На правах рукописи

КУЗНЕЦОВ ПАВЕЛ АЛЕКСАНДРОВИЧ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИНИЦИИРОВАНИИ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ИРКУТСК — 2015

Работа выполнена в Институте математики, экономики и информатики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Иркутский государственный университет» (ФГБОУ ВПО «ИГУ»).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент **Казаков Александр Леонидович** ИДСТУ СО РАН, зав. лабораторией математических методов анализа свойств динамических систем
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Капцов Олег Викторович**, ИВМ СО РАН, ведущий науч. сотр. отдела вычислительных моделей в гидрофизике
	кандидат физико-математических наук, доцент **Маркова Евгения Владимировна**, ИСЭМ СО РАН, старший науч. сотр. отдела прикладной математики
Ведущая организация:	**Институт математики и механики** **им. Н.Н. Красовского УрО РАН** (г. Екатеринбург)

Защита состоится 21 мая 2015 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 003.021.01 в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН) по адресу: 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке и на официальном сайте www.idstu.irk.ru ИДСТУ СО РАН.

Автореферат разослан 20 апреля 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н. Т. В. Груздева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена доказательству теорем существования и построению кусочно-аналитических решений задач с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности, записанного в цилиндрических (полярных) либо сферических координатах.

Актуальность темы. Уравнение теплопроводности, как известно, является одним из трех классических дифференциальных уравнений математической физики. В линейном случае это уравнение довольно давно и хорошо изучено. Впервые полученное Ж. Фурье еще в первой половине XIX столетия, оно рассматривается теперь во всех учебниках, посвященных теории уравнений с частными производными, как классический пример уравнения параболического типа. Однако линейные модели далеко не всегда оказываются достаточно точными для моделирования реальных физических процессов. В таких случаях обычно используются нелинейные аналоги.

Нелинейное уравнение теплопроводности имеет широкую область применения. Помимо, собственно, описания процессов распространения тепла, оно используется в теории фильтрации жидкостей и газов, в теории движения грунтовых вод, в биологии при построении математических моделей роста и миграции популяций, в химической кинетике и т. д.

Главное отличие нелинейного уравнения теплопроводности от линейного заключается в том, что коэффициент теплопроводности представляет собой функцию, зависящую от температуры. В диссертационной работе рассматривается наиболее распространенный в литературе случай, когда указанная зависимость является степенной. Такое уравнение, в частности, описывает фильтрацию идеального политропного газа в пористой среде и может быть записано в виде

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2, \tag{1}$$

в котором $u = u(t, \bar{x})$ — искомая функция; ∇ — градиент, Δ — оператор Лапласа по пространственным переменным; $\sigma > 0$ — показатель политропы (адиабаты) газа.

По-видимому, впервые это уравнение было использовано французским ученым Ж. Буссинеском в 1904 году при вычислении высоты купола подземных вод. С тех пор вышло в свет огромное количество работ, как отечественных, так и зарубежных авторов, посвященных разносторонним исследованиям этого уравнения. Среди них можно назвать работы Г.И. Баренблатта[1], О.А. Олейник, А.С. Калашникова[2], О.А. Ладыженской (исследуются параболические уравне-

[1]Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М. : Недра, 1972. 220 с.

[2]Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Известия АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22, вып. 5. С. 667–704.

ния общего вида, для которых (1) является частным случаем)[3], С.Н. Кружкова, У.Г. Абдуллаева, А.А. Самарского, В.А. Галактионова, С.П. Курдюмова, А.П. Михайлова[4], В.К. Андреева, О.В. Капцова, В.В. Пухначева[5], Л.И. Рубиной, О.Н. Ульянова, Г.А. Рудых, Э.И. Семенова, Ш. Камин, Д. Аронсона[6], Ф. Бенилана, Х.Л. Васкеса[7], Б. Далберга, К. Кенига, А. Де Пабло, Н. Аликакоса, Р. Ростамяна и многих других.

Одним из интересных (в том числе в связи с приложениями) типов решений уравнения теплопроводности являются тепловые волны, распространяющейся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью. С геометрической точки зрения решение типа тепловой волны представляет собой две поверхности (возмущенное решение $u(t,\bar{x}) > 0$ и холодный фон $u \equiv 0$), непрерывно состыкованные вдоль некоторой достаточно гладкой линии $x = b(t)$, называемой фронтом.

