_1}{\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{\rho_1 c_1 k_1}} + \frac{\varkappa_2}{\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{\rho_3 c_3 k_3}} \right) \sqrt{A(t)F(t)}.$$

С учётом (3.2.34) $H(t)$ оценивается сверху так

$$\begin{aligned} H(t) \leq & 4 \left(\frac{\varkappa_1}{\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{\rho_1 c_1 k_1}} + \frac{\varkappa_2}{\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{\rho_3 c_3 k_3}} \right) \sqrt{F(t)} \left[\sqrt{A(0)} + \sqrt{\rho_1 c_1} \times \right. \\ & \times \left(\frac{2\chi_1}{l_1^{3/2}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a_{10}(\tau)| d\tau + \sqrt{\frac{l_1}{5}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a'_{10}(\tau)| d\tau \right) + \sqrt{\rho_3 c_3} \times \\ & \left. \times \left(\frac{2\chi_3}{(l_3 - l_2)^{3/2}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a_{30}(\tau)| d\tau + \sqrt{\frac{l_3 - l_2}{5}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a'_{30}(\tau)| d\tau \right) \right] e^{-\delta t}. \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

В неравенстве (3.2.46) функция $F(t)$ задаётся формулой (3.2.37) и ограничена постоянной (см. Замечание 9).

Из неравенства (3.2.44) получим оценку

$$E(t) \leq e^{-4\delta_1 t} \int_0^t e^{4\delta_1 \tau} H(\tau) d\tau. \quad (3.2.47)$$

Следовательно, находим оценки L_2 -норм функций $w_j(y, t)$ на своих областях определения:

$$\int_0^{l_1} w_1^2 dy \leq \frac{2}{\rho_1} E(t), \quad \int_{l_1}^{l_2} w_2^2 dy \leq \frac{2}{\rho_2} E(t), \quad \int_{l_2}^{l_3} w_3^2 dy \leq \frac{2}{\rho_3} E(t). \quad (3.2.48)$$

Для получения аналогичных оценок производных w_{jy} сделаем замену

$$\begin{aligned} w_1(y, t) &= \tilde{w}_1(y, t) + \frac{2\varkappa_1 a_1(l_1, t)}{\mu_1 l_1^2} (2y^3 - 3l_1 y^2 + l_1^2 y), \\ w_2(y, t) &= \tilde{w}_2(y, t), \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

$$\begin{aligned} w_3(y, t) &= \tilde{w}_3(y, t) - \frac{2\varkappa_2 a_2(l_2, t)}{\mu_3 (l_3 - l_2)^2} [2y^3 - 3(l_2 + l_3)y^2 + \\ &+ (l_2^2 + l_3^2 + 4l_2 l_3)y - l_2 l_3 (l_2 + l_3)]. \end{aligned}$$

При этом граничные условия (3.2.6), (3.2.8) для функций $\tilde{w}_j(y, t)$ становятся однородными, а (3.2.3)–(3.2.5), (3.2.7), (3.2.9)–(3.2.11) имеют тот же вид. Изменяются правые части в уравнениях (3.2.1) при $j = 1, j = 3$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(y, t) &= f_1(t) - \frac{2\alpha_1 a_{1t}(l_1, t)}{\mu_1 l_1^2} (2y^3 - 3l_1 y^2 + l_1^2 y) + \frac{12\alpha_1 \nu_1 a_1(l_1, t)}{\mu_1 l_1^2} (2y - l_1) \equiv \\ &\equiv f_1(t) + Q_1(y, t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}_3(y, t) &= f_3(t) + \frac{2\alpha_2 a_{2t}(l_2, t)}{\mu_3 (l_3 - l_2)^2} [2y^3 - 3(l_2 + l_3)y^2 + (l_2^2 + l_3^2 + 4l_2 l_3)y - \\ &- l_2 l_3 (l_2 + l_3)] - \frac{12\alpha_2 \nu_3 a_2(l_2, t)}{\mu_3 (l_3 - l_2)^2} [2y - (l_2 + l_3)] \equiv f_3(t) + Q_3(t).\end{aligned}\quad (3.2.50)$$

Начальные данные (3.2.2) будут неоднородными при $j = 1, j = 3$:

$$\begin{aligned}\tilde{w}_1(y, 0) &= -\frac{2\alpha_1 a_1(l_1, 0)}{\mu_1 l_1^2} (2y^3 - 3l_1 y^2 + l_1^2 y) \equiv \tilde{w}_{10}(y), \\ \tilde{w}_3(y, 0) &= \frac{2\alpha_2 a_2(l_2, 0)}{\mu_3 (l_3 - l_2)^2} [2y^3 - 3(l_2 + l_3)y^2 + (l_2^2 + l_3^2 + 4l_2 l_3)y - \\ &- l_2 l_3 (l_2 + l_3)] \equiv \tilde{w}_{30}(y).\end{aligned}\quad (3.2.51)$$

Умножим уравнения для функций $\tilde{w}_j(y, t)$ на $\rho_j \tilde{w}_{jt}$ и результаты сложим:

$$\begin{aligned}\rho_1 \int_0^{l_1} \tilde{w}_{1t}^2 dy + \rho_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{w}_{2t}^2 dy + \rho_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{w}_{3t}^2 dy + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \mu_1 \int_0^{l_1} \tilde{w}_{1y}^2 dy + \frac{1}{2} \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{w}_{2y}^2 dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{w}_{3y}^2 dy \right] = \rho_1 \int_0^{l_1} Q_1(y, t) \tilde{w}_{1t} dy + \rho_3 \int_{l_2}^{l_3} Q_3(y, t) \tilde{w}_{3t} dy.\end{aligned}\quad (3.2.52)$$

Мы воспользовались тем, что (см. равенства (3.2.9) – (3.2.11))

$$\int_0^{l_1} f_1(t) \tilde{w}_{1t} dy = 0, \quad \int_{l_1}^{l_2} f_2(t) \tilde{w}_{2t} dy = 0, \quad \int_{l_2}^{l_3} f_3(t) \tilde{w}_{3t} dy = 0.$$

Поскольку $\forall \varepsilon_3 > 0, \varepsilon_4 > 0$

$$\rho_1 \int_0^{l_1} Q_1(y, t) \tilde{w}_{1t} dy \leq \frac{\rho_1}{2\varepsilon_3} \int_0^{l_1} Q_1^2(y, t) dy + \frac{\rho_1 \varepsilon_3}{2} \int_0^{l_1} \tilde{w}_{1t}^2 dy,$$

$$\rho_3 \int_{l_2}^{l_3} Q_3(y, t) \tilde{w}_{3\tau} dy \leq \frac{\rho_3}{2\varepsilon_4} \int_{l_2}^{l_3} Q_3^2(y, t) dy + \frac{\rho_3 \varepsilon_4}{2} \int_{l_2}^{l_3} \tilde{w}_{3t}^2 dy,$$

то выбирая $\varepsilon_3 < 2$, $\varepsilon_4 < 2$, из (3.2.52) выводим оценку

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mu_1 \int_0^{l_1} \tilde{w}_{1y}^2 dy + \frac{1}{2} \mu_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{w}_{2y}^2 dy + \frac{1}{2} \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{w}_{3y}^2 dy \leq \frac{1}{2} \mu_1 \int_0^{l_1} \tilde{w}_{10y}^2 dy + \\ & + \frac{1}{2} \mu_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{w}_{30y}^2 dy + \frac{1}{2} \left[\frac{\rho_1}{\varepsilon_3} \int_0^t \int_0^{l_1} Q_1^2(y, \tau) dy d\tau + \frac{\rho_3}{\varepsilon_4} \int_0^t \int_{l_2}^{l_3} Q_3^2(y, \tau) dy d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.2.53)$$

Учитывая определение функций $Q_1(y, t)$, $Q_2(y, t)$ из (3.2.50), начальных данных (3.2.51) и (3.2.53) получим ограниченность величин

$$\int_0^{l_1} \tilde{w}_{1y}^2 dy, \int_{l_1}^{l_2} \tilde{w}_{2y}^2 dy, \int_{l_2}^{l_3} \tilde{w}_{3y}^2 dy,$$

если сходятся интегралы

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} a_1^2(l_1, \tau) d\tau, \int_0^{\infty} a_{1\tau}^2(l_1, \tau) d\tau, \\ & \int_0^{\infty} a_2^2(l_2, \tau) d\tau, \int_0^{\infty} a_{2\tau}^2(l_2, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

Сходимость интегралов $\int_0^{\infty} a_1^2(l_1, \tau) d\tau$ и $\int_0^{\infty} a_2^2(l_2, \tau) d\tau$ следует из полученных ранее оценок (3.2.38), (3.2.40). Для того, чтобы показать ограниченность интегралов $\int_0^{\infty} a_{1\tau}^2(l_1, \tau) d\tau$, $\int_0^{\infty} a_{2\tau}^2(l_2, \tau) d\tau$ необходимо получить оценки для функций $a_{jt}(y, t)$. Для этого введём замену

$$\psi_j(y, t) = a_{jt}(y, t) \quad (3.2.55)$$

и задача (3.2.12) – (3.2.19) примет вид

$$\psi_{jt} = \chi_j \psi_{jyy}, \quad (3.2.56)$$

$$\psi_j(y, 0) = \chi_j a_{0jyy}(y) \equiv \psi_{0j}(y), \quad (3.2.57)$$

$$\psi_1(0, t) = a'_{10}(t) \equiv \psi_{10}(t), \quad (3.2.58)$$

$$\psi_3(l_3, t) = a'_{30}(t) \equiv \psi_{30}(t), \quad (3.2.59)$$

$$\psi_1(l_1, t) = \psi_2(l_1, t), \quad (3.2.60)$$

$$k_1\psi_{1y}(l_1, t) = k_2\psi_{2y}(l_1, t), \quad (3.2.61)$$

$$\psi_2(l_2, t) = \psi_3(l_2, t), \quad (3.2.62)$$

$$k_2\psi_{2y}(l_2, t) = k_3\psi_{3y}(l_2, t). \quad (3.2.63)$$

Задача (3.2.56) – (3.2.63) подобна задаче (3.2.12) – (3.2.19). Поэтому оценки для функций $\psi_j(y, t)$ получаются аналогично, как и для функций $a_j(y, t)$. Если дополнительно к сходимости интегралам (3.2.33) потребовать сходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{\delta\tau} |a''_{j0}(\tau)| d\tau, \quad j = 1, 3, \quad (3.2.64)$$

то с учётом замены (3.2.55) имеем (см. замечание 10)

$$\begin{aligned} |a_{1t}(y, t)| &\leq \left(\frac{8A_1(t)F_1(t)}{\rho_1 c_1 k_1} \right)^{1/4} + h_1^1(t) e^{-\delta t}, \\ |a_{3t}(y, t)| &\leq \left(\frac{8A_1(t)F_1(t)}{\rho_3 c_3 k_3} \right)^{1/4} + h_3^1(t) e^{-\delta t}, \end{aligned} \quad (3.2.65)$$

$$|a_{2t}(y, t)| \leq (8A_1(t)F_1(t))^{1/4} \left((\rho_2 c_2 k_2)^{-1/2} + (\rho_1 c_1 k_1)^{-1/2} \right)^{1/2}.$$