В линейном случае подобные решения известны, по-видимому, еще со времен Фурье[8]. Первые упоминания о решениях типа тепловых волн, имеющих конечную скорость распространения, в нелинейном случае встречаются в работах 1950-х годов Я.Б. Зельдовича, А.С. Компанейца[9], Г.И. Баренблатта, О.А. Олейник. Отметим, что сам вид решения делает целесообразным рассмотрение начально-краевых задач, предполагающих обращение в нуль искомой функции в начальный момент времени, что приводит к вырождению параболического типа уравнения (1).

Первым, кто стал исследовать такие задачи в классе аналитических функций, был, по-видимому, А.Ф. Сидоров. В работах представителей его научной школы существенное внимание уделяется, так называемой, «задаче А.Д. Сахарова об инициировании тепловой волны» заданным краевым режимом[10]. Для этой задачи А.Ф. Сидоровым и С.П. Баутиным[11] в одномерном и многомерном (квазиодномерном) случаях доказаны теоремы существования и единственности локально-аналитических решений. Помимо этого, С.П. Баутиным рассматривалась задача о восстановлении тепловой волны по известному фронту. Также задачи с заданным тепловым фронтом и заданным краевым режимом в одномерных и квазиодномерных постановках рассматривались в работах С.С. Ти-

[3]Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М. : Наука, 1967. 736 с.

[4]Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М. : Наука, 1987. 480 с.

[5]Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск : Наука, 1994. 319 с.

[6]Aronson D. Regularity Properties of Flows Through Porous Media // SIAM J. Appl. Math., 1969. Vol. 17, N 2. P. 461–467.

[7]Vazquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford : Clarendon Press, 2007. 648 p.

[8]Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977. 735 с.

[9]Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // В кн.: Сборник, посвященный 70-летию А.Ф. Иоффе. М. : Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.

[10]Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М. : Физматлит, 2001. 576 с.

[11]Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. М. : Физматлит, 2003. 88 с.

това[12], М.Ю. Филимонова[13], Н.А. Вагановой[14], А.Л. Казакова[15] и некоторых других.

Отметим, что большинство результатов, полученных в научной школе А.Ф. Сидорова, относится к случаю, когда уравнение поверхности, на которой заданы краевые условия, может быть однозначно разрешено относительно одной из переменных. Вместе с тем, случай, когда краевые условия заданы на замкнутой поверхности, представляется весьма перспективным с точки зрения приложений уже потому, что задача о нагреве ограниченной области выглядит естественнее, чем о нагреве полупространства.

Остановимся особо на подходах, которые используются в данной диссертационной работе для исследования рассмотренных задач. В первую очередь, это метод специальных рядов, создание которого по праву считается одним из важных достижений научной школы А.Ф. Сидорова. Хотя он и имел предшественников в лице Р. Куранта[16], Д. Людвига[17], А.А. Дородницына[18] и других математиков, именно в работах А.Ф. Сидорова метод рекуррентных рядов стал эффективным инструментом построения решений нелинейных уравнений математической физики. Главным достоинством этого подхода является то, что он позволяет сочетать математическую строгость и практическую применимость: обосновывать теоретические факты о свойствах решений и локализовывать особенности в конкретных газовых течениях.

Применение метода степенных рядов для исследования нелинейных уравнений с частными производными восходит еще к знаменитой теореме Коши-Ковалевской. Длительное время это был один из наиболее популярных методов построения решений соответствующих начально-краевых задач. Среди огромного количества публикаций выделим работы французских математиков, младших современников С.В. Ковалевской, Ш. Рикье и Э. Гурса[19], российских (со-

[12]Титов С.С. О движении фронта нелинейной диффузии // Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 37, № 4. С. 113–118.

[13]Филимонов М.Ю. Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений нелинейных уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 801–808.

[14]Ваганова Н.А. Построение новых классов решений нелинейного уравнения фильтрации с помощью специальных согласованных рядов // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2003. Т. 9, № 2. С. 10–20.