В (3.2.65) функция $A_1(t)$ оценивается сверху так

$$\begin{aligned} A_1(t) &\leq \left[\sqrt{A_1(0)} + \sqrt{\rho_1 c_1} \left(\frac{2\chi_1}{l_1^{3/2}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a'_{10}(\tau)| d\tau + \sqrt{\frac{l_1}{5}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a''_{10}(\tau)| d\tau \right) + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\rho_3 c_3} \left(\frac{2\chi_3}{(l_3 - l_2)^{3/2}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a'_{30}(\tau)| d\tau + \sqrt{\frac{l_3 - l_2}{5}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a''_{30}(\tau)| d\tau \right) \right]^2 e^{-2\delta t}, \end{aligned} \quad (3.2.66)$$

$$A_1(0) = \frac{1}{2} \rho_1 c_1 \int_0^{l_1} \tilde{\psi}_{01}^2(y) dy + \frac{1}{2} \rho_2 c_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{\psi}_{02}^2(y) dy + \frac{1}{2} \rho_3 c_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{\psi}_{03}^2(y) dy,$$

где $\tilde{\psi}_{10}(y)$, $\tilde{\psi}_{20}(y)$, $\tilde{\psi}_{30}(y)$ даются выражениями

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{01}(y) &= \chi_1 a_{01yy}(y) - \frac{a'_{01}(0)}{l_1^2} (y - l_1)^2, \\ \tilde{\psi}_{02}(y) &= \chi_2 a_{02yy}(y), \\ \tilde{\psi}_{03}(y) &= \chi_3 a_{03yy}(y) - \frac{a'_{03}(0)}{(l_3 - l_2)^2} (y - l_2)^2.\end{aligned}$$

Функция $F_1(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned}F_1(t) &= k_1 \int_0^{l_1} \tilde{\psi}_{01y}^2(y) dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{\psi}_{02y}^2(y) dy + k_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{\psi}_{03y}^2(y) dy + \\ &+ 2\rho_1 c_1 \left[\frac{4\chi_1^2}{l_1^3} \int_0^t (a'_{10}(\tau))^2 d\tau + \frac{1}{5} l_1 \int_0^t (a''_{10}(\tau))^2 d\tau \right] + \\ &+ 2\rho_3 c_3 \left[\frac{4\chi_3^2}{(l_3 - l_2)^2} \int_0^t (a'_{30}(\tau))^2 d\tau + \frac{1}{5} (l_3 - l_2)^2 \int_0^t (a''_{30}(\tau))^2 d\tau \right] \quad (3.2.67)\end{aligned}$$

и ограничена постоянной, так как из сходимости второго интеграла в (3.2.33) и интеграла (3.2.64), следует сходимость интегралов, входящих в функцию $F_1(t)$.

Согласно замене (3.2.49) и предположениям (3.2.54) ограничены $\forall t > 0$ интегралы

$$\int_0^{l_1} w_{1y}^2 dy, \int_{l_1}^{l_2} w_{2y}^2 dy, \int_{l_2}^{l_3} w_{3y}^2 dy.$$

Используя эти факты и неравенства (3.2.48) получим оценки

$$\begin{aligned}|w_1(y, t)| &\leq C_1(E(t))^{1/4}, \quad |w_2(y, t)| \leq C_2(E(t))^{1/4} \\ |w_3(y, t)| &\leq C_3(E(t))^{1/4},\end{aligned} \quad (3.2.68)$$

равномерные на своих областях определения, $C_j > 0$ — постоянные.

Теорема 9. *Решение задачи (3.2.1) – (3.2.11) при условии, что сходятся интегралы (3.2.33), (3.2.64) и при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулевому, причём справедливы оценки скорости сходимости (3.2.68), где $E(t)$ удовлетворяет неравенству (3.2.47).*

Теорема 8 с учётом замечания 10 показывает, что в этих условиях с ростом времени происходит торможение жидкостей за счёт трения о стенки.

Перейдём к получению оценок функций $f_j(t)$. Для этого умножим уравнения (3.2.1) на $y(l_1 - y)$ при $j = 1$, на $(y - l_1)(l_2 - y)$ при $j = 2$, на $(l_3 - y)(y - l_2)$ при $j = 3$ и проинтегрируем по своим областям определения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} l_1^3 f_1(t) &= \nu_1 \int_0^{l_1} (l_1 - 2y) w_{1y} dy + \int_0^{l_1} y(l_1 - y) w_{1t} dy, \\ \frac{1}{6} (l_2 - l_1)^3 f_2(t) &= \nu_2 \int_{l_1}^{l_2} (l_1 + l_2 - 2y) w_{2y} dy + \int_{l_1}^{l_2} (y - l_1)(l_2 - y) w_{2t} dy, \\ \frac{1}{6} (l_3 - l_2)^3 f_3(t) &= \nu_3 \int_{l_2}^{l_3} (l_2 + l_3 - 2y) w_{3y} dy + \int_{l_2}^{l_3} (y - l_2)(l_3 - y) w_{3t} dy. \end{aligned} \quad (3.2.69)$$

Для того, чтобы получить ограниченность $|f_j(t)|$ нужно оценить интегралы $\int_{\Omega_j} w_{jt}^2 dy$. Для этого введём замену

$$\begin{aligned} w_{jt}(y, t) &= \varphi(y, t), \\ f_{jt}(t) &= \tilde{f}_j(t). \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

Тогда уравнение (3.2.1) перепишется в виде

$$\varphi_{jt}(y, t) = \nu_j \varphi_{jyy}(y, t) + \tilde{f}_j(t).$$

Начальные и граничные условия (3.2.2) – (3.2.5), (3.2.7), (3.2.9) – (3.2.11) сохраняют свой вид. Изменяются условия (3.2.6), (3.2.8)

$$\mu_2 \varphi_{2y}(l_1, t) - \mu_1 \varphi_{1y}(l_1, t) = -2\alpha_1 a_{1t}(l_1, t), \quad (3.2.71)$$

$$\mu_3 \varphi_{3y}(l_2, t) - \mu_2 \varphi_{2y}(l_2, t) = -2\alpha_2 a_{2t}(l_2, t).$$

Получим на функции $\varphi(y, t)$ задачу аналогичную (3.2.1) – (3.2.11). Поэтому с учётом замены (3.2.70) и оценкам (3.2.65) имеем

$$\int_0^{l_1} w_{1t}^2 dy \leq \frac{2}{\rho_1} E_1(t), \quad \int_{l_1}^{l_2} w_{2t}^2 dy \leq \frac{2}{\rho_2} E_1(t), \quad \int_{l_2}^{l_3} w_{3t}^2 dy \leq \frac{2}{\rho_3} E_1(t). \quad (3.2.72)$$

В (3.2.72) функция $E_1(t)$ оценивается сверху так

$$\begin{aligned} E_1(t) &\leq e^{-4\delta_1 t} \int_0^t e^{4\delta_1 \tau} H_1(\tau) d\tau, \\ H_1(t) &\leq 4 \left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{\rho_1 c_1 k_1}} + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{\rho_3 c_3 k_3}} \right) \sqrt{F_1(t) A_1(t)}. \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

Из (3.2.66) функция $A_1(t) \sim e^{-2\delta t}$, а $F_1(t)$ определяется по формуле (3.2.67).

Следовательно, используя неравенства Коши – Буняковского и (3.2.49), (3.2.53), (3.2.72) из (3.2.69) легко получить ограниченность $|f_j(t)|, \forall t \geq 0$, если сходятся интегралы (3.2.33), (3.2.64). Более точные оценки можно получить, если использовать равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{l_1} w_{1y} dy &= w_1(l_1, t), \quad \int_{l_1}^{l_2} w_{2y} dy = w_2(l_2, t) - w_2(l_1, t), \quad \int_{l_2}^{l_3} w_{3y} dy = -w_3(l_2, t), \\ \int_0^{l_1} y w_{1y} dy &= l_1 w_1(l_1, t), \quad \int_{l_1}^{l_2} y w_{2y} dy = l_2 w_2(l_2, t) - l_1 w_2(l_1, t), \\ \int_{l_2}^{l_3} y w_{3y} dy &= -l_2 w_3(l_2, t). \end{aligned} \tag{3.2.74}$$

Первые три равенства (3.2.74) очевидны, а другие получаются интегрированием по частям интегральных условий (3.2.9) – (3.2.11).

С помощью (3.2.74) и условий (3.2.5), (3.2.7) первые слагаемые в правых частях равенств (3.2.69) принимают вид, последовательно,

$$-\nu_1 l_1 w_1(l_1, t); \quad -\nu_2 (l_2 - l_1) (w_1(l_1, t) + w_3(l_2, t)); \quad -\nu_3 (l_3 - l_2) w_3(l_2, t). \tag{3.2.75}$$

Используя (3.2.75), неравенство Коши – Буняковского и оценки (3.2.68), (3.2.72) получим

$$\begin{aligned} |f_1(t)| &\leq \left(\frac{12}{5l_1\rho_1} E_1(t) \right)^{1/2} + \frac{6\nu_1}{l_1^2} C_1 (E(t))^{1/4}, \\ |f_2(t)| &\leq \left(\frac{12}{5(l_2 - l_1)\rho_2} E_1(t) \right)^{1/2} + \frac{6\nu_2}{(l_2 - l_1)^2} (C_1 + C_3) (E(t))^{1/4}, \\ |f_3(t)| &\leq \left(\frac{12}{5(l_3 - l_2)\rho_3} E_1(t) \right)^{1/2} + \frac{6\nu_3}{(l_3 - l_2)^2} C_3 (E(t))^{1/4}. \end{aligned}$$

Следовательно, если сходятся интегралы (3.2.33), (3.2.64), то, с учётом

(3.2.47) и (3.2.73), имеют место оценки

$$\begin{aligned}
|f_1(t)| &\leq \left(\frac{12}{5l_1\rho_1} \int_0^t e^{4\delta_1\tau} H_1(\tau) d\tau \right)^{1/2} e^{-2\delta_1 t} - \frac{6\nu_1 C_1}{l_1^2} \left(\int_0^t e^{4\delta_1\tau} H(\tau) d\tau \right)^{1/4} e^{-\delta_1 t}, \\
|f_2(t)| &\leq \left(\frac{12}{5(l_2 - l_1)\rho_2} \int_0^t e^{4\delta_1\tau} H_1(\tau) d\tau \right)^{1/2} e^{-2\delta_1 t} - \frac{6\nu_2(C_1 + C_3)}{(l_2 - l_1)^2} \times \\
&\quad \times \left(\int_0^t e^{4\delta_1\tau} H(\tau) d\tau \right)^{1/4} e^{-\delta_1 t}, \\
|f_3(t)| &\leq \left(\frac{12}{5(l_3 - l_2)\rho_3} \int_0^t e^{4\delta_1\tau} H_1(\tau) d\tau \right)^{1/2} e^{-2\delta_1 t} - \frac{6\nu_3 C_3}{(l_3 - l_2)^2} \times \\
&\quad \times \left(\int_0^t e^{4\delta_1\tau} H(\tau) d\tau \right)^{1/4} e^{-\delta_1 t}.
\end{aligned} \tag{3.2.76}$$

В (3.2.76) функции $H(t)$, $H_1(t)$ оценены сверху в (3.2.46), (3.2.73).

3.3 Стационарное решение

Найдем стационарное решение задач (3.2.1) — (3.2.11) и (3.2.12) — (3.2.19) (начальные данные (3.2.2), (3.2.13) при этом не учитываются). Для такого решения $w_j = w_j^0(y)$, $a_j = a_j^0(y)$, $f_j = f_j^0 = const$, поэтому из уравнений (3.2.12), (3.2.1) получим

$$a_j^0 = d_j^1 y + d_j^2, \tag{3.3.1}$$

$$w_j^0 = -\frac{f_j^0}{2\nu_j} y^2 + C_j^1 y + C_j^2. \tag{3.3.2}$$

Постоянные d_j^1 , d_j^2 , C_j^1 , C_j^2 и f_j^0 определяются из граничных условий (3.2.3) — (3.2.11) и (3.2.14) — (3.2.19) и после простых преобразований из (3.3.1) получим представления для функций a_j^0 (a_{10}^0 , a_{30}^0 — постоянные значения

$a_1^0(0)$ и $a_3^0(l_3)$, всюду далее $a_{10}^0 \neq 0$)

$$\begin{aligned}
 a_1^0(y) &= a_{10}^0 \left[\frac{\bar{l}_1 \left(\frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} - 1 \right)}{g} \frac{y}{l_1} + 1 \right], \quad 0 < y < l_1, \\
 a_2^0(y) &= a_{10}^0 \left[\frac{\bar{l}_1 \left(\frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} - 1 \right)}{g} \left(\left(\frac{y}{l_1} - 1 \right) \bar{k}_1 + 1 \right) + 1 \right], \quad l_1 < y < l_2, \\
 a_3^0(y) &= a_{10}^0 \left[\frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{l}_1 \left(\frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} - 1 \right)}{g} \left(\frac{y}{l_1} - \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} \right) + \frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} \right], \quad l_2 < y < l_3
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

и из (3.3.2) для функций w_j^0

$$w_1^0(y) = \frac{l_1 \varkappa_2 a_2^0(l_2) \bar{l}_1 (\bar{l}_1 - 1)}{\mu_2 m_1} \left(\frac{2y}{l_1} - \frac{3y^2}{l_1^2} \right) \left[\frac{\varkappa_1 a_1^0(l_1)}{\varkappa_2 a_2^0(l_2)} - \frac{m_5}{m_4} (\bar{l}_1 - 1) \right], \quad 0 < y < l_1,$$

$$\begin{aligned}
 w_2^0(y) &= -\frac{l_1 \varkappa_2 a_2^0(l_2)}{\mu_2} \left[\frac{3\bar{l}_1 m_5}{m_4} \left(\frac{y}{l_1} - 1 \right)^2 + \frac{\bar{l}_1 (\bar{l}_1 - 1)}{m_1} (1 + 4\bar{\mu}_1 \left(\frac{y}{l_1} - 1 \right)) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{\varkappa_1 a_1^0(l_1)}{\varkappa_2 a_2^0(l_2)} - \frac{m_5 (\bar{l}_1 - 1)}{m_4} \right) + \frac{2\varkappa_1 a_1^0(l_1)}{\varkappa_2 a_2^0(l_2)} \left(\frac{y}{l_1} - 1 \right) \right], \quad l_1 < y < l_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_3^0(y) &= \frac{2\bar{\mu}_2 l_1 \varkappa_2 a_2^0(l_2)}{\mu_2} \left(\frac{y}{l_1} - \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1} \right) \left[-\frac{3m_6 \bar{l}_1}{4(\bar{l}_2 - 1)} \left(\frac{y}{l_1} + \frac{\bar{l}_2 - 2}{\bar{l}_1} \right) + \frac{m_2 m_5 (\bar{l}_1 - 1)}{m_1 m_4} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\varkappa_1 a_1^0(l_1) \bar{l}_1^2}{m_1 \varkappa_2 a_2^0(l_2)} - 1 \right], \quad l_2 < y < l_3,
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

$$f_1^0 = \frac{6\nu_1 \varkappa_2 a_2^0(l_2) (\bar{l}_1 - 1)}{l_2 \mu_2 m_1} \left(\frac{\varkappa_1 a_1^0(l_1)}{\varkappa_2 a_2^0(l_2)} - \frac{m_5}{m_4} (\bar{l}_1 - 1) \right),$$

$$f_2^0 = \frac{6\nu_2 \varkappa_2 a_2^0(l_2) m_5}{l_2 \mu_2 m_4}, \tag{3.3.5}$$

$$f_3^0 = \frac{3\nu_3 \varkappa_2 a_2^0(l_2)}{l_2 \mu_3 (\bar{l}_2 - 1)} m_6,$$

где $\bar{l}_1 = l_1/l_2$, $\bar{l}_2 = l_3/l_2$, $\bar{k}_1 = k_1/k_2$, $\bar{k}_2 = k_2/k_3$, $\bar{\mu}_1 = \mu_1/\mu_2$, $\bar{\mu}_2 = \mu_2/\mu_3$, а

ПОСТОЯННЫЕ $g, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ ВЫЧИСЛЯЮТСЯ ПО ФОРМУЛАМ

$$\begin{aligned}
g &= \bar{l}_1 + (1 - \bar{l}_1)\bar{k}_1 + (\bar{l}_2 - 1)\bar{k}_1\bar{k}_2, \quad m_1 = \bar{l}_1^2 - 2\bar{\mu}_1\bar{l}_1(\bar{l}_1 - 1), \\
m_2 &= 3\bar{l}_1^2 - 4\bar{\mu}_1\bar{l}_1(\bar{l}_1 - 1), \quad m_3 = \bar{l}_1^2 - \bar{\mu}_1\bar{l}_1(\bar{l}_1 - 1), \\
m_4 &= m_2\bar{\mu}_2(\bar{l}_2 - 1) - 4m_3(\bar{l}_1 - 1), \\
m_5 &= \frac{\bar{\mu}_2(\bar{l}_2 - 1)\left(\frac{\varkappa_1 a_1(l_1)\bar{l}_1^2}{\varkappa_2 a_2(l_2)} + m_1\right)}{\bar{l}_1 - 1} - \frac{2\varkappa_1 a_1(l_1)\bar{l}_1^2}{\varkappa_2 a_2(l_2)}, \\
m_6 &= \frac{m_2 m_5}{m_1 m_4}(\bar{l}_1 - 1) - \frac{\varkappa_1 a_1(l_1)\bar{l}_1^2}{m_1 \varkappa_2 a_2(l_2)} - 1.
\end{aligned}$$

Проведём обезразмеривание функций $a_j^0(y)$ на $\nu_1 \mu_2 / \varkappa_2 l_1^3$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_1^0(\xi) &= \frac{a_1^0(y)\varkappa_2 l_1^3}{\nu_1 \mu_2} = M \left[\frac{\bar{l}_1 \left(\frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} - 1\right)}{g} \xi + 1 \right], \quad 0 < \xi < 1, \\
\bar{a}_2^0(\xi) &= \frac{a_2^0(y)\varkappa_2 l_1^3}{\nu_1 \mu_2} = M \left[\frac{\bar{l}_1 \left(\frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} - 1\right)}{g} ((\xi - 1)\bar{k}_1 + 1) + 1 \right], \quad 1 < \xi < \frac{1}{\bar{l}_1}, \\
\bar{a}_3^0(\xi) &= \frac{a_3^0(y)\varkappa_2 l_1^3}{\nu_1 \mu_2} = M \left[\frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{l}_1 \left(\frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} - 1\right)}{g} \left(\xi - \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1}\right) + \frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} \right], \quad \frac{1}{\bar{l}_1} < \xi < \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1}
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

и функций $w_j^0(y)$ на ν_1 / l_1^2

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1^0(\xi) &= \frac{w_1^0 l_1^2}{\nu_1} = \bar{a}_2^0\left(\frac{1}{\bar{l}_1}\right) \frac{\bar{l}_1(\bar{l}_1 - 1)}{m_1} (2\xi - 3\xi^2) \left[\frac{\varkappa_1 a_1^0(l_1)}{\varkappa_2 a_2^0(l_2)} - \frac{m_5}{m_4}(\bar{l}_1 - 1) \right], \\
&\quad 0 < \xi < 1, \\
\bar{w}_2^0(\xi) &= \frac{w_2^0 l_1^2}{\nu_1} = -\bar{a}_2^0\left(\frac{1}{\bar{l}_1}\right) \left[\frac{3\bar{l}_1 m_5}{m_4} (\xi - 1)^2 + \frac{\bar{l}_1(\bar{l}_1 - 1)}{m_1} (1 + 4\bar{\mu}_1(\xi - \right. \\
&\quad \left. - 1)) \left(\frac{\varkappa_1 a_1^0(l_1)}{\varkappa_2 a_2^0(l_2)} - \frac{m_5(\bar{l}_1 - 1)}{m_4} \right) + \frac{2\varkappa_1 a_1^0(l_1)}{\varkappa_2 a_2^0(l_2)} (\xi - 1) \right], \quad 1 < \xi < \frac{1}{\bar{l}_1},
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

$$\bar{w}_3^0(\xi) = \frac{w_3^0 l_1^2}{\nu_1} = 2\bar{\mu}_2 \bar{a}_2^0 \left(\frac{1}{\bar{l}_1}\right) \left(\xi - \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1}\right) \left[-\frac{3m_6 \bar{l}_1}{4(\bar{l}_2 - 1)} \left(\xi + \frac{\bar{l}_2 - 2}{\bar{l}_1}\right) + \frac{m_2 m_5 (\bar{l}_1 - 1)}{m_1 m_4} - \frac{\varkappa_1 a_1^0(l_1) \bar{l}_1^2}{m_1 \varkappa_2 a_2^0(l_2)} - 1 \right], \quad \frac{1}{\bar{l}_1} < \xi < \frac{\bar{l}_2}{\bar{l}_1},$$

$\xi = y/l_1$, $M = \frac{a_{10}^0 \varkappa_2 l_1^3}{\nu_1 \mu_2}$ — число Марангони.

Из (3.3.3) и (3.3.6) вычислим значения $\frac{a_1^0(l_1)}{a_2^0(l_2)}$ и $\bar{a}_2^0\left(\frac{1}{\bar{l}_1}\right)$, входящих в (3.3):

$$\frac{a_1^0(l_1)}{a_2^0(l_2)} = \frac{\bar{l}_1 \left(\frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} - 1 \right) + g}{\left(\frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} - 1 \right) ((1 - \bar{l}_1) \bar{k}_1 + \bar{l}_1) + g},$$

$$\bar{a}_2^0\left(\frac{1}{\bar{l}_1}\right) = \frac{M}{g} \left[\left(\frac{a_{30}^0}{a_{10}^0} - 1 \right) ((1 - \bar{l}_1) \bar{k}_1 + \bar{l}_1) + g \right].$$

На рис. 10 изображены профили безразмерных функций $\bar{a}_j^0(\xi)$ (3.3.6) и $\bar{w}_j^0(\xi)$ (3.3) для случая, когда температура задана только на нижней стенке ($a_{10}^0 \neq 0, a_{30}^0 = 0$). На рис. 11 изображены профили безразмерных скоростей $\bar{v}_j^0(\xi)$. Представления для скоростей $\bar{v}_j^0(\xi)$ легко находятся, интегрируя (3.3).