[15]Казаков А.Л., Лемперт А.А. О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикладная механика и техническая физика, 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.

[16]Курант Р. Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.

[17]Ludvig D. Exact and Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem // Communications on Pure and Applied Mathematics, 1960. Vol. 13, N 3. P. 473–508.

[18]Дородницын А.А. Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа // Сборник теоретических работ по аэродинамике. М. : Оборонгиз, 1957. С. 77–88.

[19]Гурса Э. Курс математического анализа. М.-Л. : Гос. техн.-теор. изд-во, 1933. Т. 2, ч. 2. 287 с.

ветских) ученых Н.М. Гюнтера[20], С.Л. Соболева[21], Л.В. Овсянникова[22]. Отметим также статьи В.М. Тешукова[23], в которых в виде степенных рядов строятся некоторые сложные течения газа с ударными волнами, и работы по изучению обобщенной задачи Коши, возникающей в газовой динамике[24]. Как правило, в работах, в которых метод степенных рядов применяется для построения решений задач математической физики, явно или неявно предполагается гиперболичность исходного уравнения (системы). Это, в частности, относится к упомянутым выше исследованиям С.Л. Соболева и В.М. Тешукова. А.Ф. Сидорову принадлежит заслуга переноса метода характеристических рядов (которые в данном случае являются кратными степенными) с гиперболических на параболические задачи с вырождением.

В диссертации исследуются задачи с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах, которые при некоторых дополнительных предположениях могут быть интерпретированы как задачи об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданным на замкнутой достаточно гладкой поверхности, ограничивающей область, обладающую свойством звездности. Под областью, обладающей свойством звездности, (звездной областью) понимается такая область $D \subset \mathbb{R}^n$, внутри которой существует точка x, именуемая полюсом, такая, что отрезок, соединяющий любую точку из D с x, целиком лежит в D. Выполнение такого условия позволяет производить в рассматриваемых задачах переход в полярную и сферическую системы координат (в зависимости от размерности задачи).

Цель работы — доказательство теорем существования и единственности аналитических решений задач с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах, а также построение этих решений в виде кратных степенных рядов.

Объектом исследования является нелинейное уравнение теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и задачи с вырождением для него.

Методы исследования. В работе используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе метод степенных

[20]Гюнтер Н.М. О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных // Мат. сб., 1925. Т. 32. С. 367–447.

[21]Соболев С.Л. К вопросу об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Тр. физико–математического института им. В.А. Стеклова, 1934. Т. 5. С. 265–282.

[22]Овсянников Л.В. О сходимости ряда Мейера для осесимметричного сопла // В кн. Мартесен Е., фон Зенгбуш Р. Расчет околозвуковой части плоских и осесимметричных сопел с криволинейной линией перехода. Новосибирск : изд-во СО АН СССР, 1962. С. 41–43.

[23]Тешуков В.М. Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // Прикл. механика и технич. физика, 1980. № 2. С. 126–133.

[24]Баутин С.П., Казаков А.Л. Обобщенная задача Коши и ее приложения. Новосибирск : Наука, 2006. 397 с.

рядов и метод мажорант, методы математического анализа, методы линейной алгебры, в частности, методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Научная новизна. В диссертации доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений задач с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах, которые при некоторых дополнительных предположениях могут быть интерпретированы как задачи об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданным на замкнутой достаточно гладкой поверхности, ограничивающей область, обладающую свойством звездности. Для этих задач построены решения в виде кратных степенных рядов по степеням физических переменных. Коэффициенты рядов определяются из трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений. При этом элементы матриц систем зависят от их порядка, и не выполняется условие диагонального преобладания. Для коэффициентов рядов получены рекуррентные формулы. В случаях цилиндрической и сферической симметрии выполнены иллюстрирующие численные расчеты на основе отрезков рядов. Проведено сравнение результатов этих расчетов с результатами расчетов, выполненных с помощью метода граничных элементов, показавшее хорошее соответствие.