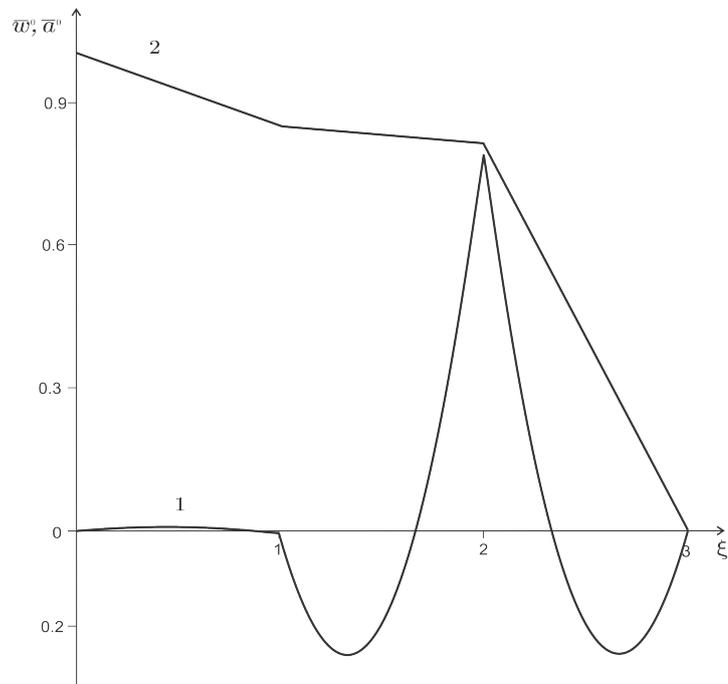


Рис. 10: Стационарные профили безразмерных функций $\bar{w}_j^0(\xi)$ (кривая 1) и $\bar{a}_j^0(\xi)$ (кривая 2)

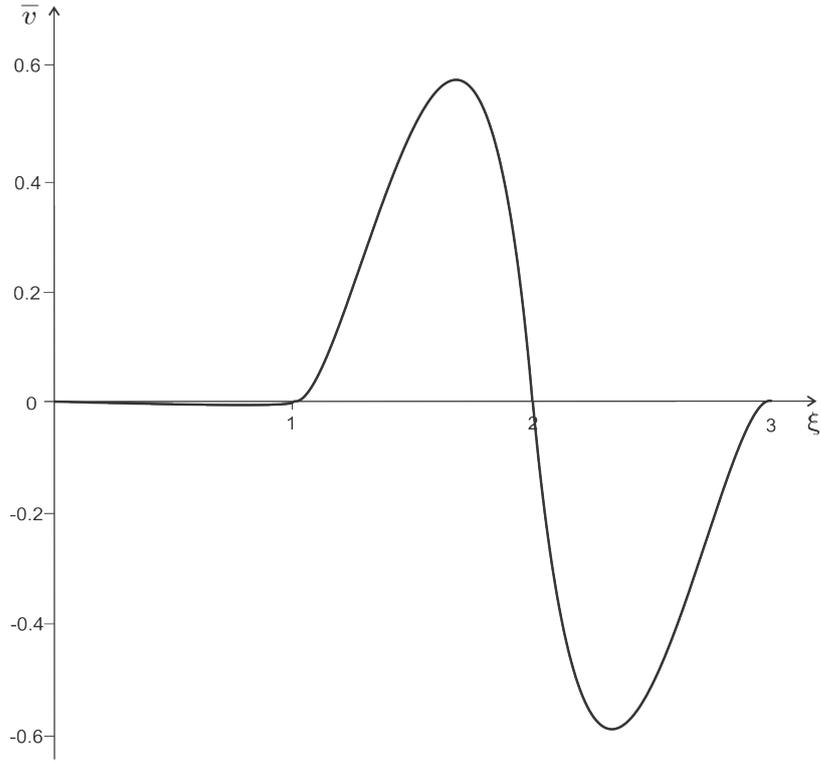


Рис. 11: Стационарные профили безразмерных скоростей $\bar{v}_j^0(\xi)$

Выход решения нестационарной задачи на стационарный режим при условии сходимости интегралов

$$\int_0^{\infty} e^{\delta\tau} |a_{k0}^0 - a_{k0}(\tau)| d\tau, \quad \int_0^{\infty} e^{\delta\tau} |a'_{k0}(\tau)| d\tau, \quad k = 1, 3, \quad (3.3.8)$$

можно показать, как в параграфе 2.3, вводя разности

$$\hat{a}_j(y, t) = a_j^0(y) - a_j(y, t), \quad (3.3.9)$$

где $a_j^0(y)$ — стационарное решение задачи (3.2.12) – (3.2.19). Тогда функции $\hat{a}_j(y, t)$ будут удовлетворять уравнению

$$\hat{a}_{jt} = \chi_j \hat{a}_{jyy}.$$

Причём граничные условия (3.2.16) – (3.2.19) останутся без изменений, а начальные данные и условия (3.2.14), (3.2.15) примут вид

$$\begin{aligned} \hat{a}_j(y, 0) &= a_j^0(y) - a_{0j}(y) \equiv \hat{a}_{0j}(y), \\ \hat{a}_1(0, t) &= a_{10} - a_{10}(t) \equiv \hat{a}_{10}(t), \\ \hat{a}_3(l_3, t) &= a_{30} - a_{30}(t) \equiv \hat{a}_{30}(t). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Следовательно, для функций $\hat{a}_j(y, t)$ приходим к аналогичной (3.2.12) – (3.2.19) задаче и, с учётом замены (3.3.9) и соотношений (3.3.10), получим

$$|a_1^0(y) - a_1(y, t)| \leq \left(\frac{8\tilde{A}(t)\tilde{F}(t)}{\rho_1 c_1 k_1} \right)^{1/4} + \tilde{h}_1(t)e^{-\delta t}, \quad (3.3.11)$$

$$|a_2^0(y) - a_2(y, t)| \leq (8\tilde{A}(t)\tilde{F}(t))^{1/4} \left((\rho_2 c_2 k_2)^{-1/2} + (\rho_1 c_1 k_1)^{-1/2} \right)^{1/2}, \quad (3.3.12)$$

$$|a_3^0(y) - a_3(y, t)| \leq \left(\frac{8\tilde{A}(t)\tilde{F}(t)}{\rho_3 c_3 k_3} \right)^{1/4} + \tilde{h}_3(t)e^{-\delta t}, \quad (3.3.13)$$

причём $\int_0^\infty |\tilde{h}_1(\tau)| d\tau < \infty$ и $\int_0^\infty |\tilde{h}_3(\tau)| d\tau < \infty$.

В (3.3.11) – (3.3.13) функции $\tilde{A}(t)$ оцениваются сверху так

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) \leq & \left[\sqrt{\tilde{A}(0)} + \sqrt{\rho_1 c_1} \left(\frac{2\chi_1}{l_1^{3/2}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a_{10}^0 - a_{10}(\tau)| d\tau + \sqrt{\frac{l_1}{5}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a'_{10}(\tau)| d\tau \right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\rho_3 c_3} \left(\frac{2\chi_3}{(l_3 - l_2)^{3/2}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a_{30}^0 - a_{30}(\tau)| d\tau + \sqrt{\frac{l_3 - l_2}{5}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a'_{30}(\tau)| d\tau \right) \right]^2 e^{-2\delta t}, \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

$$\tilde{A}(0) = \frac{1}{2} \rho_1 c_1 \int_0^{l_1} \tilde{a}_{01}^2(y) dy + \frac{1}{2} \rho_2 c_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_{02}^2(y) dy + \frac{1}{2} \rho_3 c_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_{03}^2(y) dy,$$

$$\tilde{a}_{01}(y) = \hat{a}_{01}(y) - \frac{\hat{a}_{01}(0)}{l_1^2} (y - l_1)^2, \quad \tilde{a}_{02}(y) = \hat{a}_{02}(y) = a_2^0(y) - a_{02}(y),$$

$$\tilde{a}_{03}(y) = \hat{a}_{03}(y) - \frac{\hat{a}_{03}(0)}{(l_3 - l_2)^2} (y - l_2)^2,$$

а функция $\tilde{F}(t)$ задаётся формулой

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t) = & k_1 \int_0^{l_1} \tilde{a}_{01y}^2(y) dy + k_2 \int_{l_1}^{l_2} \tilde{a}_{02y}^2(y) dy + k_3 \int_{l_2}^{l_3} \tilde{a}_{03y}^2(y) dy + \\ & + 2\rho_1 c_1 \left[\frac{4\chi_1^2}{l_1^3} \int_0^t (a_{10}^0 - a_{10}(\tau))^2 d\tau + \frac{1}{5} l_1 \int_0^t (a'_{10}(\tau))^2 d\tau \right] + \\ & + 2\rho_3 c_3 \left[\frac{4\chi_3^2}{(l_3 - l_2)^3} \int_0^t (a_{30}^0 - a_{30}(\tau))^2 d\tau + \frac{1}{5} (l_3 - l_2) \int_0^t (a'_{30}(\tau))^2 d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Из сходимости интегралов (3.3.8) следует сходимость при $t \rightarrow \infty$ и интегралов, входящих в выражение для функции $\tilde{F}(t)$. Следовательно, справедлива

Теорема 10. *Решение задачи (3.2.12) – (3.2.19) при $t \rightarrow \infty$ выходит на стационарный режим (3.3.3), если сходятся интегралы (3.3.8), причём справедливы оценки скорости сходимости (3.3.11) – (3.3.13).*

Аналогично, как и для функций $a_j(y, t)$, можно показать, что, если дополнительно к сходимости интегралов (3.3.8) положить, что сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{\delta\tau} |a''_{k0}(\tau)| d\tau, \quad k = 1, 3, \quad (3.3.16)$$

то решение задачи (3.2.1) – (3.2.11) выходит на стационарный режим (3.3.4). Для этого также введём разности

$$\begin{aligned} \hat{w}_j(y, t) &= w_j^0(y) - w_j(y, t), \\ g(t) &= f_j^0 - f(t), \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

где $w_j^0(y)$ – стационарное решение задачи (3.2.1) – (3.2.11). Тогда функции $\hat{w}_j(y, t)$ будут удовлетворять уравнению

$$\hat{w}_{jt} = \nu_j \hat{w}_{jyy} - g_j(t).$$

Причём граничные условия (3.2.3) – (3.2.11) останутся без изменений, а начальные данные примут вид

$$\hat{w}_j(y, 0) = w_j^0(y).$$

Так как теперь начальные данные ненулевые, то $E(0) \neq 0$ и равна

$$\tilde{E}(0) = \frac{1}{2} \rho_1 \int_0^{l_1} (w_1^0(y))^2 dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_{l_1}^{l_2} (w_2^0(y))^2 dy + \frac{1}{2} \rho_3 \int_{l_2}^{l_3} (w_3^0(y))^2 dy.$$