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обусловлена строгостью доказательств, в которых используются классические подходы и методы теории дифференциальных уравнений в частных производных и математического анализа. Полученные результаты были опубликованы в рецензируемых научных журналах и прошли обсуждение на представительных научных семинарах и конференциях.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, полученные в диссертационной работе, носят преимущественно теоретический характер. Работа содержит ряд новых строго доказанных теорем о существовании и единственности аналитических решений задач с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах, что вносит вклад в теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Помимо этого, работа имеет и определенное практическое значение: поскольку решения строятся в конструктивном виде (в виде степенных рядов по физическим переменным), это позволяет использовать полученные формулы для анализа свойств решений, а также для проведения и проверки численных расчетов в задаче о построении тепловой волны, движущейся по холодному фону с конечной скоростью.

Материалы диссертации могут быть использованы при разработке спецкурсов для студентов-математиков, при написании курсовых и дипломных работ, магистерских диссертаций.

Результаты, представленные в диссертации, получены при частичной поддержке

- РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31175 мол_а;

- ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» ГК П696 от 20.05.2010 в 2010–2012 годах;

- гранта Института математики, экономики и информатики ИГУ при поддержке «Программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «ИГУ» на 2012–2016 годы.».

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В соответствии с паспортом специальности 01.01.02. «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» в диссертации рассмотрены нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными, для которых доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений, и проведено построение этих решений. Поэтому полученные результаты соответствуют пунктам 5 (нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений) и 6 (аналитическая теория дифференциальных уравнений) в списке областей исследования специальности 01.01.02.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертационной работе, были апробированы на следующих научных мероприятиях: Международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (г. Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2013); Всероссийская конференция «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 95-летию Л.В. Овсянникова (г. Новосибирск, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2014); ежегодные международные молодежные школы-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (г. Екатеринбург, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 2013, 2014, 2015); IV Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (г. Иркутск, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 2014); III Всероссийская конференция «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях» (г. Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2013); ежегодные конференции «Ляпуновские чтения» (г. Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2013, 2014); ежегодная научная конференция аспирантов и студентов в рамках проведения Дней математики Института математики, экономики и информатики ИГУ (г. Иркутск, ИМЭИ ИГУ, 2013).

Также результаты исследований представлялись на семинарах Отдела прикладных задач Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург), семинаре кафедры вычислительной математики Института математики и компьютерных наук УрФУ (г. Екатеринбург), семинаре Отдела вычислительных моделей в гидрофизике Института вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск), Объединенном семинаре Института динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск), семинарах кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ИГУ (г. Иркутск).

Публикации и личный вклад автора. Материалы диссертационного исследования опубликованы в 14 работах, среди которых статья [1] — в журнале, индексируемом в Scopus, статьи [2;3;4] — в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертаций (работа [2] — русскоязычный оригинал статьи [1]), статья [5] — в журнале, индексируемом в РИНЦ и монография [6]. Остальные работы опубликованы в материалах различных конференций, школ-конференций и школ-семинаров, в том числе международных и всероссийских.

Результаты первой главы опубликованы в работах [3;5;7;9;12;13], второй главы — в [1;2;10], третьей — [4;8;11;14]. Также все результаты, представленные в диссертации, содержатся в монографии [6].

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично и не нарушают авторских прав других лиц. В работах [1-3;5-11;13;14] А.Л. Казакову принадлежат постановки исследуемых задач. В работе [3] Л.Ф. Спеваком выполнены численные расчеты, основанные на методе граничных элементов.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 139 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 153 наименования, и пяти приложений.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертационной работе исследуются задачи с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах, которые при некоторых дополнительных предположениях могут быть интерпретированы как задачи об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданным на замкнутой достаточно гладкой поверхности (т. е. уравнение поверхности нельзя однозначно разрешить относительно одной из переменных), ограничивающей область, обладающую свойством звездности.

Определение. Пусть $u(t,\bar{x})$ — непрерывная, неотрицательная функция, определенная при $t \in [t_*, t^*)$, $\bar{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, с компактным односвязным носителем $\operatorname{supp} u = \overline{D}$, где $D = \{(t,\bar{x}) |\ u(t,\bar{x}) > 0\}$.