Тогда из (3.2.47) получим оценку

$$\tilde{E}(t) \leq \left(\tilde{E}(0) + \int_0^t e^{4\delta_1\tau} \tilde{H}(\tau) d\tau \right) e^{-4\delta_1 t}, \quad (3.3.18)$$

где $\tilde{H}(t)$ оценивается сверху так

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t) \leq & 4 \left(\frac{\varkappa_1}{\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{\rho_1 c_1 k_1}} + \frac{\varkappa_2}{\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{\rho_3 c_3 k_3}} \right) \sqrt{\tilde{F}(t)} \left[\sqrt{\tilde{A}(0)} + \sqrt{\rho_1 c_1} \times \right. \\ & \times \left(\frac{2\chi_1}{l_1^{3/2}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a_{10}^0 - a_{10}(\tau)| d\tau + \sqrt{\frac{l_1}{5}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a'_{10}(\tau)| d\tau \right) + \\ & \left. + \sqrt{\rho_3 c_3} \left(\frac{2\chi_3}{(l_3 - l_2)^{3/2}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a_{30}^0 - a_{30}(\tau)| d\tau + \sqrt{\frac{l_3 - l_2}{5}} \int_0^t e^{\delta\tau} |a'_{30}(\tau)| d\tau \right) \right] e^{-\delta t}, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

а функции $\tilde{F}(t)$, $\tilde{A}(0)$ определяются по формулам (3.3.14), (3.3.15). Оценки для \tilde{w}_{jy} находятся также, как и ранее для w_{jy} . Поэтому, используя неравенство (3.3.18), получим оценки

$$\begin{aligned} |w_1^0(y) - w_1(y, t)| \leq \tilde{C}_1(\tilde{E}(t))^{1/4}, \quad |w_2^0(y) - w_2(y, t)| \leq \tilde{C}_2(\tilde{E}(t))^{1/4} \\ |w_3^0(y) - w_3(y, t)| \leq \tilde{C}_3(\tilde{E}(t))^{1/4}, \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

равномерные на своих областях определения, $\tilde{C}_j > 0$ — постоянные.

Теорема 11. *Решение задачи (3.2.1) – (3.2.11) при условии, что сходятся интегралы (3.3.8), (3.3.16) и $t \rightarrow \infty$ выходит на стационарный режим, причём справедливы оценки скорости сходимости (3.3.20).*

Нетрудно также показать, что функция $f_j(t)$ выходит на стационарный режим f_j^0 (3.3.5) при условии, что сходятся интегралы (3.3.8), (3.3.16), причём, с учётом (3.3.20), будут иметь место оценки

$$\begin{aligned} |f_1^0 - f_1(t)| \leq & \left(\frac{12}{5l_1\rho_1} \int_0^t e^{4\delta_1\tau} H_1(\tau) d\tau \right)^{1/2} e^{-2\delta_1 t} - \frac{6\nu_1\tilde{C}_1}{l_1^2} \times \\ & \times \left(\int_0^t e^{4\delta_1\tau} \tilde{H}(\tau) d\tau \right)^{1/4} e^{-\delta_1 t}, \end{aligned}$$

$$|f_2^0 - f_2(t)| \leq \left(\frac{12}{5(l_2 - l_1)\rho_2} \int_0^t e^{4\delta_1\tau} H_1(\tau) d\tau \right)^{1/2} e^{-2\delta_1 t} - \frac{6\nu_2(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_3)}{(l_2 - l_1)^2} \times \\ \times \left(\int_0^t e^{4\delta_1\tau} \tilde{H}(\tau) d\tau \right)^{1/4} e^{-\delta_1 t}, \quad (3.3.21)$$

$$|f_3^0 - f_3(t)| \leq \left(\frac{12}{5(l_3 - l_2)\rho_3} \int_0^t e^{4\delta_1\tau} H_1(\tau) d\tau \right)^{1/2} e^{-2\delta_1 t} - \frac{6\nu_3\tilde{C}_3}{(l_3 - l_2)^2} \times \\ \times \left(\int_0^t e^{4\delta_1\tau} \tilde{H}(\tau) d\tau \right)^{1/4} e^{-\delta_1 t}.$$

Заметим, что вместо (3.3.8), (3.3.18) достаточно потребовать, чтобы

$$|a_{k0}^0 - a_{k0}(t)| \leq \frac{\alpha}{(t + \gamma)^n},$$

$n > 1, \alpha > 0, \gamma > 0$ – постоянные, $k = 1, 3$.

3.4 Свойства нестационарного решения

В силу полученных оценок (3.2.38) – (3.2.40), (3.2.68) и (3.2.76) применим преобразование Лапласа к задачам (3.2.12) – (3.2.19) (считаем, что начальные данные (3.2.13) нулевые) и (3.2.1) – (3.2.11) для получения более точной информации о поведении $w_j(y, t)$. В результате приходим к краевой задаче для изображений $A_j(y, p)$ функций $a_j(y, t)$

$$\frac{pA_j(y, p)}{\chi_j} - A_{jyy}(y, p) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.4.1)$$

$$A_1(0, p) = A_{10}(p), \quad A_3(l_3, p) = A_{30}(p), \quad (3.4.2)$$

$$A_1(l_1, p) = A_2(l_1, p), \quad A_2(l_2, p) = A_3(l_2, p), \quad (3.4.3)$$

$$k_1 A_{1y}(l_1, p) = k_2 A_{2y}(l_1, p), \quad k_2 A_{2y}(l_2, p) = k_3 A_{3y}(l_2, p), \quad (3.4.4)$$

и изображений $W(y, p)$ функций $w(y, t)$

$$\frac{pW_j(y, p)}{\nu_j} - W_{jyy}(y, p) = \frac{F_j(p)}{\nu_j}, \quad (3.4.5)$$

$$W_1(0, p) = 0, \quad W_3(l_3, p) = 0, \quad (3.4.6)$$

$$W_1(l_1, p) = W_2(l_1, p), \quad W_2(l_2, p) = W_3(l_2, p), \quad (3.4.7)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 W_{2y}(l_1, p) - \mu_1 W_{1y}(l_1, p) &= -2\alpha_1 A_1(l_1, p), \\ \mu_3 W_{3y}(l_2, p) - \mu_2 W_{2y}(l_2, p) &= -2\alpha_2 A_2(l_2, p), \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

$$\int_0^{l_1} W_1(y, p) dy = 0, \quad \int_{l_1}^{l_2} W_2(y, p) dy = 0, \quad \int_{l_2}^{l_3} W_3(y, p) dy = 0. \quad (3.4.9)$$

В условии (3.4.2) $A_{10}(p), A_{30}(p)$ — изображения функций $a_{10}(t), a_{30}(t)$.

Решение задачи (3.4.1) — (3.4.4) может быть представлено в виде

$$A_j(y, p) = d_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} y + d_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} y, \quad (3.4.10)$$

а решение задачи (3.4.5) — (3.4.9) записывается так

$$W_j(y, p) = C_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}} y + C_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_j}} y + \frac{F_j(p)}{p}, \quad (3.4.11)$$

где $F_j(p)$ — изображение функций $f_j(t)$. При получении уравнений (3.4.1) и (3.4.5) были использованы начальные данные (3.2.2) и (3.2.13) ($a_{j0}(y) = 0$). Из граничных условий (3.4.2) — (3.4.4)

$$d_1^1 = \frac{A_{10}(p)}{b_8} \left(b_6 + \frac{A_{30}(p)}{A_{10}(p)} b_7 \right), \quad d_1^2 = A_{10}(p), \quad d_2^1 = d_1^1 b_1 + A_{10}(p) b_2,$$

$$d_2^2 = d_1^1 \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} + A_{10}(p) \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} - d_2^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1, \quad (3.4.12)$$

$$d_3^1 = \frac{1}{b_5} \left(d_1^1 b_3 + A_{10}(p) b_4 - \frac{A_{30} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} \right), \quad d_3^2 = \frac{A_{30}(p)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} - d_3^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3.$$

В (3.4.12) введены обозначения

$$\begin{aligned} b_1 &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \left(\frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\chi_1}} - \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 \right), \\ b_2 &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \left(\frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\chi_1}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 - \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3 &= \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{\chi}_2}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \left(b_1 + \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} - b_1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \right), \\
b_4 &= \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\bar{\chi}_2}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \left(b_2 + \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} - b_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \right), \\
b_5 &= \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3, \\
b_6 &= \frac{b_4}{b_5} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3 \right) - b_2 \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 - \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 \right) - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1}, \\
b_7 &= \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2}{b_5 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3 \right), \\
b_8 &= b_1 \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 \right) + \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} - \\
&\quad - \frac{b_3}{b_5} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3 \right),
\end{aligned}$$

$$\bar{\chi}_1 = \chi_1/\chi_2, \bar{\chi}_2 = \chi_2/\chi_3.$$

После подстановки решения (3.4.11) в граничные условия (3.4.6) — (3.4.9) находим постоянные C_j^1, C_j^2

$$\begin{aligned}
C_1^1 &= \frac{F_1 \left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 - \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right)}{p \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 - 1 \right)}, \quad C_1^2 = -\frac{F_1}{p}, \\
C_2^1 &= \frac{F_1}{p} q - C_2^2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 - \frac{2\alpha_1 A_1(l_1, p) \sqrt{\nu_2}}{\mu_2 \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1},
\end{aligned}$$

$$C_2^2 = \frac{F_1}{p}q - \frac{F_2}{p} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 + \frac{2\alpha_2 A_1(l_1, p) \sqrt{\nu_2}}{\mu_2 \sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1, \quad (3.4.13)$$

$$C_3^1 = \frac{F_1}{p}q_5 - \frac{F_2}{p}q_6 + \frac{2\alpha_2 A_2(l_2, p) \sqrt{\nu_3} q_7}{\mu_3 \sqrt{p}} + \frac{F_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2}{p \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_1)},$$

$$C_3^2 = -C_3^1 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3 - \frac{F_3}{p \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3},$$

а функции $F_j(p)$ имеют вид

$$F_1 = F_2 q_3 + \frac{2\alpha_1 A_1(l_1, p) \sqrt{\nu_2 p} q_4}{\mu_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1}, \quad F_2 = \frac{2\alpha_2 A_2(l_2, p) \sqrt{\nu_2 p} q_{11}}{\mu_2}, \quad (3.4.14)$$

$$F_3 = F_2 q_8 + \frac{2\alpha_2 A_2(l_2, p) \sqrt{\nu_2 p} q_9}{\mu_2}.$$

В (3.4.13), (3.4.14) введены следующие обозначения

$$q = \frac{\bar{\mu}_1}{\sqrt{\nu_1} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1} \left(\frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 - \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 - 1} \right),$$

$$q_1 = \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \left(2 - \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 - 1} - q \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \right),$$

$$q_2 = q (\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1) + \frac{q_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1},$$

$$q_3 = \frac{1}{q_2} (\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1) - \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1)),$$

$$q_4 = \frac{1}{q_2} (-\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1) + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1),$$

$$q_5 = \frac{\bar{\mu}_2 \sqrt{\nu_2} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2} \left(q \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 + \frac{q_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1} \right),$$

$$q_6 = \frac{\bar{\mu}_2 \sqrt{\bar{\nu}_2} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_1)},$$

$$q_7 = - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_1)} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 + \frac{\mathfrak{a}_1 A_1(l_1, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2}{\mathfrak{a}_2 A_2(l_2, p)} - \frac{\mathfrak{a}_1 A_1(l_1, p) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1)}{\mathfrak{a}_2 A_2(l_2, p)} \right),$$

$$q_{z1} = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2 + \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_1) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2 (1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_1))}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_1)},$$

$$q_8 = \frac{1}{q_{z1}} (1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_1)) (q_5 q_3 - q_6),$$

$$q_9 = \frac{1}{q_{z1}} (1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_1)) \left(\sqrt{\bar{\nu}_2} \bar{\mu}_2 q_7 + \frac{\mathfrak{a}_1 A_1(l_1, p) q_4 q_5}{\mathfrak{a}_2 A_2(l_2, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1} \right),$$

$$q_{10} = \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3 - \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_3) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_2,$$

$$q_{z2} = \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3} \left(q_3 q_5 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_3) - q_8 q_{10} - q_6 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_3) \right) - 1 + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1) - q_3 \left(q \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 + \frac{q_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1} \right),$$

$$q_{11} = \frac{1}{q_{z2}} \left(\frac{\varkappa_1 A_1(l_1, p)}{\varkappa_2 A_2(l_2, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1} \left(-\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + q_4 \left(q \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 + \frac{q_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - l_1)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_1} \right) \right) - \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3} \left(\sqrt{\bar{\nu}_2} \bar{\mu}_2 q_7 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_3) - \right. \right. \\ \left. \left. - q_9 q_{10} + \frac{\varkappa_1 A_1(l_1, p) q_4 q_5 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} (l_2 - l_3)}{\varkappa_2 A_2(l_2, p) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_3}} l_3} \right) \right),$$

$$\bar{\nu}_1 = \nu_1/\nu_2, \bar{\nu}_2 = \nu_3/\nu_2.$$

Точно так же, как и в Главе 2, доказываются с помощью формул (3.4.10) – (3.4.14) предельные равенства

$$\begin{aligned} \lim pA_j(y, p) &= a_j^0(y), \quad \lim pW_j(y, p) = w_j^0(y) \\ \lim pF_j(p) &= f_j^0 \quad \text{при } p \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $a_j^0(y)$, $w_j^0(y)$, f_j^0 определяются формулами (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5), соответственно.

Замечание 11. Полученное выше решение для функций $a_j(y, t)$ в изображениях было найдено для случая, когда начальные данные нулевые ($a_{0j}(y) = 0$). Так как задача (3.2.12) – (3.2.19) линейная, то можно решить задачу, когда условия (3.2.14), (3.2.15) являются однородными, начальные условия ненулевые, а граничные условия (3.2.17) – (3.2.19) остаются прежними. После применения преобразования Лапласа к данной задаче уравнение (3.2.12) и условия (3.2.14), (3.2.15) будут иметь вид

$$\frac{pA_j(y, p)}{\chi_j} - A_{jyy}(y, p) - \frac{a_j^0(y)}{\chi_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3.4.15)$$

$$A_1(0, p) = 0, \quad A_3(l_3, p) = 0. \quad (3.4.16)$$

А условия (3.2.16) – (3.2.19) преобразуются в (3.4.3), (3.4.4). Решение задачи (3.4.15), (3.4.16), (3.2.16) – (3.2.19) может быть представлено в виде

$$A_j(y, p) = c_j^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} y + c_j^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} y + A_{jr}(y, p), \quad (3.4.17)$$

$$A_{jr}(y, p) = \frac{1}{\chi_j} \int_{\Omega_j} a_j^0(z) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_j}} (z - y) dz. \quad (3.4.18)$$

Постоянные c_j^1, c_j^2 определяются из граничных условия (3.4.16), (3.2.16) – (3.2.19)

$$\begin{aligned}
c_1^2 &= 0, \quad c_2^1 = \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\chi_1}} \frac{\text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1}{\text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} c_1^1 - \frac{\bar{k}_1 \sqrt{\chi_2} A_{1ry}(l_1, p)}{\sqrt{p} \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} - c_2^2 \text{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1, \\
c_2^2 &= c_1^1 m_1 + A_{1r}(l_1, p) \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 + \frac{\bar{k}_1 \sqrt{\chi_2}}{\sqrt{p}} \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 A_{1ry}(l_1, p), \\
c_3^1 &= c_1^1 m_3 + A_{1ry}(l_1, p) m_4 - \frac{\bar{k}_2 \sqrt{\chi_3}}{\sqrt{p}} A_{2ry}(l_2, p) + \frac{\bar{k}_2}{\sqrt{\chi_2}} \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - l_1) + \\
&\quad + \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2}{\text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} A_{3r}(l_3, p), \quad c_3^2 = -c_3^1 \text{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3 - \frac{A_{3r}(l_3, p)}{\text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3}, \\
c_1^1 &= \frac{1}{m_8} \left(m_5 A_{1ry}(l_1, p) + m_6 A_{1r}(l_1, p) - A_{1r}(l_2, p) + m_7 A_{3r}(l_3, p) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\bar{k}_2 \sqrt{\chi_3}}{\sqrt{p}} \frac{\text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} (l_2 - l_3)}{\text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} A_{2ry}(l_2, p) \right)
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

В (3.4.19) введены следующие вспомогательные обозначения

$$\begin{aligned}
m_1 &= \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 - \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\chi_1}} \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1, \\
m_2 &= \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 - \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2 \text{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3, \\
m_3 &= \frac{\bar{k}_2}{m_2 \sqrt{\chi_2} \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} \left(m_1 \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - l_1) + \frac{\bar{k}_1}{\sqrt{\chi_1}} \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \right), \\
m_4 &= \frac{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \sqrt{\chi_3}}{m_2 \sqrt{p} \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} \left(\text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - l_1) - \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \right), \\
m_5 &= \frac{m_4 \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} (l_2 - l_3)}{\text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} - \frac{\bar{k}_1 \sqrt{\chi_2}}{\sqrt{p} \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} \left(\text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1 \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - l_1) - \right. \\
&\quad \left. - \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 \right), \quad m_6 = \frac{\bar{k}_2 \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - l_1) \text{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} (l_2 - l_3)}{\sqrt{\chi_2} \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} - \text{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - l_1),
\end{aligned}$$

$$m_7 = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} \left(\frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} (l_2 - l_3) \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_2}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3} - 1 \right),$$

$$m_8 = \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_1} \left(\frac{k_1}{\sqrt{\chi_1}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_1}} l_1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} l_2 + m_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - l_1) \right) - \frac{m_3 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\chi_2}} (l_2 - l_3)}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\chi_3}} l_3}.$$

Для получения решения задачи (3.2.12) – (3.2.19) в изображениях по Лапласу достаточно сложить решения (3.4.10), (3.4.12) и (3.4.17) – (3.4.19).

На рис. 12, 13, 14, 15 изображена эволюция безразмерных функций $\bar{a}_j(\xi, \tau)$, $\bar{w}_j(\xi, \tau)$, $\bar{f}_2(\tau)$ и скоростей $\bar{v}_j(\xi, \tau)$ к стационарному режиму, $\xi = y/l_1$, $\tau = \nu_1 t/l_1^2$ – безразмерное время. Представления для скоростей $\bar{v}_j(\xi, \tau)$ легко находятся, интегрируя $\bar{w}_j(\xi, \tau)$. Все вычисления произведены для системы силикон – вода – воздух, когда температура задана только на нижней стенке ($\bar{a}_{10} \neq 0, \bar{a}_{30} = 0$). На рис. 12 – 15 рассмотрен случай, когда $\bar{a}_{10}(\tau) = 1 - 5e^{-\tau} \sin \tau$, а на рис. 16 $\bar{a}_{10}(\tau) = 2 \sin \tau$, то есть $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{a}_{10}(\tau)$ не существует и решение не сходится к стационарному. В первом случае, как и следовало ожидать, решение с ростом времени выходит на стационарный режим.

Отметим, что в силу полученных априорных оценок (см. п. 3.2), решения задач (3.2.1) – (3.2.11), (3.2.12) – (3.2.19) являются классическими, $w_j(y, t)$, $a_j(y, t) \in C^2(\Omega_j) \cap C^1(0, T]$, $\Omega_1 = [0, l_1]$, $\Omega_2 = [l_1, l_2]$, $\Omega_3 = [l_2, l_3]$. Нетрудно также показать непрерывность следующих производных w_{jy} , w_{jyy} , a_{jy} и a_{jyy} . В силу полученных оценок для w_{jt} , f_j и a_{jt} оценки для w_{jyy} и a_{jyy} найдем из уравнений (3.2.1), (3.2.12). В силу полученных оценок для w_{jyy} имеем

$$|w_{jy}(y_1, t) - w_{jy}(y_2, t)| = \left| \int_{y_1}^{y_2} w_{jyy} dy \right| \leq |y_1 - y_2| \max_{y \in \Omega_j, t \in (0, T]} |w_{jyy}|.$$

для любых $y_1, y_2 \in \Omega_j$. Следовательно, функции $w_{jy}(y, t)$ непрерывны на своих областях определения и граничные условия для касательных напряжений (3.2.6), (3.2.8) выполнены в смысле непрерывных функций. Оценки для a_{jy} получаются аналогично.

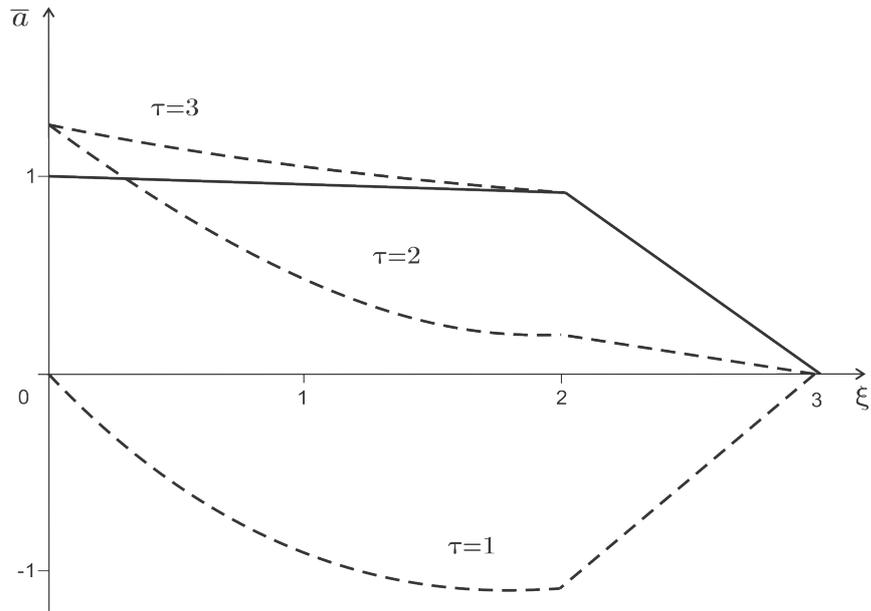


Рис. 12: Профили безразмерных функций $\bar{a}_j(\xi, \tau)$, стационарное течение(—), $\bar{a}_{10}(\tau) = 1 - 5e^{-\tau} \sin \tau, \bar{a}_{30}(\tau) = 0$

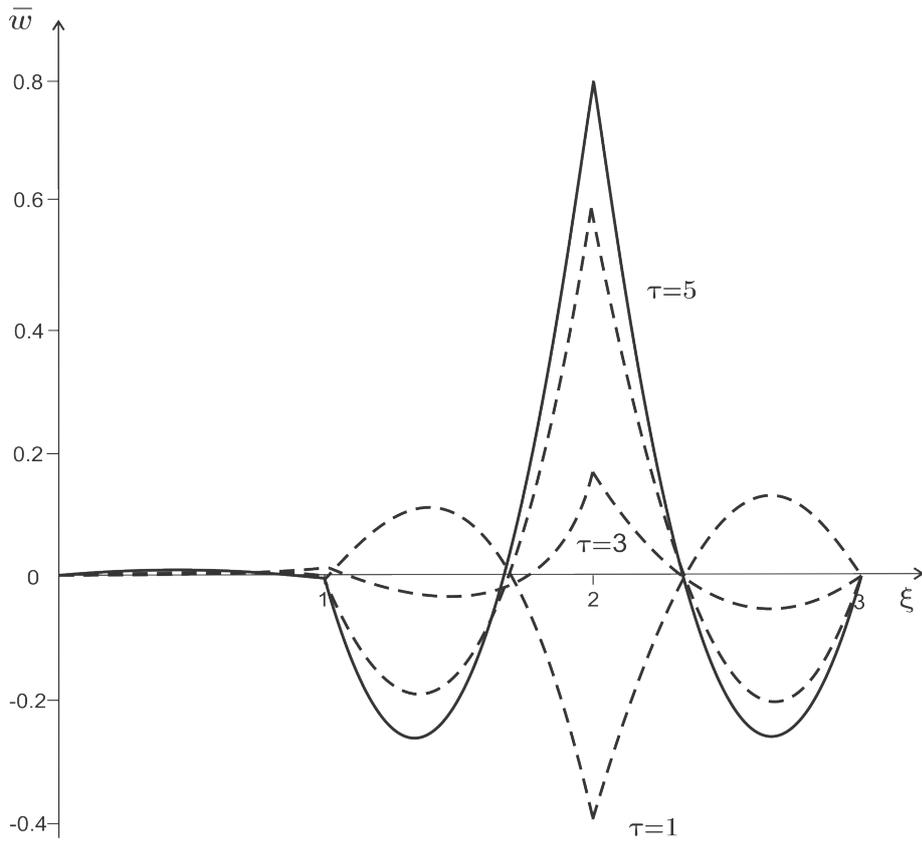


Рис. 13: Профили безразмерных функций $\bar{w}_j(\xi, \tau)$, стационарное течение(—), $\bar{a}_{10}(\tau) = 1 - 5e^{-\tau} \sin \tau, \bar{a}_{30}(\tau) = 0$

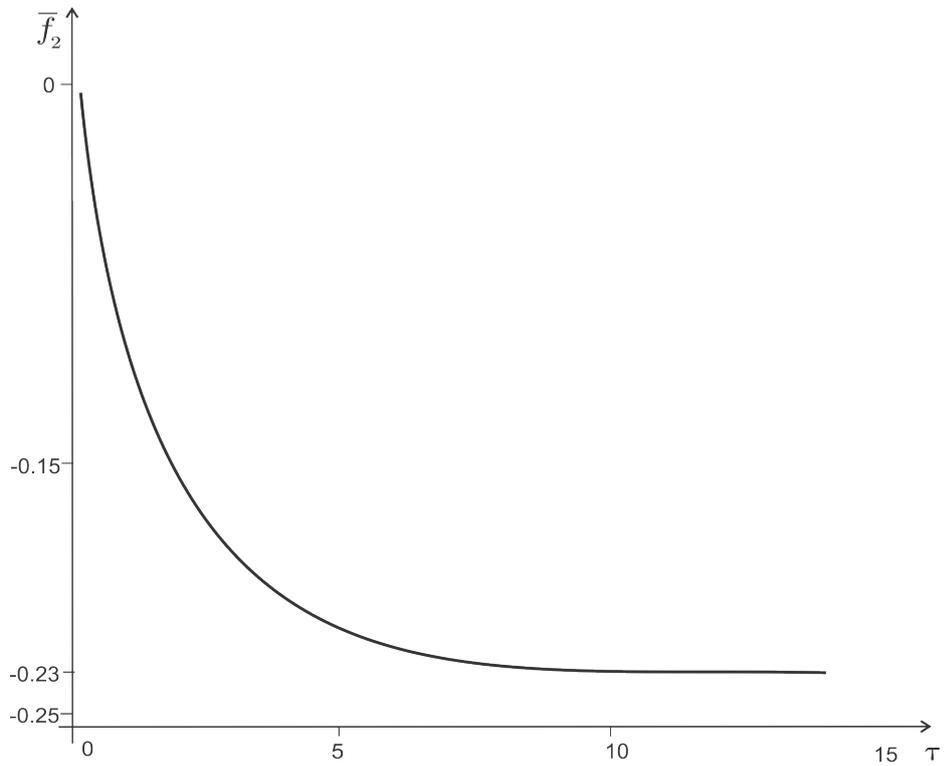


Рис. 14: Профиль безразмерной функции $\bar{f}_2(\tau)$, стационарное течение(—), $\bar{a}_{10}(\tau) = 1 - 5e^{-\tau} \sin \tau$, $\bar{a}_{30}(\tau) = 0$

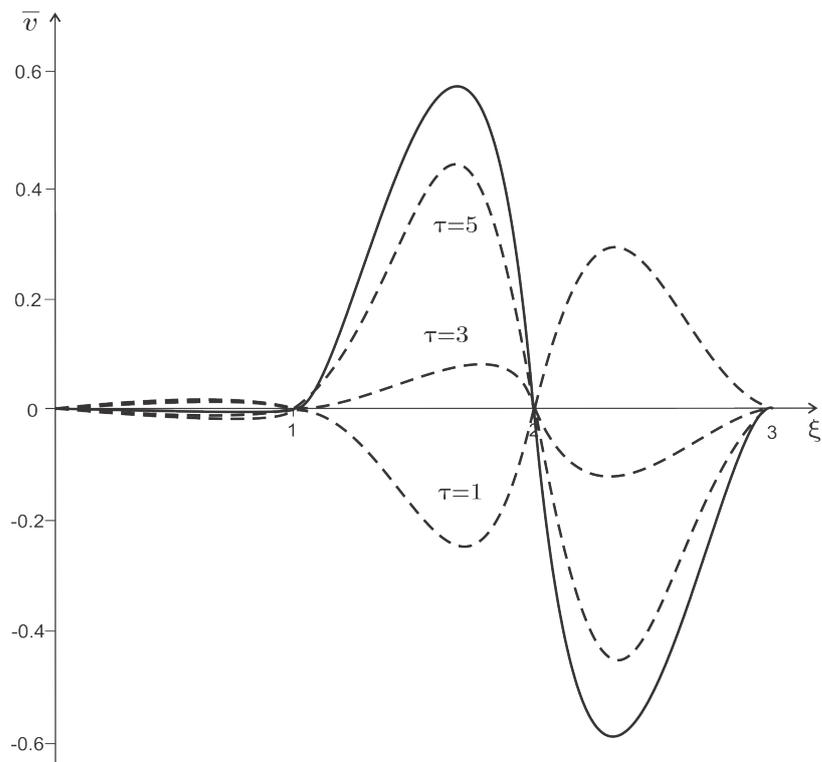


Рис. 15: Профиль безразмерных скоростей $\bar{v}_j(\xi, \tau)$, стационарное течение(—), $\bar{a}_{10}(\tau) = 1 - 5e^{-\tau} \sin \tau$, $\bar{a}_{30}(\tau) = 0$

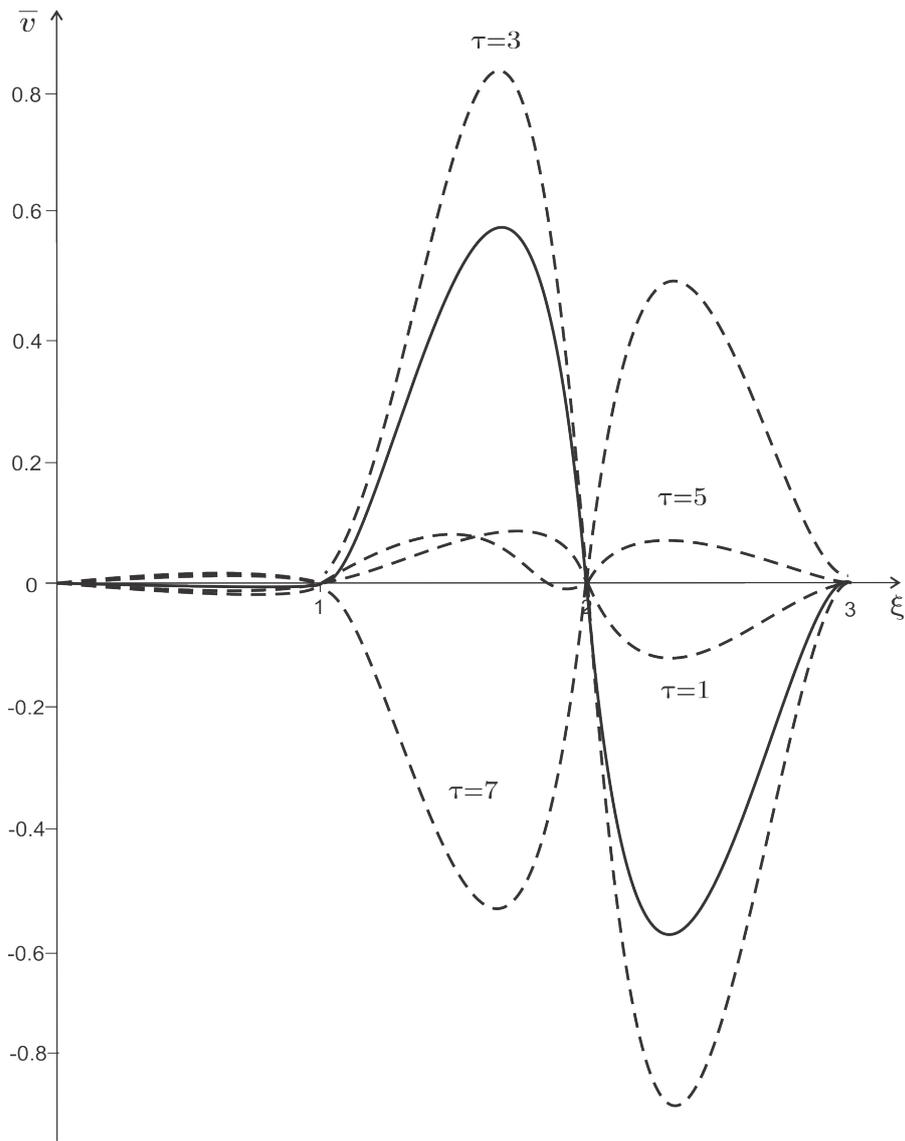


Рис. 16: Профиль безразмерных скоростей $\bar{v}_j(\xi, \tau)$, $\bar{a}_{10}(\tau) = 2 \sin \tau$, $\bar{a}_{30}(\tau) = 0$

Заключение

В заключении сформулируем основные результаты диссертационной работы:

1. Доказано неравенство Фридрихса на случай области, состоящей из трёх конечных отрезков, и определена, с помощью вариационного принципа, наименьшая постоянная в правой части этого неравенства;

2. Изучена начально – краевая задача, возникающая при совместном однонаправленном движении трех вязких жидкостей под действием термокапиллярных сил и перепада давления:

– найдено точное стационарное решение задачи;

– доказано, что если градиент давления в одной из жидкостей имеет конечный предел, то решение всегда выходит на стационарный режим с ростом времени и получена экспоненциальная оценка скорости сходимости с показателем, зависящим от физических свойств сред и толщин слоев;

– решение нестационарной задачи найдено в виде конечных аналитических формул в изображениях по Лапласу и изучены его свойства;

– путем численного обращения преобразования Лапласа построена эволюция полей скоростей и возмущений температур к стационарному режиму;

3. Впервые исследована начально – краевая задача, возникающая при двумерном движении трех несмешивающихся жидкостей в плоском канале, ограниченном твердыми неподвижными стенками, на которых известно распределение температур:

– дан вывод априорных оценок;

– найдено точное стационарное решение и доказано, что с ростом времени решение выходит на этот стационарный режим, если стабилизируются температуры на стенках;

– в изображениях по Лапласу решение нестационарной задачи находится в явном виде. Численное обращение преобразования Лапласа хорошо подтверждает стремление при $t \rightarrow \infty$ решения к стационарному.

Список литературы

- [1] Авдудевский В. С., Бармин И. В., Гришин С. Д. Проблемы космического производства. – М.: Машиностроение, 1980. – 220 с.
- [2] Адмаев О. В. Стационарное термокапиллярное движение в цилиндрическом слое // Моделирование в механике. 1992. Т.6. С.23.
- [3] Алексеев В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. - М.: Наука, 1979. - 62 с.
- [4] Андреев В. К. Пухначев В. В. Инвариантные решения уравнений термокапиллярного движения // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск, 1983. – Т. 14, № 5. – С. 3 – 23.
- [5] Андреев В. К. Об одной сопряжённой начально – краевой задаче // Диф. ур-ия. – 2008. – № 5. – С. 1 – 7.
- [6] Андреев В. К. Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием перепада давления // ПМТФ. – 2008. Т. 49. – № 4. – С. 94 – 107.
- [7] Андреев В. К. О неравенстве Фридрихса для составных областей // Жур. Сиб. фед. ун-та. Математика и физика. – 2009. – Т. 2. – № 2. – С. 146 – 157.
- [8] Андреев В. К., Бекежанова В. Б. Устойчивость неизотермических жидкостей. – Красноярск: СФУ, 2010. – 356 с.
- [9] Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначёв В. В. Современные математические модели конвекции. – Физматлит, Москва, 2008. – 368 с.
- [10] Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость. – Новосибирск: Наука, 2000. – 279 с.
- [11] Андреев В.К., Лемешкова Е.Н. Эволюция термокапиллярного движения трех жидкостей в плоском слое // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 4. С. 485-492.
- [12] Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1982. – Ч. 1. – 327 с.
- [13] Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы теории теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1982. – Ч. 2. – 304 с.
- [14] Бетчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., 1973.

- [15] Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкин А. Д. и др. Гидродинамика невесомости. М.: Наука, 1976. – 504 с.
- [16] Бобков Н. Н., Гупало Ю. П. Структура течения в жидком слое и спектр краевой задачи при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // Прикладная математика и механика. –Т. 60, Вып. 6, 1996. – С. 1021 – 1028.
- [17] Бугаев А. А., Лукошкин В. А., Урпин В. А., Яковлев Д. Г. Термокапиллярные явления и образование рельефа поверхности под воздействием пикосекундных лазерных импульсов // ЖТФ. 1988. – Т. 58, № 5. С. 908 – 914.
- [18] Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина. - Из-во "Наука Москва, 1969. - 343 с.
- [19] Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. – М. : Наука, 1972. – 720 с.
- [20] Веденов А. А., Гладуш Г. Г. Физические процессы при лазерной обработке металлов. М.: Энергоатомиздат, 1985. – 206 с.
- [21] Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров; изд. 4-е. - М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. - 512 с.
- [22] Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. О термокапиллярном движении жидкости со свободной поверхностью при нелинейной зависимости поверхностного натяжения от температуры // Механика жидкости и газа, № 5, 1988. – С. 132 – 137.
- [23] Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Скворцова А. В. Влияние термокапиллярных сил на движение жидкости со свободной поверхностью // Механика жидкости и газа, №5, 1989. – С. 3 – 7.
- [24] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. - М.: Наука, 1979. - 760 с.
- [25] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
- [26] Кондратьев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1986.

- [27] Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
- [28] Крылов В. И., Скобля Н. С. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа. – Минск.: Наука и техника, 1968.
- [29] Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие для ун-тов / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат; изд. 5-е, испр.- М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.- 228 с.
- [30] Ладыженская, О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. - М.: Наука, 1970. - 183 с.
- [31] Лемешкова Е. Н. Прямая и обратная задача о совместном движении трёх вязких жидкостей в плоских слоях // Журнал сибирского федерального университета. Математика и физика, 2011 №4(3). С. 363-370.
- [32] Лемешкова Е. Н. Стационарное течение трёх жидкостей в плоском слое под действием термокапиллярных сил и перепада давления // Журнал сибирского федерального университета. Математика и физика, 2012 №5(1). С. 91-96.
- [33] Лемешкова Е. Н. Combined motion of three viscous heat-conducting liquids in a flat layer // Журнал сибирского федерального университета. Математика и физика, 2013 №6(3). С. 211–219.
- [34] Лемешкова Е.Н. О совместном движении трех вязких неизотермических жидкостей в плоском слое // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18. № 2. С. 55-61.
- [35] Лемешкова Е. Н. Решение начально-краевой задачи о совместном движении трёх вязких жидкостей в плоских слоях // Труды XLIII краевой научной студенческой конференции по математике и компьютерным наукам/ Сиб. федер. ун-т; Красноярск: ИПК СФУ, 2010. С.70-72.
- [36] Лемешкова Е. Н. Решение начально-краевой задачи о совместном движении трёх вязких жидкостей в плоских слоях // XI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Новосибирск, 2010. С.32.
- [37] Лемешкова Е. Н. О неравенстве Фридрихса для области, состоящей из трёх отрезков// Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2011.

- Материалы научной конференции, 11-16 апреля 2011.- СПб.: ООО "ПаркКом 2011. С.80-84.
- [38] Лемешкова Е. Н. Однонаправленное движение трёх вязких жидкостей в плоских слоях // Тезисы докладов 4-й Всероссийской конференции с участием зарубежных учёных "Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения". 5-10 июля 2011 года, Бийск. С. 59.
- [39] Лемешкова Е. Н. Термокапиллярное движение трёх вязких жидкостей // Материалы Юбилейной 50-й международной конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика / Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. С. 111.
- [40] Лемешкова Е. Н. О неравенстве Фридрихса для области, состоящей из трёх отрезков// Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения - 2011. Материалы научной конференции, 11-16 апреля 2011.- СПб.: ООО "ПаркКом 2011. С.80-84.
- [41] Лемешкова Е. Н. Комбинированное движение трёх вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое // Материалы Открытой конференции молодых учёных ИВМ СО РАН по математическому моделированию и информационным технологиям. – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2013. – С. 80 – 85.
- [42] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
- [43] Михлин С. Г. Курс математической физики. – Изд-во "Наука"б Москва, 1968, С. 576.
- [44] Михайлов В. Т. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
- [45] Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. - Новосибирск, Наука, 1985. - 318 с.
- [46] Пилецкас К., Кебликас В. О существовании нестационарного решения Пуазейля. – Сиб. мат. журнал., вып. 46, № 3, 2005. – С. 649 – 662.
- [47] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - 4 изд. - М., Наука, 1974. - 331 с.
- [48] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972.

- [49] Физические величины. Справочник // Под. ред. Григорьева И. С., Мейлихова Е. З. М.: Энеоатомиздат, 1991 – 1232 с.
- [50] Фойербах Б., Хамахер Г., Науман Р. Космическое материаловедение. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
- [51] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
- [52] Хайбибулин И. Г., Штырков Е. И., Зарипов М. М. Лазерный отжиг имплантированных полупроводников // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1981. Т. 45, № 8. – С. 1464 – 1473.
- [53] Холодова С. Е., Перегудин С. И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. – СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2009. – 455 с.
- [54] Черемных Е. Н. Двумерное движение несмещающихся жидкостей в плоском канале // Тезисы Всероссийской конференции "XXXI сибирский теплофизический семинар". – Новосибирск, 2014. 52с.
- [55] Черемных Е. Н. Двумерное движение жидкости в плоском слое // Труды Всероссийской конференции "Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение". – Новосибирск, 2014. С. 144 – 145.
- [56] Brady J. F., Acrivos A. Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier – Stokes equations with reverse flow // J. Fluid Mech. 1981. V. 112.
- [57] Boeck Th., Thess A. Inertial Benard – Marangoni convection // J. Fluid. Mech. – 1997. – V. 350. – P. 149 – 175.
- [58] Davis S. H., Xu J. – J. Liquid bridges with thermocapillary // J. Phys. Fluids. – 1983. V. 26, № 10. – P. 2880 – 2886.
- [59] Denisova I. V. A priori estimates of the solution of a linear time-dependent problem connected with the motion of a drop in a fluid medium, Trudy Mat. Inst. Steklov, 188 (1990), С. 3–21.
- [60] Denisova I.V. On the problem of thermocapillary convection for two incompressible fluids separated by a closed interface, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 61 (2005), С. 45–64.
- [61] Denisova I. V. Solvability in weighted Hoelder spaces for a problem governing the evolution of two compressible fluids, Zap. Nauchn. Semin. Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI), 295 (2003), С. 57–89.

- [62] Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. – CRC Press. 2012. Boca Raton-London-New York. – 1876 p.
- [63] Ryabitskii E. A. Oscillatory thermocapillarity instability of liquid layer with heated from below // Micrograviti science and technology. – 1995. V. VII, August. – P. 88 – 92.
- [64] Ryabitskii E. A. Thermocapillarity instability of liquid layer with internal heat generation // Micrograviti science and technology. – 1994. V. VII, March. – P. 20 – 23.
- [65] Palmer H. J., Berg J. C. Hydrodynamic stability of surfactant solutions heated from below // J. Fluid. Mech. 1972. – V. 51. – Pt. 2. – P. 385 – 402.
- [66] Smith M. K., Davis S. H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 2. Surface wave instabilities // J. Fluid Mech. – 1983. V. 132, № 7. – P. 145 – 162.
- [67] Tritton D. J. Physical Fluid Dynamics / D. J. Tritton // Oxford University Press. 1988. 519 p.