Будем называть функцию $u(t,\bar{x})$ *тепловой волной*, если она

1) дважды непрерывно дифференцируема в D по пространственным переменным $\bar{x}$ и непрерывно дифференцируема по времени t;

2) удовлетворяет в D уравнению (1);

3) область D обладает свойством: если $t_* \leq t_1 < t_2 < t^*$, то $D(t_1) \subset D(t_2)$, где $D(t_i)$ — проекция сечения D гиперплоскостью $t = t_i,\ i = 1, 2$ на $\mathbb{R}^n$.

В случае, когда функция $u(t, \bar{x})$ является аналитической в D, будем говорить об *аналитической тепловой волне.* Границу $\Gamma = \overline{D} \setminus D$ области D будем называть *фронтом тепловой волны* или просто *тепловым фронтом.*

Размерность рассмотренных в диссертации задач последовательно возрастает от единицы до трех, для всех случаев доказаны теоремы существования и единственности решений в классе аналитических функций. Все доказательства проводятся по единой методике, согласно следующему плану:

1. Переход в уравнении (1) в цилиндрическую (полярную) или сферическую системы координат.

2. Задание краевых условий.

3. Приведение исходной задачи к специальному (характеристическому) виду с помощью нескольких замен переменных.

4. Построение решения преобразованной (характеристической) задачи в виде формального степенного ряда.

5. Построение мажорантной задачи.

6. Доказательство существования и единственности аналитического решения мажорантной задачи.

Перейдем теперь к характеристике диссертации по разделам.

В **Главе 1** исследована задача для нелинейного параболического уравнения второго порядка, которая при некоторых дополнительных предположениях может быть интерпретирована как задача с краевым режимом, заданным на сфере или цилиндре. В разделе 1.1 рассмотрено уравнение

$$u_\tau = u\left(\frac{\nu}{\rho}u_\rho + u_{\rho\rho}\right) + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2, \tag{2}$$

с краевым условием

$$u(\tau, \rho)|_{\rho=R} = f(\tau). \tag{3}$$

Здесь $\sigma, R > 0$ — *const*. Параметр ν — положительная константа, которая, в частности, может принимать значения $\nu = 1$ и $\nu = 2$, что соответствует нелинейному уравнению теплопроводности в случаях цилиндрической и сферической симметрии соответственно. Функция $f(\tau)$ обладает свойствами

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = f_1 > 0. \tag{4}$$

Функцию f будем называть *краевым режимом.*

Для задачи (2), (3) сформулирована следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f = f(\tau)$, удовлетворяющая условиям* (4)*, является аналитической в некоторой окрестности $\tau = 0$. Тогда задача* (2)*,* (3) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой полной окрестности $\tau = 0$, $\rho = R$, если выбран знак $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}$.*

В разделе 1.2 проведено подробное доказательство теоремы 1.

Теорема 1, фактически, обеспечивает лишь существование и единственность аналитического решения задачи (2), (3), не позволяя построить решение в явном виде. При этом весьма проблематично получить какое-либо представление о самом решении и его свойствах в силу большого количества сложных преобразований, в ходе которых, в частности, используется теорема о неявной функции. Поэтому в третьем разделе построено решение задачи (2), (3) в виде двойного степенного ряда по физическим переменным

$$u(\tau, \rho) = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m} \frac{\tau^n}{n!} \frac{(\rho - R)^m}{m!}, \; u_{n,m} = \frac{\partial^{n+m} u(\tau, \rho)}{\partial t^n \partial r^m}\Big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}. \tag{5}$$

Коэффициенты $u_{n,0}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ однозначно определяются из краевого условия (3). После последовательного определения коэффициентов ряда (5) до 3-го порядка включительно процедура построения решения приведена в общем виде.

Сначала на основе принципа математической индукции доказана возможность однозначного определения всех коэффициентов ряда. При этом коэффициенты $(n+1)$-го порядка (в предположении, что известны коэффициенты до порядка n включительно) определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$A_{n+1} \times \begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n-1,2} \\ \vdots \\ u_{0,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n,0} - f_{n+1} \\ L_{n-1,1} \\ \vdots \\ L_{0,n} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где A_{n+1} — обратимая трехдиагональная матрица вида

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix}, \tag{7}$$

в которой

$$a_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots, n; \; b_j < 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

а функции $L_{n-i,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$ зависят лишь от известных коэффициентов.

Для коэффициентов $(n+1)$-го порядка получены явные формулы.

В заключительной части раздела 1.3 сформулировано и доказано

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *у задачи*

$$(r+R)^2 u_t = u\Big[\nu(r+R)u_r + (r+R)^2 u_{rr}\Big] + \frac{1}{\sigma}(r+R)^2 u_r^2,$$

$$u(t,r)|_{r=0} = f(t), \; u(t,r)|_{t=0} = 0,$$

имеется кусочно-аналитическое решение, которое при $\nu = 1, 2$ *является в окрестности* $t = 0$, $r = 0$ *аналитической тепловой волной, причем выбор направления движения последней обеспечивает единственность.*

В разделе 1.4 приведены результаты иллюстрирующих численных расчетов, которые выполнены с помощью отрезков построенных рядов. Проведено сравнение полученных результатов с результатами расчетов, выполненных методом граничных элементов.

В разделе 1.5 результаты, полученные в разделах 1.1–1.3, обобщены на случай трех пространственных переменных (когда краевое условие (3) зависит не только от времени, но и от углов φ, θ). При этом рассмотрена задача

$$u_\tau = u\left(\frac{2}{\rho}u_\rho + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}u_\theta + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\theta^2\right); \tag{8}$$

$$u(\tau,\rho,\varphi,\theta)|_{\rho=R} = f(\tau,\varphi,\theta), \tag{9}$$

где $\sigma, R > 0$, а функция $f(\tau,\varphi,\theta)$ обладает свойствами

$$f(\tau,\varphi,\theta)|_{\tau=0} = 0; \quad f_1 = f_\tau(\tau,\varphi,\theta)|_{\tau=0} > 0. \tag{10}$$

Так как в уравнении (8) содержатся множители $\operatorname{ctg}\theta$ и $1/\sin^2\theta$, то возникает необходимость ввести специальные ограничения на θ.

Пусть независимые переменные ρ, φ, θ удовлетворяют ограничениям

$$\rho > 0; \quad \varphi \in \Upsilon; \ 0 < \theta_1 \leq \theta \leq \pi - \theta_2,$$

где θ_1 и $\theta_2 > 0$ — малые константы; Υ — некоторый конечный или бесконечный числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал).

В частном случае, когда справедливо равенство $f(\tau, \varphi, \theta) = f(\tau, \varphi + 2\pi, \theta)$, имеем задачу для уравнения (1) с данными на сфере (см. следствие 2).

Для задачи (8), (9) сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f = f(\tau, \varphi, \theta)$, удовлетворяющая условиям* (10), *является аналитической в некоторой окрестности $\tau = 0$ и при всех допустимых φ и θ. Тогда задача* (8), (9) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой полной окрестности $\tau = 0$, $\rho = R$, если выбран знак $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}$.*

По описанной в разделе 1.3 схеме для задачи (8), (9) построено решение в виде ряда (5), но уже с коэффициентами, зависящими от φ и θ. При определении коэффициентов $(n+1)$-го порядка также получается система уравнений, сходная с (6), что делает возможным применение явных формул, полученных в разделе 1.3.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2, причем $\Upsilon = [0; 2\pi]$, а функция f удовлетворяет условию $f(\tau, \varphi, \theta) = f(\tau, \varphi + 2\pi, \theta)$. Тогда задача* (8), (9) *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $u|_{t=0} = 0$ и являющееся в некоторой окрестности $\tau = 0$, $\rho = R$ аналитической тепловой волной, если выбрано направление движения фронта последней.*

В **Главе 2** представлены результаты исследования задачи с краевым режимом для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных с данными на границе множества, обладающего свойством звездности. В задаче выполнен переход к полярным координатам, и она представляет собой обобщение задачи из раздела 1.1 для $\nu = 1$ на случай переменного $R = R(\varphi)$.

В разделе 2.1 рассмотрено уравнение (1) в цилиндрических (полярных) координатах

$$u_\tau = u\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}u_\rho\right) + \frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\varphi^2\right), \tag{11}$$

где σ — положительная константа. Независимые переменные ρ и φ таковы, что

$$\rho > 0; \quad \varphi \in \Upsilon.$$

Здесь Υ — некоторый конечный или бесконечный числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал). Отметим, что при $u = u(\tau, \rho)$ (от φ не зависит) уравнение (11) примет вид (2) для случая цилиндрической симметрии ($\nu = 1$).

Для уравнения (11) рассмотрен краевой режим

$$u(\tau,\rho,\varphi)|_{\rho=R(\varphi)} = f(\tau,\varphi), \tag{12}$$

в котором $R(\varphi) > 0$, а функция $f(\tau,\varphi)$ удовлетворяет условиям

$$f(0,\varphi) = 0, \quad f_\tau(0,\varphi) = f_1(\varphi) > 0. \tag{13}$$

В частном случае, когда справедливы равенства $R(\varphi) = R(\varphi+2\pi)$, $f(\tau,\varphi) = f(\tau,\varphi+2\pi)$, имеем задачу для уравнения (1) с данными на границе множества, обладающего свойством зведности (см. следствие 3).

Для задачи (11), (12) сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция $f = f(\tau,\varphi)$, удовлетворяющая условиям* (13) *является аналитической в некоторой окрестности $\tau = 0$ и при $\varphi \in \Upsilon$, $R(\varphi)$ — аналитическая при $\varphi \in \Upsilon$. Тогда задача* (11), (12) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой полной окрестности $\tau = 0$, $\rho = R(\varphi)$, если выбран знак $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R(\varphi)}}$.*

В разделе 2.2 по ранее предложенному плану проведено доказательство теоремы 3.

В разделе 2.3 для задачи (11), (12) построено решение в виде ряда по степеням физических переменных

$$u(\tau,\rho,\varphi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(\varphi)\frac{\tau^n}{n!}\frac{[\rho - R(\varphi)]^m}{m!}. \tag{14}$$

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, *причем $\Upsilon = [0; 2\pi]$, а функции f и R удовлетворяют условиям $R(\varphi) = R(\varphi+2\pi)$, $f(\tau,\varphi) = f(\tau,\varphi+2\pi)$. Тогда задача* (11), (12) *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $u|_{t=0} = 0$ и являющееся в некоторой окрестности $\tau = 0$, $\rho = R$ аналитической тепловой волной, если выбрано направление движения фронта последней.*

В **Главе 3** результаты, полученные в предыдущих главах, обобщены на случай трех пространственных переменных.

В разделе 3.1 рассмотрено нелинейное уравнение теплопроводности в сферических координатах

$$u_\tau = u\left(\frac{2}{\rho}u_\rho + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}u_\theta + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}\right) +$$
$$+\frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\theta^2\right). \tag{15}$$

Независимые переменные ρ, φ, θ удовлетворяют ограничениям

$$\rho > 0; \quad \varphi \in \Upsilon; \ 0 < \theta_1 \le \theta \le \pi - \theta_2,$$

где θ_1 и $\theta_2 > 0$ — малые константы; Υ — некоторый конечный или бесконечный числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал).

Для уравнения (15) задан краевой режим

$$u(\tau, \rho, \varphi, \theta)|_{\rho=R(\varphi,\theta)} = f(\tau, \varphi, \theta), \tag{16}$$

в котором функции $R(\varphi, \theta) > 0$ и $f(\tau, \varphi, \theta)$ удовлетворяют условиям

$$R(\varphi, \theta) > 0, \ f(0, \varphi, \theta) = 0, \ f_\tau(0, \varphi, \theta) = f_1(\varphi, \theta) > 0. \tag{17}$$

В частном случае, когда справедливы равенства $R(\varphi, \theta) = R(\varphi + 2\pi, \theta)$, $f(\tau, \varphi, \theta) = f(\tau, \varphi + 2\pi, \theta)$, имеем задачу для уравнения (1) с данными на границе множества, обладающего свойством зведности (см. следствие 4).

Для задачи (15), (16) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функции $R = R(\varphi, \theta)$, $f = f(\tau, \varphi, \theta)$, удовлетворяющие условиям* (17)*, являются аналитическими в некоторой окрестности $\tau = 0$ и при всех допустимых φ и θ. Тогда задача* (15), (16) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой полной окрестности $\tau = 0$, $\rho = R(\varphi, \theta)$, если выбран знак $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}$.*

В разделе 3.2 проведено доказательство теоремы 4.

В разделе 3.3 для задачи (15), (16) построено решение в виде двойного степенного ряда по физическим переменным

$$u(\tau, \rho, \varphi, \theta) = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(\varphi, \theta) \frac{\tau^n}{n!} \frac{[\rho - R(\varphi, \theta)]^m}{m!}. \tag{18}$$

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 4*, причем $\Upsilon = [0; 2\pi]$, а функции R и f удовлетворяют условиям $R(\varphi, \theta) = R(\varphi + 2\pi, \theta)$, $f(\tau, \varphi, \theta) = f(\tau, \varphi + 2\pi, \theta)$. Тогда задача* (15), (16) *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $u|_{t=0} = 0$ и являющееся в некоторой окрестности $\tau = 0$, $\rho = R(\varphi, \theta)$ аналитической тепловой волной, если выбрано направление движения фронта последней.*

В **приложения** вынесены некоторые вспомогательные выкладки и утверждения, а именно, подробный вывод всех основных уравнений, доказательство леммы, утверждающей невырожденность матрицы (7), а также некоторые второстепенные моменты доказательства теоремы 1.

В **заключении** сформулированы выводы по диссертационной работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений задач с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах.

2. Построены решения вышеупомянутых задач в виде двойных рядов по степеням исходных (физических) переменных, коэффициенты которых определяются при решении невырожденных трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений. Получены рекуррентные формулы для коэффициентов.

3. Показано, что с использованием доказанных в диссертации утверждений могут быть построены аналитические тепловые волны, порожденные краевым режимом, заданным на замкнутых поверхностях, таких, как а) круговой цилиндр; б) сфера; в) аналитическая кривая, ограничивающая двумерную звездную область; г) аналитическая поверхность, ограничивающая звездную область в пространстве $\mathbb{R}^3$.

4. Выполнены иллюстрирующие численные расчеты на основе отрезков рядов. Проведено сравнение полученных результатов с результатами применения метода граничных элементов, показавшее хорошее их соответствие.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, индексируемых в Scopus:

[1] Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On One Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in the Case of Two Space Variables // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2014. Vol. 8, N 2. P. 1–11.

Статьи в журналах из Перечня ВАК:

[2] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // Сибирский журнал индустриальной математики, 2014. Т. 17, № 1. С. 46–54.

[3] Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.

[4] Кузнецов П.А. О краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности // Известия Иркутского гос. университета. Серия Математика, 2014. Т. 9. С. 61–74.

Статьи в журналах, индексируемых в РИНЦ:

[5] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае цилиндрической и сферической симметрии // Вестник УрГУПС, 2013. № 4. С. 4–10.

Монографии:

[6] Кузнецов П.А., Казаков А.Л. Аналитические решения начально-краевых задач с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2014. 99 с.

Публикации в материалах конференций и семинаров:

[7] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Краевая задача с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тезисы Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений». Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2013. С. 149.

[8] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. О тепловой волне в сферических координатах // Тезисы Всероссийской конференции «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение». Новосибирск: Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2014. С. 64.

[9] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тезисы Международной (44-й Всероссийской) молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики». Екатеринбург: Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 2013. С. 398–401.

[10] Кузнецов П.А., Казаков А.Л. О краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой цилиндрической поверхности // Труды 45-й Международной молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений». Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2014. С. 222–224.

[11] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. О краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности // Тезисы IV Международной школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». Иркутск: РИО Института динамики систем и теории управления СО РАН, 2014. С. 27.

[12] Кузнецов П.А. О краевой задаче с данными на сфере для нелинейного уравнения теплопроводности // Тезисы III Всероссийской конференции «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях». Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. С. 34.

[13] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. О краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности в сферических координатах // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. С. 27.

[14] Кузнецов П.А., Казаков А.Л. Решения краевой задачи с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в классе аналитических функций // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2014. С. 44.

Научно-организационный отдел
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова
Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН)
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134

Подписано к печати 19.03.2015. Поз. 2
Формат 60×84 1/16, объем 1,2 п.л.
Тираж 150 экз. Заказ 9.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН