Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»
Министерство образования и науки Российской Федерации

На правах рукописи

Кузнецов Павел Александрович

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИНИЦИИРОВАНИИ ТЕПЛОВОЙ ВОЛНЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

01.01.02. — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
А. Л. Казаков

ИРКУТСК — 2015

Оглавление

Введение

Настоящая диссертационная работа посвящена доказательству теорем существования и построению кусочно-аналитических решений задач с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности, записанного в цилиндрических (полярных) либо сферических координатах.

Уравнение теплопроводности, как известно, является одним из трех классических дифференциальных уравнений математической физики. Обычно при отсутствии источников (стоков) и внешних массовых сил оно записывается в виде

$$U_t = \operatorname{div}(k\nabla U), \tag{1}$$

где $U = U(t, \bar{x})$ — искомая функция (температура), t — время, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор пространственных переменных; k — коэффициент теплопроводности; div и ∇ — операторы дивергенции и градиента по пространственным переменным.

Это уравнение интересно тем, что оно имеет большое количество приложений в различных областях науки и техники. Помимо, собственно, описания процессов распространения тепла [31, 72], оно используется в теории фильтрации жидкостей и газов [6, 127], в теории движения грунтовых вод [84], в биологии при построении математических моделей роста и миграции популяций [148], в химической кинетике [75] и т. д.

В линейном случае уравнение теплопроводности достаточно давно и хорошо изучено. Впервые полученное Ж. Фурье еще в первой половине XIX столетия [141], оно рассматривается теперь во всех учебниках, посвященных теории уравнений с частными производными, как классический пример уравнения параболического типа [15, 18, 24, 67, 70, 76, 79, 83, 108, 116, 121, 139]. Отметим, что в линейном уравнении коэффициент теплопроводности k, как правило, берется постоянным [1, 72], однако он может зависеть от времени и (или) пространственных переменных (см., например, [58, 72, 117, 118]).

При всей своей универсальности, линейные модели не всегда оказываются достаточно точными для описания реальных физических явлений (например, линейное уравнение теплопроводности малопригодно для описания высокотемпературных процессов [31]). В таких случаях обычно используются нелинейные аналоги. Главное отличие нелинейного уравнения теплопроводности от линейного заключается в том, что коэффициент теплопроводности k представляет собой функцию, зависящую от температуры. В литературе чаще всего рассматривается случай, когда указанная зависимость является степенной. Такое уравнение, в частности, описывает фильтрацию идеального политропного газа в пористой среде (и тогда U — это плотность) и поэтому иногда именуется «уравнением нелинейной фильтрации» [104]; в англоязычной литературе за ним закрепилось название «the porous medium equation», т. е. «уравнение пористой среды» [126, 128, 129, 130, 136, 137, 138, 142, 145, 152, 153].

Уравнение (1) в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры $k = \alpha U^\sigma$ (α, σ — положительные константы) при помощи стандартной замены переменных (см. Приложение 1) может быть переписано в виде

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2. \tag{2}$$

Исследованию нелинейного уравнения теплопроводности (фильтрации) посвящено большое количество публикаций как отечественных, так и зарубежных авторов. По-видимому, первым его использовал Ж. Буссинеск [131] при вычислении высоты купола подземных вод. Позднее уравнение вида (2) было получено Л.С. Лейбензоном [71] и, независимо от него, М. Маскетом [149], как выражение закона Дарси для фильтрации газа в пористых средах [135].

Среди многочисленных исследований, посвященных построению точных (как классических, так и обобщенных) решений уравнения (2), можно выделить работы А.А. Самарского, В.А. Галактионова, С.П. Курдюмова, А.П. Михайлова [20, 21, 22, 68, 96, 97], В.К. Андреева, О.В. Капцова, В.В. Пухначева [54,55,56,85,86,124], Л.И. Рубиной, О.Н. Ульянова [88,89], Г.А. Рудых, Э.И. Семенова [90, 91, 92, 93, 94], Д.В. Георгиевского [23] и многих других.

Значительный интерес представляет исследование различных начальных и краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности, таких как задача Коши, задача Дирихле, задача Неймана, смешанные задачи. В статьях О.А. Олейник, А.С. Калашникова, С.Н. Кружкова [48, 49, 50, 51, 52, 60, 80, 81], А.И. Вольперта, С.И. Худяева [19], Д. Аронсона [126], С.И. Шмарева [151] исследуются задача Коши и некоторые другие начально-краевые задачи для нелинейного уравнения теплопроводности, а также для параболических уравнений общего вида, для которых (2) является частным случаем.

Задача Дирихле для нелинейного уравнения теплопроводности (фильтрации) исследовалась в работах Б. Далберга, К. Кенига [133,134], Ю. Абдуллы [122]. Для нелинейных параболических уравнений специального вида, близкого к (2), задача Дирихле рассматривалась в статьях С.Н. Антонцева и С.И. Шмарева [2, 125]. Из работ, посвященных задаче Неймана, можно отметить, например, статью Н. Аликакоса и Р. Ростамяна [123]. Более полный обзор результатов исследования задач Коши, Дирихле и Неймана для уравнения (2) можно найти в фундаментальной монографии Х.Л. Васкеса [152].

Как легко убедиться, уравнение (2) является параболическим. Рассматривая его с этих (более общих) позиций, отметим, что параболические уравнения широко используются при построении математических моделей различных физических процессов и явлений. Не претендуя на полноту списка, укажем, например, монографии $[69, 96, 121, 146]$, а также работы [33] (см. [34]), $[53, 61, 77, 95]$.

При $u = 0$ в (2) обращается в нуль множитель при старших (вторых) производных, вследствие чего происходит вырождение уравнения, т.е. в этом случае (2) становится представителем класса уравнений, неразрешенных относительно старших производных (нерегулярных, Соболевского типа). Доказательство теорем существования и единственности дифференциальных и интегральных уравнений в нерегулярном случае является одним из важных направлений развития теории динамических систем. Данной теме посвящена обширная библиография (см., например, $[14, 28, 46, 73, 74, 78, 104, 105, 112, 147, 152]$). Отметим, что в случае, когда имеет место вышеупомянутое вырождение, нелинейное уравнение теплопроводности приобретает некоторые специфические свойства, характерные обычно для уравнений первого порядка (см. ниже).

Одним из интересных, в том числе в связи с приложениями $[5, 6, 116]$, типов решений уравнения теплопроводности являются тепловые волны, распространяющейся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью. С геометрической точки зрения решение типа тепловой волны представляет собой две поверхности (возмущенное решение $u(t, \bar{x}) > 0$ и холодный фон $u \equiv 0$), непрерывно состыкованные вдоль некоторой достаточно гладкой линии $x = b(t)$, называемой фронтом.

В линейном случае такие решения известны, по-видимому, еще со времен Фурье (см. [116], гл. III, § 4). Простым примером тепловой волны для линейного уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ является следующий:

$$u(t,x) = \begin{cases} \exp\left(-x/\sqrt{2}\right)\sin\left(t - x/\sqrt{2}\right), & 0 \le x < t\sqrt{2}, \\ 0, & x \ge t\sqrt{2}, \end{cases}$$

где $0 \le t \le \pi/2$. Как легко видеть, фронтом здесь является прямая $x = t\sqrt{2}$.

В классической монографии А.Н. Тихонова и А.А. Самарского (см. [116], гл. III, Приложение I) встречается термин «температурная волна». Однако под построением последней там понимается решение «задачи без начальных условий» (с одним граничным условием при $x = 0$), описывающей периодические температурные колебания в почве. Отметим, что о единственности в данном случае говорить не приходится: для однозначной разрешимости нужно задать дополнительное условие (например, определить производную по пространственной координате при $x = 0$, т.е. рассмотреть задачу Коши).

Термины «тепловая волна» и «аналитическая тепловая волна» применительно к решениям уравнения (2) ранее использовались в работах С.П. Баутина [7, 8, 11], однако под этим понималось [11] составное решение вида

$$u_*(t, \bar{x}) = \begin{cases} u(t, \bar{x}) > 0, & a(t, x_2, \ldots, x_n) > x_1, \\ 0, & x_1 \geq a(t, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

где $a_t(0, x_2, \ldots, x_n) > 0$. Для задач, рассмотренных в диссертации, такое определение не совсем удобно, поскольку предполагает задание фронта в виде достаточно гладкой функции, которая разрешена относительно одной из пространственных переменных. В этой связи, определим тепловую волну следующим (более общим) образом.

Определение 1. Пусть $u(t, \bar{x})$— непрерывная, неотрицательная функция, определенная при $t \in [t_*, t^*)$, $\bar{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, с компактным односвязным носителем $\operatorname{supp} u = \overline{D}$, где $D = \{(t, \bar{x}) | \; u(t, \bar{x}) > 0\}$.

Будем называть функцию $u(t, \bar{x})$ *тепловой волной*, если она

1. дважды непрерывно дифференцируема в D по пространственным переменным $\bar{x}$ и непрерывно дифференцируема по времени t;

2. удовлетворяет в D уравнению (2);

3. область D обладает свойством: если $t_* \leq t_1 < t_2 < t^*$, то $D(t_1) \subset D(t_2)$, где $D(t_i)$— проекция сечения D гиперплоскостью $t = t_i$, $i = 1, 2$ на $\mathbb{R}^n$.

В случае, когда функция $u(t,\bar{x})$ является аналитической в D, будем говорить об *аналитической тепловой волне*. Границу $\Gamma = \overline{D} \setminus D$ области D будем называть *фронтом тепловой волны* или просто *тепловым фронтом*.

Поскольку функция $u \equiv 0$, очевидно, удовлетворяет уравнению (2), то тепловая волна является классическим (гладким) решением уравнения (2) всюду в области определения, за исключением, быть может, множества Γ, где допускается разрыв производных (но не искомой функции).

Простейшим примером решения уравнения (2) типа тепловой волны в случае одной пространственной переменной x может служить кусочно-линейная функция вида (см. рис. 1)

$$u(t,x) = \begin{cases} \alpha_1 t - \sqrt{\sigma\alpha_1}x, & x < b(t) = \alpha_1 t/\sqrt{\sigma\alpha_1}; \\ 0, & x \geq \alpha_1 t/\sqrt{\sigma\alpha_1}, \end{cases}$$

где $\alpha_1 > 0$ — $const$.

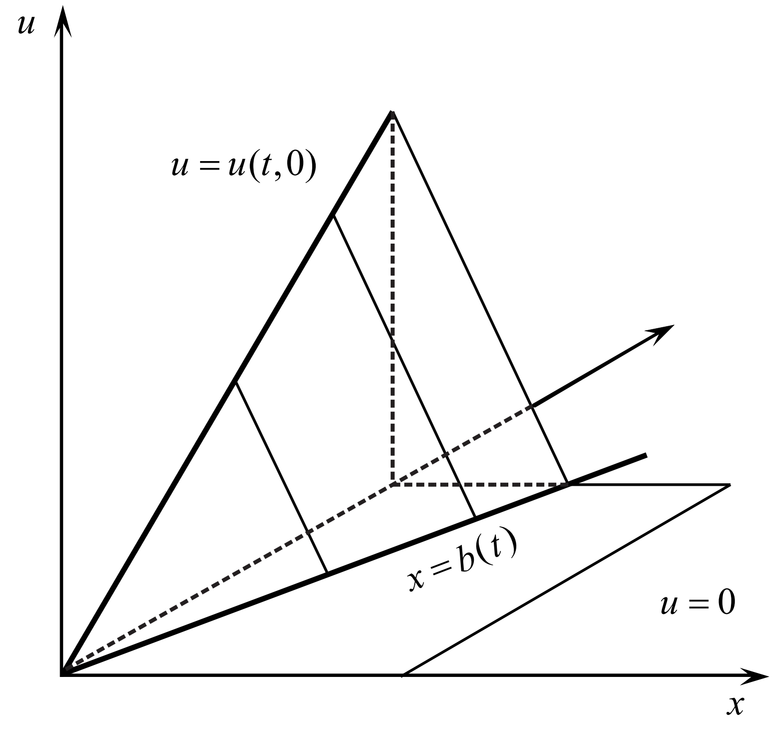

Рис. 1: Линейное решение

Впервые решения уравнения (2), имеющие вид тепловой волны, по-видимому, были получены Я.Б. Зельдовичем и А.С. Компанейцем при исследовании задач нелинейной теплопроводности [30]. Несколько позднее появились работы Г.И. Баренблатта [3,4,5] в которых близкие результаты были получены для задач фильтрации. В статье О.А. Олейник, А.С. Калашникова и Чжоу Юй-Линя [80] краевые задачи, в которых предполагается конечная скорость распространения фронта фильтрации, исследованы в абстрактных функциональных пространствах.

Первым, кто стал исследовать вышеописанные задачи в классе аналитических функций, был, по-видимому, А.Ф. Сидоров [82,100,101,102,104]. В работах представителей его научной школы большое внимание уделено двум видам краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности (фильтрации), решения которых являются тепловыми волнами. Первая — это, так называемая, «задача А.Д. Сахарова об инициировании тепловой волны» ([104], с. 10). В случае, когда в уравнении (2) $\bar{x} \in \mathbb{R}^1$, краевое условие в данной задаче имеет вид

$$\begin{gathered} u(t,x)|_{x=0} = f(t), \\ f(0) = 0, \quad f'(0) > 0. \end{gathered} \tag{3}$$

При этом функция $f(t)$ называется *краевым режимом* тепловой волны.

Вторая задача (в некотором смысле обратная к первой) — это задача с заданным тепловым фронтом. В этом случае предполагается, что известна линия $x = b(t)$ такая, что

$$\begin{gathered} u(t,x)|_{x=b(t)} = 0, \\ b(0) = 0, \quad b'(0) \neq 0, \end{gathered} \tag{4}$$

и требуется восстановить тепловую волну, включая краевой режим при $x = 0$.

Обращает на себя внимание тот факт, что (3) и (4) содержат по одному граничному условию для уравнения второго порядка. Тем не менее, поскольку из-за наличия вырождения уравнение (2) в данном случае приобретает специфические свойства, характерные для уравнений первого порядка (см. выше), то для задач вида (2), (3) и (2), (4) могут быть справедливы теоремы существования и единственности решений. Так, А.Ф. Сидоровым и С.П. Баутиным в одномерном и многомерном (квазиодномерном) случаях доказаны теоремы существования и единственности локально-аналитических решений [7, 8, 11, 100, 101, 102, 103, 104], являющиеся аналогами теоремы Коши-Ковалевской [57, 132] в рассмотренных случаях. Также задачи вида (2), (3) и (2), (4) в одномерных и квазиодномерных постановках рассматривались в работах С.С. Титова [114, 115], М.Ю. Филимонова [119], Н.А. Вагановой [16], А.Л. Казакова [35, 45] и некоторых других. В статьях [45, 46, 47, 144] авторы предложили рассматривать задачи с заданным краевым режимом и заданным тепловым фронтом как частные случаи одной задачи с краевыми условиями следующего вида (см. рис. 2):

$$\begin{gathered} u(t,x)|_{x=a(t)} = u_0(t,x)|_{x=a(t)}, \\ a(0) = u_0(0,0) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Для задачи (2), (5) также доказаны теоремы существования и единственности локально-аналитических решений, а кроме того, предложены (Л.Ф. Спевак) численные методы решения на основе граничноэлементного подхода.

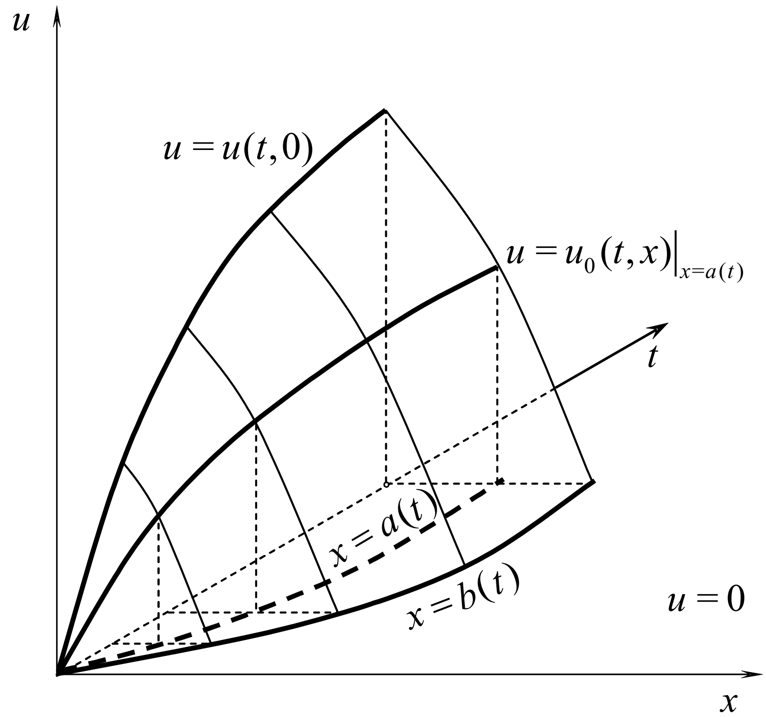

Рис. 2: Нелинейная тепловая волна

В многомерной постановке краевые условия (5) имеют вид

$$u(t,\bar{x})|_{\Gamma(t)} = f(t,\bar{x}), \quad f(0,\bar{x}) = 0, \tag{6}$$

где $\Gamma(t)$ — достаточно гладкая поверхность, разделяющая пространство на две части.

Отметим, что большинство вышеупомянутых работ А.Ф. Сидорова и представителей его научной школы затрагивает случай, когда уравнение поверхности $\Gamma(t)$ может быть однозначно разрешено относительно одной из переменных. Исключение составляет работа [102], в заключительной части которой А.Ф. Сидоров рассматривает задачу с данными на круговом цилиндре радиуса R. При этом выполняется переход к полярным координатам и описывается процедура построения решения в виде двойного степенного ряда. В статье, однако, само решение не строится, и указано, что сходимость ряда на момент публикации не была доказана. Также можно упомянуть работу [88], в которой для уравнения нестационарной осесимметричной фильтрации (теплопроводности) построено точное решение с заданным краевым режимом и получен фронт фильтрации (тепловой волны).

Остановимся особо на подходах, которые используются в данной диссертационной работе для исследования рассмотренных задач. В первую очередь, это метод специальных рядов, создание которого по праву считается одним из важных достижений научной школы А.Ф. Сидорова. Хотя он и имел предшественников в лице Р. Куранта [67], Д. Людвига [147], А.А. Дородницына [29] и других математиков, именно в работах А.Ф. Сидорова метод рекуррентных рядов стал эффективным инструментом построения решений нелинейных уравнений математической физики [59, 82, 98, 99, 103, 104, 140]. Главным достоинством этого подхода является то, что он позволяет сочетать математическую строгость и практическую применимость: обосновывать теоретические факты о свойствах решений и локализовывать особенности в конкретных газовых течениях.

Применение метода степенных рядов для исследования нелинейных уравнений с частными производными восходит еще к знаменитой теореме Коши-Ковалевской [57, 132]. Длительное время это был один из наиболее популярных методов построения решений соответствующих начально-краевых задач. Среди огромного количества публикаций выделим работы французских математиков, младших современников С.В. Ковалевской, Ш. Рикье [150] и Э. Гурса [25], российских (советских) ученых Н.М. Гюнтера [26, 27], С.Л. Соболева [106, 107], Л.В. Овсянникова [78]. Отметим также статьи В.М. Тешукова [110, 111, 112, 113], в которых в виде степенных рядов строятся некоторые сложные течения газа с ударными волнами, и работы по изучению обобщенной задачи Коши, возникающей в газовой динамике [12, 13, 14]. Как правило, в работах, в которых метод степенных рядов применяется для построения решений задач математической физики, явно или неявно предполагается гиперболичность исходного уравнения (системы). Это, в частности, относится к упомянутым выше исследованиям С.Л. Соболева и В.М. Тешукова. А.Ф. Сидорову [17, 59, 100, 101, 102, 103] принадлежит заслуга переноса метода характеристических рядов (которые в данном случае являются кратными степенными) с гиперболических на параболические задачи с вырождением.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию задач с краевым режимом для уравнения (2), записанного в цилиндрических либо сферических координатах, которые при некоторых дополнительных предположениях являются задачами вида (2), (6) в случае, когда $\Gamma(t) = \Gamma$ замкнута (т. е. уравнение поверхности Γ не зависит от времени и его нельзя однозначно разрешить относительно одной из переменных) и ограниченная ей область обладает свойством звездности.

Определение 2. Область $D \subset R^n$ *обладает свойством звездности*, если внутри области D существует точка x, именуемая полюсом, такая, что отрезок, соединяющий любую точку из D с x, целиком лежит в D.

Область, обладающую свойством звездности, иногда именуют просто *звездной областью.*

Случай, когда граничные условия заданы на замкнутой поверхности, представляется весьма перспективным с точки зрения приложений уже потому, что задача о нагреве ограниченной области выглядит естественнее, чем о нагреве полупространства.

Цель работы

Цель работы — доказательство теорем существования и единственности аналитических решений задач с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах, а также построение этих решений в виде кратных степенных рядов.

Объект исследования

Объектом исследования является нелинейное уравнение теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и задачи с вырождением для него.

Методы исследования

В работе используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, в том числе, метод степенных рядов и метод мажорант, методы математического анализа, методы линейной алгебры, в частности, методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Научная новизна

В диссертации доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений задач с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах, которые при некоторых дополнительных предположениях могут быть интерпретированы как задачи об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданным на замкнутой достаточно гладкой поверхности, ограничивающей область, обладающую свойством звездности. Для этих задач построены решения в виде кратных степенных рядов по степеням физических переменных. Коэффициенты рядов определяются из трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений. При этом элементы матриц систем зависят от их порядка, и не выполняется условие диагонального преобладания. Для коэффициентов рядов получены рекуррентные формулы. В случаях цилиндрической и сферической симметрии выполнены иллюстрирующие численные расчеты на основе отрезков рядов. Проведено сравнение их результатов с результатами расчетов, выполненных с помощью метода граничных элементов, показавшее хорошее соответствие.

Достоверность результатов

Достоверность результатов, полученных в диссертации, обусловлена строгостью доказательств, в которых используются классические подходы и методы теории дифференциальных уравнений в частных производных и математического анализа. Полученные результаты были опубликованы в рецензируемых научных журналах и прошли обсуждение на представительных научных семинарах и конференциях.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты, полученные в диссертационной работе, носят преимущественно теоретический характер. Работа содержит ряд новых строго доказанных теорем о существовании и единственности аналитических решений задач с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах, что вносит вклад в теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Помимо этого, работа имеет и определенное практическое значение: поскольку решения строятся в конструктивном виде (в виде степенных рядов по физическим переменным), это позволяет использовать полученные формулы для анализа свойств решений, а также для проведения и проверки численных расчетов в задаче о построении тепловой волны, движущейся по холодному фону с конечной скоростью.

Материалы диссертации могут быть использованы при разработке спецкурсов для студентов-математиков, при написании курсовых и дипломных работ, магистерских диссертаций.

Результаты, представленные в диссертации, получены при частичной поддержке

- РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31175 мол_а;

- ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» ГК П696 от 20.05.2010 в 2010–2012 годах;

- гранта Института математики, экономики и информатики ИГУ при поддержке «Программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «ИГУ» на 2012–2016 годы.».

Соответствие диссертации паспорту научной специальности

В соответствии с паспортом специальности 01.01.02. «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» в диссертации рассмотрены нелинейные дифференциальные уравнения с частными производными, для которых доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений, и проведено построение этих решений. Поэтому полученные результаты соответствуют пунктам 5 (нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений) и 6 (аналитическая теория дифференциальных уравнений) в списке областей исследования специальности 01.01.02.

Апробация работы

Результаты, представленные в диссертационной работе, были апробированы на следующих научных мероприятиях в Новосибирске:

- Международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 18-24 августа 2013 г.);

- Всероссийская конференция «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 95-летию Л.В. Овсянникова (Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 18-22 апреля 2014 г.);

в Екатеринбурге:

- Международная (44-й Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики» (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 27 января - 2 февраля 2013 г.);

- 45-я Международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», посвященная 75-летию В.И. Бердышева (ИММ УрО РАН, 2-8 февраля 2014 г.);

- Международная (46-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (ИММ УрО РАН, 25-31 января 2015 г.).

в Иркутске:

- IV Международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 22-28 июня 2014);

- III Всероссийская конференция «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях» (ИДСТУ СО РАН, 23-26 июня 2013 г.);

- конференция «Ляпуновские чтения» (ИДСТУ СО РАН, 9-11 декабря 2013 г.);

- Ежегодная научная конференция аспирантов и студентов в рамках проведения Дней математики Института математики, экономики и информатики ИГУ (ИМЭИ ИГУ, 24 апреля 2013 г.);

- конференция «Ляпуновские чтения» (ИДСТУ СО РАН, 1-3 декабря 2014 г.).

Также результаты исследований представлялись на семинарах Отдела прикладных задач Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург), семинаре Кафедры вычислительной математики Института математики и компьютерных наук УрФУ (г. Екатеринбург), семинаре Отдела вычислительных моделей в гидрофизике Института вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск), Объединенном семинаре Института динамики систем и теории управления СО РАН (г. Иркутск), семинарах Кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ИГУ (г. Иркутск).

Публикации и личный вклад автора

Материалы диссертационного исследования опубликованы в 14 работах, среди которых статья [143] — в журнале, индексируемом в Scopus , статьи [41, 44, 63] в журналах, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертаций (работа [41] — русскоязычный оригинал статьи [143]), статья [40] — в журнале, индексируемом в РИНЦ , и монография [66]. Остальные работы опубликованы в материалах различных конференций, школ-конференций и школ-семинаров, в том числе международных и всероссийских.

Результаты первой главы опубликованы в работах [37, 38, 39, 40, 44, 62], второй главы — в [41, 64, 143], третьей — [42, 43, 63, 65]. Также практически все результаты, представленные в диссертации, содержатся в монографии [66].

Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично и не нарушают авторских прав других лиц. В работах [37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 62, 63, 64, 65, 66, 143] А.Л. Казакову принадлежат постановки исследуемых задач. В работе [44] Л.Ф. Спеваком выполнены численные расчеты, основанные на методе граничных элементов.

Структура и объем работы

Диссертация изложена на 139 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, включающего 153 наименования, и пяти приложений.

Краткое содержание диссертации

В диссертационной работе исследуются задачи с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах, которые при некоторых дополнительных предположениях могут быть интерпретированы как задачи об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданным на замкнутой достаточно гладкой поверхности (т. е. уравнение поверхности нельзя однозначно разрешить относительно одной из переменных), ограничивающей область, обладающую свойством звездности.

Размерность рассмотренных в диссертации задач последовательно возрастает от единицы до трех, для всех случаев доказаны теоремы существования и единственности решений в классе аналитических функций. Исследование проводятся по единой методике, согласно следующему плану:

1. Переход в уравнении (2) в цилиндрическую (полярную) или сферическую системы координат.
2. Задание краевых условий.
3. Приведение исходной задачи к специальному (характеристическому) виду с помощью нескольких замен переменных.
4. Построение решения преобразованной (характеристической) задачи в виде формального степенного ряда.
5. Построение мажорантной задачи.
6. Доказательство существования и единственности аналитического решения мажорантной задачи.

Кроме того, с использованием построенных степенных рядов выполнены иллюстрирующие численные расчеты.

Перейдем теперь к характеристике диссертации по разделам.

В **Главе 1** исследуется задача для нелинейного параболического уравнения второго порядка, которая при некоторых дополнительных предположениях может быть интерпретирована как задача с краевым режимом, заданным на сфере или цилиндре. В разделе 1.1 рассматривается уравнение

$$u_\tau = u\left(\frac{\nu}{\rho}u_\rho + u_{\rho\rho}\right) + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2, \tag{7}$$

с краевым условием

$$u(\tau,\rho)|_{\rho=R} = f(\tau). \tag{8}$$

Здесь $\sigma, R > 0$ — $const$. Параметр ν — положительная константа, которая, в частности, может принимать значения $\nu = 1$ и $\nu = 2$, что соответствует нелинейному уравнению теплопроводности в случаях цилиндрической и сферической симметрии соответственно. Функция $f(\tau)$

обладает свойствами

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = f_1 > 0. \tag{9}$$

Для задачи (7), (8) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f = f(\tau)$, удовлетворяющая условиям* (9), *является аналитической в некоторой окрестности $\tau = 0$. Тогда задача* (7), (8) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой полной окрестности $\tau = 0$, $\rho = R$, если выбран знак $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}$.*

В разделе 1.2 приводится подробное доказательство теоремы 1. Отметим еще раз, что доказательство справедливо для любых $\nu > 0$, а не только для $\nu = 1$ или $\nu = 2$.

Теорема 1, фактически, обеспечивает лишь существование и единственность аналитического решения задачи (7), (8), не позволяя построить решение в явном виде. При этом весьма проблематично получить какое-либо представление о самом решении и его свойствах в силу большого количества сложных преобразований, в ходе которых, в частности, используется теорема о неявной функции. Поэтому в разделе 1.3 строится решение задачи (7), (8) в виде двойного степенного ряда по физическим переменным

$$u(\tau, \rho) = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m} \frac{\tau^n}{n!} \frac{(\rho - R)^m}{m!}, \; u_{n,m} = \frac{\partial^{n+m} u(\tau, \rho)}{\partial t^n \partial r^m}\Big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}. \tag{10}$$

Коэффициенты $u_{n,0}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ однозначно определяются краевым режимом (8). После последовательного определения коэффициентов ряда (10) до 3-го порядка включительно процедура построения решения приводится в общем виде.

Сначала на основе принципа математической индукции доказывается возможность однозначного определения всех коэффициентов ряда. При этом коэффициенты $(n+1)$-го порядка (в предположении, что известны коэффициенты до порядка n включительно) определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$A_{n+1} \times \begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n-1,2} \\ \vdots \\ u_{0,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n,0} - f_{n+1} \\ L_{n-1,1} \\ \vdots \\ L_{0,n} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где A_{n+1}— обратимая трехдиагональная матрица вида

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix}, \tag{12}$$

в которой

$$a_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots, n; \; b_j < 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

а функции $L_{n-i,i}$, $i = 0, 1, \dots, n$ зависят лишь от известных коэффициентов.

Для коэффициентов $(n+1)$-го порядка получены явные формулы.

В заключительной части раздела 1.3 формулируется и доказывается

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *у задачи*

$$(r+R)^2 u_t = u\Big[\nu(r+R)u_r + (r+R)^2 u_{rr}\Big] + \frac{1}{\sigma}(r+R)^2 u_r^2,$$

$$u(t,r)|_{r=0} = f(t), \; u(t,r)|_{t=0} = 0,$$

имеется кусочно-аналитическое решение, которое при $\nu = 1, 2$ *является в окрестности* $t = 0$, $r = 0$ *аналитической тепловой волной, причем выбор направления движения последней обеспечивает единственность.*

В разделе 1.4 приводятся результаты иллюстрирующих численных расчетов, которые выполнены с помощью отрезков построенных рядов. Проводится сравнение полученных результатов с результатами расчетов, выполненных методом граничных элементов.

В разделе 1.5 результаты, полученные в разделах 1.1–1.3, переносятся на случай трех пространственных переменных (когда параметры краевого режима (8) зависят не только от времени, но и от углов φ, θ). При этом рассматривается задача

$$u_\tau = u\left(\frac{2}{\rho}u_\rho + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}u_\theta + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}\right) + \\ + \frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\theta^2\right); \tag{13}$$

$$u(\tau,\rho,\varphi,\theta)|_{\rho=R} = f(\tau,\varphi,\theta), \tag{14}$$

где $\sigma, R > 0$, а функция $f(\tau,\varphi,\theta)$ обладает свойствами

$$f(\tau,\varphi,\theta)|_{\tau=0} = 0;\ \ f_1 = f_\tau(\tau,\varphi,\theta)|_{\tau=0} > 0. \tag{15}$$

Так как в уравнении (13) содержатся множители $\operatorname{ctg}\theta$ и $1/\sin^2\theta$, то возникает необходимость ввести специальные ограничения на θ.

Пусть независимые переменные ρ, φ, θ удовлетворяют ограничениям

$$\rho > 0;\quad \varphi \in \Upsilon;\ 0 < \theta_1 \le \theta \le \pi - \theta_2,$$

где θ_1 и $\theta_2 > 0$ — малые константы; Υ — некоторый конечный или бесконечный числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал).

В частном случае, когда справедливо равенство $f(\tau,\varphi,\theta) = f(\tau,\varphi + 2\pi,\theta)$, имеем задачу для уравнения (2) с данными на сфере (см. следствие 2).

Для задачи (13), (14) формулируется и доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f = f(\tau,\varphi,\theta)$, удовлетворяющая условиям* (15), *является аналитической в некоторой окрестности $\tau = 0$ и при всех допустимых φ и θ. Тогда задача* (13), (14) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой полной окрестности $\tau = 0$, $\rho = R$, если выбран знак $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}$.*

Затем по описанной в разделе 1.3 схеме для задачи (13), (14) строится решение в виде ряда (10), но уже с коэффициентами, зависящими от φ и θ. При определении коэффициентов $(n+1)$-го порядка также получается система уравнений, сходная с (11), что делает возможным применение явных формул, полученных в разделе 1.3.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *причем* $\Upsilon = [0; 2\pi]$, *а функция* f *удовлетворяет условию* $f(\tau, \varphi, \theta) = f(\tau, \varphi + 2\pi, \theta)$. *Тогда задача* (13), (14) *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию* $u|_{t=0} = 0$ *и являющееся в некоторой окрестности* $\tau = 0$, $\rho = R$ *аналитической тепловой волной, если выбрано направление движения фронта последней.*

В **Главе 2** представлены результаты исследования задачи с краевым режимом для нелинейного уравнения теплопроводности, записанного в цилиндрических (полярных) координатах (в случае двух пространственных переменных).

В разделе 2.1 рассматривается уравнение (2) в цилиндрических (полярных) координатах

$$u_\tau = u\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}u_\rho\right) + \frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\varphi^2\right), \tag{16}$$

где σ — положительная константа. Независимые переменные ρ и φ таковы, что

$$\rho > 0; \quad \varphi \in \Upsilon.$$

Здесь Υ — некоторый конечный или бесконечный числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал).

Для уравнения (16) рассматривается краевой режим

$$u(\tau, \rho, \varphi)|_{\rho = R(\varphi)} = f(\tau, \varphi), \tag{17}$$

в котором $R(\varphi) > 0$, а функция $f(\tau, \varphi)$ удовлетворяет условиям

$$f(0, \varphi) = 0, \quad f_\tau(0, \varphi) = f_1(\varphi) > 0. \tag{18}$$

В частном случае, когда справедливы равенства $R(\varphi) = R(\varphi+2\pi)$, $f(\tau,\varphi) = f(\tau,\varphi+2\pi)$, имеем задачу для уравнения (2) с данными на границе множества, обладающего свойством зведности (см. следствие 3).

Для задачи (16), (17) формулируется и доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция* $f = f(\tau,\varphi)$*, удовлетворяющая условиям* (18) *является аналитической в некоторой окрестности* $\tau = 0$ *и при* $\varphi \in \Upsilon$, $R(\varphi)$ *— аналитическая при* $\varphi \in \Upsilon$*. Тогда задача* (16), (17) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности* $\tau = 0$, $\rho = R(\varphi)$*, если выбран знак* $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R(\varphi)}}$.

В разделе 2.2 по ранее предложенному плану проводится доказательство теоремы 3.

В разделе 2.3 для задачи (16), (17) строится решение в виде ряда по степеням физических переменных

$$u(\tau,\rho,\varphi) = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(\varphi)\frac{\tau^n}{n!}\frac{[\rho - R(\varphi)]^m}{m!}. \qquad (19)$$

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3*, причем* $\Upsilon = [0;2\pi]$*, а функции* f *и* R *удовлетворяют условиям* $R(\varphi) = R(\varphi+2\pi)$, $f(\tau,\varphi) = f(\tau,\varphi+2\pi)$*. Тогда задача* (16), (17) *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию* $u|_{t=0} = 0$ *и являющееся в некоторой окрестности* $\tau = 0$, $\rho = R$ *аналитической тепловой волной, если выбрано направление движения фронта последней.*

В **Главе 3** результаты, полученные в предыдущих главах, переносятся на случай трех пространственных переменных.

В разделе 3.1 рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности в сферических координатах

$$u_\tau = u\left(\frac{2}{\rho}u_\rho + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}u_\theta + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi^2+\frac{1}{\rho^2}u_\theta^2\right). \tag{20}$$

Независимые переменные ρ, φ, θ удовлетворяют ограничениям

$$\rho>0;\quad \varphi\in\Upsilon;\ 0<\theta_1\le\theta\le\pi-\theta_2,$$

где θ_1 и $\theta_2>0$ — малые константы; Υ — некоторый конечный или бесконечный числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал).

Для уравнения (20) задается краевой режим

$$u(\tau,\rho,\varphi,\theta)|_{\rho=R(\varphi,\theta)}=f(\tau,\varphi,\theta), \tag{21}$$

в котором функции $R(\varphi,\theta)>0$ и $f(\tau,\varphi,\theta)$ удовлетворяют условиям

$$R(\varphi,\theta)>0,\ f(0,\varphi,\theta)=0,\ f_\tau(0,\varphi,\theta)=f_1(\varphi,\theta)>0. \tag{22}$$

В частном случае, когда справедливы равенства $R(\varphi,\theta)=R(\varphi+2\pi,\theta), f(\tau,\varphi,\theta)=f(\tau,\varphi+2\pi,\theta)$, имеем задачу для уравнения (2) с данными на границе множества, обладающего свойством зведности (см. следствие 4).

Для задачи (20), (21) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функции $R=R(\varphi,\theta)$, $f=f(\tau,\varphi,\theta)$, удовлетворяющие условиям* (22)*, являются аналитическими в некоторой окрестности $\tau=0$ и при всех допустимых φ и θ. Тогда задача* (20), (21) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности $\tau=0$, $\rho=R(\varphi,\theta)$, если выбран знак $u_\rho|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}$.*

В разделе 3.2 проводится доказательство теоремы 4.

В разделе 3.3 для задачи (20), (21) строится решение в виде двойного степенного ряда по физическим переменным

$$u(\tau,\rho,\varphi,\theta)=\sum_{n,m=0}^{\infty}u_{n,m}(\varphi,\theta)\frac{\tau^n}{n!}\frac{[\rho-R(\varphi,\theta)]^m}{m!}. \tag{23}$$

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 4, причем $\Upsilon=[0;2\pi]$, а функции R и f удовлетворяют условиям $R(\varphi,\theta)=R(\varphi+2\pi,\theta)$,*

$f(\tau,\varphi,\theta) = f(\tau,\varphi+2\pi,\theta)$. *Тогда задача* (20), (21) *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию* $u|_{t=0} = 0$ *и являющееся в некоторой окрестности* $\tau = 0$, $\rho = R(\varphi,\theta)$ *аналитической тепловой волной, если выбрано направление движения фронта последней.*

В **приложения** вынесены некоторые вспомогательные выкладки и утверждения, а именно, подробный вывод всех основных уравнений, доказательство леммы, утверждающей невырожденность матрицы (12), а также некоторые второстепенные моменты доказательства теоремы 1.

В **заключении** сформулированы выводы по диссертационной работе.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений задач с вырождением специального вида для нелинейного уравнения теплопроводности в цилиндрических (полярных) и сферических координатах.

2. Построены решения вышеупомянутых задач в виде двойных рядов по степеням исходных (физических) переменных, коэффициенты которых определяются при решении невырожденных трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений. Получены рекуррентные формулы для коэффициентов.

3. Показано, что с использованием доказанных в диссертации утверждений могут быть построены аналитические тепловые волны, порожденные краевым режимом, заданным на замкнутых поверхностях, таких, как а) круговой цилиндр; б) сфера; в) аналитическая кривая, ограничивающая двумерную звездную область; г) аналитическая поверхность, ограничивающая звездную область в пространстве $\mathbb{R}^3$.

4. Выполнены иллюстрирующие численные расчеты на основе отрезков рядов. Проведено сравнение полученных результатов с результатами

применения метода граничных элементов, показавшее хорошее их соответствие.

Глава 1

Задача с данными на цилиндре или сфере

Первые четыре раздела данной главы посвящены исследованию задачи для нелинейного параболического уравнения второго порядка, которая при некоторых дополнительных предположениях может быть интерпретирована как задача с краевым режимом для нелинейного уравнения теплопроводности в случаях цилиндрической и сферической симметрий. В разделах 1.1, 1.2 формулируется и доказывается теорема существования и единственности аналитического решения указанной задачи. Поскольку доказательство теоремы не содержит конструктивной процедуры построения решения, что затрудняет исследование свойств последнего, то в разделе 1.3 решение строится в виде кратного ряда по степеням физических переменных, формулируется и доказывается следствие доказанной теоремы о существовании аналитической тепловой волны. В разделе 1.4 приводятся результаты сравнения вычислений, проведенных с помощью отрезка построенного ранее ряда и метода граничных элементов. Главу завершает раздел 1.5, в котором результаты разделов 1.1–1.3 переносяиися на трехмерный случай, когда краевые условия зависят не только от времени, но и от пространственных переменных.

1.1 Постановка задачи. Формулировка теоремы

Рассматривается краевая задача

$$u_\tau = u\left(\frac{\nu}{\rho}u_\rho + u_{\rho\rho}\right) + \frac{1}{\sigma}u_\rho^2; \tag{1.1.1}$$

$$u(\tau,\rho)|_{\rho=R} = f(\tau), \tag{1.1.2}$$

в которой $\sigma, R > 0$; $\nu > 0$. В частности, полагая в уравнении (1.1.1) $\nu = 1, 2$, мы получим нелинейное уравнение теплопроводности в случаях цилиндрической и сферической симметрии соответственно. Будем предполагать, что функция $f(\tau)$ обладает свойствами

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = f_1 > 0. \tag{1.1.3}$$

Теорема 1. *Пусть функция* $f = f(\tau)$*, удовлетворяющая условиям* (1.1.3)*, является аналитической в некоторой окрестности* $\tau = 0$*. Тогда задача* (1.1.1), (1.1.2) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой полной окрестности* $\tau = 0$, $\rho = R$*, если выбран знак* $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}$.

Под *аналитическим решением* задачи (1.1.1), (1.1.2) в данном случае понимается функция $u = u(\tau,\rho)$, которая, во-первых, удовлетворяет условию (1.1.2), во-вторых, обращает уравнение (1.1.1) в тождество, и в-третьих, для которой ряд Тейлора определен и сходится в некоторой окрестности точки $\tau = 0$, $\rho = R$.

Доказательство данной теоремы представлено в следующем разделе.

Предваряя его, сделаем несколько комментариев к формулировке.

1. Уравнение (1.1.1) имеет второй порядок по переменной ρ, а граничное условие для него задано только одно. Однако, поскольку при $\tau = 0$, $\rho = R$ в (1.1.1) обращается в нуль множитель при старших производных, то порядок уравнения в этой точке вырождается. Наличие такой особенности и позволяет доказать для задачи (1.1.1), (1.1.2) теорему существования и единственности.

2. Разрешимость задачи (1.1.1), (1.1.2) устанавливается в полной окрестности, т. е. как во внутренней $\rho < R$, так и во внешней $\rho > R$ областях.

При этом размер окрестности, в которой определено решение, зависит от параметров задачи ν, σ, R, а также вида функции $f(t)$ и может быть, как и в теореме Коши-Ковалевской [57], сколь угодно малым.

3. Единственность решения здесь устанавливается а) в малой окрестности точки вырождения; б) в классе аналитических функций; в) при наличии дополнительного предположения (выбор знака производной по ρ). За пределами окрестности или при отказе от аналитичности решения, по-видимому, единственность может нарушаться. На такое предположение, в частности, наводят свойства соответствующей линейной задачи (см., например, [116]).

4. Выбор знака $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}$ здесь в определенном смысле аналогичен выбору решения задачи без начальных данных с одним граничным условием для линейного уравнения теплопроводности (см. [116], гл. III, §4): в монографии строятся два решения указанной задачи для полубесконечного стержня. Одно из решений является на луче $x > 0$ ограниченным, а второе — неограниченным.

5. Задача (1.1.1), (1.1.2) в случае $\nu = 0$ (плоской симметрии) ранее была подробно изучена А.Ф. Сидоровым [104] и его учениками [8, 16]. В частности, были построены решения в виде специальных рядов и доказаны теоремы существования и единственности локально аналитических решений, аналогичные теореме 1. Однако наличие дополнительного слагаемого в правой части уравнения (1.1.1) при $\nu \neq 0$ не позволяет автоматически перенести доказательство теоремы на случай, который рассматриваются здесь.

6. С.П. Баутин утверждает, что сформулированная выше теорема 1 сводится к теореме 7.1 из работы [8]. Однако обоснование, которое он при этом предлагает [10], во-первых, содержит пробелы [36], а во-вторых, относится только к случаям $\nu = 1, 2$, тогда как теорема 1 справедлива при любых значениях положительных параметра ν, а не только при $\nu = 1, 2$, соответствующих случаям цилиндрической (сферической) симметрии.

7. Теорема 1 в дальнейшем будет использована (см. раздел 1.3) для построения решения начально-краевой задачи об инициировании тепловой волны, движущейся с конечной скоростью по холодному фону. Решения такого типа с точки зрения приложений особенно актуальны для математического описания медленно протекающих процессов диффузии и фильтрации, где существование нулевого фронта, движущегося с конечной скоростью, общеизвестно [5].

Проведем некоторые несложные вспомогательные преобразования задачи (1.1.1), (1.1.2).

Сначала домножим уравнение (1.1.1) на ρ^2. Получаем

$$\rho^2 u_\tau = u(\nu\rho u_\rho + \rho^2 u_{\rho\rho}) + \frac{1}{\sigma}\rho^2 u_\rho^2. \tag{1.1.4}$$

Теперь, чтобы привести краевое условие (1.1.2) к более удобному виду, проведем замену $t = \tau$; $r = \rho - R$. В итоге задача (1.1.1), (1.1.2) принимает вид

$$(r+R)^2 u_t = u\Big[\nu(r+R)u_r + (r+R)^2 u_{rr}\Big] + \frac{1}{\sigma}(r+R)^2 u_r^2, \tag{1.1.5}$$

$$u(t,r)|_{r=0} = f(t). \tag{1.1.6}$$

Задача (1.1.5), (1.1.6) в силу невырожденности и аналитичности преобразований эквивалентна задаче (1.1.1), (1.1.2) при $\rho \neq 0$.

1.2 Доказательство существования аналитического решения

Доказательство проводится поэтапно по следующему плану:

1. В задаче (1.1.5), (1.1.6) делается несколько невырожденных аналитических замен переменных, позволяющих привести ее к специальному (характеристическому) виду: a) сначала в задаче делается замена, переводящая неизвестный пока нулевой фронт в координатную ось, что добавляет в задачу дополнительную искомую функцию и дополнительное краевое условие (равенство нулю функции u на фронте); b) далее в задаче делается замена, меняющая ролями неизвестную

функцию u и одну из независимых переменных (специальный аналог преобразования годографа), что позволяет избавиться от неизвестной функции b и одного из краевых условий; c) следующая замена переводит в координатную ось кривую $u = f(t)$; d) последняя замена представляет собой частичное разложение неизвестной функции в ряд Тейлора, при этом краевое условие вносится в уравнение. Результатом всех этих преобразований является одно уравнение, имеющее вырождение (как и исходное), но для которого мы имеем характеристическую задачу Коши (хзК) специального вида [9, 67, 104].

2. Решение преобразованной задачи строится в виде характеристического ряда по степеням одной переменной, коэффициенты которого определяются однозначно (при выборе знака первого из них).

3. Для полученной хзК строится мажорантная задача, решение которой имеет вид характеристического ряда по степеням одной переменной с однозначно определяемыми коэффициентами. Устанавливается, что он является мажорантным для ряда, полученного на предыдущем этапе.

4. Доказывается сходимость путем построения еще одной мажоранты.

При составлении данного плана за основу взята методика, предложенная в [8].

Этап 1. В задаче (1.1.5), (1.1.6) сделаем замену

$$\begin{cases} \tau = t; \\ s = r - b(t). \end{cases} \tag{1.2.1}$$

в которой b — пока еще неизвестная функция, аналитическая в некоторой окрестности $t = 0$ и удовлетворяющая условиям

$$b(0) = 0, \quad b'(0) > 0,$$

для которой выполняется равенство

$$u(t, r)|_{r=b(t)} = 0. \tag{1.2.2}$$

Якобиан J_1 замены (1.2.1) равен

$$J_1 = \begin{vmatrix} \tau_t & s_t \\ \tau_r & s_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -b_t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

следовательно, замена невырождена.

Производные пересчитаем в соответствии с соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} = \tau_t \frac{\partial}{\partial \tau} + s_t \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \tau} - b_t \frac{\partial}{\partial s};$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \tau_r \frac{\partial}{\partial \tau} + s_r \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}.$$

Получаем следующие формулы:

$$u_t = u_\tau - b_\tau u_s; \quad u_r = u_s; \quad u_{rr} = u_{ss}.$$

Задача (1.1.5), (1.1.6) принимает вид

$$(s+b+R)^2(u_\tau - b' u_s) = u\Big[\nu(s+b+R)u_s + (s+b+R)^2 u_{ss}\Big] + \\ + \frac{1}{\sigma}(s+b+R)^2 u_s^2; \tag{1.2.3}$$

$$u(\tau, s)|_{s=-b(\tau)} = f(\tau); \tag{1.2.4}$$

$$u(\tau, s)|_{s=0} = 0. \tag{1.2.5}$$

Таким образом, мы получили задачу, включающую в себя две неизвестные функции u и b и два краевых условия (1.2.4) и (1.2.5) (преобразованные (1.1.6) и (1.2.2) соответственно).

Теперь в задаче (1.2.3), (1.2.4), (1.2.5) поменяем ролями неизвестную функцию u и независимую переменную s с помощью замены

$$\begin{cases} t = \tau; \\ s = s(\tau, u). \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Замена (1.2.6), являющаяся специальным аналогом преобразования годографа, нужна для того, чтобы избавиться в получившейся задаче от неизвестной функции b. Якобиан J_2 замены равен

$$J_2 = \begin{vmatrix} t_\tau & s_\tau \\ t_u & s_u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s_\tau \\ 0 & s_u \end{vmatrix} = s_u = \frac{1}{u_s}.$$

Докажем, что замена (1.2.6) невырождена. Положим в уравнении (1.2.3) $\tau = s = 0$. С учетом равенств $b(0) = 0$ и (1.2.5) придем к уравнению

$$-R^2 b'(0) u_s|_{\tau=s=0} = \frac{1}{\sigma} R^2 (u_s|_{\tau=s=0})^2,$$

разрешая которое получаем (случай $u_s|_{\tau=s=0} = 0$ приводит к тривиальному решению), что

$$u_s|_{\tau=s=0} = -\sigma b'(0).$$

Так как по условию $b'(0) \neq 0$, то в силу аналитичности функции b неравенство $b' \neq 0$ справедливо в некоторой окрестности $\tau = 0$, и, следовательно, замена невырождена.

Исходя из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial u} = s_u \frac{\partial}{\partial s} + \tau_u \frac{\partial}{\partial \tau} = s_u \frac{\partial}{\partial s},$$

получаем, что производные по s изменяются в соответствии с формулами

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}; \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2} = \frac{1}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}\right) = -\frac{s_{uu}}{s_u^3}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{s_u^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}.$$

Для производной по t имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} = s_t \frac{\partial}{\partial s} + \tau_t \frac{\partial}{\partial \tau} = s_t \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{s_t}{s_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{s_t}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}.$$

В конце концов, мы получаем следующие формулы для производных, входящих в уравнение (1.2.3):

$$u_\tau = -\frac{s_t}{s_u}; \quad u_s = \frac{1}{s_u}; \quad u_{ss} = -\frac{s_{uu}}{s_u^3}.$$

Уравнение (1.2.3) принимает вид

$$(s+b+R)^2\left(-\frac{s_t}{s_u} - \frac{b'}{s_u}\right) = u\Big[\frac{\nu(s+b+R)}{s_u} - \frac{(s+b+R)^2 s_{uu}}{s_u^3}\Big] +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\frac{(s+b+R)^2}{s_u^2}. \tag{1.2.7}$$

Домножим теперь обе части уравнения (1.2.7) на $-s_u^3$. Получаем равенство

$$(s+b+R)^2(s_t+b')s_u^2 = u\Big[-\nu(s+b+R)s_u^2+(s+b+R)^2 s_{uu}\Big]-$$
$$-\frac{s_u}{\sigma}(s+b+R)^2. \tag{1.2.8}$$

Из краевого условия (1.2.4), которое теперь запишется в виде

$$s(t,u)|_{u=f(t)} = -b(t),$$

можно выразить функцию b

$$b(t) = -s(t,u)|_{u=f(t)},$$

а также найти ее производную

$$b' = -s_t|_{u=f} - s_u|_{u=f}f'.$$

После подстановки полученных формул в уравнение (1.2.8) имеем

$$(s-s|_{u=f}+R)^2(s_t-s_t|_{u=f}-s_u|_{u=f}f')s_u^2 =$$
$$= u\Big[-\nu(s-s|_{u=f}+R)s_u^2+(s-s|_{u=f}+R)^2 s_{uu}\Big]-\frac{s_u}{\sigma}(s-s|_{u=f}+R)^2. \tag{1.2.9}$$

Таким образом, мы вновь получили задачу, включающую в себя одну неизвестную функцию s, одно уравнение (1.2.9) и одно краевое условие (1.2.5), которое преобразуется в виде

$$s(t,u)|_{u=0} = 0. \tag{1.2.10}$$

В задаче (1.2.9), (1.2.10) проведем еще одну замену переменных

$$\begin{cases} v = u; \\ w = u - f(t) \end{cases} \tag{1.2.11}$$

для того, чтобы сделать $u = f(t)$ новой координатной осью $w = 0$.

Якобиан J_3 замены (1.2.11) равен

$$J_3 = \begin{vmatrix} v_t & w_t \\ v_u & w_u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -f' \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = f'.$$

По условию теоремы функция $f'(t)$ аналитична, и справедливо неравенство $f'(0) > 0$. Следовательно, $f'(t) > 0$ в некоторой окрестности $t = 0$, а значит и замена в этой окрестности невырождена.

Недостаток замены (1.2.11) заключается в том, что она не дает явного выражения для переменной t. Для того, чтобы полностью выразить старые переменные через новые, нам придется воспользоваться теоремой о неявной функции. Забегая вперед, укажем, что именно из-за этого нам далее потребуется дополнительный раздел, в котором решение задачи (1.1.5), (1.1.6) будет построено в явном виде по степеням физических перменных.

Запишем второе соотношение замены (1.2.11) в виде

$$\Psi(v - w, t) \equiv v - w - f(t) = 0. \tag{1.2.12}$$

Продифференцировав Ψ по t, получаем, что $\Psi_t = -f'$. Как уже отмечалось выше, в некоторой окрестности $t = 0$ справедливо неравенство $f' > 0$, т. е. можно утверждать, что в этой окрестности $\Psi_t < 0$. Следовательно, по теореме о неявной функции, соотношение (1.2.12) определяет аналитическую функцию

$$t = \psi(v - w).$$

Причем, так как $f(0) = 0$, то и $\psi(v - w)$ обращается в нуль при $v = w$.

Чтобы сделать дальнейшую запись менее громоздкой, введем обозначение

$$F(v - w) = -f'(t)|_{t=\psi(v-w)}.$$

Отметим, что в силу аналитичности функции F справедливо представление

$$F(v - w) = F_0(w) + vF_1(v, w).$$

При этом

$$F_0 = F|_{v=0}, \quad F_0|_{w=0} = -f'(0) = -f_1.$$

Теперь пересчитаем производные в уравнении (1.2.9). Производные преобразуются в соответствии с формулами

$$\frac{\partial}{\partial t} = v_t \frac{\partial}{\partial v} + w_t \frac{\partial}{\partial w} = -f' \frac{\partial}{\partial w} = F \frac{\partial}{\partial w};$$

$$\frac{\partial}{\partial u} = v_u \frac{\partial}{\partial v} + w_u \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2}.$$

Отсюда следует, что окончательно производные преобразуются в виде

$$s_t = F s_w; \quad s_u = s_v + s_w; \quad s_{uu} = s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww}.$$

Таким образом, после замены (1.2.11) задача (1.2.9), (1.2.10) примет вид

$$(s - s|_{w=0} + R)^2 [F s_w - (F s_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0} F](s_v + s_w)^2 =$$
$$= v\Big[-\nu(s - s|_{w=0} + R)(s_v + s_w)^2 + (s - s|_{w=0} + R)^2 (s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww})\Big] -$$
$$- \frac{s_v + s_w}{\sigma}(s - s|_{w=0} + R)^2; \tag{1.2.13}$$

$$s(v,w)|_{v=0} = 0. \tag{1.2.14}$$

Перед тем как построить мажорантную задачу, сделаем в задаче (1.2.13), (1.2.14) последнюю замену. Так как мы доказываем существование аналитического решения, представим неизвестную функцию s в виде частичного разложения в ряд по степеням v:

$$s(v,w) = s_0(w) + v s_1(w) + v^2 S(v,w).$$

Из условия (1.2.14) следует, что $s_0 \equiv 0$. Остается определить функцию $s_1 = s_v|_{v=0}$. Для этого положим в уравнении (1.2.13) $v = 0$. С учетом равенств

$$s|_{v=0} = s_w|_{v=0} = 0,$$

$$F|_{v=0} = F_0, \quad F|_{v=w=0} = -f_1,$$

получаем уравнение
$$R^2 s_1|_{w=0} F_0 s_1^2 = -\frac{s_1}{\sigma} R^2.$$
Предполагая, что $s_1 \neq 0$, поделим обе части уравнения на $R^2 s_1$. Получаем равенство
$$s_1|_{w=0} F_0 s_1 = -\frac{1}{\sigma}. \qquad (1.2.15)$$
Положив в (1.2.15) $w = 0$, мы сможем найти функцию $s_{1,0} = s_1|_{w=0} = s_v|_{v=w=0}$
$$-s_{1,0}^2 f_1 = -\frac{1}{\sigma}.$$
Отсюда
$$s_{1,0}^2 = \frac{1}{\sigma f_1}.$$
Получаем, что $s_{1,0}$ определяется двояко по формуле
$$s_{1,0} = \pm\frac{1}{\sqrt{\sigma f_1}}.$$

Как будет показано далее (см. следствие 1), выбор знака у $s_{1,0}$ при построении тепловой волны определяет направление движения теплового фронта: при $s_{1,0} > 0$ — во внутреннюю область многообразия, на котором заданы краевые условия, при $s_{1,0} < 0$ — во внешнюю. В данном случае выбор знака у $s_{1,0}$ имеет более существенное значение, чем, например, в случае $\nu = 0$ [8], так как задача (1.1.5), (1.1.6) имеет особенность в точке $\rho = R$, и при $s > 0$ тепловая волна будет приближаться к особой точке. Ниже мы будем рассматривать случай, когда $s_{1,0} < 0$. Второй случай рассматривается аналогично.

Из формулы (1.2.15) определим s_1:
$$s_1 = \frac{\sqrt{\sigma f_1}}{\sigma F_0}. \qquad (1.2.16)$$

Теперь в уравнение (1.2.13) остается подставить разложение
$$s(v, w) = v s_1(w) + v^2 S(v, w), \qquad (1.2.17)$$
предполагая, что $S(v, w)$ — новая неизвестная функция. Пересчитывая производные, получаем следующие формулы:
$$s_v = s_1 + 2vS + v^2 S_v; \quad s_{vv} = 2S + 4vS_v + v^2 S_{vv};$$

$$s_w = vs_{1w} + v^2 S_w; \quad s_{ww} = vs_{1ww} + v^2 S_{ww};$$

$$s_{vw} = s_{1w} + 2vS_w + v^2 S_{vw}.$$

Получаем, что после замены (1.2.17) уравнение (1.2.13) запишется в виде

$$[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R]^2 \times$$

$$\times [F(vs_{1w} + v^2 S_w) - (vs_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0} F|_{w=0} +$$

$$+(s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0} F](s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)^2 =$$

$$= v\Big\{ -\nu[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R](s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)^2 +$$

$$+[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R]^2 \times$$

$$\times [2S + 4vS_v + v^2 S_{vv} + 2(s_{1w} + 2vS_w + v^2 S_{vw}) + vs_{1ww} + v^2 S_{ww}]\Big\} -$$

$$-\frac{s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w}{\sigma}[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R]^2; \quad (1.2.18)$$

Теперь приведем уравнение (1.2.18) к более удобному для построения мажорантной задачи виду. Сначала найдем в левой и правой частях уравнения (1.2.18) слагаемые, не зависящие от v (как будет показано ниже, они равны между собой и сокращаются). Помня о равенстве $F = F_0 + vF_1$, преобразуем левую часть:

$$[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R]^2 [F(vs_{1w} + v^2 S_w) - (vs_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0} F|_{w=0} +$$

$$+(s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0} F] \times$$

$$\times (s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)^2 = R^2 F_0 s_{1,0} s_1^2 + v\alpha_0.$$

Здесь α_0 определяется по формуле

$$\alpha_0 = \Big\{ 2R[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0}] + v[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0}]^2 \Big\} \alpha_{0,1} +$$

$$+R^2 \Big[F(s_{1w} + vS_w) - (s_{1w} + vS_w)|_{w=0} F|_{w=0} + s_{1,0} F_1 +$$

$$+(2S + vS_v + s_{1w} + vS_w)|_{w=0} F \Big] \alpha_{0,2} +$$

$$+R^2 F_0 s_{1,0} \Big[2s_1(2S + vS_v + s_{1w} + vS_w) + v(2S + vS_v + s_{1w} + vS_w)^2 \Big],$$

в которой за $\alpha_{0,1}$ и $\alpha_{0,2}$ обозначены выражения

$$\alpha_{0,1} = \Big[F(vs_{1w} + v^2S_w) - (vs_{1w} + v^2S_w)|_{w=0}F|_{w=0} + s_{1,0}F +$$
$$+(2vS + v^2S_v + vs_{1w} + v^2S_w)|_{w=0}F\Big]\alpha_{0,2};$$
$$\alpha_{0,2} = s_1^2 + 2s_1(2vS + v^2S_v + vs_{1w} + v^2S_w) + (2vS + v^2S_v + vs_{1w} + v^2S_w)^2.$$

В правой части уравнения (1.2.18) слагаемые, не зависящие от v, могут содержаться лишь в выражении при множителе $-1/\sigma$. Для этого выражения получаем

$$-\frac{s_1 + 2vS + v^2S_v + vs_{1w} + v^2S_w}{\sigma}[vs_1 + v^2S - (vs_1 + v^2S)|_{w=0} + R]^2 =$$
$$= -\frac{R^2s_1}{\sigma} + v\alpha_1.$$

Здесь α_1 имеет вид

$$\alpha_1 = -\frac{2S + vS_v + s_{1w} + vS_w}{\sigma}[vs_1 + v^2S - (vs_1 + v^2S)|_{w=0} + R]^2 -$$
$$-\frac{s_1}{\sigma}\Big\{2R[s_1 + vS - (s_1 + vS)|_{w=0}] + v[s_1 + vS - (s_1 + vS)|_{w=0}]^2\Big\}.$$

Теперь уравнение (1.2.18) можно записать в виде

$$R^2F_0s_{1,0}s_1^2 + v\alpha_0 =$$
$$= v\Big\{-\nu[vs_1 + v^2S - (vs_1 + v^2S)|_{w=0} + R](s_1 + 2vS + v^2S_v + vs_{1w} + v^2S_w)^2 +$$
$$+[vs_1 + v^2S - (vs_1 + v^2S)|_{w=0} + R]^2 \times$$
$$\times[2S + 4vS_v + v^2S_{vv} + 2(s_{1w} + 2vS_w + v^2S_{vw}) + vs_{1ww} + v^2S_{ww}]\Big\} -$$
$$-\frac{R^2s_1}{\sigma} + v\alpha_1. \tag{1.2.19}$$

Заметим, что слагаемые, не зависящие от переменной v, в левой и правой частях уравнения равны между собой. Действительно, преобразовав с учетом (1.2.16) слагаемое в левой части, получим

$$R^2F_0s_{1,0}s_1^2 = R^2F_0\left(-\frac{1}{\sqrt{\sigma f_1}}\right)\frac{\sqrt{\sigma f_1}}{\sigma F_0}s_1 = -R^2\frac{s_1}{\sigma}.$$

После приведения подобных и деления на v уравнение (1.2.19) запишется в виде

$$\alpha_0 =$$

$$= -\nu[vs_1 + v^2S - (vs_1 + v^2S)|_{w=0} + R](s_1 + 2vS + v^2S_v + vs_{1w} + v^2S_w)^2 +$$
$$+[vs_1 + v^2S - (vs_1 + v^2S)|_{w=0} + R]^2 \times$$
$$\times [2S + 4vS_v + v^2S_{vv} + 2(s_{1w} + 2vS_w + v^2S_{vw}) + vs_{1ww} + v^2S_{ww}] + \alpha_1. \quad (1.2.20)$$

Выделим теперь в уравнении (1.2.20) слагаемые, зависящие от выражений вида

$$v^i \frac{\partial^j S}{\partial v^j}, \quad i \le j, \quad i, j \in N. \quad (1.2.21)$$

Сразу скажем, что для нашего уравнения это будут выражения S, $S|_{w=0}$, vS_v, $vS_v|_{w=0}$, v^2S_{vv}. Цель такого преобразования станет понятной на втором этапе доказательства, а именно, при построении формального решения уравнения (1.2.18).

Рассмотрим левую часть уравнения. Функция α_0 определяется по формуле

$$\alpha_0 = \Big\{2R[vs_1 + v^2S - (vs_1 + v^2S)|_{w=0}] + v[vs_1 + v^2S - (vs_1 + v^2S)|_{w=0}]^2\Big\}\alpha_{0,1} +$$
$$+R^2\Big[F(s_{1w} + vS_w) - (s_{1w} + vS_w)|_{w=0}F|_{w=0} + s_{1,0}F_1 +$$
$$+(2S + vS_v + s_{1w} + vS_w)|_{w=0}F\Big]\alpha_{0,2} +$$
$$+R^2F_0s_{1,0}\Big[2s_1(2S + vS_v + s_{1w} + vS_w) + v(2S + vS_v + s_{1w} + vS_w)^2\Big].$$

Первое слагаемое не зависит от выражений вида (1.2.21). Рассмотрим второе слагаемое

$$R^2\Big[F(s_{1w} + vS_w) - (s_{1w} + vS_w)|_{w=0}F|_{w=0} + s_{1,0}F_1 +$$
$$+(2S + vS_v + s_{1w} + vS_w)|_{w=0}F\Big]\alpha_{0,2} =$$
$$= R^2(2S + vS_v)|_{w=0}F_0\alpha_{0,2} +$$
$$+R^2\Big[F(s_{1w} + vS_w) - (s_{1w} + vS_w)|_{w=0}F|_{w=0} + s_{1,0}F_1 +$$
$$+(s_{1w} + vS_w)|_{w=0}F + (2S + vS_v)|_{w=0}vF_1\Big]\alpha_{0,2} =$$
$$= R^2(2S + vS_v)|_{w=0}F_0s_1^2 +$$
$$+R^2(2S + vS_v)|_{w=0}F_0\Big[2s_1(2vS + v^2S_v + vs_{1w} + v^2S_w) +$$

$$+(2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)^2\Big]+R^2\Big[F(s_{1w}+vS_w)-(s_{1w}+vS_w)|_{w=0}F|_{w=0}+$$
$$+s_{1,0}F_1+(s_{1w}+vS_w)|_{w=0}F+(2S+vS_v)|_{w=0}vF_1\Big]\alpha_{0,2}.$$

Третье слагаемое запишем в виде

$$R^2F_0s_{1,0}\Big[2s_1(2S+vS_v+s_{1w}+vS_w)+v(2S+vS_v+s_{1w}+vS_w)^2\Big]=$$
$$=2R^2F_0s_{1,0}s_1(2S+vS_v+s_{1w}+vS_w)+R^2F_0s_{1,0}v(2S+vS_v+s_{1w}+vS_w)^2=$$
$$=2R^2F_0s_{1,0}s_1(2S+vS_v)+2R^2F_0s_{1,0}s_1(s_{1w}+vS_w)+$$
$$+R^2F_0s_{1,0}v(2S+vS_v+s_{1w}+vS_w)^2.$$

Получаем, что функцию α_0 можно представить в виде

$$\alpha_0=R^2(2S+vS_v)|_{w=0}F_0s_1^2+2R^2F_0s_{1,0}s_1(2S+vS_v)+\alpha_{0,3},$$

в котором $\alpha_{0,3}$ определяется по формуле

$$\alpha_{0,3}=\Big\{2R[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}]+v[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}]^2\Big\}\alpha_{0,1}+$$
$$+R^2(2S+vS_v)|_{w=0}F_0\Big[2s_1(2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)+$$
$$+(2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)^2\Big]+$$
$$+R^2\Big[F(s_{1w}+vS_w)-(s_{1w}+vS_w)|_{w=0}F|_{w=0}+s_{1,0}F_1+$$
$$+(s_{1w}+vS_w)|_{w=0}F+(2S+vS_v)|_{w=0}vF_1\Big]\alpha_{0,2}+$$
$$+2R^2F_0s_{1,0}s_1(s_{1w}+vS_w)+R^2F_0s_{1,0}v(2S+vS_v+s_{1w}+vS_w)^2.$$

Рассмотрим теперь правую часть уравнения (1.2.20):

$$-\nu[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}+R](s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)^2+$$
$$+[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}+R]^2\times$$
$$\times[2S+4vS_v+v^2S_{vv}+2(s_{1w}+2vS_w+v^2S_{vw})+vs_{1ww}+v^2S_{ww}]+\alpha_1.$$

От выражений вида (1.2.21) могут зависеть только 2-ое и 3-е слагаемые. Рассмотрим их по отдельности. Второе слагаемое можно записать в виде

$$[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}+R]^2[2S+4vS_v+v^2S_{vv}+2(s_{1w}+2vS_w+v^2S_{vw})+$$

$$+vs_{1ww}+v^2S_{ww}] = [vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}+R]^2[2S+4vS_v+v^2S_{vv}]+$$
$$+[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}+R]^2[2(s_{1w}+2vS_w+v^2S_{vw})+vs_{1ww}+v^2S_{ww}] =$$
$$= R^2[2S+4vS_v+v^2S_{vv}]+\alpha_2,$$

в котором α_2 определяется по формуле

$$\alpha_2 = 2R[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}][2S+4vS_v+v^2S_{vv}]+$$
$$+[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}]^2[2S+4vS_v+v^2S_{vv}]+$$
$$+[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}+R]^2[2(s_{1w}+2vS_w+v^2S_{vw})+vs_{1ww}+v^2S_{ww}].$$

Для третьего слагаемого α_1 получаем равенство

$$\alpha_1 = -\frac{2S+vS_v+s_{1w}+vS_w}{\sigma}[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}+R]^2-$$
$$-\frac{s_1}{\sigma}\Big\{2R[s_1+vS-(s_1+vS)|_{w=0}]+v[s_1+vS-(s_1+vS)|_{w=0}]^2\Big\} =$$
$$= -\frac{2S+vS_v}{\sigma}R^2+\alpha_{1,1}.$$

Функция $\alpha_{1,1}$ определяется по формуле

$$\alpha_{1,1} = -2R\frac{2S+vS_v+s_{1w}+vS_w}{\sigma}[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}]-$$
$$-\frac{2S+vS_v+s_{1w}+vS_w}{\sigma}[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}]^2-$$
$$-\frac{s_1}{\sigma}\Big\{2R[s_1+vS-(s_1+vS)|_{w=0}]+v[s_1+vS-(s_1+vS)|_{w=0}]^2\Big\}.$$

В итоге уравнение (1.2.20) запишется в виде

$$R^2(2S+vS_v)|_{w=0}F_0s_1^2+2R^2F_0s_{1,0}s_1(2S+vS_v)+\alpha_{0,3} =$$
$$= -\nu[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}+R](s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)^2+$$
$$+R^2[2S+4vS_v+v^2S_{vv}]+\alpha_2-\frac{2S+vS_v}{\sigma}R^2+\alpha_{1,1}. \qquad (1.2.22)$$

Преобразуя уравнение (1.2.22), получаем

$$\nu[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}+R](s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)^2+$$
$$+\alpha_{0,3}-\alpha_2-\alpha_{1,1} = R^2[2S(1-2F_0s_{1,0}s_1-\frac{1}{\sigma})+$$
$$+vS_v(4-2F_0s_{1,0}s_1-\frac{1}{\sigma})+v^2S_{vv}]-R^2(2S+vS_v)|_{w=0}F_0s_1^2,$$

или, после деления на R^2,

$$\frac{\nu}{R^2}[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R](s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)^2 +$$

$$+\frac{1}{R^2}[\alpha_{0,3} - \alpha_2 - \alpha_{1,1}] = 2S(1 - 2F_0 s_{1,0} s_1 - \frac{1}{\sigma}) +$$

$$+ vS_v(4 - 2F_0 s_{1,0} s_1 - \frac{1}{\sigma}) + v^2 S_{vv} - (2S + vS_v)|_{w=0} F_0 s_1^2. \qquad (1.2.23)$$

Заметим, что левая часть уравнения (1.2.23) представима в виде $h_0(v,w) + vh_1 + v^2 h_2$, в котором

$$h_1 = h_1(v, w, S, S|_{w=0}, S_w, S_w|_{w=0});$$

$$h_2 = h_2(v, w, S, S|_{w=0}, S_w, S_w|_{w=0}, S_{ww}, S_v, S_{vw}).$$

В силу справедливости равенств

$$1 - 2F_0 s_{1,0} s_1 - \frac{1}{\sigma} = 1 - 2F_0 \left(-\frac{1}{\sqrt{\sigma f_1}}\right) \frac{\sqrt{\sigma f_1}}{\sigma F_0} - \frac{1}{\sigma} = 1 + \frac{2}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} = 1 + \frac{1}{\sigma};$$

$$4 - 2F_0 s_{1,0} s_1 - \frac{1}{\sigma} = 4 + \frac{2}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} = 4 + \frac{1}{\sigma};$$

$$F_0 s_1^2 = F_0 \frac{\sqrt{\sigma f_1}}{\sigma F_0} s_1 = \frac{\sqrt{\sigma f_1}}{\sigma} s_1 = -\frac{1}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}};$$

получаем, что уравнение (1.2.23) можно записать в виде

$$2\Big(1 + \frac{1}{\sigma}\Big)S + \Big(4 + \frac{1}{\sigma}\Big)vS_v + v^2 S_{vv} + \frac{2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S|_{w=0}) + \frac{1}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}} v(S_v|_{w=0}) =$$

$$= h_0(v,w) + vh_1 + v^2 h_2, \qquad (1.2.24)$$

Таким образом, после замены (1.2.17) задача (1.2.13), (1.2.14) свелась к одному уравнению (1.2.24). Поскольку все выполненные преобразования были невырожденными и локально аналитичными, уравнение (1.2.24) эквивалентно задаче (1.1.5), (1.1.6), по крайней мере, в некоторой малой окрестности точки $t = 0$, $r = 0$.

Для уравнения (1.2.24) несложно определить значения $S(0,w) = S_0$ и $S_v(0,w) = S_1$. Для этого положим в уравнении (1.2.24) $v = 0$. Получаем

$$2\Big(1 + \frac{1}{\sigma}\Big)S_0 + \frac{2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S_0|_{w=0}) = h_0(0,w).$$

Положив в последнем равенстве $w = 0$, получим, что

$$S_0|_{w=0} = \left(2 + \frac{4}{\sigma}\right)^{-1} h_0(0,0).$$

Отсюда находим S_0:

$$S_0 = \left(2 + \frac{2}{\sigma}\right)^{-1}\left[h_0(0,w) - \frac{2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}\left(2 + \frac{4}{\sigma}\right)^{-1} h_0(0,0)\right]. \tag{1.2.25}$$

Функцию S_1 найдем, продифференцировав уравнение (1.2.24) по v и положив $v = 0$:

$$2\left(1+\frac{1}{\sigma}\right)S_1+\left(4+\frac{1}{\sigma}\right)S_1+\frac{2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S_1|_{w=0})+\frac{1}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S_1|_{w=0}) = h_{0v}(0,w)+h_1|_{v=0}.$$

Преобразуя последнее уравнение, получаем

$$\left(6 + \frac{3}{\sigma}\right)S_1 + \frac{3}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S_1|_{w=0}) = h_{0v}(0,w) + h_1|_{v=0}.$$

Полагая $w = 0$, найдем $S_1|_{w=0}$:

$$S_1|_{w=0} = \left(6 + \frac{6}{\sigma}\right)^{-1}[h_{0v}(0,0) + h_1|_{v=w=0}].$$

Получаем, что S_1 определяется по формуле

$$S_1 = \left(6 + \frac{3}{\sigma}\right)^{-1}\Big\{h_{0v}(0,w) + h_1|_{v=0} -$$
$$- \frac{3}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}\left(6 + \frac{6}{\sigma}\right)^{-1}[h_{0v}(0,0) + h_1|_{v=w=0}]\Big\}. \tag{1.2.26}$$

Таким образом, получена характеристическая задача Коши (хзК) специального (т. е. не являющаяся хзК стандартного вида [9]) для уравнения второго порядка (1.2.24) с условиями $S(0,w) = S_0$ и $S_v(0,w) = S_1$, где S_0 и S_1 определяются по формулам (1.2.25) и (1.2.26) соответственно.

Задача (1.2.24), (1.2.25), (1.2.26) имеет особенность при $v = 0$, однако на последующих этапах эта особенность будет раскрыта и показано, что она является устранимой. Отметим, что исследование задач с данными на характеристиках является одним из классических направлений теории дифференциальных уравнений с частными производными со времен Б. Римана [87].

Этап 2. Построим теперь решение уравнения (1.2.24) в виде ряда

$$S(v,w) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(w)\frac{v^k}{k!}; \tag{1.2.27}$$

$$S_k(w) = \frac{\partial^k S}{\partial v^k}\Big|_{v=0}.$$

Коэффициенты S_0 и S_1 были определены на предыдущем этапе доказательства.

Чтобы определить S_k, $k \geq 2$, продифференцируем уравнение (1.2.24) k раз по v и положим $v = 0$. При этом будем пользоваться формулой

$$\frac{\partial^k(\alpha\beta)}{\partial v^k} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^i \alpha}{\partial v^i}\frac{\partial^{k-i}\beta}{\partial v^{k-i}}, \tag{1.2.28}$$

справедливость которой можно без труда доказать индукцией по k. Получаем уравнение

$$2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)S_k + \Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)\sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^i v}{\partial v^i}\Big|_{v=0}\frac{\partial^{k-i}S_v}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0} +$$

$$+\sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^i (v^2)}{\partial v^i}\Big|_{v=0}\frac{\partial^{k-i}S_{vv}}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0} + \frac{2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S_k|_{w=0})+$$

$$+\frac{1}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^i v}{\partial v^i}\Big|_{v=0}\frac{\partial^{k-i}S_v}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=w=0} =$$

$$= \frac{\partial^k h_0}{\partial v^k}\Big|_{v=0} + \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^i v}{\partial v^i}\Big|_{v=0}\frac{\partial^{k-i}h_1}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0} + \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\partial^i (v^2)}{\partial v^i}\Big|_{v=0}\frac{\partial^{k-i}h_2}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0},$$

которое, с учетом того, что

$$\frac{\partial^i v^j}{\partial v^i}\Big|_{v=0} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ j!, & i = j, \quad i,j \in N \end{cases}$$

запишется в виде

$$2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)S_k + \Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)kS_k + (k-1)kS_k + \frac{2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S_k|_{w=0})+$$

$$+\frac{1}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}k(S_k|_{w=0}) =$$

$$= \frac{\partial^k h_0}{\partial v^k}\Big|_{v=0} + k\frac{\partial^{k-1}h_1}{\partial v^{k-1}}\Big|_{v=0} + (k-1)k\frac{\partial^{k-2}h_2}{\partial v^{k-2}}\Big|_{v=0}. \tag{1.2.29}$$

В силу свойств функций h_i, $i = 0, 1, 2$, правая часть уравнения (1.2.29) может зависеть лишь от S_0, S_1, ... ,S_{k-1}. Смысл приведения уравнения

(1.2.18) к виду (1.2.24) заключался в том, чтобы выделить в нем те слагаемые, которые при построении решения в виде ряда (1.2.27) могут дать k-й коэффициент.

Теперь, полагая в (1.2.29) $w = 0$, находим $S_k|_{w=0}$

$$S_k|_{w=0} = \frac{1}{\xi_k + (k+2)/\sigma} \sum_{i=0}^{2} \frac{k!}{(k-i)!} \frac{\partial^{k-i} h_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=w=0}.$$

Здесь за ξ_k обозначено число

$$\xi_k = 2\Big(1 + \frac{1}{\sigma}\Big) + \Big(4 + \frac{1}{\sigma}\Big)k + (k-1)k.$$

Подставляя в (1.2.29) функцию $S_k|_{w=0}$, получим, что

$$S_k = \frac{1}{\xi_k}\Big[- \frac{k+2}{\sigma} \frac{s_1}{s_{1,0}} \frac{1}{(\xi_k + (k+2)/\sigma)} \sum_{i=0}^{2} \frac{k!}{(k-i)!} \frac{\partial^{k-i} h_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=w=0} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2} \frac{k!}{(k-i)!} \frac{\partial^{k-i} h_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0}\Big]. \qquad (1.2.30)$$

Таким образом, мы построили решение уравнения (1.2.24) в виде формального степенного ряда (1.2.27), коэффициенты которого определяются однозначно (при выбранном знаке s_1) по формулам (1.2.25), (1.2.26), (1.2.30). Далее с помощью метода мажорант мы докажем его сходимость.

Этап 3. В начале построим мажорантное уравнение, которое уже не будет включать в себя слагаемые, зависящие от значений неизвестных функций при $w = 0$. Покажем, что уравнение вида

$$2\Big(1 + \frac{1}{\sigma}\Big)Z + \Big(4 + \frac{1}{\sigma}\Big)vZ_v + v^2 Z_{vv} = [1 + B(w)]H, \qquad (1.2.31)$$

является мажорантным для уравнения (1.2.24), если

$$B(w) \gg -\frac{s_1}{s_{1,0}}, \; H = H_0 + vH_1 + v^2 H_2 \gg h_0 + vh_1 + v^2 h_2.$$

Здесь

$$H_0 = H_0(v, w);$$

$$H_1 = H_1(v, w, Z, Z_w);$$

$$H_2 = H_2(v, w, Z, Z_w, Z_{ww}, Z_v, Z_{vw}).$$

Для этого построим решение уравнения (1.2.31) в виде ряда

$$Z(v,w)=\sum_{k=0}^{\infty}Z_k(w)\frac{v^k}{k!},\;\; Z_k(w)=\frac{\partial^k Z}{\partial v^k}\Big|_{v=0}. \qquad (1.2.32)$$

Вычисляя коэффициенты также, как и на этапе 2, получаем следующие формулы для Z_0 и Z_1:

$$Z_0=\Big(2+\frac{2}{\sigma}\Big)(1+B)H_0|_{v=0},$$

$$Z_1=\Big(6+\frac{3}{\sigma}\Big)(1+B)(H_{0v}+H_1)|_{v=0}.$$

Для $k>1$ имеем

$$Z_k=\frac{1}{\xi_k}(1+B)\sum_{i=0}^{2}\frac{k!}{(k-i)!}\frac{\partial^{k-i}H_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0}.$$

Покажем теперь, что $Z_k \gg S_k$. При этом будем пользоваться нижеследующими свойствами мажорант.

Замечание 2. Пусть для функций $Q(x_1,...,x_n)$, $q(x_1,...,x_n)$, $Q_1(x_1,...,x_n)$ и $q_1(x_1,...,x_n)$ выполняются следующие оценки:

$$Q\gg q,\;\; Q_1\gg q_1.$$

Тогда

1. $Q+Q_1\gg q+q_1$.
2. Если ζ — положительная константа, то $\zeta Q\gg \zeta q$.
3. Если η — константа, причем $|\eta|\le 1$, то $Q\gg \eta q$.
4. $Q_{x_i}\gg q_{x_i}$.
5. $Q(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)\gg q(x_1,...,x_{i-1},0,x_{i+1},...,x_n)$.

Рассмотрим правую часть (1.2.30). Так как, по определению,

$$B\gg -\frac{s_1}{s_{1,0}},$$

а число $\xi_k>1$, то справедлива оценка

$$-\frac{k+2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}\frac{1}{(\xi_k+(k+2)/\sigma)}=-\frac{s_1}{s_{1,0}}\frac{(k+2)/\sigma}{(\xi_k+(k+2)/\sigma)}\ll B.$$

В силу справедливости соотношений

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{k!}{(k-i)!} \frac{\partial^{k-i} h_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0} \ll \sum_{i=0}^{2} \frac{k!}{(k-i)!} \frac{\partial^{k-i} H_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0};$$

$$\sum_{i=0}^{2} \frac{k!}{(k-i)!} \frac{\partial^{k-i} h_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=w=0} \ll \sum_{i=0}^{2} \frac{k!}{(k-i)!} \frac{\partial^{k-i} H_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0},$$

получаем, что

$$S_k \ll \frac{1}{\xi_k}(1+B) \sum_{i=0}^{2} \frac{k!}{(k-i)!} \frac{\partial^{k-i} H_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0} = Z_k.$$

Используя аналогичные рассуждения, нетрудно показать, что $S_0 \ll Z_0$ и $S_1 \ll Z_1$. Таким образом, мы доказали, что решение уравнения (1.2.31) мажорирует решение уравнения (1.2.24).

Осталось доказать, что ряд (1.2.32) сходится. Этому посвящен 4-й этап доказательства теоремы.

Этап 4. Поскольку на финальном этапе в основном используются известные преобразования, то будем кратки в рассуждениях.

В работе [8] после проведения ряда замен получено уравнение (4.30) и мажорантное для него уравнение (5.9), аналогичные уравнениям (1.2.24) и (1.2.31) соответственно, и показывается, что решение уравнения (5.9) мажорируется решением задачи Коши с аналитическими начальными данными для уравнения типа Ковалевской (с. 50–51).

Аналогичным образом, можно показать, что решение уравнения (1.2.31) мажорируется решением нижеследующей задачей Коши:

$$Z_{vv} = [1 + B(w)](H_{0vv} + H_{1v} + H_2); \tag{1.2.33}$$

$$Z_v|_{v=0} = Z_1, \ Z|_{v=0} = Z_0, \tag{1.2.34}$$

для которой выполнены все условия теоремы Коши-Ковалевской и решение которой мажорирует нуль. Подробные выкладки, которые это обосновывают, для полноты изложения приводятся в Приложении 5.

Из того, что задача (1.2.33), (1.2.34) имеет единственное аналитическое мажорирующее нуль решение следует по построению сходимость ряда (1.2.32), откуда, в свою очередь, вытекает сходимость ряда (1.2.27), сумма которого является решением уравнения (1.2.24). Поскольку, как уже отмечалось, последнее эквивалентно задаче (1.1.5), (1.1.6) (получено из него после серии невырожденных аналитических преобразований в результате одного из которых, (1.2.17), граничное условие включено в дифференциальное уравнение), получаем, что утверждение теоремы 1 справедливо.

1.3 Построение решения в виде ряда

Доказанная в предыдущем разделе теорема, фактически, обеспечивает лишь существование и единственность аналитического решения краевой задачи (1.1.1), (1.1.2), не позволяя построить решение в явном виде. Опираясь на формулы, полученные при доказательстве, проблематично получить какое-либо представление о самом решении и его свойствах в силу большого количества сложных преобразований и использования теоремы о неявной функции. Ниже будет приведена конструктивная схема построения решения задачи (1.1.1), (1.1.2) в виде ряда по физическим переменным. Полученные при этом формулы, в частности, могут быть использованы для выполнения численных расчетов. Кроме того, в данном разделе формулируется и доказывается утверждение о существовании у рассматриваемой задачи решения типа аналитической тепловой волны.

Для удобства перепишем исходную задачу (1.1.5), (1.1.6) в этом разделе в виде

$$(r+R)^2 u_t = u\Big[\nu(r+R)u_r + (r+R)^2 u_{rr}\Big] + \frac{1}{\sigma}(r+R)^2 u_r^2, \tag{1.3.1}$$

$$u(t,r)|_{r=0} = f(t). \tag{1.3.2}$$

Для задачи (1.3.1), (1.3.2) построим решение в виде кратного степенного ряда

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}\frac{t^n}{n!}\frac{r^m}{m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}\frac{\tau^n}{n!}\frac{(\rho-R)^m}{m!}, \tag{1.3.3}$$

в котором
$$u_{n,m} = \frac{\partial^{n+m} u(t,r)}{\partial t^n \partial r^m}\Big|_{\substack{t=0\\r=0}}.$$

По условию теоремы 1, для функции $f(t)$ в некоторой окрестности $t = 0$ справедливо разложение
$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{t^n}{n!}.$$
Из условия (1.3.3) можно определить коэффициенты $u_{n,0}$
$$u(t,r)|_{r=0} = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m} \frac{t^n}{n!}\frac{r^m}{m!}\Big|_{r=0} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,0} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{t^n}{n!}.$$
Отсюда видно, что $u_{n,0} = f_n$. В частности, так как $f(0) = 0$, то $u_{0,0} = f_0 = 0$.

Далее коэффициенты ряда (1.3.3) будут определяться «послойно»: мы уже определили $u_{n,m}$ при $n+m = 0$, затем определим $u_{n,m}$ такие, что $n+m = 1$ и т. д. Чтобы определить коэффициент $u_{0,1}$, положим в уравнении (1.3.1) $t = r = 0$. С учетом того, что $u|_{t=r=0} = u_{0,0} = 0$, получаем уравнение
$$R^2 u_{1,0} = \frac{R^2}{\sigma} u_{0,1}^2,$$
из которого видно, что $u_{0,1}$ определяется двояко по формуле
$$u_{0,1} = \pm\sqrt{\sigma f_1}.$$
Далее мы будем рассматривать случай
$$u_{0,1} = -\sqrt{\sigma f_1} < 0.$$
Случай, когда коэффициент $u_{0,1}$ положителен рассматривается аналогично.

Таким образом, мы определили все коэффициенты порядка 1 (условимся называть порядком коэффициента $u_{n,m}$ сумму индексов $n + m$).

Продифференцируем теперь уравнение (1.3.1) по t и положим $t = r = 0$. Получим равенство
$$R^2 u_{2,0} = u_{1,0}(\nu R u_{0,1} + R^2 u_{0,2}) + \frac{2}{\sigma} R^2 u_{0,1} u_{1,1}$$

или, что одно и то же,

$$R^2 f_2 = \nu R f_1 u_{0,1} + R^2 f_1 u_{0,2} + \frac{2}{\sigma} R^2 u_{0,1} u_{1,1}.$$

Продифференцировав уравнение (1.3.1) по r и положив $t = r = 0$, получим уравнение

$$2Rf_1 + R^2 u_{1,1} = u_{0,1}(\nu R u_{0,1} + R^2 u_{0,2}) + \frac{1}{\sigma}(2Ru_{0,1}^2 + 2R^2 u_{0,1} u_{0,2}),$$

приводя подобные и раскрывая скобки в котором, получаем

$$R^2 u_{1,1} = \nu\sigma R f_1 + R^2 u_{0,1} u_{0,2} + \frac{2}{\sigma} R^2 u_{0,1} u_{0,2}.$$

В итоге мы получили систему из двух уравнений

$$\begin{cases} R^2 f_2 = \nu R f_1 u_{0,1} + R^2 f_1 u_{0,2} + \frac{2}{\sigma} R^2 u_{0,1} u_{1,1} \\ \\ R^2 u_{1,1} = \nu\sigma R f_1 + \left(1 + \frac{2}{\sigma}\right) R^2 u_{0,1} u_{0,2}, \end{cases}$$

решив которую, можно найти коэффициенты $u_{0,2}$ и $u_{1,1}$

$$u_{0,2} = \frac{Rf_2 + 3\nu f_1\sqrt{\sigma f_1}}{(3+4/\sigma)Rf_1},\ u_{1,1} = -\frac{(1+2/\sigma)R\sqrt{\sigma f_1} f_2 + 2\nu f_1^2}{(3+4/\sigma)Rf_1}.$$

Рассуждая аналогично, получаем формулы для коэффициентов порядка три. Коэффициент $u_{2,1}$ определяется по формуле

$$u_{2,1} = \frac{1}{(8+8/\sigma^2+18/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}}\left\{\frac{1}{(3+4/\sigma)f_1}\left[\left(f_2 + \frac{3\nu}{R} f_1\sqrt{\sigma f_1}\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left(\sigma f_2(2+7/\sigma+4/\sigma^2) - \frac{\nu}{R}(4+4/\sigma)\sigma f_1 - 6\frac{\nu}{R} f_1\sqrt{\sigma f_1}\right) -$$

$$\left. -\left((1+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1} f_2 + 2\frac{\nu}{R} f_1^2\right)\sigma(8/\sigma^2+6/\sigma-4) f_1 \frac{\nu}{R}\right] +$$

$$+\frac{1}{(3+4/\sigma)^2 f_1^2}\left[2(2+7/\sigma+4/\sigma^2)\left((1+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1} f_2 + 2\frac{\nu}{R} f_1^2\right)^2 -\right.$$

$$-2(2+2/\sigma)(1+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}\left(f_2 + \frac{3\nu}{R} f_1\sqrt{\sigma f_1}\right)\left((1+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1} f_2 + 2\frac{\nu}{R} f_1^2\right) +$$

$$+2f_1(1+2/\sigma)\Big(f_2+\frac{3\nu}{R}f_1\sqrt{\sigma f_1}\Big)^2\Big]+$$

$$+\sigma(2+7/\sigma+4/\sigma^2)\Big(-\frac{\nu}{R}f_2\sqrt{\sigma f_1}-f_3\Big)+4f_1^2\frac{\nu}{R^2}\Big\}.$$

Для коэффициента $u_{1,2}$ имеем

$$u_{1,2}=\frac{1}{(8+8/\sigma^2+18/\sigma)f_1\sqrt{\sigma f_1}}\Big\{\frac{1}{(3+4/\sigma)f_1}\Big[\Big(f_2+\frac{3\nu}{R}f_1\sqrt{\sigma f_1}\Big)\times$$

$$\times\Big(-(2+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}f_2-(4+4/\sigma)f_1\frac{\nu}{R}\sqrt{\sigma f_1}-6f_1\frac{\nu}{R}\Big)+$$

$$+\Big((1+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}f_2+2\frac{\nu}{R}f_1^2\Big)\Big((4+4/\sigma)f_1\sqrt{\sigma f_1}\frac{\nu}{R}+(8+8/\sigma)f_1\frac{\nu}{R}\sqrt{\sigma f_1}\Big)\Big]+$$

$$+\frac{1}{(3+4/\sigma)^2f_1^2}\Big[-(2+2/\sigma)\frac{2}{\sigma}\sqrt{\sigma f_1}\Big((1+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}f_2+2\frac{\nu}{R}f_1^2\Big)^2-$$

$$-(4+4/\sigma)(1+2/\sigma)f_1\Big(f_2+\frac{3\nu}{R}f_1\sqrt{\sigma f_1}\Big)\Big((1+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}f_2+2\frac{\nu}{R}f_1^2\Big)+$$

$$+f_1\sqrt{\sigma f_1}\frac{2}{\sigma}(1+2/\sigma)\Big(f_2+\frac{3\nu}{R}f_1\sqrt{\sigma f_1}\Big)^2\Big]+$$

$$+(2+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}\Big(\frac{\nu}{R}f_2\sqrt{\sigma f_1}+f_3\Big)+\frac{4}{\sigma}\frac{\nu}{R^2}f_1^2\sqrt{\sigma f_1}\Big\}.$$

И, наконец, для $u_{0,3}$ получаем формулу

$$u_{0,3}=\frac{1}{(8+8/\sigma^2+18/\sigma)f_1\sqrt{\sigma f_1}}\Big\{\frac{1}{(3+4/\sigma)f_1}\Big[\Big(f_2+\frac{3\nu}{R}f_1\sqrt{\sigma f_1}\Big)\times$$

$$\times\Big(f_2+2f_1\frac{\nu}{R}-3(4+4/\sigma)f_1\sqrt{\sigma f_1}\frac{\nu}{R}\Big)-6\Big((1+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}f_2+2\frac{\nu}{R}f_1^2\Big)\frac{\nu}{R}f_1\Big]+$$

$$+\frac{1}{(3+4/\sigma)^2f_1^2}\Big[\frac{2}{\sigma}\Big((1+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}f_2+2\frac{\nu}{R}f_1^2\Big)^2+$$

$$+\frac{2}{\sigma}\sqrt{\sigma f_1}(1+2/\sigma)\Big(f_2+\frac{3\nu}{R}f_1\sqrt{\sigma f_1}\Big)\Big((1+2/\sigma)\sqrt{\sigma f_1}f_2+2\frac{\nu}{R}f_1^2\Big)+$$

$$+(4+4/\sigma)(1+2/\sigma)f_1\Big(f_2+\frac{3\nu}{R}f_1\sqrt{\sigma f_1}\Big)^2\Big]-$$

$$-\frac{\nu}{R}f_2\sqrt{\sigma f_1}-f_3-(8+10/\sigma)\frac{\nu}{R^2}\sigma f_1^2\Big\}.$$

Можно видеть, что громоздкость выражений очень быстро растет с увеличением порядка дифференцирования.

Прежде чем продолжить рассуждения, перепишем уравнение (1.3.1) виде

$$(r+R)^2u_t=(r+R)^2uu_{rr}+\frac{(r+R)^2}{\sigma}u_r^2+P_1. \tag{1.3.4}$$

Здесь $P_1=\nu(r+R)uu_r$.

Поделив обе части уравнения (1.3.4) на $(r+R)^2$, получаем уравнение

$$u_t=uu_{rr}+\frac{1}{\sigma}u_r^2+P_2, \tag{1.3.5}$$

где $P_2=P_1/(r+R)^2$.

Продифференцируем теперь уравнение (1.3.5) $n-k$ раз по t и k раз по r, предполагая, что $k=0,1,...,n$, и положим $t=r=0$. При этом будем пользоваться формулой

$$\frac{\partial^n[\alpha(t,r)\beta(t,r)]}{\partial t^{n-k}\partial r^k}=\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_{n-k}^iC_k^j\frac{\partial^{i+j}\alpha}{\partial t^i\partial r^j}\frac{\partial^{n-i-j}\beta}{\partial t^{n-k-i}\partial r^{k-j}},$$

справедливость которой вытекает из формулы (1.2.28).

Получаем соотношение

$$u_{n-k+1,k}=\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_{n-k}^iC_k^ju_{i,j}u_{n-k-i,k-j+2}+$$

$$+\frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_{n-k}^iC_k^ju_{i,j+1}u_{n-k-i,k-j+1}+\frac{\partial^nP_2}{\partial t^{n-k}\partial r^k}\Big|_{\substack{t=0\\r=0}}. \tag{1.3.6}$$

Выделим в ней все слагаемые, содержащие коэффициенты порядка $n+1$ и выше:

$$u_{n-k+1,k} = u_{0,0}u_{n-k,k+2} + (n-k)u_{1,0}u_{n-k-1,k+2} + ku_{0,1}u_{n-k,k+1} +$$
$$+ \sum_{\substack{i=0 \\ i+j\neq 0}}^{n-k} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j\neq 1}}^{k} C_{n-k}^{i} C_{k}^{j} u_{i,j} u_{n-k-i,k-j+2} + \frac{2}{\sigma} u_{0,1} u_{n-k,k+1} +$$
$$+ \frac{1}{\sigma} \sum_{\substack{i=0 \\ i+j\neq 0}}^{n-k} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j\neq n}}^{k} C_{n-k}^{i} C_{k}^{j} u_{i,j+1} u_{n-k-i,k-j+1} + \left.\frac{\partial^n P_2}{\partial t^{n-k}\partial r^k}\right|_{\substack{t=0\\ r=0}}.$$

Преобразуя полученное выражение (с учетом того, что $u_{0,0} = 0$), получаем равенство

$$u_{n-k+1,k} + \left(k + \frac{2}{\sigma}\right) \sqrt{\sigma f_1} u_{n-k,k+1} - (n-k) f_1 u_{n-k-1,k+2} = L_{n-k,k}, \quad (1.3.7)$$

в которой

$$L_{n-k,k} = \sum_{\substack{i=0 \\ i+j\neq 0}}^{n-k} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j\neq 1}}^{k} C_{n-k}^{i} C_{k}^{j} u_{i,j} u_{n-k-i,k-j+2} +$$
$$+ \frac{1}{\sigma} \sum_{\substack{i=0 \\ i+j\neq 0}}^{n-k} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j\neq n}}^{k} C_{n-k}^{i} C_{k}^{j} u_{i,j+1} u_{n-k-i,k-j+1} + \left.\frac{\partial^n P_2}{\partial t^{n-k}\partial r^k}\right|_{\substack{t=0\\ r=0}}.$$

Формально, формулу (1.3.7) можно считать справедливой лишь для $k = 0, 1, ..., n-1$, так как она содержит коэффициент $u_{n-k-1,k+2}$, не определенный при $k = n$. Для случая $k = n$ ее следует вывести отдельно из формулы (1.3.6), которая запишется в виде

$$u_{1,n} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j u_{0,j} u_{0,n-j+2} + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=0}^{n} C_n^j u_{0,j+1} u_{0,n-j+1} + \left.\frac{\partial^n P_2}{\partial r^n}\right|_{\substack{t=0\\ r=0}}. \qquad (1.3.8)$$

Преобразовав (1.3.8) аналогичным образом, получаем

$$u_{1,n} + \left(n + \frac{2}{\sigma}\right) \sqrt{\sigma f_1} u_{0,n+1} = L_{0,n}, \qquad (1.3.9)$$

где

$$L_{0,n} = \sum_{j=2}^{n} C_n^j u_{0,j} u_{0,n-j+2} + \frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j u_{0,j+1} u_{0,n-j+1} + \left.\frac{\partial^n P_2}{\partial r^n}\right|_{\substack{t=0\\ r=0}}.$$

Отметим, что производные $\frac{\partial^n P_2}{\partial t^{n-k}\partial r^k}|_{t=r=0}$, $k=0,1,...,n$, зависят лишь от тех коэффициентов, порядок которых не превышает n. Действительно, рассмотрим P_2

$$P_2 = \frac{P_1}{(r+R)^2} = \nu\frac{uu_r}{r+R}.$$

После применения к P_2 оператора $\frac{\partial^n}{\partial t^{n-k}\partial r^k}|_{t=r=0}$, получаем

$$\frac{\partial^n}{\partial t^{n-k}\partial r^k}\left(\frac{\nu}{r+R}uu_r\right)\Big|_{\substack{t=0\\r=0}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k} C_{n-k}^i C_k^j \frac{\partial^{i+j}}{\partial t^i \partial r^j}\left(\frac{u}{r+R}\right)\Big|_{\substack{t=0\\r=0}} u_{n-k-i,k-j+1} = \nu\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k} C_{n-k}^i C_k^j \times$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} C_i^m C_j^l u_{m,l}\frac{\partial^{i-m+j-l}}{\partial t^{i-m}\partial r^{j-l}}\left(\frac{1}{r+R}\right)\Big|_{r=0}\right] u_{n-k-i,k-j+1} =$$

$$= \nu\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k} C_{n-k}^i C_k^j \left[\sum_{l=0}^{j} C_j^l u_{i,l}\left(\frac{1}{r+R}\right)^{(j-l)}\Big|_{r=0}\right] u_{n-k-i,k-j+1} =$$

$$= \nu\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k} C_{n-k}^i C_k^j \left[\sum_{l=0}^{j} C_j^l u_{i,l}\frac{(-1)^{j-l}(j-l)!}{R^{j-l+1}}\right] u_{n-k-i,k-j+1}.$$

В этой сумме коэффициент порядка $n+1$ может содержаться лишь в слагаемом при $i=j=0$:

$$\frac{\nu}{R}u_{0,0}u_{n-k,k+1} = 0.$$

Таким образом, мы показали, что $L_{n-k,k}$, $k=0,1,...,n$, зависят лишь от тех коэффициентов, порядок которых не превышает числа n.

Предположим теперь, что мы определили все коэффициенты ряда (1.3.3) до n-го порядка включительно. Используя формулы (1.3.7) и (1.3.9), получаем систему из $n+1$ уравнений

$$A_{n+1} \times \begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n-1,2} \\ \vdots \\ u_{0,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n,0} - f_{n+1} \\ L_{n-1,1} \\ \vdots \\ L_{0,n} \end{pmatrix}, \tag{1.3.10}$$

в которой A_{n+1} — квадратная трехдиагональная матрица вида

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix} \qquad (1.3.11)$$

с элементами

$$a_i = \left(i + \frac{2}{\sigma}\right)\sqrt{\sigma f_1} > 0, \quad i = 0, 1, ..., n;$$

$$b_j = -j f_1 < 0, \quad j = 1, ..., n.$$

Отметим, что все элементы наддиагонали матрицы (1.3.11) отрицательны, а элементы поддиагонали и главной диагонали положительны. Индукцией по n можно показать, что определитель матрицы такого вида строго больше нуля (см. лемму из Приложения 4). Следовательно, система (1.3.10) однозначно разрешима, и на основании принципа математической индукции можно сделать вывод, что все коэффициенты ряда (1.3.3) определяются однозначно.

Полученных формул уже достаточно для проведения и проверки численных расчетов (подробнее об этом будет рассказано в следующем разделе). Однако автором также получены и явные формулы для коэффициентов порядка $n+1$, которые приводятся ниже без подробного вывода (в силу громоздкости последнего).

Для записи коэффициентов будем использовать следующие обозначения:

$$\nu_0 = 1, \quad \lambda_1 = a_n, \quad \lambda_{k+1} = a_{n-k}\lambda_k - b_k\lambda_{k-1};$$

$$\eta_0 = 1, \quad \eta_1 = a_0, \quad \eta_{k+1} = a_k\eta_k - b_{n+1-k}\eta_{k-1}; \quad k = 1, ..., n.$$

Коэффициент $u_{n,1}$ определяется по формуле

$$u_{n,1} = \frac{1}{|A|}\Big[\lambda_n(L_{n,0} - f_{n+1}) - \eta_0\lambda_{n-1}b_nL_{n-1,1} + \eta_0\lambda_{n-2}b_nb_{n-1}L_{n-2,2} + ...$$

$$... + \eta_0 \lambda_{n+1-j} \prod_{l=j-1}^{1} (-b_{n+1-l}) L_{n+1-j,j-1} + ...$$

$$... + \eta_0 \lambda_1 \prod_{l=n-1}^{1} (-b_{n+1-l}) L_{1,n-1} + \eta_0 \lambda_0 \prod_{l=n}^{1} (-b_{n+1-l}) L_{0,n} \Big] =$$

$$= \frac{1}{|A|} \lambda_n (L_{n,0} - f_{n+1}) + \frac{1}{|A|} \sum_{j=2}^{n+1} \eta_0 \lambda_{n+1-j} \prod_{l=j-1}^{1} (-b_{n+1-l}) L_{n+1-j,j-1}.$$

Коэффициент $u_{n-1,2}$ определяется по формуле

$$u_{n-1,2} = \frac{1}{|A|} \Big[-\lambda_{n-1}(L_{n,0} - f_{n+1}) + \eta_1 \lambda_{n-1} L_{n-1,1} - \eta_1 \lambda_{n-2} b_{n-1} L_{n-2,2} + ...$$

$$... + \eta_1 \lambda_{n+1-j} \prod_{l=j-1}^{2} (-b_{n+1-l}) L_{n+1-j,j-1} + ...$$

$$... + \eta_1 \lambda_1 \prod_{l=n-1}^{2} (-b_{n+1-l}) L_{1,n-1} + \eta_1 \lambda_0 \prod_{l=n}^{2} (-b_{n+1-l}) L_{0,n} \Big] =$$

$$= -\frac{1}{|A|} \eta_0 \lambda_{n-1} (L_{n,0} - f_{n+1}) + \frac{1}{|A|} \eta_1 \lambda_{n-1} L_{n-1,1} +$$

$$+ \frac{1}{|A|} \sum_{j=3}^{n+1} \eta_1 \lambda_{n+1-j} \prod_{l=j-1}^{2} (-b_{n+1-l}) L_{n+1-j,j-1}.$$

Общая формула для коэффициентов $u_{n+1-k,k}$ при $k = 3, ..., n-1$ имеет вид

$$u_{n+1-k,k} = \frac{1}{|A|} \Big[(-1)^{k-1} \lambda_{n+1-k} (L_{n,0} - f_{n+1}) +$$

$$+ \eta_1 \lambda_{n+1-k} (-1)^{k-2} L_{n-1,1} + \eta_2 \lambda_{n+1-k} (-1)^{k-3} L_{n-2,2} + ...$$

$$... + \eta_{k-1} \lambda_{n+1-k} (-1)^0 L_{n+1-k,k-1} - \eta_{k-1} \lambda_{n-k} b_{n+1-k} L_{n-k,k} +$$

$$+ \eta_{k-1} \lambda_{n-k-1} b_{n+1-k} b_{n-k} L_{n-k-1,k+1} + ...$$

$$... + \eta_{k-1} \lambda_1 \prod_{l=n-1}^{k} (-b_{n+1-l}) L_{1,n-1} + \eta_{k-1} \lambda_0 \prod_{l=n}^{k} (-b_{n+1-l}) L_{0,n} \Big] =$$

$$= \frac{1}{|A|}\eta_0\lambda_{n+1-k}(-1)^{k-1}(L_{n,0}-f_{n+1})+\frac{1}{|A|}\sum_{j=2}^{k}\eta_{j-1}\lambda_{n+1-k}(-1)^{k-j}L_{n+1-j,j-1}+$$

$$+\frac{1}{|A|}\sum_{j=k+1}^{n+1}\eta_{k-1}\lambda_{n+1-j}\prod_{l=j-1}^{k}(-b_{n+1-l})L_{n+1-j,j-1}.$$

Коэффициент $u_{1,n}$ определяется по формуле

$$u_{1,n} = \frac{1}{|A|}\Big[(-1)^{n-1}\lambda_1(L_{n,0} - f_{n+1})+$$

$$+\eta_1\lambda_1(-1)^{n-2}L_{n-1,1} + \eta_2\lambda_1(-1)^{n-3}L_{n-2,2} + ...$$

$$... + \eta_{j-1}\lambda_1(-1)^{n-j}L_{n+1-j,j-1} + ... + \eta_{n-1}\lambda_1 L_{1,n-1} - \eta_{n-1}\lambda_0 b_1 L_{0,n}\Big] =$$

$$= \frac{1}{|A|}\eta_0\lambda_1(-1)^{n-1}(L_{n,0} - f_{n+1})+$$

$$+\frac{1}{|A|}\sum_{j=2}^{n}\eta_{j-1}\lambda_1(-1)^{n-j}L_{n+1-j,j-1} - \frac{1}{|A|}\eta_{n-1}\lambda_0 b_1 L_{0,n}.$$

И, наконец, для коэффициента $u_{0,n+1}$ имеем

$$u_{0,n+1} = \frac{1}{|A|}\Big[(-1)^{n}\lambda_0(L_{n,0} - f_{n+1})+$$

$$+\eta_1\lambda_0(-1)^{n-1}L_{n-1,1} + \eta_2\lambda_0(-1)^{n-2}L_{n-2,2} + ...$$

$$... + \eta_{j-1}\lambda_0(-1)^{n+1-j}L_{n+1-j,j-1} + ... - \eta_{n-1}\lambda_0 L_{1,n-1} + \eta_n\lambda_0 L_{0,n}\Big] =$$

$$= \frac{1}{|A|}\eta_0\lambda_0(-1)^{n}(L_{n,0} - f_{n+1}) + \frac{1}{|A|}\sum_{j=2}^{n+1}\eta_{j-1}\lambda_0(-1)^{n+1-j}L_{n+1-j,j-1}.$$

Забегая вперед, отметим, что при построении решений более общих задач из последующих глав мы также столкнемся с необходимостью разрешения систем вида (1.3.10), (1.3.11), отличающихся по семантике ($L_{n-k,k}$ и элементы матрицы A_{n+1} будут более громоздкие представления), но одинаковых по синтаксису. Поэтому, в силу общности записи, точные формулы, представленные здесь, могут быть использованы и для этих систем.

Следствие 1. *При выполнении условий теоремы* 1 *у задачи*

$$(r+R)^2 u_t = u\Big[\nu(r+R)u_r + (r+R)^2 u_{rr}\Big] + \frac{1}{\sigma}(r+R)^2 u_r^2,$$

$$u(t,r)|_{r=0} = f(t),\ \ u(t,r)|_{t=0} = 0,$$

имеется кусочно-аналитическое решение, которое при $\nu = 1, 2$ *является в окрестности* $t = 0$, $r = 0$ *аналитической тепловой волной, причем выбор направления движения последней обеспечивает единственность.*

Из теоремы 1 и результатов данного раздела следует существование двух кусочно-аналитических решения краевой задачи (1.3.1), (1.3.2) (при этом выбор знака $u_{0,1}$ обеспечивает единственность). Докажем, что из этого следует справедливость сформулированного выше утверждения (следствия 1).

В самом деле, как показано в начале данного раздела, $u_{1,0} = f_1 > 0$, $u_{0,1} = \pm\sqrt{\sigma f_1}$. Отсюда имеем, что для решения $u = u_+(t,r)$, соответствующего положительному значению $u_{0,1}$, найдется в плоскости переменных t, r линия $r = b_+(t)$, $b_+(0) = 0$, $b_+'(0) < 0$, на которой при $t > 0$ в некоторой окрестности точки $t = 0$, $r = 0$ выполнено условие $u_+|_{r=b_+(t)} = 0$; для решения $u = u_-(t,r)$, соответствующего отрицательному значению $u_{0,1}$, найдется в плоскости переменных t, r линия $r = b_-(t)$, $b_-(0) = 0$, $b_-'(0) > 0$, на которой при $t > 0$ в некоторой окрестности точки $t = 0, r = 0$ выполнено аналогичное условие $u_-|_{r=b_-(t)} = 0$.

Поскольку $b_+'(0) < 0$, $u_{1,0} > 0$, решение $u = u_+(t,r)$ позволяет определить тепловую волну

$$u(t,x) = \begin{cases} u_+ > 0, & b_+(t) < r \le 0, \\ 0, & \qquad\quad r \le b_+(t), \end{cases}$$

которая движется во внутреннюю область, в сторону оси или центра симметрии.

Поскольку $b'_-(0) > 0$, $u_{1,0} > 0$, решение $u = u_-(t,r)$ позволяет определить тепловую волну

$$u(t,x) = \begin{cases} u_- > 0, & b_-(t) > r \geq 0, \\ 0, & r \geq b_+(t), \end{cases}$$

которая движется во внешнюю область.

Таким образом, выбор знака у $u_{0,1}$ (который, напомним, обеспечивает единственность) равнозначен выбору направления движения фронта тепловой волны. Легко убедиться, что, так как $b_\pm(0) = 0$, то в обоих случаях выполнено условие $u|_{t=0} = 0$; на фронте тепловой волны в обоих случаях имеется разрыв производных. Значение t^* (см. определение тепловой волны) определяется радиусом сходимости ряда (1.3.3). Итак, построенные составные решения, действительно, подпадают под действие определения аналитической тепловой волны.

Утверждение (следствие 1) доказано.

Еще раз подчеркнем, что тепловая волна построена в некоторой (возможно, малой) окрестности точки $t = 0$, $r = 0$. При этом, в отличие от работ С.П. Баутина [7, 8, 11], А.Л. Казакова [35, 45, 46, 47, 144], М.Ю. Филимонова [119, 120], граничные условия в рассматриваемой задаче заданы на замкнутой поверхности. Также, в отличие от работ А.Ф. Сидорова [100, 101, 102, 104] и С.П. Баутина [7, 8, 11], построены решения в виде рядов, формулы для коэффициентов которых выписаны в явном виде. Наконец, для построенных рядов, в отличие от работ А.Ф. Сидорова [100, 101, 102, 104], устанавливается сходимость.

1.4 Вычислительный эксперимент

В данном разделе отрезки рядов, построенных в разделе 1.3, применяются для выполнения иллюстрирующих численных расчетов и верификации вычислений, выполненных при помощи метода граничных элементов (МГЭ). Технология применения граничноэлементного подхода для построения приближенных решений задачи об инициировании тепловой волны заданным краевым режимом (задачи А.Д. Сахарова) была предложена Л.Ф. Спеваком и опубликована в работах [44, 109, 144].

В ходе вычислительного эксперимента были рассмотрены задачи со сферической (рис. 1.1, 1.3) и цилиндрической (рис. 1.2) симметрией при движении тепловой волны во внутреннюю (рис. 1.1) и внешнюю (рис. 1.2, 1.3) области. Использовались отрезки рядов до третьей степени включительно. Полученное с помощью отрезка ряда решение на интервале $t \in [0, 1]$ сравнивалось с решением той же задачи при помощи метода граничных элементов.

Ниже приведены некоторые иллюстрирующие примеры. На всех рисунках по оси ординат отложены значения искомой функции u, по оси абсцисс — расстояние до оси (центра) симметрии ρ, графики представлены для моментов времени $t = 0.4; 0.8; 1.0$.

Пример 1.

Рассмотрим задачу (1.1.1), (1.1.2) при следующих параметрах: $\sigma = 3$, $R = 1$, $f(t) = t/2$, $\nu = 2$ (т. е. случай сферической симметрии). Тепловая волна движется вовнутрь области (в сторону особой точки). Результаты расчетов приведены на рис. 1.1.

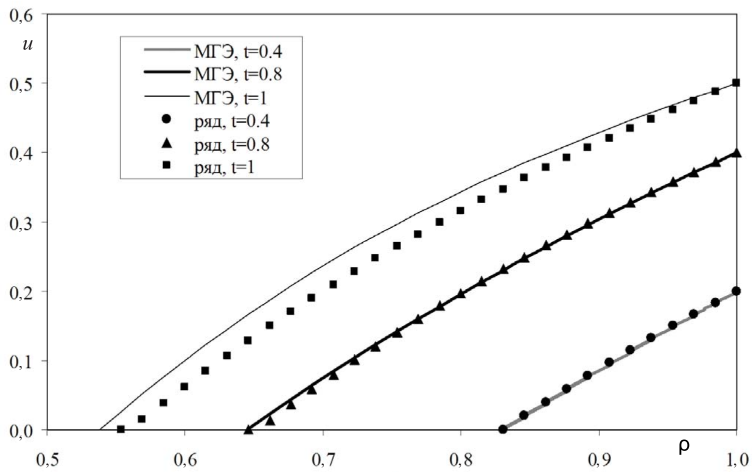

Рис. 1.1: Движение волны во внутреннюю область

Можно видеть, что до момента времени $t = 0.8$ результаты практически совпадают, в дальнейшем (при $t > 0.8$) наблюдаются их расхождение. По-видимому, это объясняется тем, что погрешность рассмотренного отрезка ряда становится значительной.

Пример 2.

Рассмотрим задачу (1.1.1), (1.1.2) при следующих параметрах: $\sigma = 3$, $R = 1$, $f(t) = e^t - 1$; $\nu = 1$ (случай цилиндрической симметрии, рис. 1.2), $\nu = 2$ (случай сферической симметрии, рис. 1.3). Тепловая волна движется во внешнюю область.

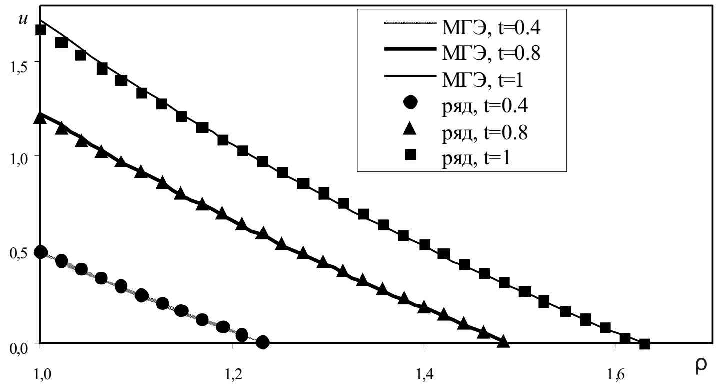

Рис. 1.2: Движение волны во внешнюю область, цилиндрическая симметрия

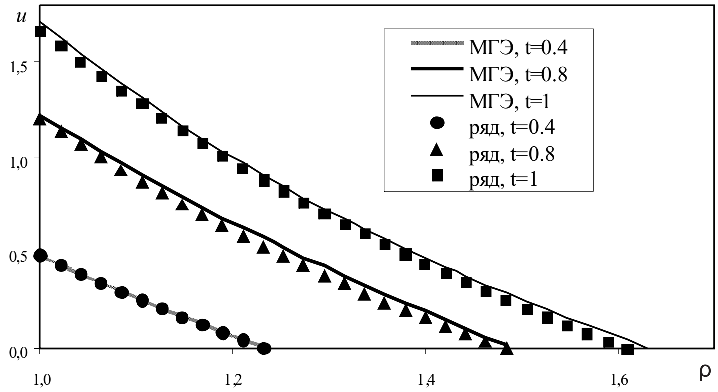

Рис. 1.3: Движение волны во внешнюю область, сферическая симметрия

Можно видеть, что, как и в предыдущем примере, наблюдается близость решений в окрестности начального момента времени, а с удалением от него увеличивается разница между решением МГЭ и отрезком степенного ряда. Отметим, что расхождение решения МГЭ и отрезка ряда в случае сферической симметрии (рис. 1.2) происходит быстрее, чем при цилиндрической симметрии (рис. 1.3). Это, по-видимому, свидетельствует о том, что с увеличением размерности пространства скорость сходимости рядов уменьшается.

1.5 Случай трех пространственных переменных

Результаты, полученные в разделах 1.2 и 1.3, достаточно легко переносятся на случай трех пространственных переменных. При этом производится переход в сферическую систему координат и рассматривать уже уравнение (13) (подробный вывод уравнения см. Приложение 2). В силу того, что рассуждения во многом схожи с рассуждениями из разделов 1.2 и 1.3, изложение будет уже не столь подробным, и будут освещены лишь основные моменты.

Рассмотрим задачу

$$u_\tau = u\left(\frac{2}{\rho}u_\rho + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}u_\theta + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}\right) + \\ + \frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\theta^2\right); \qquad (1.5.1)$$

$$u(\tau,\rho,\varphi,\theta)|_{\rho=R} = f(\tau,\varphi,\theta),, \qquad (1.5.2)$$

где $\sigma > 0, R > 0$, а функция $f(\tau,\varphi,\theta)$ обладает свойствами

$$f(\tau,\varphi,\theta)|_{\tau=0} = 0;\;\; f_1 = f_\tau(\tau,\varphi,\theta)|_{\tau=0} > 0. \qquad (1.5.3)$$

Так как в уравнении (1.5.1) содержатся множители $\operatorname{ctg}\theta$ и $1/\sin^2\theta$, то возникает необходимость ввести соответствующие ограничения на θ.

Пусть независимые переменные ρ, φ, θ удовлетворяют ограничениям

$$\rho > 0;\;\; \varphi \in \Upsilon;\; 0 < \theta_1 \le \theta \le \pi - \theta_2,$$

где θ_1 и $\theta_2 > 0$ — малые константы; Υ — некоторый конечный или бесконечный числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал).

В частном случае, когда справедливо равенство $f(\tau,\varphi,\theta) = f(\tau,\varphi + 2\pi,\theta)$, имеем задачу для уравнения (2) с данными на сфере (см. следствие 2).

Для задачи (1.5.1), (1.5.2) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция* $f = f(\tau, \varphi, \theta)$, *удовлетворяющая условиям* (1.5.3), *является аналитической в некоторой окрестности* $\tau = 0$ *и при всех допустимых* φ *и* θ. *Тогда задача* (1.5.1), (1.5.2) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой полной окрестности* $\tau = 0$, $\rho = R$, *если выбран знак* $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}$.

Перед тем, как приступить к доказательству, проведем те же преобразования исходной задачи, что и в разделе 1.1. Домножив уравнение (1.5.1) на ρ^2 и сделав замену $t = \tau;\ r = \rho - R;\ x_1 = \varphi;\ x_2 = \theta$, получаем задачу

$$(r+R)^2 u_t = u\Big[2(r+R)u_r + \operatorname{ctg} x_2\, u_{x_2} + (r+R)^2 u_{rr} +$$

$$+\frac{1}{\sin^2 x_2} u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\Big] + \frac{1}{\sigma}\Big[(r+R)^2 u_r^2 + \frac{1}{\sin^2 x_2} u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2\Big]; \qquad (1.5.4)$$

$$u(t, r, x_1, x_2)|_{r=0} = f(t, x_1, x_2), \qquad (1.5.5)$$

эквивалентную задаче (1.5.1), (1.5.2).

Доказательство. Доказательство проводится согласно плану, представленному в разделе 1.2.

В задаче (1.5.4), (1.5.5) сделаем замену

$$\begin{cases} \tau = t; \\ s = r - b(t, x_1, x_2); \\ y_1 = x_1; \quad y_2 = x_2. \end{cases} \qquad (1.5.6)$$

в которой b — пока еще неизвестная функция, аналитическая в некоторой окрестности $t = 0$ и при всех допустимых x_1, x_2 и удовлетворяющая условиям

$$b(t, x_1, x_2)|_{t=0} = 0, \quad b_t(t, x_1, x_2)|_{t=0} > 0.$$

Как и разделе 1.2 будет выполняться равенство

$$u(t, r, x_1, x_2)|_{r=b(t,x_1,x_2)} = 0. \qquad (1.5.7)$$

Производные пересчитываются по формулам

$$u_t = u_\tau - b_\tau u_s; \quad u_{x_i} = u_{y_i} - b_{y_i} u_s; \quad u_r = u_s; \quad u_{rr} = u_{ss};$$

$$u_{x_ix_i} = \left(\frac{\partial}{\partial y_i} - b_{y_i}\frac{\partial}{\partial s}\right)u_{x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial y_i} - b_{y_i}\frac{\partial}{\partial s}\right)(u_{y_i} - b_{y_i}u_s) =$$
$$= u_{y_iy_i} - b_{y_iy_i}u_s - 2b_{y_i}u_{sy_i} + b_{y_i}^2 u_{ss}; \quad i = 1, 2.$$

Задача (1.5.4), (1.5.5) принимает вид

$$(s+b+R)^2(u_\tau - b_\tau u_s) = u\Big[2(s+b+R)u_s + \operatorname{ctg} y_2(u_{y_2} - b_{y_2}u_s) + (s+b+R)^2u_{ss} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} c_i(u_{y_iy_i} - b_{y_iy_i}u_s - 2b_{y_i}u_{sy_i} + b_{y_i}^2u_{ss})\Big] +$$
$$+ \frac{1}{\sigma}\Big[(s+b+R)^2u_s^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i(u_{y_i} - b_{y_i}u_s)^2\Big]; \tag{1.5.8}$$
$$u(\tau, s, y_1, y_2)|_{s=-b(\tau,y_1,y_2)} = f(\tau, y_1, y_2); \tag{1.5.9}$$
$$u(\tau, s, y_1, y_2)|_{s=0} = 0. \tag{1.5.10}$$

Здесь $c_1 = 1/\sin^2 y_2$, $c_2 = 1$.

Теперь в задаче (1.5.8), (1.5.9), (1.5.10) поменяем ролями неизвестную функцию u и независимую переменную s с помощью замены

$$\begin{cases} t = \tau; \\ s = s(\tau, u, y_1, y_2); \\ x_1 = y_1; \\ x_2 = y_2. \end{cases} \tag{1.5.11}$$

Также, как и в разделе 1.2, можно показать, что замена (1.5.11) невырождена.

Производные u_τ, u_s, u_{ss} определяются точно также, как и в разделе 1.2. Остается определить u_{y_i}, u_{y_is} и $u_{y_iy_i}$; $i = 1, 2$.

Из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = s_{x_i}\frac{\partial}{\partial s} + \tau_{x_i}\frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^{2} y_{ix_i}\frac{\partial}{\partial y_i} = s_{x_i}\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{s_{x_i}}{s_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y_i},$$

находим $\frac{\partial}{\partial y_i}$:

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{s_{x_i}}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Для производных второго порядка получаем формулы

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{s_{x_i}}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{s_{x_i}}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{s_{x_ix_i}s_u - s_{x_i}s_{ux_i}}{s_u^2}\frac{\partial}{\partial u} - 2\frac{s_{x_i}}{s_u}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial u} + \frac{s_{x_i}}{s_u}\frac{s_{x_iu}s_u - s_{x_i}s_{uu}}{s_u^2}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{s_{x_i}^2}{s_u^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{2s_us_{x_i}s_{ux_i} - s_{x_ix_i}s_u^2 - s_{x_i}^2s_{uu}}{s_u^3}\frac{\partial}{\partial u} - 2\frac{s_{x_i}}{s_u}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial u} + \frac{s_{x_i}^2}{s_u^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial y_i} = \frac{1}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{s_{x_i}}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{1}{s_u}\frac{\partial^2}{\partial u\partial x_i} - \frac{s_{x_iu}s_u - s_{x_i}s_{uu}}{s_u^3}\frac{\partial}{\partial u} - \frac{s_{x_i}}{s_u^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}.$$

В конечном счете, производные, входящие в уравнение (1.5.8) запишутся в виде

$$u_\tau = -\frac{s_t}{s_u}; \quad u_s = \frac{1}{s_u}; \quad u_{y_i} = -\frac{s_{x_i}}{s_u}; \quad u_{ss} = -\frac{s_{uu}}{s_u^3};$$

$$u_{y_iy_i} = \frac{2s_us_{x_i}s_{ux_i} - s_{x_ix_i}s_u^2 - s_{x_i}^2s_{uu}}{s_u^3}; \quad u_{y_is} = \frac{s_{x_i}s_{uu} - s_{x_iu}s_u}{s_u^3}.$$

Уравнение (1.5.8) после замены (1.5.11) и домножения на $-s_u^3$ принимает вид

$$(s+b+R)^2(s_t+b_t)s_u^2 = u\Big[-2(s+b+R)s_u^2 + \operatorname{ctg} x_2(s_{x_2}+b_{x_2})s_u^2 + (s+b+R)^2s_{uu} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} c_i(-2s_us_{x_i}s_{ux_i} + s_{x_ix_i}s_u^2 + s_{x_i}^2s_{uu} + b_{x_ix_i}s_u^2 + 2b_{x_i}(s_{x_i}s_{uu} - s_{x_iu}s_u) + b_{x_i}^2s_{uu})\Big] -$$

$$- \frac{s_u}{\sigma}\left[(s+b+R)^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i(s_{x_i}+b_{x_i})^2\right]. \qquad (1.5.12)$$

Из краевого условия (1.5.9), которое теперь запишется в виде

$$s(t,u,x_1,x_2)|_{u=f(t,x_1,x_2)} = -b(t,x_1,x_2),$$

можно выразить функцию b:

$$b(t,x_1,x_2) = -s(t,u,x_1,x_2)|_{u=f(t,x_1,x_2)},$$

а также найти все ее производные, участвующие в уравнении (1.5.8):

$$b_t = -s_t|_{u=f} - s_u|_{u=f}f_t; \quad b_{x_i} = -s_{x_i}|_{u=f} - s_u|_{u=f}f_{x_i};$$

$$b_{x_ix_i} = -s_{x_ix_i}|_{u=f} - 2s_{x_iu}|_{u=f}f_{x_i} - s_u|_{u=f}f_{x_ix_i} - s_{uu}|_{u=f}f_{x_i}^2, \quad i = 1, 2.$$

После подстановки полученных формул в уравнение (1.5.8) имеем

$$(s - s|_{u=f} + R)^2(s_t - s_t|_{u=f} - s_u|_{u=f} f_t)s_u^2 = u\Big\{ -2(s - s|_{u=f} + R)s_u^2 +$$
$$+ \operatorname{ctg} x_2(s_{x_2} - s_{x_2}|_{u=f} - s_u|_{u=f} f_{x_2})s_u^2 + (s - s|_{u=f} + R)^2 s_{uu} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} c_i\Big[-2s_u s_{x_i} s_{ux_i} + s_{x_i x_i} s_u^2 + s_{x_i}^2 s_{uu} -$$
$$-(s_{x_i x_i}|_{u=f} + 2s_{x_i u}|_{u=f} f_{x_i} + s_u|_{u=f} f_{x_i x_i} + s_{uu}|_{u=f} f_{x_i}^2)s_u^2 -$$
$$-2(s_{x_i}|_{u=f} + s_u|_{u=f} f_{x_i})(s_{x_i} s_{uu} - s_{x_i u} s_u) + (s_{x_i}|_{u=f} + s_u|_{u=f} f_{x_i})^2 s_{uu}\Big]\Big\} -$$
$$- \frac{s_u}{\sigma}\Big[(s - s|_{u=f} + R)^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i(s_{x_i} - s_{x_i}|_{u=f} - s_u|_{u=f} f_{x_i})^2\Big]. \qquad (1.5.13)$$

Таким образом, мы вновь получили задачу, включающую в себя одну неизвестную функцию s, одно уравнение (1.5.13) и одно краевое условие (1.5.10), которое преобразуется в виде

$$s(t, u, x_1, x_2)|_{u=0} = 0. \qquad (1.5.14)$$

Теперь, чтобы сделать поверхность $u = f(t, x_1, x_2)$ новой координатной плоскостью $w = 0$, в задаче (1.5.13), (1.5.14) делается замена

$$v = u;\ w = u - f(t, x_1, x_2);\ y_1 = x_1;\ y_2 = x_2. \qquad (1.5.15)$$

Для того, чтобы полностью выразить старые переменные через новые, запишем второе соотношение замены (1.5.15) в виде

$$\Psi(v - w, t, y_1, y_2) \equiv v - w - f(t, y_1, y_2) = 0. \qquad (1.5.16)$$

Для функции Ψ в некоторой окрестности $t = 0$ справедливо неравенство $\Psi_t < 0$ (см. рассуждения для (1.2.12)). Следовательно, по теореме о неявной функции, соотношение (1.5.16) определяет аналитическую функцию

$$t = \psi(v - w, y_1, y_2)$$

такую, что $\psi(v - w, y_1, y_2)|_{v=w} = 0$.

Введем обозначения

$$F(v - w, y_1, y_2) = -f_t(t, y_1, y_2)|_{t=\psi(v-w, y_1, y_2)};$$

$$G_i(v-w,y_1,y_2) = -f_{y_i}(t,y_1,y_2)|_{t=\psi(v-w,y_1,y_2)}, \quad i=1,2.$$

В силу аналитичности функций F, G_1 и G_2 справедливы представления

$$F(v-w,y_1,y_2) = F_0(w,y_1,y_2) + vF_1(v,w,y_1,y_2);$$

$$G_i(v-w,y_1,y_2) = G_{i,0}(w,y_1,y_2) + vG_{i,1}(v,w,y_1,y_2), \quad i=1,2.$$

При этом

$$F_0 = F|_{v=0}, \quad F_0|_{w=0} = -f_t|_{t=0} = -f_1;$$

$$G_{i,0} = G_i|_{v=0}, \quad G_{i,0}|_{w=0} = -f_{y_i}|_{t=0} = 0.$$

Теперь пересчитаем производные в уравнении (1.5.13). Производные первого порядка преобразуются в соответствии с формулами

$$\frac{\partial}{\partial t} = v_t\frac{\partial}{\partial v} + w_t\frac{\partial}{\partial w} + \sum_{i=1}^{2} y_{it}\frac{\partial}{\partial y_i} = -f_t\frac{\partial}{\partial w} = F\frac{\partial}{\partial w};$$

$$\frac{\partial}{\partial u} = v_u\frac{\partial}{\partial v} + w_u\frac{\partial}{\partial w} + \sum_{i=1}^{2} y_{iu}\frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = v_{x_i}\frac{\partial}{\partial v} + w_{x_i}\frac{\partial}{\partial w} + \sum_{i=1}^{2} y_{ix_i}\frac{\partial}{\partial y_i} =$$

$$= -f_{x_i}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} + G_i\frac{\partial}{\partial w}, \quad i=1,2.$$

Учитывая эти равенства, запишем формулы для производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial v\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial}{\partial y_i} + G_i\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i} + G_i\frac{\partial}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + 2G_i\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial w} + G_i^2\frac{\partial^2}{\partial w^2} +$$

$$+\Big(G_{iy_i} + G_iG_{iw}\Big)\frac{\partial}{\partial w};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_i} + G_i\frac{\partial}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2}{\partial v\partial y_i} + G_i\frac{\partial^2}{\partial v\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w\partial y_i} +$$

$$+G_i\frac{\partial^2}{\partial w^2} + \Big(G_{iv} + G_{iw}\Big)\frac{\partial}{\partial w} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial v\partial y_i} + G_i\frac{\partial^2}{\partial v\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w\partial y_i} + G_i\frac{\partial^2}{\partial w^2}, \quad i=1,2.$$

Отсюда следует, что окончательно производные преобразуются в виде

$$s_t = Fs_w; \quad s_u = s_v + s_w; \quad s_{x_i} = s_{y_i} + G_i s_w;$$

$$s_{uu} = s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww};$$

$$s_{x_i x_i} = s_{y_i y_i} + 2G_i s_{y_i w} + G_i^2 s_{ww} + (G_{iy_i} + G_i G_{iw}) s_w;$$

$$s_{ux_i} = s_{vy_i} + G_i s_{vw} + s_{wy_i} + G_i s_{ww}, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, после замены (1.5.15) задача (1.5.13), (1.5.14) примет вид

$$(s - s|_{w=0} + R)^2 [Fs_w - (Fs_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0} F](s_v + s_w)^2 =$$
$$= v\Big\{ - 2(s - s|_{w=0} + R)(s_v + s_w)^2 + (s - s|_{w=0} + R)^2 (s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww}) +$$
$$+ \operatorname{ctg} y_2 [s_{y_2} + G_2 s_w - (s_{y_2} + G_2 s_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0} G_2](s_v + s_w)^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} c_i \Big[- 2(s_v + s_w)(s_{y_i} + G_i s_w)(s_{vy_i} + G_i s_{vw} + s_{wy_i} + G_i s_{ww}) +$$
$$+ [s_{y_i y_i} + 2G_i s_{y_i w} + G_i^2 s_{ww} + (G_{iy_i} + G_i G_{iw}) s_w](s_v + s_w)^2 +$$
$$+ (s_{y_i} + G_i s_w)^2 (s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww}) - \Big[[s_{y_i y_i} + 2G_i s_{y_i w} + G_i^2 s_{ww} +$$
$$+ (G_{iy_i} + G_i G_{iw}) s_w]|_{w=0} - 2(s_{vy_i} + G_i s_{vw} + s_{wy_i} + G_i s_{ww})|_{w=0} G_i -$$
$$- (s_v + s_w)|_{w=0} G_{iy_i} + (s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww})|_{w=0} G_i^2 \Big] (s_v + s_w)^2 -$$
$$- 2[(s_{y_i} + G_i s_w)|_{w=0} - (s_v + s_w)|_{w=0} G_i][(s_{y_i} + G_i s_w)(s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww}) -$$
$$- (s_{vy_i} + G_i s_{vw} + s_{wy_i} + G_i s_{ww})(s_v + s_w)] +$$
$$+ [(s_{y_i} + G_i s_w)|_{w=0} - (s_v + s_w)|_{w=0} G_i]^2 (s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww}) \Big] \Big\} -$$
$$- \frac{s_v + s_w}{\sigma} \Big\{ (s - s|_{w=0} + R)^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} c_i \Big[s_{y_i} + G_i s_w - (s_{y_i} + G_i s_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0} G_i \Big]^2 \Big\}; \quad (1.5.17)$$

$$s(v, w, y_1, y_2)|_{v=0} = 0. \quad (1.5.18)$$

Чтобы сделать последнюю замену

$$s(v, w, y_1, y_2) = vs_1(w, y_1, y_2) + v^2 S(v, w, y_1, y_2), \quad (1.5.19)$$

определим функцию $s_1 = s_v|_{v=0}$. Для этого положим в уравнении (1.5.17) $v = 0$. С учетом равенств

$$s|_{v=0} = s_w|_{v=0} = s_{y_i}|_{v=0} = 0,$$

$$F|_{v=0} = F_0, \quad F|_{v=w=0} = -f_1,$$

$$G_i|_{v=0} = G_{i,0}, \quad G_1|_{v=w=0} = G_2|_{v=w=0} = 0, \quad i = 1, 2$$

получаем уравнение

$$R^2 s_1|_{w=0} F_0 s_1^2 = -\frac{s_1}{\sigma}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i (s_1|_{w=0} G_{i,0})^2\Big].$$

После деления на s_1 получим равенство

$$R^2 s_1|_{w=0} F_0 s_1 = -\frac{1}{\sigma}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i (s_1|_{w=0} G_{i,0})^2\Big]. \tag{1.5.20}$$

Положив в (1.5.20) $w = 0$, мы сможем найти функцию $s_{1,0} = s_1|_{w=0} = s|_{v=w=0}$:

$$-R^2 s_{1,0}^2 f_1 = -\frac{R^2}{\sigma}.$$

Отсюда

$$s_{1,0}^2 = \frac{1}{\sigma f_1}.$$

Получаем, что $s_{1,0}$ определяется по формуле

$$s_{1,0} = \pm\frac{1}{\sqrt{\sigma f_1}}.$$

Здесь мы также будем рассматривать случай отрицательного $s_{1,0}$.

Из формулы (1.5.20) определим s_1:

$$s_1 = -\frac{1}{\sigma R^2 s_{1,0} F_0}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i (s_{1,0} G_{i,0})^2\Big]. \tag{1.5.21}$$

Производные преобразуются по формулам

$$s_v = s_1 + 2vS + v^2 S_v; \quad s_{vv} = 2S + 4vS_v + v^2 S_{vv};$$

$$s_w = vs_{1w} + v^2 S_w; \quad s_{ww} = vs_{1ww} + v^2 S_{ww};$$

$$s_{y_i} = vs_{1y_i} + v^2 S_{y_i}; \quad s_{y_i y_i} = vs_{1y_i y_i} + v^2 S_{y_i y_i}; \quad s_{wy_i} = vs_{1wy_i} + v^2 S_{wy_i};$$

$$s_{vw} = s_{1w} + 2vS_w + v^2 S_{vw}; \quad s_{vy_i} = s_{1y_i} + 2vS_{y_i} + v^2 S_{vy_i}, \quad i = 1, 2.$$

уравнение (1.5.17)

Прежде чем подставить эти формулы в уравнение (1.5.17), перепишем его в более удобном для дальнейших преобразований виде, выделив в правой части все слагаемые, содержащие s_{vv} и $s_{vv}|_{w=0}$. Получаем

$$(s - s|_{w=0} + R)^2 [F s_w - (F s_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0} F](s_v + s_w)^2 =$$

$$= v\Big\{ q_0 + \sum_{i=1}^{2} c_i q_i + s_{vv}(s - s|_{w=0} + R)^2 + s_{vv} \sum_{i=1}^{2} c_i \Big[(s_{y_i} + G_i s_w)^2 -$$

$$-2[(s_{y_i} + G_i s_w)|_{w=0} - (s_v + s_w)|_{w=0} G_i](s_{y_i} + G_i s_w) +$$

$$+[(s_{y_i} + G_i s_w)|_{w=0} - (s_v + s_w)|_{w=0} G_i]^2 \Big] - s_{vv}|_{w=0} \sum_{i=1}^{2} c_i G_i^2 (s_v + s_w)^2 \Big\} -$$

$$-\frac{s_v + s_w}{\sigma} \Big\{ (s - s|_{w=0} + R)^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} c_i [s_{y_i} + G_i s_w - (s_{y_i} + G_i s_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0} G_i]^2 \Big\}. \qquad (1.5.22)$$

Здесь q_0 и q_i, $i = 1, 2$, определяются по формулам

$$q_0 = -2(s - s|_{w=0} + R)(s_v + s_w)^2 + (s - s|_{w=0} + R)^2 (2s_{vw} + s_{ww}) +$$

$$+ \operatorname{ctg} y_2 [s_{y_2} + G_2 s_w - (s_{y_2} + G_2 s_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0} G_2](s_v + s_w)^2;$$

$$q_i = -2(s_v + s_w)(s_{y_i} + G_i s_w)(s_{vy_i} + G_i s_{vw} + s_{wy_i} + G_i s_{ww}) +$$

$$+[s_{y_i y_i} + 2G_i s_{y_i w} + G_i^2 s_{ww} + (G_{iy_i} + G_i G_{iw}) s_w](s_v + s_w)^2 +$$

$$+(s_{y_i} + G_i s_w)^2 (2s_{vw} + s_{ww}) - \Big[[s_{y_i y_i} + 2G_i s_{y_i w} + G_i^2 s_{ww} +$$

$$+(G_{iy_i} + G_i G_{iw}) s_w]|_{w=0} - 2(s_{vy_i} + G_i s_{vw} + s_{wy_i} + G_i s_{ww})|_{w=0} G_i -$$

$$-(s_v + s_w)|_{w=0} G_{iy_i} + (2s_{vw} + s_{ww})|_{w=0} G_i^2 \Big] (s_v + s_w)^2 -$$

$$-2[(s_{y_i} + G_i s_w)|_{w=0} - (s_v + s_w)|_{w=0} G_i][(s_{y_i} + G_i s_w)(2s_{vw} + s_{ww}) -$$

$$-(s_{vy_i} + G_i s_{vw} + s_{wy_i} + G_i s_{ww})(s_v + s_w)] +$$

$$+[(s_{y_i} + G_i s_w)|_{w=0} - (s_v + s_w)|_{w=0} G_i]^2 (2s_{vw} + s_{ww}) \Big], \quad i = 1, 2.$$

Отметим, что в уравнении (1.5.22) в больших квадратных скобках стоит выражение, представляющее собой квадрат разности. Поэтому уравнение (1.5.22) можно переписать в виде

$$(s - s|_{w=0} + R)^2[Fs_w - (Fs_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0}F](s_v + s_w)^2 =$$

$$= v\Big\{q_0 + \sum_{i=1}^{2} c_i q_i + s_{vv}(s - s|_{w=0} + R)^2 + s_{vv}\sum_{i=1}^{2} c_i\Big[s_{y_i} + G_i s_w -$$

$$-(s_{y_i} + G_i s_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0}G_i\Big]^2 - s_{vv}|_{w=0}\sum_{i=1}^{2} c_i G_i^2 (s_v + s_w)^2\Big\} -$$

$$-\frac{s_v + s_w}{\sigma}\Big\{(s - s|_{w=0} + R)^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{2} c_i[s_{y_i} + G_i s_w - (s_{y_i} + G_i s_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0}G_i]^2\Big\}. \qquad (1.5.23)$$

После замены (1.5.19) уравнение (1.5.23) запишется в виде

$$[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R]^2[F(vs_{1w} + v^2 S_w) - (vs_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0}F|_{w=0} +$$

$$+(s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0}F](s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)^2 =$$

$$= v\Big\{q_0 + \sum_{i=1}^{2} c_i q_i + (2S + 4vS_v + v^2 S_{vv})[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R]^2 +$$

$$+(2S + 4vS_v + v^2 S_{vv})\sum_{i=1}^{2} c_i\Big[vs_{1y_i} + v^2 S_{y_i} + G_i(vs_{1w} + v^2 S_w) -$$

$$-[vs_{1y_i} + v^2 S_{y_i} + G_i(vs_{1w} + v^2 S_w)]|_{w=0} +$$

$$+(s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0}G_i\Big]^2 -$$

$$-(2S + 4vS_v + v^2 S_{vv})|_{w=0}\sum_{i=1}^{2} c_i G_i^2 (s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)^2\Big\} -$$

$$-\frac{s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w}{\sigma}\Big\{[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R]^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{2} c_i\Big[vs_{1y_i} + v^2 S_{y_i} + G_i(vs_{1w} + v^2 S_w) - [vs_{1y_i} + v^2 S_{y_i} + G_i(vs_{1w} + v^2 S_w)]|_{w=0} +$$

$$+ (s_1 + 2vS + v^2 S_v + vs_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0}G_i\Big]^2\Big\}. \qquad (1.5.24)$$

Таким образом, задача (1.5.17), (1.5.18) свелась к одному уравнению (1.5.24), которое после приведения подобных (с учетом равенства (1.5.21)) и деления на v можно записать в виде

$$2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)S+\Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)vS_v+v^2S_{vv}+\frac{2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S|_{w=0})+\frac{1}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}v(S_v|_{w=0})=$$

$$=B_1(w,y_1,y_2)(S|_{w=0})+B_2(w,y_1,y_2)v(S_v|_{w=0})+$$

$$+B_3(w,y_1,y_2)v^2(S_{vv}|_{w=0})+h_0(v,w,y_1,y_2)+vh_1+v^2h_2+v^3h_3, \quad (1.5.25)$$

в котором функции h_1, h_2 и h_3, как и в разделе 1.2, обладают следующими свойствами относительно S и ее производных по по переменной v: функция h_1 зависит от S и не зависит от ее производных по v любого порядка, функция h_2 зависит от S и S_v, но не зависит от производных функции S по v второго и более порядков, функция h_3 зависит от S, S_v и S_{vv}. Функции B_i, $i=1,2,3$, обращаются в нуль при $w=0$. Первый этап доказательства завершен.

На втором этапе для уравнения (1.5.25) строится решение в виде формального ряда по степеням v с коэффициентами, зависящими от w, y_1, y_2. При этом используется схема, описанная в разделе (1.2).

На третьем этапе, как и в разделе 1.2, можно показать, что уравнение вида

$$2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)Z+\Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)vZ_v+v^2Z_{vv}=[1+B(w,y_1,y_2)]H, \qquad (1.5.26)$$

является мажорантным для уравнения (1.5.25), если

$$B(w,y_1,y_2)\gg B_1(w,y_1,y_2)+B_2(w,y_1,y_2)+B_3(w,y_1,y_2)-\frac{s_1}{s_{1,0}};$$

$$H=H_0+vH_1+v^2H_2+v^3H_3\gg h_0+vh_1+v^2h_2+v^3h_3.$$

На четвертом этапе при доказательстве аналитического мажорирующего нуль решения уравнения (1.5.26) используются рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным в разделе 1.2.

Теорема доказана.

Теперь построим решение задачи (1.5.4), (1.5.5) в виде ряда по степеням t и r с коэффициентами, зависящими от x_1 и x_2:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(x_1, x_2)\frac{t^n}{n!}\frac{r^m}{m!}; \tag{1.5.27}$$

$$u_{n,m}(x_1, x_2) = \frac{\partial^{n+m} u}{\partial t^n \partial r^m}\Big|_{\substack{t=0\\ r=0}}.$$

По условию теоремы, для функции $f(t, x_1, x_2)$ в некоторой окрестности $t = 0$ и при всех допустимых x_1, x_2 справедливо разложение

$$f(t, x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1, x_2)\frac{t^n}{n!}.$$

Из условия (1.5.5) можно определить коэффициенты $u_{n,0}$: $u_{n,0} = f_n$, в частности, $u_{0,0} = f_0 = 0$.

Чтобы определить коэффициент $u_{0,1}$, положим в уравнении (1.5.4) $t = r = 0$. С учетом того, что $u|_{t=r=0} = u_{0,0} = 0$ (а значит и $u_{x_1}|_{t=r=0} = u_{x_2}|_{t=r=0} = 0$), получаем равенство

$$R^2 u_{1,0} = \frac{R^2}{\sigma} u_{0,1}^2.$$

Отсюда видно, что $u_{0,1}$ определяется по формуле

$$u_{0,1} = \pm\sqrt{\sigma f_1}.$$

Далее будем рассматривать случай

$$u_{0,1} = -\sqrt{\sigma f_1} < 0.$$

Случай, когда коэффициент $u_{0,1}$ положителен рассматривается аналогично.

Продифференцируем теперь уравнение (1.5.4) по t и положим $t = r = 0$. Получаем

$$R^2 u_{2,0} = u_{1,0}(2Ru_{0,1} + R^2 u_{0,2}) + \frac{2}{\sigma} R^2 u_{0,1} u_{1,1}$$

или же

$$R^2 f_2 = 2Rf_1 u_{0,1} + R^2 f_1 u_{0,2} + \frac{2}{\sigma} R^2 u_{0,1} u_{1,1}.$$

Продифференцировав уравнение (1.5.4) по r и положив $t = r = 0$, получим уравнение

$$2Rf_1 + R^2u_{1,1} = u_{0,1}(2Ru_{0,1} + R^2u_{0,2}) + \frac{1}{\sigma}(2Ru_{0,1}^2 + 2R^2u_{0,1}u_{0,2}),$$

приводя подобные и раскрывая скобки в котором, получаем

$$R^2u_{1,1} = 2\sigma Rf_1 + R^2u_{0,1}u_{0,2} + \frac{2}{\sigma}R^2u_{0,1}u_{0,2}.$$

В итоге мы имеем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} R^2f_2 = 2Rf_1u_{0,1} + R^2f_1u_{0,2} + \frac{2}{\sigma}R^2u_{0,1}u_{1,1} \\ \\ R^2u_{1,1} = 2\sigma Rf_1 + \left(1 + \frac{2}{\sigma}\right)R^2u_{0,1}u_{0,2}, \end{cases}$$

решая которую, можно найти коэффициенты $u_{0,2}$ и $u_{1,1}$:

$$u_{0,2} = \frac{Rf_2 + 6f_1\sqrt{\sigma f_1}}{R(3 + 4/\sigma)f_1},\ u_{1,1} = -\frac{(1 + 2/\sigma)R\sqrt{\sigma f_1}f_2 + 4f_1^2}{(3 + 4/\sigma)Rf_1}..$$

Видно, что коэффициенты $u_{0,2}(x_1, x_2)$ и $u_{1,1}(x_1, x_2)$ определяются аналогично $u_{0,2}$ и $u_{1,1}$ из раздела 1.3 при $\nu = 2$.

Далее процедура построения решения по сути идентична приведенной в разделе 1.3. Уравнение (1.5.4), так же как и уравнение (1.3.1), можно записать в виде (1.3.4), в котором P_1 будет определяться по формуле

$$P_1 = u\left[2(r + R)u_r + \operatorname{ctg} x_2\ u_{x_2} + \frac{1}{\sin^2 x_2}u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\right] + \\ + \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{\sin^2 x_2}u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2\right).$$

Несложно показать, что данная функция, как и функция P_1 из раздела 1.2, будет обладать следующим свойством: производные

$$\frac{\partial^n}{\partial t^{n-k}\partial r^k}\left[\frac{P_1}{(r + R)^2}\right]\Big|_{t=r=0}$$

зависят лишь от тех коэффициентов, порядок которых не превышает n.

В итоге мы придем к системе уравнений

$$A_{n+1} \times \begin{pmatrix} u_{n,1} \\ u_{n-1,2} \\ \vdots \\ u_{0,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{n,0} - f_{n+1} \\ L_{n-1,1} \\ \vdots \\ L_{0,n} \end{pmatrix}. \qquad (1.5.28)$$

с матрицей вида (1.3.11), элементы которой определяются по формулам

$$a_i = \left(i + \frac{2}{\sigma}\right)\sqrt{\sigma f_1(x_1, x_2)} > 0, \quad i = 0, 1, ..., n;$$

$$b_j = -j f_1(x_1, x_2) < 0, \quad j = 1, ..., n.$$

Функции $L_{n-k,k}$, $k = 0, 1, ..., n$, будут иметь вид, существенно более громоздкий, чем в разделе 1.3 (в силу более сложного P_1), однако зависеть будут лишь от тех коэффициентов, порядок которых не превышает числа n.

Как уже говорилось ранее, матрица вида (1.3.11) с положительными a_i, $i = 0, 1, ..., n$ и отрицательными b_j, $j = 1, ..., n$, обратима. Следовательно, система (1.5.28) однозначно разрешима, и на основании принципа математической индукции можно сделать вывод, что все коэффициенты ряда (1.5.27) определяются однозначно.

Из теоремы 2 также вытекает следствие, аналогичное следствию 1.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *причем* $\Upsilon = [0; 2\pi]$, *а функция* f *удовлетворяет условию* $f(\tau, \varphi, \theta) = f(\tau, \varphi + 2\pi, \theta)$. *Тогда задача* (1.5.1), (1.5.2) *имеет единственное решение, удовлетворяющей начальному условию* $u|_{t=0} = 0$, *являющееся в некоторой окрестности* $\tau = 0$, $\rho = R$ *аналитической тепловой волной, если выбрано направление движения фронта последней.*

Обоснование следствия 2 проводится аналогично следствию 1 и здесь не приводится. При этом периодичность по φ с периодом 2π функции f, определяющей краевые условия, позволяет интерпретировать построенную тепловую волну как решение задачи об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданными на сфере.

Замечание 3. Отметим, что наиболее «физичным» является случай, когда в условии теоремы 2 множество $\Upsilon \subseteq [0; 2\pi]$, поскольку тогда отображение, задающее переход из декартовой системы координат в сферическую, является однолистным. При этом в частном случае, когда

$\Upsilon \subseteq [0;\pi]$, получаем постановку, которая подпадает под действие теоремы 7.1 из [8]. Однако уравнение (1.5.1) можно рассматривать и как самостоятельный математический объект, поэтому функция f, вообще говоря, не обязана быть периодической по φ и может рассматриваться при любых значениях аргумента, вплоть до $\Upsilon = \mathbb{R}$. Аналогичное замечание справедливо и для теорем 3 и 4, сформулированных и доказанных в последующих главах.

Глава 2

Задача в пространстве $\mathbb{R}^2$

В этой главе представлены результаты исследования задачи с краевым режимом для нелинейного уравнения теплопроводности, записанного в цилиндрических (полярных) координатах. При некоторых дополнительных предположениях эта постановка может быть интерпретирована как задача для уравнения (2) с данными на границе множества, обладающего свойством звездности, в случае двух пространственных переменных и представляет собой обобщение аналогичных задач из Главы 1 на случай непостоянного $R = R(\varphi)$. В разделе 2.1 производится постановка задачи и формулируется теорема о существовании и единственности аналитического решения. Раздел 2.2 посвящен доказательству теоремы. В разделе 2.3 построено решение рассматриваемой задачи в виде двойного степенного ряда с коэффициентами, зависящими от пространственной переменной, приведено следствие (о существовании тепловой волны) доказанной теоремы.

2.1 Постановка задачи. Формулировка теоремы

Нелинейное уравнение теплопроводности в цилиндрических (полярных) координатах имеет вид

$$u_\tau = u\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho}u_\rho\right) + \frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\varphi^2\right). \tag{2.1.1}$$

Здесь σ — положительная константа. Подробный вывод уравнения (2.1.1) проводится в Приложении 3.

Независимые переменные ρ и φ таковы, что

$$\rho > 0; \quad \varphi \in \Upsilon.$$

Здесь Υ — некоторый конечный или бесконечный числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал).

Для уравнения (2.1.1) рассмотрим краевое условие

$$u(\tau, \rho, \varphi)|_{\rho=R(\varphi)} = f(\tau, \varphi), \tag{2.1.2}$$

в котором $R(\varphi) > 0$, а функция $f(\tau, \varphi)$ удовлетворяют условиям

$$f(0, \varphi) = 0, \quad f_\tau(0, \varphi) = f_1(\varphi) > 0. \tag{2.1.3}$$

В частном случае, когда справедливы равенства $R(\varphi) = R(\varphi + 2\pi)$, $f(\tau, \varphi) = f(\tau, \varphi + 2\pi)$, имеем задачу для уравнения (2) с данными на границе множества, обладающего свойством зведности (см. следствие 3).

Для задачи (2.1.1), (2.1.2) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция $f = f(\tau, \varphi)$, удовлетворяющая условиям* (2.1.3) *является аналитической в некоторой окрестности $\tau = 0$ и при $\varphi \in \Upsilon$, $R(\varphi)$ — аналитическая при $\varphi \in \Upsilon$. Тогда задача* (2.1.1), (2.1.2) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности $\tau = 0$, $\rho = R(\varphi)$, если выбран знак $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R(\varphi)}}$.*

Как и в Главе 1, домножим уравнение (2.1.1) на ρ^2. Получаем

$$\rho^2 u_\tau = u(\rho^2 u_{\rho\rho} + u_{\varphi\varphi} + \rho u_\rho) + \frac{1}{\sigma}(\rho^2 u_\rho^2 + u_\varphi^2). \tag{2.1.4}$$

Теперь сделаем замену $t = \tau$; $r = \rho - R(\varphi)$; $x = \varphi$. Производные при этом преобразуются в соответствии с формулами

$$u_\tau = u_t; \quad u_\rho = u_r; \quad u_{\rho\rho} = u_{rr};$$

$$u_\varphi = u_x - R' u_r; \quad u_{\varphi\varphi} = u_{xx} - R'' u_r - 2R' u_{xr} + R'^2 u_{rr}.$$

В итоге задача (2.1.1), (2.1.2) принимает вид

$$(r + R)^2 u_t = u\Big[(r + R)^2 u_{rr} + u_{xx} - R'' u_r - 2R' u_{xr} + R'^2 u_{rr} + (r + R) u_r\Big] +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\Big[(r+R)^2u_r^2+(u_x-R'u_r)^2\Big], \tag{2.1.5}$$

$$u(t,r,x)|_{r=0}=f(t,x). \tag{2.1.6}$$

Далее мы будем рассматривать задачу (2.1.5), (2.1.6), которая эквивалентна исходной в силу невырожденности использованных замен.

2.2 Доказательство существования аналитического решения

План доказательства, фактически, повторяет план доказательства теоремы 1.

Сначала перепишем (2.1.5) в виде

$$(r+R)^2u_t=u\Big[(r+R-R'')u_r+(r^2+2rR+R^2+R'^2)u_{rr}+u_{xx}-2R'u_{xr}\Big]+$$
$$+\frac{1}{\sigma}\Big[(r^2+2rR+R^2+R'^2)u_r^2-2R'u_xu_r+u_x^2\Big]. \tag{2.2.1}$$

Теперь в задаче (2.2.1), (2.1.6) также, как и в Главе 1, сделаем замену

$$\begin{cases}\tau=t;\\ s=r-b(t,x);\\ y=x.\end{cases} \tag{2.2.2}$$

в которой b — пока еще неизвестная функция, аналитическая в некоторой окрестности $t=0$ и при всех допустимых x и удовлетворяющая условиям

$$b(0,x)=0,\quad b_t(0,x)>0$$

в некоторой окрестности $t=0$ и при всех допустимых x, для которой, как и в аналогичных теоремах ранее, выполняется равенство

$$u(t,r,x)|_{r=b(t,x)}=0. \tag{2.2.3}$$

Производные преобразуются по формулам

$$u_t=u_\tau-b_\tau u_s;\quad u_x=u_y-b_yu_s;\quad u_r=u_s;\quad u_{rr}=u_{ss};$$

$$u_{rx}=u_{sy}-b_yu_{ss};\quad u_{xx}=u_{yy}-b_{yy}u_s-2b_yu_{sy}+b_y^2u_{ss}.$$

Задача (2.2.1), (2.1.6) запишется в виде

$$(s+b+R)^2(u_\tau-b_\tau u_s)=u\Big\{(s+b+R-R'')u_s+$$

$$+[(s+b)^2+2(s+b)R+R^2+R'^2]u_{ss}+u_{yy}-b_{yy}u_s-2b_yu_{sy}+b_y^2u_{ss}-$$
$$-2R'(u_{sy}-b_yu_{ss})\Big\}+\frac{1}{\sigma}\Big\{[(s+b)^2+2(s+b)R+R^2+R'^2]u_s^2-$$
$$-2R'(u_y-b_yu_s)u_s+(u_y-b_yu_s)^2\Big\}; \tag{2.2.4}$$
$$u(\tau,s,y)|_{s=-b(\tau,y)}=f(\tau,y); \tag{2.2.5}$$
$$u(\tau,s,y)|_{s=0}=0. \tag{2.2.6}$$

Теперь задача включает в себя две неизвестные функции u и b и два краевых условия (2.2.5), (2.2.6).

Чтобы впоследствии можно было избавиться от неизвестной функции b, сделаем в задаче (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6) замену
$$\begin{cases} t=\tau; \\ s=s(\tau,u); \\ x=y. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

Производные u_s, u_{ss}, u_τ определяются также, как и в разделе 1.2. Производные по x преобразуются в соответствии с формулой
$$\frac{\partial}{\partial x}=s_x\frac{\partial}{\partial s}+\tau_x\frac{\partial}{\partial\tau}+y_x\frac{\partial}{\partial y}=s_x\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial y}=\frac{s_x}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}.$$
Отсюда имеем
$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{s_x}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}.$$
Продолжая рассуждения, получаем формулы для определения остальных производных второго порядка:
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{s_x}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{s_x}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{s_{xx}s_u-s_xs_{ux}}{s_u^2}\frac{\partial}{\partial u}-$$
$$-2\frac{s_x}{s_u}\frac{\partial^2}{\partial x\partial u}+\frac{s_x}{s_u}\frac{s_{xu}s_u-s_xs_{uu}}{s_u^2}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{s_x^2}{s_u^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2s_us_xs_{ux}-s_{xx}s_u^2-s_x^2s_{uu}}{s_u^3}\frac{\partial}{\partial u}-2\frac{s_x}{s_u}\frac{\partial^2}{\partial x\partial u}+\frac{s_x^2}{s_u^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2};$$
$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial y}=\frac{1}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{s_x}{s_u}\frac{\partial}{\partial u}\right)=\frac{1}{s_u}\frac{\partial^2}{\partial u\partial x}-\frac{s_{xu}s_u-s_xs_{uu}}{s_u^3}\frac{\partial}{\partial u}-\frac{s_x}{s_u^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}.$$

Таким образом, производные, входящие в уравнение (2.2.4) запишутся в виде

$$u_\tau = -\frac{s_t}{s_u}; \quad u_s = \frac{1}{s_u}; \quad u_y = -\frac{s_x}{s_u}; \quad u_{ss} = -\frac{s_{uu}}{s_u^3};$$

$$u_{yy} = \frac{2s_u s_x s_{ux} - s_{xx}s_u^2 - s_x^2 s_{uu}}{s_u^3}; \quad u_{ys} = \frac{s_x s_{uu} - s_{xu}s_u}{s_u^3}.$$

Уравнение (2.2.4) принимает вид

$$(s+b+R)^2(-\frac{s_t}{s_u} - \frac{b_t}{s_u}) = u\Big\{\frac{s+b+R-R''}{s_u} -$$

$$-[(s+b)^2 + 2(s+b)R + R^2 + R'^2]\frac{s_{uu}}{s_u^3} + \frac{2s_u s_x s_{ux} - s_{xx}s_u^2 - s_x^2 s_{uu}}{s_u^3} - \frac{b_{xx}}{s_u} -$$

$$-2b_x\frac{s_x s_{uu} - s_{xu}s_u}{s_u^3} - b_x^2\frac{s_{uu}}{s_u^3} - 2R'(\frac{s_x s_{uu} - s_{xu}s_u}{s_u^3} + b_x\frac{s_{uu}}{s_u^3})\Big\} +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\Big\{[(s+b)^2 + 2(s+b)R + R^2 + R'^2]\frac{1}{s_u^2} - 2R'(-\frac{s_x}{s_u} - \frac{b_x}{s_u})\frac{1}{s_u} + (-\frac{s_x}{s_u} - \frac{b_x}{s_u})^2\Big\}.$$

После домножения на $-s_u^3$ уравнение можно записать в виде

$$(s+b+R)^2 s_u^2(s_t + b_t) = u\Big\{ - s_u^2(s+b+R-R'') +$$

$$+[(s+b)^2 + 2(s+b)R + R^2 + R'^2]s_{uu} - 2s_u s_x s_{ux} + s_{xx}s_u^2 + s_x^2 s_{uu} + b_{xx}s_u^2 +$$

$$+2b_x(s_x s_{uu} - s_{xu}s_u) + b_x^2 s_{uu} + 2R'(s_x s_{uu} - s_{xu}s_u + b_x s_{uu})\Big\} -$$

$$-\frac{s_u}{\sigma}\Big[(s+b)^2 + 2(s+b)R + R^2 + R'^2 + 2R'(s_x + b_x) + (s_x + b_x)^2\Big]. \quad (2.2.8)$$

Из условия (2.2.5), которое теперь запишется в виде

$$s(t,u,x)|_{u=f(t,x)} = -b(t,x), \quad (2.2.9)$$

найдем b и все ее производные, участвующие в уравнении (2.2.8):

$$b = -s|_{u=f}; \quad b_t = -s_t|_{u=f} - s_u|_{u=f}f_t; \quad b_x = -s_x|_{u=f} - s_u|_{u=f}f_x;$$

$$b_{xx} = -s_{xx}|_{u=f} - 2s_{xu}|_{u=f}f_x - s_u|_{u=f}f_{xx} - s_{uu}|_{u=f}f_x^2.$$

Подставляя эти формулы в (2.2.8), получаем уравнение

$$(s - s|_{u=f} + R)^2 s_u^2(s_t - s_t|_{u=f} - s_u|_{u=f}f_t) = u\Big\{ - s_u^2(s - s|_{u=f} + R - R'') +$$

$$+[(s - s|_{u=f})^2 + 2(s - s|_{u=f})R + R^2 + R'^2]s_{uu} - 2s_u s_x s_{ux} + s_{xx}s_u^2 + s_x^2 s_{uu} -$$

$$-(s_{xx}|_{u=f}+2s_{xu}|_{u=f}f_x+s_u|_{u=f}f_{xx}+s_{uu}|_{u=f}f_x^2)s_u^2-$$

$$-2(s_x|_{u=f}+s_u|_{u=f}f_x)(s_xs_{uu}-s_{xu}s_u)+(s_x|_{u=f}+s_u|_{u=f}f_x)^2s_{uu}+$$

$$+2R'(s_xs_{uu}-s_{xu}s_u-(s_x|_{u=f}+s_u|_{u=f}f_x)s_{uu})\Big\}-$$

$$-\frac{s_u}{\sigma}\Big[(s-s|_{u=f})^2+2(s-s|_{u=f})R+R^2+R'^2+2R'(s_x-s_x|_{u=f}-s_u|_{u=f}f_x)+$$

$$+(s_x-s_x|_{u=f}-s_u|_{u=f}f_x)^2\Big]. \qquad (2.2.10)$$

Краевое условие (2.2.6) теперь запишется в виде

$$s(t,u,x)|_{u=0}=0. \qquad (2.2.11)$$

Мы вновь получили задачу, состоящую из одного уравнения, одного краевого условия и одной неизвестной функции.

В задаче (2.2.10), (2.2.11) сделаем замену

$$\begin{cases} v=u; \\ w=u-f(t,x); \\ y=x, \end{cases} \qquad (2.2.12)$$

для того, чтобы сделать $u=f(t,x)$ новой координатной плоскостью.

Чтобы полностью выразить старые переменные через новые, запишем второе соотношение замены (2.2.12) в виде

$$\Psi(v-w,t,y)\equiv v-w-f(t,y)=0. \qquad (2.2.13)$$

Рассуждая также, как и в Главе 1, получаем, что $\Psi_t<0$ в некоторой окрестности $t=0$. Следовательно, по теореме о неявной функции, соотношение (2.2.13) определяет аналитическую функцию

$$t=\psi(v-w,y)$$

такую, что $\psi(v-w,y)|_{v=w}=0$.

Введем следующие обозначения:

$$F(v-w,y)=-f_t(t,y)|_{t=\psi(v-w,y)};$$

$$G(v-w,y)=-f_y(t,y)|_{t=\psi(v-w,y)}.$$

В силу аналитичности функций F и G для них справедливы представления

$$F(v-w,y)=F_0(w,y)+vF_1(v,w,y);$$

$$G(v-w,y)=G_0(w,y)+vG_1(v,w,y).$$

При этом

$$F_0=F|_{v=0},\quad F_0|_{w=0}=-f_t|_{t=0}=-f_1;$$

$$G_0=G|_{v=0},\quad G_0|_{w=0}=-f_y|_{t=0}=0.$$

Теперь пересчитаем производные. Производные первого порядка преобразуются в соответствии с формулами

$$\frac{\partial}{\partial t}=v_t\frac{\partial}{\partial v}+w_t\frac{\partial}{\partial w}+y_t\frac{\partial}{\partial y}=-f_t\frac{\partial}{\partial w}=F\frac{\partial}{\partial w};$$

$$\frac{\partial}{\partial u}=v_u\frac{\partial}{\partial v}+w_u\frac{\partial}{\partial w}+y_u\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial w};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=v_x\frac{\partial}{\partial v}+w_x\frac{\partial}{\partial w}+y_x\frac{\partial}{\partial y}=-f_x\frac{\partial}{\partial w}+\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}+G\frac{\partial}{\partial w}.$$

Учитывая эти равенства, запишем формулы для производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}=\left(\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial w}\right)=\frac{\partial^2}{\partial v^2}+2\frac{\partial^2}{\partial v\partial w}+\frac{\partial^2}{\partial w^2};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial y}+G\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+G\frac{\partial}{\partial w}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+2G\frac{\partial^2}{\partial y\partial w}+G^2\frac{\partial^2}{\partial w^2}+\Big(G_y+GG_w\Big)\frac{\partial}{\partial w};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+G\frac{\partial}{\partial w}\right)=\frac{\partial^2}{\partial v\partial y}+G\frac{\partial^2}{\partial v\partial w}+\frac{\partial^2}{\partial w\partial y}+G\frac{\partial^2}{\partial w^2}+$$

$$+\Big(G_v+G_w\Big)\frac{\partial}{\partial w}=\frac{\partial^2}{\partial v\partial y}+G\frac{\partial^2}{\partial v\partial w}+\frac{\partial^2}{\partial w\partial y}+G\frac{\partial^2}{\partial w^2}.$$

Отсюда следует, что окончательно производные преобразуются в виде

$$s_t=Fs_w;\quad s_u=s_v+s_w;\quad s_x=s_y+Gs_w;$$

$$s_{uu}=s_{vv}+2s_{vw}+s_{ww};$$

$$s_{xx} = s_{yy} + 2Gs_{yw} + G^2 s_{ww} + (G_y + GG_w)s_w;$$

$$s_{ux} = s_{vy} + Gs_{vw} + s_{wy} + Gs_{ww}.$$

Таким образом, после замены (2.2.12) задача (2.2.10), (2.2.11) принимает вид

$$\begin{gathered}
(s - s|_{w=0} + R)^2(s_v + s_w)^2[Fs_w - (Fs_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0}F] = \\
= v\Big\{-(s_v+s_w)^2(s-s|_{w=0}+R-R'')+[(s-s|_{w=0})^2+2(s-s|_{w=0})R+R^2+R'^2]\times \\
\times(s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww}) - 2(s_v + s_w)(s_y + Gs_w)(s_{vy} + Gs_{vw} + s_{wy} + Gs_{ww})+ \\
+[s_{yy} + 2Gs_{yw} + G^2 s_{ww} + (G_y + GG_w)s_w](s_v + s_w)^2+ \\
+(s_y+Gs_w)^2(s_{vv}+2s_{vw}+s_{ww})-\Big[[s_{yy}+2Gs_{yw}+G^2s_{ww}+(G_y+GG_w)s_w]|_{w=0}- \\
-2(s_{vy} + Gs_{vw} + s_{wy} + Gs_{ww})|_{w=0}G - (s_v + s_w)|_{w=0}G_y+ \\
+(s_{vv}+2s_{vw}+s_{ww})|_{w=0}G^2\Big](s_v+s_w)^2-2[(s_y+Gs_w)|_{w=0}-(s_v+s_w)|_{w=0}G]\times \\
\times[(s_y + Gs_w)(s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww}) - (s_{vy} + Gs_{vw} + s_{wy} + Gs_{ww})(s_v + s_w)]+ \\
+[(s_y + Gs_w)|_{w=0} - (s_v + s_w)|_{w=0}G]^2(s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww})+ \\
+2R'\Big[(s_y + Gs_w)(s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww}) - (s_{vy} + Gs_{vw} + s_{wy} + Gs_{ww})(s_v + s_w)- \\
-[(s_y + Gs_w)|_{w=0} - (s_v + s_w)|_{w=0}G](s_{vv} + 2s_{vw} + s_{ww})\Big]\Big\}- \\
-\frac{s_v + s_w}{\sigma}\Big\{(s - s|_{w=0})^2 + 2(s - s|_{w=0})R + R^2 + R'^2+ \\
+2R'[s_y + Gs_w - (s_y + Gs_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0}G]+ \\
+ [s_y + Gs_w - (s_y + Gs_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0}G]^2\Big\}; \qquad (2.2.14)
\end{gathered}$$

$$s(v, w, y)|_{v=0} = 0. \qquad (2.2.15)$$

Для того, чтобы сделать последнюю замену

$$s(v, w, y) = vs_1(w, y) + v^2 S(v, w, y), \qquad (2.2.16)$$

определим функцию $s_1 = s_v|_{v=0}$. Для этого положим в уравнении (2.2.14) $v = 0$. С учетом равенств

$$s|_{v=0} = s_w|_{v=0} = s_y|_{v=0} = 0,$$

$$F|_{v=0} = F_0, \quad F|_{v=w=0} = -f_1,$$

$$G|_{v=0} = G_0, \quad G|_{v=w=0} = 0$$

получаем уравнение

$$R^2 s_1^2 (s_1|_{w=0}) F_0 = -\frac{s_1}{\sigma}\Big[R^2 + R'^2 + 2R' s_1|_{w=0} G_0 + (s_1|_{w=0} G_0)^2\Big].$$

Поделив обе части уравнения на s_1, получаем равенство

$$R^2 s_1 (s_1|_{w=0}) F_0 = -\frac{1}{\sigma}\Big[R^2 + R'^2 + 2R' s_1|_{w=0} G_0 + (s_1|_{w=0} G_0)^2\Big]. \quad (2.2.17)$$

Положив в (2.2.17) $w = 0$, найдем функцию $s_{1,0} = s_1|_{w=0}$:

$$s_{1,0} = \pm\sqrt{\frac{R^2 + R'^2}{\sigma R^2 f_1}}.$$

Как и в Главе 1, будем рассматривать случай, когда $s_{1,0} < 0$.

Из (2.2.17) получаем, что s_1 определяется по формуле

$$s_1 = -\frac{1}{\sigma R^2 s_{1,0} F_0}\Big[R^2 + (R' + s_{1,0} G_0)^2\Big]. \quad (2.2.18)$$

Теперь, исходя из разложения (2.2.16), пересчитаем производные. Получаем следующие формулы:

$$s_v = s_1 + 2vS + v^2 S_v; \quad s_{vv} = 2S + 4vS_v + v^2 S_{vv};$$

$$s_w = v s_{1w} + v^2 S_w; \quad s_{ww} = v s_{1ww} + v^2 S_{ww};$$

$$s_y = v s_{1y} + v^2 S_y; \quad s_{yy} = v s_{1yy} + v^2 S_{yy}; \quad s_{wy} = v s_{1wy} + v^2 S_{wy};$$

$$s_{vw} = s_{1w} + 2vS_w + v^2 S_{vw}; \quad s_{vy} = s_{1y} + 2vS_y + v^2 S_{vy}.$$

Подставим полученные формулы в уравнение (2.2.14). Получаем, что задача (2.2.14), (2.2.15) сводится к одному уравнению

$$[vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R]^2 (s_1 + 2vS + v^2 S_v + v s_{1w} + v^2 S_w)^2 \times$$

$$\times [F(v s_{1w} + v^2 S_w) - F|_{w=0} (v s_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0} +$$

$$+ (s_1 + 2vS + v^2 S_v + v s_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0} F] =$$

$$= v\Big\{ -(s_1 + 2vS + v^2 S_v + v s_{1w} + v^2 S_w)^2 [vs_1 + v^2 S - (vs_1 + v^2 S)|_{w=0} + R - R''] +$$

$$+\Big[[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}]^2+2[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}]R+R^2+R'^2\Big]\times$$
$$\times(2S+4vS_v+v^2S_{vv}+2s_{1w}+4vS_w+2v^2S_{vw}+vs_{1ww}+v^2S_{ww})-$$
$$-2(s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)]\times$$
$$\times[s_{1y}+2vS_y+v^2S_{vy}+G(s_{1w}+2vS_w+v^2S_{vw})+vs_{1wy}+v^2S_{wy}+$$
$$+G(vs_{1ww}+v^2S_{ww})]+[vs_{1yy}+v^2S_{yy}+2G(vs_{1wy}+v^2S_{wy})+$$
$$+G^2(vs_{1ww}+v^2S_{ww})+(G_y+GG_w)(vs_{1w}+v^2S_w)]\times$$
$$\times(s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)^2+[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)]^2\times$$
$$\times(2S+4vS_v+v^2S_{vv}+2s_{1w}+4vS_w+2v^2S_{vw}+vs_{1ww}+v^2S_{ww})-$$
$$-\Big[[vs_{1yy}+v^2S_{yy}+2G(vs_{1wy}+v^2S_{wy})+G^2(vs_{1ww}+v^2S_{ww})+$$
$$+(G_y+GG_w)(vs_{1w}+v^2S_w)]|_{w=0}-2[s_{1y}+2vS_y+v^2S_{vy}+$$
$$+G(s_{1w}+2vS_w+v^2S_{vw})+vs_{1wy}+v^2S_{wy}+G(vs_{1ww}+v^2S_{ww})]|_{w=0}G-$$
$$-(s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)|_{w=0}G_y+(2S+4vS_v+v^2S_{vv}+2s_{1w}+4vS_w+$$
$$+2v^2S_{vw}+vs_{1ww}+v^2S_{ww})|_{w=0}G^2\Big](s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)^2-$$
$$-2\Big[[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)]|_{w=0}-(s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)|_{w=0}G\Big]\times$$
$$\times\Big[[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)](2S+4vS_v+v^2S_{vv}+2s_{1w}+4vS_w+2v^2S_{vw}+$$
$$+vs_{1ww}+v^2S_{ww})-[s_{1y}+2vS_y+v^2S_{vy}+G(s_{1w}+2vS_w+v^2S_{vw})+vs_{1wy}+v^2S_{wy}+$$
$$+G(vs_{1ww}+v^2S_{ww})](s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)\Big]+$$
$$+\Big[[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)]|_{w=0}-(s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)|_{w=0}G\Big]^2\times$$
$$\times(2S+4vS_v+v^2S_{vv}+2s_{1w}+4vS_w+2v^2S_{vw}+vs_{1ww}+v^2S_{ww})+$$
$$+2R'\Big[[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)](2S+4vS_v+v^2S_{vv}+2s_{1w}+4vS_w+$$
$$+2v^2S_{vw}+vs_{1ww}+v^2S_{ww})-[s_{1y}+2vS_y+v^2S_{vy}+G(s_{1w}+2vS_w+v^2S_{vw})+$$
$$+vs_{1wy}+v^2S_{wy}+G(vs_{1ww}+v^2S_{ww})](s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)-$$
$$-\Big[[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)]|_{w=0}-(s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)|_{w=0}G\Big]\times$$
$$\times(2S+4vS_v+v^2S_{vv}+2s_{1w}+4vS_w+2v^2S_{vw}+vs_{1ww}+v^2S_{ww})\Big]\Big\}-$$

$$-\frac{s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w}{\sigma}\Big\{[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}]^2+$$

$$+2[vs_1+v^2S-(vs_1+v^2S)|_{w=0}]R+R^2+R'^2+2R'[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)-$$

$$-[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)]|_{w=0}+(s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)|_{w=0}G]+$$

$$+[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)-[vs_{1y}+v^2S_y+G(vs_{1w}+v^2S_w)]|_{w=0}+$$

$$+(s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)|_{w=0}G]^2\Big\}. \qquad (2.2.19)$$

Используя рассуждения, аналогичные рассуждениям, приведенным в Главе 1, мы можем привести уравнение (2.2.19) к виду

$$2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)S+\Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)vS_v+v^2S_{vv}+\frac{2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S|_{w=0})+\frac{1}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}v(S_v|_{w=0})=$$

$$=B_1(w,y)(S|_{w=0})+B_2(w,y)v(S_v|_{w=0})+B_3(w,y)v^2(S_{vv}|_{w=0})+$$

$$+h_0(v,w,y)+vh_1+v^2h_2+v^3h_3, \qquad (2.2.20)$$

где функции h_1, h_2, h_3 зависят от переменных v, w, y, функции S и ее частных производных, причем наивысший порядок производной по v, входящей в функцию h_i не превышает $i-1$, $i=1,2,3$. Функции B_1, B_2 и B_3 обращаются в нуль при $w=0$.

Можно показать, что уравнение вида

$$2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)Z+\Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)vZ_v+v^2Z_{vv}=[1+B(w,y)]H, \qquad (2.2.21)$$

является мажорантным для уравнения (2.2.20), если

$$B(w,y)\gg B_1+B_2+B_3-\frac{s_1}{s_{1,0}};$$

$$H=H_0+vH_1+v^2H_2+v^3H_3\gg h_0+vh_1+v^2h_2+v^3H_3.$$

При доказательстве существования аналитического мажорирующего нуль решения уравнения (2.2.21) мы руководствуемся теми же соображениями, что и в Главе 1. Теорема 3 доказана.

2.3 Построение решения в виде ряда

В этом разделе мы построим для исходной задачи

$$(r+R)^2 u_t = u\Big[(r+R-R'')u_r + (r^2+2rR+R^2+R'^2)u_{rr} + u_{xx} - 2R'u_{xr}\Big]+$$
$$+\frac{1}{\sigma}\Big[(r^2+2rR+R^2+R'^2)u_r^2 - 2R'u_x u_r + u_x^2\Big]; \qquad (2.3.1)$$
$$u(t,r,x)|_{r=0} = f(t,x) \qquad (2.3.2)$$

решение в виде двойного степенного ряда

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(x)\frac{t^n}{n!}\frac{r^m}{m!}, \qquad (2.3.3)$$

в котором

$$u_{n,m}(x) = \frac{\partial^{n+m}u}{\partial t^n \partial r^m}\Big|_{\substack{t=0\\ r=0}}.$$

Из условия (2.3.2) можно определить коэффициенты $u_{n,0}$:

$$u_{n,0}(x) = f_n(x);$$

$$u_{0,0}(x) = f_0(x) \equiv 0.$$

Здесь $f_n(x)$ — это коэффициенты разложения функции $f(t,x)$ в ряд

$$f(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Определим $u_{0,1}$. Для этого положим в (2.3.1) $t = r = 0$. С учетом равенства $u_x|_{t=r=0} = 0$ получаем уравнение

$$R^2 u_{1,0} = \frac{R^2+R'^2}{\sigma}u_{0,1}^2. \qquad (2.3.4)$$

Преобразуя (2.3.4), находим $u_{0,1}$:

$$u_{0,1} = \pm\frac{R}{\sqrt{R^2+R'^2}}\sqrt{\sigma f1}.$$

Будем рассматривать случай отрицательного $u_{0,1}$, второй случай рассматривается аналогично.

Прежде чем продолжить определение коэффициентов ряда (2.3.3), запишем уравнение (2.3.1) в виде

$$(r+R)^2 u_t = [(r+R)^2 + R'^2]uu_{rr} + \frac{1}{\sigma}[(r+R)^2+R'^2]u_r^2 + P_1, \qquad (2.3.5)$$

в котором

$$P_1 = u[(r+R-R'')u_r + u_{xx} - 2R'u_{xr}] + \frac{1}{\sigma}(-2R'u_xu_r + u_x^2).$$

Поделив обе части уравнения (2.3.5) на $(r+R)^2$, получим

$$u_t = \left[1 + \frac{R'^2}{(r+R)^2}\right] uu_{rr} + \frac{1}{\sigma}\left[1 + \frac{R'^2}{(r+R)^2}\right] u_r^2 + P_2. \qquad (2.3.6)$$

Здесь $P_2 = \frac{1}{(r+R)^2}P_1$. Если ввести новое обозначение

$$c_0(r,x) = 1 + \frac{R'^2}{(r+R)^2},$$

то уравнение (2.3.6) запишется в виде

$$u_t = c_0uu_{rr} + \frac{1}{\sigma}c_0u_r^2 + P_2. \qquad (2.3.7)$$

Теперь применим к уравнению (2.3.7) оператор $\frac{\partial^n}{\partial t^{n-k}\partial r^k}\Big|_{\substack{t=0\\r=0}}$, предполагая, что $k = 0, 1, ..., n$. Вновь воспользовавшись формулой

$$\frac{\partial^n(\alpha\beta)}{\partial t^{n-k}\partial r^k} = \sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k} C_{n-k}^i C_k^j \frac{\partial^{i+j}\alpha}{\partial t^i\partial r^j}\frac{\partial^{n-i-j}\beta}{\partial t^{n-k-i}\partial r^{k-j}},$$

получим уравнение

$$u_{n-k+1,k} = \sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k} C_{n-k}^i C_k^j \frac{\partial^{i+j}(c_0u)}{\partial t^i\partial r^j}\Big|_{t=r=0} u_{n-k-i,k-j+2} +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k} C_{n-k}^i C_k^j \frac{\partial^{i+j}(c_0u_r)}{\partial t^i\partial r^j}\Big|_{t=r=0} u_{n-k-i,k-j+1} + \frac{\partial^n P_2}{\partial t^{n-k}\partial r^k}\Big|_{t=r=0}. \qquad (2.3.8)$$

Помня, что c_0 не зависит от t, получаем формулы

$$\frac{\partial^{i+j}(c_0u)}{\partial t^i\partial r^j}\Big|_{\substack{t=0\\r=0}} = \sum_{m=0}^{i}\sum_{l=0}^{j} C_i^m C_j^l u_{m,l}\frac{\partial^{i-m+j-l}c_0}{\partial t^{i-m}\partial r^{j-l}}\Big|_{\substack{t=0\\r=0}} = \sum_{l=0}^{j} C_j^l u_{i,l}\frac{\partial^{j-l}c_0}{\partial r^{j-l}}\Big|_{r=0};$$

$$\frac{\partial^{i+j}(c_0u_r)}{\partial t^i\partial r^j}\Big|_{\substack{t=0\\r=0}} = \sum_{l=0}^{j} C_j^l u_{i,l+1}\frac{\partial^{j-l}c_0}{\partial r^{j-l}}\Big|_{r=0}.$$

Подставляя полученные формулы в уравнение (2.3.8), получаем равенство

$$u_{n-k+1,k} = \sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k} C_{n-k}^i C_k^j \Big(\sum_{l=0}^{j} C_j^l u_{i,l}\frac{\partial^{j-l}c_0}{\partial r^{j-l}}\Big|_{r=0}\Big) u_{n-k-i,k-j+2} +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=0}^{k}C_{n-k}^{i}C_{k}^{j}\Big(\sum_{l=0}^{j}C_{j}^{l}u_{i,l+1}\frac{\partial^{j-l}c_0}{\partial r^{j-l}}\Big|_{r=0}\Big)u_{n-k-i,k-j+1}+$$
$$+\frac{\partial^n P_2}{\partial t^{n-k}\partial r^k}\Big|_{t=r=0}. \tag{2.3.9}$$

Уравнение (2.3.9) можно записать в виде

$$u_{n-k+1,k}-\Big(k+\frac{2}{\sigma}\Big)u_{0,1}c_0(0,x)u_{n-k,k+1}-(n-k)f_1c_0(0,x)u_{n-k-1,k+2}=$$
$$=L_{n-k,k}, \tag{2.3.10}$$

где

$$L_{n-k,k}=\sum_{\substack{i=0\\ i+j\neq 0}}^{n-k}\sum_{\substack{j=0\\ i+j\neq 1}}^{k}C_{n-k}^{i}C_{k}^{j}\Big(\sum_{l=0}^{j}C_{j}^{l}u_{i,l}\frac{\partial^{j-l}c_0}{\partial r^{j-l}}\Big|_{r=0}\Big)u_{n-k-i,k-j+2}+$$
$$+\frac{1}{\sigma}\sum_{\substack{i=0\\ i+j\neq 0}}^{n-k}\sum_{\substack{j=0\\ i+j\neq n}}^{k}C_{n-k}^{i}C_{k}^{j}\Big(\sum_{l=0}^{j}C_{j}^{l}u_{i,l+1}\frac{\partial^{j-l}c_0}{\partial r^{j-l}}\Big|_{r=0}\Big)u_{n-k-i,k-j+1}+$$
$$+\frac{1}{\sigma}u_{0,1}\sum_{l=0}^{k-1}C_{k}^{l}u_{n-k,l+1}\frac{\partial^{k-l}c_0}{\partial r^{k-l}}\Big|_{r=0}+\frac{\partial^n P_2}{\partial t^{n-k}\partial r^k}\Big|_{t=r=0}.$$

Можно показать, что $L_{n-k,k}$ зависят только лишь от тех коэффициентов, сумма индексов которых не превосходит n.

Выдвинем теперь предположение индукции: пусть определены все коэффициенты ряда (2.3.3) до n-го порядка включительно. Используя формулу (2.3.10), мы можем получить систему уравнений

$$A_{n+1}\times\begin{pmatrix}u_{n,1}\\ u_{n-1,2}\\ \vdots\\ u_{0,n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_{n,0}-f_{n+1}\\ L_{n-1,1}\\ \vdots\\ L_{0,n}\end{pmatrix}, \tag{2.3.11}$$

в которой A_{n+1} — квадратная трехдиагональная матрица вида

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{pmatrix} \qquad (2.3.12)$$

с элементами

$$a_i = -\Big(i + \frac{2}{\sigma}\Big) u_{0,1} c_0(0,x) > 0, \quad i = 0, 1, ..., n;$$

$$b_j = -j f_1 c_0(0,x) < 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Таким образом, мы получили систему из $n+1$ уравнений (2.3.11), схожую с системой (1.3.10) и обладающую теми же важными свойствами:

1. Правая часть системы зависит только от коэффициентов порядка не выше n, т. е., по предположению индукции, зависит только от известных нам функций.

2. Все элементы наддиагонали матрицы (2.3.12) отрицательны, а элементы поддиагонали и главной диагонали положительны, что обеспечивает невырожденность матрицы.

Следовательно, на основании принципа математической индукции можно утверждать, что система (2.3.11) однозначно разрешима. А значит, и все коэффициенты ряда (2.3.3) определяются однозначно.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3*, причем* $\Upsilon = [0; 2\pi]$*, а функции* f *и* R *удовлетворяют условиям* $R(\varphi) = R(\varphi + 2\pi)$*,* $f(\tau, \varphi) = f(\tau, \varphi + 2\pi)$*. Тогда задача* (2.1.1), (2.1.2) *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию* $u|_{t=0} = 0$*, являющееся в некоторой окрестности* $\tau = 0$*,* $\rho = R$ *аналитической тепловой волной, если выбрано направление движения фронта последней.*

Обоснование следствия 3 проводится аналогично обоснованию следствия 1 и здесь не приводится. При этом периодичность по φ с периодом 2π функций f и R, определяющей краевые условия, позволяет интерпретировать построенную тепловую волну как решение задачи об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданными на границе области, обладающей свойством звездности.

Отметим также, что уравнение (2.1.1), как ранее уравнение (1.5.1), можно рассматривать в качестве самостоятельного математического объекта и не требовать периодичности по φ.

Замечание 4. Необходимость использования полярной системы координат для некоторых задач вида (2.1.1), (2.1.2) носит принципиальный характер: если краевые условия заданы на многообразиях вида $R(\varphi) = R_0 + \sin n\varphi$, $R_0 > 1$ или $R(\varphi) = 1 + e^{-\varphi^2}$, то очевидно, что рассматривать такие задачи в декартовых координатах весьма проблематично, поскольку в первом случае мы имеем сложную замкнутую линию с n «пальцами» (при целых n; однако n может быть любым действительным числом), а во втором — спираль с бесконечным числом витков, расстояние между которыми может быть сколь угодно малым. В цилиндрических (полярных) же координатах затруднений не возникает, если только аналитическая функция f, удовлетворяет условиям (2.1.3).

Глава 3

Задача в пространстве $\mathbb{R}^3$

В этой главе результаты, полученные в главе 2, переносятся на случай трех пространственных переменных. В разделах 3.1, 3.2 формулируется и доказывается теорема существования и единственности аналитического решения (более общая, чем в разделе 1.5). В разделе 3.3 проводится процедура построения решения в виде двойного степенного ряда, формулируется следствие (о существовании тепловой волны) доказанной ранее теоремы.

3.1 Постановка задачи. Формулировка теоремы

Рассматривается нелинейное уравнение теплопроводности в сферических координатах (см. раздел 1.5)

$$u_\tau = u\left(\frac{2}{\rho}u_\rho + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}u_\theta + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}\right) + \\ + \frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\theta^2\right). \qquad (3.1.1)$$

Здесь σ — положительная константа. Так как в уравнении (3.1.1) содержатся множители $\operatorname{ctg}\theta$ и $1/\sin^2\theta$, то возникает необходимость ввести соответствующие ограничения на θ.

Пусть независимые переменные ρ, φ, θ удовлетворяют ограничениям

$$\rho > 0; \quad \varphi \in \Upsilon; \; 0 < \theta_1 \le \theta \le \pi - \theta_2,$$

где θ_1 и $\theta_2 > 0$ — малые константы; Υ — некоторый конечный или бесконечный числовой промежуток (отрезок, интервал, полуинтервал).

Для уравнения (3.1.1) рассматривается краевое условие

$$u(\tau,\rho,\varphi,\theta)|_{\rho=R(\varphi,\theta)} = f(\tau,\varphi,\theta), \tag{3.1.2}$$

в котором функции $R(\varphi,\theta)$ и $f(\tau,\varphi,\theta)$ удовлетворяют условиям

$$R(\varphi,\theta) > 0,\ f(0,\varphi) = 0,\ f_\tau(0,\varphi) = f_1(\varphi) > 0. \tag{3.1.3}$$

В частном случае, когда справедливы равенства $R(\varphi,\theta) = R(\varphi + 2\pi,\theta), f(\tau,\varphi,\theta) = f(\tau,\varphi+2\pi,\theta)$, имеем задачу для уравнения (2) с данными на границе множества, обладающего свойством звездности (см. следствие 4).

Для задачи (3.1.1), (3.1.2) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функции $R(\varphi,\theta)$, $f = f(\tau,\varphi,\theta)$, удовлетворяющие условиям* (3.1.3)*, являются аналитическими в некоторой окрестности $\tau = 0$ и при всех допустимых φ и θ. Тогда задача* (3.1.1), (3.1.2) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности $\tau = 0$, $\rho = R(\varphi,\theta)$, если выбран знак $u_\rho\big|_{\substack{\tau=0\\ \rho=R}}$.*

После домножения (3.1.1) на ρ^2 получим уравнение

$$\rho^2 u_\tau = u\left(2\rho u_\rho + \operatorname{ctg}\theta u_\theta + \rho^2 u_{\rho\rho} + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + u_{\theta\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\left(\rho^2 u_\rho^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}u_\varphi^2 + u_\theta^2\right). \tag{3.1.4}$$

Теперь сделаем замену $t = \tau$; $r = \rho - R(\varphi,\theta)$; $\varphi = x_1$; $\theta = x_2$. Производные преобразуются по формулам

$$u_\tau = u_t; \quad u_\rho = u_r; \quad u_{\rho\rho} = u_{rr};$$

$$u_\varphi = u_{x_1} - R_{x_1}u_r; \quad u_{\varphi\varphi} = u_{x_1x_1} - R_{x_1x_1}u_r - 2R_{x_1}u_{x_1r} + {R_{x_1}}^2 u_{rr};$$

$$u_\theta = u_{x_2} - R_{x_2}u_r; \quad u_{\theta\theta} = u_{x_2x_2} - R_{x_2x_2}u_r - 2R_{x_2}u_{x_2r} + {R_{x_2}}^2 u_{rr}.$$

В итоге задача (3.1.1), (3.1.2) примет вид

$$(r+R)^2 u_t = u\Big[2(r+R)u_r + (r+R)^2 u_{rr} + \operatorname{ctg} x_2(u_{x_2} - R_{x_2}u_r) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2} c_i(u_{x_ix_i} - 2R_{x_i}u_{rx_i} - R_{x_ix_i}u_r + R_{x_i}^2 u_{rr})\Big] +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\Big[(r+R)^2u_r^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i(u_{x_i} - R_{x_i}u_r)^2\Big]; \qquad (3.1.5)$$

$$u(t,r,x_1,x_2)|_{r=0} = f(t,x_1,x_2). \qquad (3.1.6)$$

Здесь за c_1 и c_2 обозначены функции

$$c_1 = \frac{1}{\sin^2 x_2}; \quad c_2 = 1.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать задачу (3.1.5), (3.1.6), которая эквивалентна исходной.

3.2 Доказательство существования аналитического решения

Доказательство теоремы опирается на те же рассуждения, что и в Главе 2, поэтому здесь освещаются только основные моменты. Некоторые наиболее громоздкие выкладки опускаются.

В задаче (3.1.5), (3.1.6) сделаем замену

$$\begin{cases} \tau = t; \\ s = r - b(t,x_1,x_2); \\ y_1 = x_1; \\ y_2 = x_2, \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

в которой b — пока еще неизвестная функция, аналитическая в некоторой окрестности $t = 0$ и при всех допустимых x_1, x_2 и удовлетворяющая условиям

$$b(t,x_1,x_2)|_{t=0} = 0, \quad b_t(t,x_1,x_2)|_{t=0} > 0$$

и аналитическая в некоторой окрестности $t = 0$ и при всех допустимых x_1, x_2. Для функции b, как и в предыдущих главах, будет справедливо равенство

$$u(t,r,x_1,x_2)|_{r=b(t,x_1,x_2)} = 0. \qquad (3.2.2)$$

Для этой и последующих замен вывод формул, согласно которым преобразуются производные, описан в разделе 1.5, и здесь не имеет смысла его повторять.

После преобразования (3.2.1) задача (3.1.5), (3.1.6) принимает вид

$$(s+b+R)^2(u_\tau - b_\tau u_s) = u\Big[2(s+b+R)u_s + \operatorname{ctg} y_2(u_{y_2} - b_{y_2}u_s - R_{y_2}u_s) +$$

$$+(s+b+R)^2 u_{ss} + \sum_{i=1}^{2} c_i\Big(u_{y_iy_i} - b_{y_iy_i}u_s - 2b_{y_i}u_{y_is} + b_{y_i}^2 u_{ss} -$$

$$-2R_{y_i}(u_{sy_i} - b_{y_i}u_{ss}) - R_{y_iy_i}u_s + R_{y_i}^2 u_{ss}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{1}{\sigma}\Big[(s+b+R)^2 u_s^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i(u_{y_i} - b_{y_i}u_s - R_{y_i}u_s)^2\Big]; \tag{3.2.3}$$

$$u(\tau, s, y_1, y_2)|_{s=-b(\tau,y_1,y_2)} = f(\tau, y_1, y_2); \tag{3.2.4}$$

$$u(\tau, s, y_1, y_2)|_{s=0} = 0. \tag{3.2.5}$$

Теперь с помощью замены

$$\begin{cases} t = \tau; \\ s = s(\tau, u, y_1, y_2); \\ x_1 = y_1; \\ x_2 = y_2 \end{cases} \tag{3.2.6}$$

поменяем ролями u и s так, чтобы s стала неизвестной функцией, а u независимой переменной. Уравнение (3.2.3) после проведения замены (3.2.6) и домножения на $-s_u^3$ принимает вид

$$(s+b+R)^2(s_t + b_t)s_u^2 = u\Big[-2(s+b+R)s_u^2 + \operatorname{ctg} x_2(s_{x_2} + b_{x_2} + R_{x_2})s_u^2 +$$

$$+(s+b+R)^2 s_{uu} + \sum_{i=1}^{2} c_i\Big(s_{x_ix_i}s_u^2 + s_{x_i}^2 s_{uu} - 2s_u s_{x_i} s_{ux_i} + b_{x_ix_i}s_u^2 +$$

$$+2b_{x_i}(s_{x_i}s_{uu} - s_{ux_i}s_u) + b_{x_i}^2 s_{uu} + 2R_{x_i}(s_{x_i}s_{uu} - s_{ux_i}s_u + b_{x_i}s_{uu}) +$$

$$+R_{x_ix_i}s_u^2 + R_{x_i}^2 s_{uu}\Big)\Big] - \frac{s_u}{\sigma}\Big[(s+b+R)^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i(s_{x_i} + b_{x_i} + R_{x_i})^2\Big]. \tag{3.2.7}$$

Краевое условие (3.2.4) запишется в виде

$$s(t, u, x_1, x_2)|_{u=f(t,x_1,x_2)} = -b(t, x_1, x_2). \tag{3.2.8}$$

Теперь из (3.2.8) можно выразить функцию $b(t,x_1,x_2)$ и все ее производные, участвующие в уравнении (3.2.7):

$$b=-s|_{u=f};\quad b_t=-s_t|_{u=f}-s_u|_{u=f}f_t;\quad b_{x_i}=-s_{x_i}|_{u=f}-s_u|_{u=f}f_{x_i};$$

$$b_{x_ix_i}=-s_{x_ix_i}|_{u=f}-2s_{ux_i}|_{u=f}f_{x_i}-s_u|_{u=f}f_{x_ix_i}-s_{uu}|_{u=f}f^2_{x_i};\quad i=1,2.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3.2.7), мы получаем уравнение

$$(s-s|_{u=f}+R)^2(s_t-s_t|_{u=f}-s_u|_{u=f}f_t)s_u^2=u\Big[-2(s-s|_{u=f}+R)s_u^2+$$
$$+(s-s|_{u=f}+R)^2s_{uu}+\operatorname{ctg}x_2(s_{x_2}-s_{x_2}|_{u=f}-s_u|_{u=f}f_{x_2}+R_{x_2})s_u^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}c_i\Big(s_{x_ix_i}s_u^2+s_{x_i}^2s_{uu}-2s_us_{x_i}s_{ux_i}-(s_{x_ix_i}|_{u=f}+2s_{ux_i}|_{u=f}f_{x_i}+$$
$$+s_u|_{u=f}f_{x_ix_i}+s_{uu}|_{u=f}f^2_{x_i})s_u^2-2(s_{x_i}|_{u=f}+s_u|_{u=f}f_{x_i})(s_{x_i}s_{uu}-s_{ux_i}s_u)+$$
$$+(s_{x_i}|_{u=f}+s_u|_{u=f}f_{x_i})^2s_{uu}+2R_{x_i}(s_{x_i}s_{uu}-s_{ux_i}s_u-(s_{x_i}|_{u=f}+s_u|_{u=f}f_{x_i})s_{uu})+$$
$$+R_{x_ix_i}s_u^2+R^2_{x_i}s_{uu}\Big)\Big]-\frac{s_u}{\sigma}\Big[(s-s|_{u=f}+R)^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}c_i(s_{x_i}-s_{x_i}|_{u=f}-s_u|_{u=f}f_{x_i}+R_{x_i})^2\Big]. \tag{3.2.9}$$

Теперь мы вновь получили задачу, состоящую из одного уравнения (3.2.9), одной неизвестной функции s и одного краевого условия (3.2.5), которое запишется в виде

$$s(t,u,x_1,x_2)|_{u=0}=0. \tag{3.2.10}$$

Далее, чтобы сделать $u=f(t,x_1,x_2)$ новой координатной плоскостью, проведем замену

$$\begin{cases} v=u;\\ w=u-f(t,x_1,x_2);\\ y_1=x_1;\\ y_2=x_2.\end{cases} \tag{3.2.11}$$

Из второго соотношения замены, которое запишем в виде

$$\Psi(v-w,t,y_1,y_2)\equiv v-w-f(t,y_1,y_2)=0, \tag{3.2.12}$$

можно получить новое представление для переменной t. Так как $\Psi_t < 0$ в некоторой окрестности $t = 0$, то по теореме о неявной функции соотношение (3.2.12) определяет аналитическую функцию

$$t = \psi(v - w, y_1, y_2)$$

такую, что $\psi(v - w, y_1, y_2)|_{v=w} = 0$.

Как и в разделе 1.5, чтобы записать получившиеся после последнего преобразования формулы в менее громоздком виде, введем обозначения

$$F(v - w, y_1, y_2) = -f_t(t, y_1, y_2)|_{t=\psi(v-w,y_1,y_2)};$$
$$G_i(v - w, y_1, y_2) = -f_{y_i}(t, y_1, y_2)|_{t=\psi(v-w,y_1,y_2)}, \quad i = 1, 2.$$

Отметим также, что, так как F, G_1, G_2 — аналитические функции, то справедливы представления

$$F(v - w, y_1, y_2) = F_0(w, y_1, y_2) + vF_1(v, w, y_1, y_2);$$

$$G_i(v - w, y_1, y_2) = G_{i,0}(w, y_1, y_2) + vG_{i,1}(v, w, y_1, y_2), \quad i = 1, 2,$$

в которых

$$F_0 = F|_{v=0}, \quad F_0|_{w=0} = -f_t|_{t=0},$$

$$G_{i,0} = G_i|_{v=0}, \quad G_{i,0}|_{w=0} = -f_{y_i}|_{t=0} = 0.$$

Задача (3.2.9), (3.2.10) приобретает вид

$$(s - s|_{w=0} + R)^2\Big(Fs_w - (Fs_w)|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0}F\Big)(s_v + s_w)^2 =$$

$$= v\Big[(s - s|_{w=0} + R)^2 s_{vv} - (s_{vv})|_{w=0} \sum_{i=1}^{2} c_i G_i^2 (s_v + s_w)^2 + s_{vv} \sum_{i=1}^{2} c_i q_i + q_0\Big] -$$
$$-\frac{s_v + s_w}{\sigma}\Big[(s - s|_{w=0} + R)^2 +$$
$$+\sum_{i=1}^{2} c_i \Big(G_i s_w + s_{y_i} - (G_i s_w + s_{y_i})|_{w=0} + (s_v + s_w)|_{w=0} G_i + R_{y_i}\Big)^2\Big]; \quad (3.2.13)$$

$$s(v, w, y_1, y_2)|_{v=0} = 0. \qquad (3.2.14)$$

Формулы для q_i, $i = 0, 1, 2$ здесь не приводится в силу крайней громоздкости, отметим только, что q_i не зависят от s_{vv} и $s_{vv}|_{w=0}$. То есть в уравнении (3.2.13) специально выделены все слагаемые, которые после следующей замены — частичного разложения в ряд — могут зависеть от выражений вида (1.2.21).

Теперь определим $s_1 = s_v|_{v=0}$. Это можно сделать, положив в уравнении (3.2.13) $v = 0$. Учитывая равенство (3.2.14), получаем

$$R^2 s_1^2|_{w=0} F_0 s_1 = -\frac{s_1}{\sigma}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i (s_1|_{w=0} G_{i,0} + R_{y_i})^2\Big].$$

Предполагая, что $s_1 \neq 0$, поделим обе части последнего соотношения на s_1. Получаем равенство

$$R^2 s_1|_{w=0} F_0 s_1 = -\frac{1}{\sigma}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i (s_1|_{w=0} G_{i,0} + R_{y_i})^2\Big]. \tag{3.2.15}$$

Функцию $s_{1,0} = s_1|_{w=0}$ можно определить, полагая в (3.2.15) $w = 0$. С учетом равенства $G_{i,0}|_{w=0} = 0$ имеем

$$s_{1,0} = \pm \frac{1}{R\sqrt{\sigma f_1}} \sqrt{R^2 + c_1 R_{y_1}^2 + c_2 R_{y_2}^2}.$$

Как и в Главах 1 и 2, мы будем рассматривать случай, когда $s_{1,0} < 0$. Второй случай рассматривается аналогично.

Теперь из формулы (3.2.15) можно найти s_1:

$$s_1 = -\frac{1}{\sigma R^2 s_{1,0} F_0}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i (s_{1,0} G_{i,0} + R_{y_i})^2\Big]. \tag{3.2.16}$$

Теперь в задаче (3.2.13), (3.2.14) можно сделать последнюю замену

$$s(v, w, y_1, y_2) = v s_1(w, y_1, y_2) + v^2 S(v, w, y_1, y_2).$$

Задача (3.2.13), (3.2.14) преобразуется в виде

$$\Big[v(s_1 - s_{1,0}) + v^2(S - S|_{w=0}) + R\Big]^2 \Big[F(v s_{1w} + v^2 S_w) - F|_{w=0}(v s_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0}$$

$$+ (s_1 + 2vS + v^2 S_v + v s_{1w} + v^2 S_w)|_{w=0} F\Big] (s_1 + 2vS + v^2 S_v + v s_{1w} + v^2 S_w)^2 =$$

$$= v\Big\{(2S + 4vS_v + v^2 S_{vv})\Big[v(s_1 - s_{1,0}) + v^2(S - S|_{w=0}) + R\Big]^2 -$$

$$-(2S + 4vS_v + v^2 S_{vv})|_{w=0} \sum_{i=1}^{2} c_i G_i^2 (S_1 + 2vS + v^2 S_v + v s_{1w} + v^2 S_w)^2 +$$

$$+(2S+4vS_v+v^2S_{vv})\sum_{i=1}^{2}c_iq_i+q_0\Big\}-$$

$$-\frac{s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w}{\sigma}\Big\{\Big[v(s_1-s_{1,0})+v^2(S-S|_{w=0})+R\Big]^2+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}c_i\Big[G_i(vs_{1w}+v^2S_w)-[G_i(vs_{1w}+v^2S_w)+vs_{1y_i}+v^2S_{y_i}]|_{w=0}+$$

$$+vs_{1y_i}+v^2S_{y_i}+(s_1+2vS+v^2S_v+vs_{1w}+v^2S_w)|_{w=0}G_i+R_{y_i}\Big]^2\Big\}. \quad (3.2.17)$$

После приведения подобных (с учетом равенства (3.2.16)), деления на v и остальных преобразований уравнение (3.2.17) можно записать в виде

$$2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)S+\Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)vS_v+v^2S_{vv}+\frac{2}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}(S|_{w=0})+\frac{1}{\sigma}\frac{s_1}{s_{1,0}}v(S_v|_{w=0})=$$

$$=B_1(w,y_1,y_2)(S|_{w=0})+B_2(w,y_1,y_2)v(S_v|_{w=0})+$$

$$+B_3(w,y_1,y_2)v^2(S_{vv}|_{w=0})+h_0(v,w,y_1,y_2)+vh_1+v^2h_2+v^3h_3, \quad (3.2.18)$$

в котором функции h_1, h_2, h_3 зависят от переменных v, w, y_1, y_2, функции S и ее частных производных таких, что наивысший порядок производной по v, входящей в функцию h_i не превышает $i-1$, $i=1,2,3$. Функции B_1, B_2 и B_3 обращаются в нуль при $w=0$.

Можно показать, что уравнение вида

$$\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)Z+\Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)vZ_v+v^2Z_{vv}=[1+B(w,y_1,y_2)]H, \quad (3.2.19)$$

является мажорантным для уравнения (3.2.18), если

$$B(w,y_1,y_2)\gg B_1(w,y_1,y_2)+B_2(w,y_1,y_2)+B_3(w,y_1,y_2)-\frac{s_1}{s_{1,0}};$$

$$H=H_0+vH_1+v^2H_2+v^3H_3\gg h_0+vh_1+v^2h_2+v^3h_3.$$

Далее доказательство опирается на те же рассуждения, что и в Главах 1, 2. Теорема 4 доказана.

3.3 Построение решения в виде ряда

Для задачи

$$(r+R)^2u_t=u\Big[2(r+R)u_r+(r+R)^2u_{rr}+\operatorname{ctg}x_2(u_{x_2}-R_{x_2}u_r)+$$

$$+\sum_{i=1}^{2} c_i(u_{x_ix_i} - 2R_{x_i}u_{rx_i} - R_{x_ix_i}u_r + R_{x_i}^2 u_{rr})\Big]+$$

$$+\frac{1}{\sigma}\Big[(r+R)^2u_r^2 + \sum_{i=1}^{2} c_i(u_{x_i} - R_{x_i}u_r)^2\Big]; \tag{3.3.1}$$

$$u(t,r,x_1,x_2)|_{r=0} = f(t,x_1,x_2) \tag{3.3.2}$$

построим решение в виде двойного степенного ряда

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(x_1,x_2)\frac{t^n}{n!}\frac{r^m}{m!}, \tag{3.3.3}$$

в котором

$$u_{n,m}(x_1,x_2) = \frac{\partial^{n+m}u}{\partial t^n \partial r^m}|_{t=0;r=0}.$$

По условию теоремы 4 для функции $f(t,x_1,x_2)$ справедливо представление

$$f(t,x_1,x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1,x_2)\frac{t^n}{n!}.$$

Коэффициенты $u_{n,0}$ можно определить из краевого условия (3.3.2):

$$u(t,r,x_1,x_2)|_{r=0} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,0}(x_1,x_2)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1,x_2)\frac{t^n}{n!}.$$

Видно, что $u_{n,0} = f_n, \quad n = 0,1,2,...$. В частности, $u_{0,0} = f_0 = 0$.

Для того, чтобы определить коэффициент $u_{0,1}$, положим в уравнении (3.3.1) $t = r = 0$. Получаем уравнение

$$R^2u_{1,0} = \frac{u_{0,1}^2}{\sigma}\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_iR_{x_i}^2\Big],$$

преобразуя которое, получим

$$R^2\sigma f_1\Big[R^2 + \sum_{i=1}^{2} c_iR_{x_i}^2\Big]^{-1} = u_{0,1}^2.$$

Отсюда следует, что коэффициент $u_{0,1}$ определяется двояко по формуле

$$u_{0,1} = \pm\frac{R}{\sqrt{R^2 + c_1R_{x_1}^2 + c_2R_{x_2}^2}}\sqrt{\sigma f_1}.$$

Далее будем рассматривать случай

$$u_{0,1} = -\frac{R}{\sqrt{R^2 + c_1R_{x_1}^2 + c_2R_{x_2}^2}}\sqrt{\sigma f_1}.$$

Случай, когда $u_{0,1} > 0$ рассматривается аналогично.

Как и в Главе 2, уравнение (3.3.1) можно привести к виду, аналогичному (2.3.7):

$$u_t = c_0 u u_{rr} + \frac{1}{\sigma} c_0 u_r^2 + P_2, \tag{3.3.4}$$

в котором

$$c_0(r, x_1, x_2) = 1 + \frac{1}{(r+R)^2} \sum_{i=1}^{2} c_i R_{x_i}^2;$$

$$P_2 = \frac{1}{(r+R)^2} P_1;$$

$$P_1 = u\Big[2(r+R)u_r + \operatorname{ctg} x_2 (u_{x_2} - R_{x_2} u_r) + \sum_{i=1}^{2} c_i (u_{x_i x_i} - 2R_{x_i} u_{r x_i} - R_{x_i x_i} u_r)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{2} c_i (u_{x_i}^2 - 2R_{x_i} u_{x_i} u_r);$$

Теперь определим остальные коэффициенты ряда (3.3.3). Для этого применим к уравнению (3.3.4) оператор $\frac{\partial^n}{\partial t^{n-k} \partial r^k}\big|_{\substack{t=0 \\ r=0}}$, $k = 0, 1, ..., n$. Заметим также, что, несмотря на то, что c_0 и P_2 отличаются от c_0 и P_2 из раздела 2.3, они все же обладают теми же свойствами, которые имеют существенное значение при построении уравнения (2.3.10). А именно, c_0 зависит от r, но не зависит от t, а функция P_2 такова, что $\frac{\partial^n P_2}{\partial t^{n-k} \partial r^k}\big|_{\substack{t=0 \\ r=0}}$ не зависит от коэффициентов ряда (3.3.3), порядок которых превышает n. Поэтому после всех преобразований мы получим уравнение

$$u_{n-k+1,k} - \Big(k + \frac{2}{\sigma}\Big) u_{0,1} c_0(0,x,y) u_{n-k,k+1} -$$

$$- (n-k) f_1 c_0(0,x,y) u_{n-k-1,k+2} = L_{n-k,k}, \tag{3.3.5}$$

в котором $L_{n-k,k}$ определяется так же, как и в разделе 2.3 (с учетом, конечно, новых c_0 и P_2).

Система уравнений для определения коэффициентов порядка $n+1$ запишется в виде (2.3.11). Элементы матрицы A_{n+1} будут иметь вид

$$a_i = -\Big(i + \frac{2}{\sigma}\Big) u_{0,1} c_0(0,x,y) > 0, \quad i = 0, 1, ...n;$$

$$b_j = -j f_1 c_0(0,x,y) < 0, j = 1, ..., n,$$

то есть матрица A_{n+1} обратима. А значит на основании принципа математической индукции можно утверждать, что все коэффициенты ряда (3.3.3) определяются однозначно.

Из теоремы 4 вытекает

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 4, *причем* $\Upsilon = [0; 2\pi]$, *а функции* R *и* f *удовлетворяют условиям* $R(\varphi, \theta) = R(\varphi + 2\pi, \theta)$, $f(\tau, \varphi, \theta) = f(\tau, \varphi + 2\pi, \theta)$. *Тогда задача* (3.1.1), (3.1.2) *имеет единственное решение, удовлетворяющей начальному условию* $u|_{t=0} = 0$, *являющееся в некоторой окрестности* $\tau = 0$, $\rho = R(\varphi, \theta)$ *аналитической тепловой волной, если выбрано направление движения фронта последней.*

Обоснование следствия 4 проводится аналогично следствию 1 и здесь не приводится. При этом периодичность по φ с периодом 2π функций f и R, определяющей краевые условия, позволяет интерпретировать построенную тепловую волну как решение задачи об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданными на границе области, обладающей свойством звездности в трехмерном пространстве.

Отметим также, что уравнение (3.1.1), как ранее в разделе 1.5, можно рассматривать в качестве самостоятельного математического объекта и не требовать периодичности по φ (см. замечание в конце Главы 1).

Заключение

Диссертация посвящена изучению нелинейного параболического уравнения теплопроводности. Данное уравнение также описывает фильтрацию идеального политропного газа в пористой среде и в отечественной литературе именуется также «уравнением нестационарной фильтрации», в зарубежной — «the porous medium equation». В диссертации уравнение рассматривается в цилиндрических (полярных) и сферических координатах

Одной из содержательных задач для нелинейного уравнения теплопроводности является задача об инициировании тепловой волны заданным краевым режимом при наличии вырождения типа уравнения в начальный момент времени. В научной литературе она иногда именуется «задачей А.Д. Сахарова об инициировании тепловой волны» [104]. Данная задача является в диссертации одним из центральных объектов рассмотрения. При этом исследование приводится с использованием техники степенных рядов, которая восходит еще к О. Коши, однако сохранила свою актуальность и до наших дней и применяется, в частности, в научной школе А.Ф. Сидорова. Достоинством этого подхода является то, что он позволяет одновременно доказывать теоремы существования и единственности решений и получать конструктивные представления указанных решений с возможностью их использования для проведения приближенных вычислений.

Представленные в диссертационной работе исследования основаны на идеях и методах, предложенных в 80-х годах прошлого века известным уральским математиком и механиком (впоследствии академиком РАН)

А.Ф. Сидоровым и развитых в последствии его учениками. Главным отличием полученных автором результатов от известных является то, что удалось распространить теоремы, доказанные ранее для одномерного (плоскосимметричного) и квазиодномерного случаев на существенно неодномерный, для чего, в частности, пришлось выполнить переход в полярную (сферическую) систему координат. Кроме того, в отличие от предшествующих работ С.П. Баутина, автором построены решения рассмотренных задач в явном виде в физических переменных.

Полученные результаты имеют самостоятельное математическое значение, а также могут быть использованы при построении решений задачи А.Д. Сахарова об инициировании тепловой волны краевым режимом, заданным на границе области, обладающей свойством звездности.

Доказательство всех утверждений проводится в диссертации по единой методике, которая включает в себя следующие этапы:

1. Переход из декартовой системы координат в цилиндрическую (полярную) либо сферическую.
2. Постановка краевых условий.
3. Выполнение замен искомых функций и независимых переменных (включая аналог преобразования годографа) и сведение исходной задачи А.Д. Сахарова к задаче о движении фронта тепловой волны по холодному (нулевому) фону.
4. Доказательство существования решения в виде ряда и сходимости последнего посредством построения мажорантной задачи.
5. Построение решения в виде ряда по степеням физических переменных, коэффициенты которого определяются при решении невырожденных трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений.

При разработке методики автор опирался на работы А.Ф. Сидорова и представителей его научной школы: С.П. Баутина, Н.А. Вагановой, М.Ю. Филимонова, А.Л. Казакова, однако специфика рассмотренных задач потребовала внесения соответствующих изменений и дополнений.

Помимо доказательства теорем и построения аналитических решений, автор выполнил также иллюстрирующие численные эксперименты с помощью отрезков построенных степенных рядов, результаты которых, в частности, были использованы при верификации расчетов, сделанных с помощью граничноэлементного подхода. Сравнение результатов вычислений, выполненных различными методами, показало хорошее их соответствие.

Литература

[1] Андреев В.К., Резникова И.А. Оценки решений сопряженной тепловой задачи в шаровой области // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика, 2012. Т. 5, вып. 4. С. 485-–496.

[2] Антонцев С.Н., Шмарев С.И. Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности // Фунд. и прикл. математика, 2006. Т. 12, № 4. С. 3–19.

[3] Баренблатт Г.И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикладная математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 1. С. 67–78.

[4] Баренблатт Г.И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде // Прикладная математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 6. С. 679–699.

[5] Баренблатт Г.И., Вишик И.М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 411–417.

[6] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 220 с.

[7] Баутин С.П. Существование аналитической тепловой волны, определяемой заданным краевым режимом // Сиб. журн. индустр. матем. 2003. Т. 6, № 1. С. 3–11.

[8] Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 88 с.

[9] Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

[10] Баутин С.П. Из письма в редакцию // Вестник УрГУПС. 2014, № 2. С. 81–83.

[11] Баутин С.П., Елисеев А.А. Многомерная аналитическая тепловая волна, определяемая краевым режимом // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1052–1062.

[12] Баутин С.П., Казаков А.Л. Течения газа с ударными волнами, расходящимися от оси или центра симметрии с конечной скоростью // Прикладная матемаматика и механика, 1996. Т. 60, № 3. С. 465–474.

[13] Баутин С.П., Казаков А.Л. Одна задача Коши с начальными данными на разных поверхностях для системы с особенностью // Известия ВУЗов. Математика, 1997. № 10(425). С. 13–23.

[14] Баутин С.П., Казаков А.Л. Обобщенная задача Коши и ее приложения. Новосибирск: Наука, 2006. 397 с.

[15] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с.

[16] Ваганова Н.А. Построение новых классов решений нелинейного уравнения фильтрации с помощью специальных согласованных рядов // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2003. Т. 9, № 2. С. 10–20.

[17] Васин В.В., Сидоров А.Ф. О некоторых методах приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений // Известия ВУЗов. Математика, 1983. № 7(254). С. 13–27.

[18] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

[19] Вольперт А.И., Худяев С.И. О задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Мат. сборник, 1969. Т. 78(120), № 3. С. 374–396.

[20] Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения,асимптотики, структуры // Соврем. пробл. математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 28. С. 95–205. (Итоги науки и техники).

[21] Галактионов В.А., Посашков С.А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями // Журн. вычислительной математики и мат. физики, 1989. Т. 29, № 4. С. 497–506.

[22] Галактионов В.А., Посашков С.А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии // Журн. вычислительной математики и мат. физики, 1994. Т. 34, № 3. С. 373–383.

[23] Георгиевский Д.В. Автомодельные решения в задаче об обобщенной диффузии вихря // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа, 2007. № 2. С. 3–12.

[24] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.

[25] Гурса Э. Курс математического анализа. М.-Л.: Гос. техн.-теор. изд-во, 1933. Т. 2, ч. 2. 287 с.

[26] Гюнтер Н.М. Об аналитических решениях уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y})$ // Мат. сб., 1925. Т. 32. С. 26-–42.

[27] Гюнтер Н.М. О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных // Мат. сб., 1925. Т. 32. С. 367-–447.

[28] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998. 456 с.

[29] Дородницын А.А. Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа // Сборник теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 77–88.

[30] Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // В кн.: Сборник, посвященный 70-летию А.Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.

[31] Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 1966. 687 с.

[32] Ильин В.П., Кузнецов Ю.И. Трехдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 208 с.

[33] Кажихов А.В. Об односторонних краевых задачах для параболических уравнений с нелокальными ограничениями // Динамика сплошной среды, 1993. Вып. 107. С. 65–72.

[34] Кажихов А.В. Избранные труды. Математическая гидродинамика. Новосибирск: Изд-во Ин-та гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2008. 419 с.

[35] Казаков А.Л. Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с

вырождением // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2012. Т.18, № 2. С. 114–122.

[36] Казаков А.Л. Из письма в редакцию // Вестник УрГУПС, 2014. № 2. С. 84–88.

[37] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тезисы Международной (44-й Всероссийской) молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики». Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2013. С. 398–401.

[38] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Краевая задача с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тезисы Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений». Новосибирск: ИМ СО РАН, 2013. С. 149.

[39] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. О краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности в сферических координатах // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. С. 27.

[40] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае цилиндрической и сферической симметрии // Вестник УрГУПС, 2013. № 4. С. 4–10.

[41] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных // Сиб. журнал индустриальной математики, 2014. Т. 17, № 1. С. 46–54.

[42] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. О тепловой волне в сферических координатах // Тезисы Всероссийской конференции «Новые математические модели механики сплошных сред: построение и изучение». Новосибирск: ИГИЛ СО РАН, 2014. С. 64.

[43] Казаков А.Л., Кузнецов П.А. О краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности // Тезисы IV Международной школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2014. С. 27.

[44] Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.

[45] Казаков А.Л., Лемперт А.А. Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычислительные технологии, 2012. Т. 17, № 1. С. 57–68.

[46] Казаков А.Л., Лемперт А.А. О существовании и единственности решения краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикладная механика и техническая физика, 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.

[47] Казаков А.Л., Спевак Л.Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Известия Иркутского гос. университета. Серия Математика, 2012. Т. 5, № 2. С. 2–17.

[48] Калашников А.С. О возникновении особенностей у решений уравнения нестационарной фильтрации // Журнал выч. математики и мат. физики, 1967. Т. 7, № 2. С. 440–444.

[49] Калашников А.С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с конечной скоростью распространения возмущений // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1972. № 6. С. 45–49.

[50] Калашников А.С. О характере распространения возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением // Журнал выч. математики и мат. физики, 1974. Т.14, № 4. С. 891–905.

[51] Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук, 1987. Т. 42, вып. 2(254). С. 135–176.

[52] Калашников А.С. О некоторых задачах нелинейной теории теплопроводности с данными, содержащими малый параметр в показателях // Журнал выч. математики и мат. физики, 1995. Т. 35, № 7. С. 1077–1094.

[53] Камынин В.Л. Об обратной задаче определения старшего коэффициента в параболическом уравнении // Мат. заметки, 2008. Т. 84, вып. 1. С. 48–58.

[54] Капцов О.В. Нелинейные диффузионные уравнения и инвариантные многообразия // Мат. моделирование, 1992. Т. 4, № 8. С. 31–46.

[55] Капцов О.В. Построение точных решений систем диффузионных уравнений // Мат. моделирование, 1995. Т. 7, № 3. С. 107–115.

[56] Капцов О.В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009. 184 с.

[57] Ковалевская С.В. Научные работы. М.: изд-во АН СССР, 1948. 368 с.

[58] Кожанов А.И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // Сиб. матем. журнал, 2005. Т. 46, № 5. С. 1053–1071.

[59] Коковихина О.В., Сидоров А.Ф. Специальные конструкции рядов для решений нелинейных уравнений с частными производными // Числ. мет. механики сплош. среды. 1984. Т. 15, №3. С. 72–84.

[60] Кружков С.Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Труды Моск. мат. общества, 1967. Т. 16. С. 329–346.

[61] Кружков С.Н., Камынин В.Л. О предельном переходе в квазилинейных параболических уравнениях // Труды Математического института АН СССР 1985. Т. 167. С. 183–206.

[62] Кузнецов П.А. О краевой задаче с данными на сфере для нелинейного уравнения теплопроводности // Тезисы III Всероссийской конференции «Математическое моделирование и вычислительно-информационные технологии в междисциплинарных научных исследованиях». Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2013. С. 34.

[63] Кузнецов П.А. О краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности // Известия Иркутского гос. университета. Серия «Математика», 2014. Т. 9. С. 61–74.

[64] Кузнецов П.А., Казаков А.Л. О краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой цилиндрической поверхности // Труды 45-й Международной молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений». Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2014. С. 222–224.

[65] Кузнецов П.А., Казаков А.Л. Решения краевой задачи с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в классе аналитических функций // Материалы конференции «Ляпуновские чтения». Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2014. С. 44.

[66] Кузнецов П.А., Казаков А.Л. Аналитические решения начально-краевых задач с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2014. 99 с.

[67] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

[68] Курдюмов С.П., Куркина Е.С. Спектр собственных функций автомодельной задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с

источником // Журнал выч. математики и матем. физики, 2004. Т. 44, № 9. С. 1619–1637.

[69] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

[70] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

[71] Лейбензон Л.С. Движение газа в пористой среде // Нефтяное и сланцевое хозяйство, 1929. Т. 10. С. 8–9.

[72] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Изд-во «Высшая школа», 1967. 599 с.

[73] Маркова Е.В., Сидоров Д.Н. Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами в теории моделирования развивающихся систем // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика, 2012. Т. 5, № 2. С. 31–45.

[74] Маркова Е.В., Сидоров Д.Н. Об одной интегральной модели Вольтерра развивающихся динамических систем // Автоматика и телемеханика, 2014. № 3. С. 3–13.

[75] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 367 с.

[76] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.

[77] Монахов В.Н. Встречные потоки решений вырождающихся параболических уравнений // Мат. моделирование, 2000. Т. 12, № 11. С. 77–90.

[78] Овсянников Л.В. О сходимости ряда Мейера для осесимметричного сопла // В кн. Мартесен Е., фон Зенгбуш Р. Расчет околозвуковой части плоских и осесимметричных сопел с криволинейной линией перехода. Новосибирск: изд-во СО АН СССР, 1962. С. 41–43.

[79] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Бином. Лаборотория знаний, 2005. 260 с.

[80] Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22, вып. 5. С. 667–704.

[81] Олейник О.А., Кружков С.Н. Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными // Успехи мат. наук, 1961. Т. 16, вып. 5(101). С. 115–155.

[82] О разработках аналитических и численных методов решения задач механики сплошной среды. К юбилеям Анатолия Федоровича Сидорова (30 марта 1933 г. – 31 марта 1999 г.) и Отдела прикладных задач / А.И. Короткий, Н.А. Артемова, Н.А. Ваганова, О.О. Коврижных, Л.И. Рубина, О.Н. Ульянов, О.В. Ушакова, М.Ю. Филимонов, И.А. Цепелев // Труды института математики и механики УрО РАН, 2013. Т. 19, № 2. С. 203–215.

[83] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.

[84] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

[85] Пухначев В.В. Преобразования взаимности радиальных уравнений нелинейной теплопроводности // Зап. науч. семинаров ПОМИ, 1994. Т. 213. С. 151-163

[86] Пухначев В.В. Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии // Прикл. механика и технич. физика, 1995. Т. 36, № 2. С. 23–31.

[87] Риман Б. О распаде плоских волн конечной амплитуды // Соч. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. С. 376–395.

[88] Рубина Л.И., Ульянов О.Н. Один геометрический метод решения нелинейных уравнений в частных производных // Труды института математики и механики УрО РАН, 2010. Т. 16, № 2. С. 209–225.

[89] Рубина Л.И., Ульянов О.Н. Об одном методе решения уравнения нелинейной теплопроводности // Сибирский математический журнал, 2012. Т. 53. № 5. С. 1091–1101.

[90] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Построение точных решений многомерного квазилинейного уравнения теплопроводности // Журнал выч. математики и мат. физики, 1993. Т. 33, № 8. С. 1228–1239.

[91] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Новые точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии // Сиб. матем. журнал, 1997. Т. 38, № 5. С. 1130–1139.

[92] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии // Сиб. матем. журнал, 1998. Т. 39, № 5. С. 1131–1140.

[93] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии // Мат. заметки, 2000. Т. 67, вып. 4. С. 250–256.

[94] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Построение точных решений одномерного уравнения нелинейной диффузии методом линейных инвариантных подпространств // Известия Иркутского гос. университета. Серия Математика, 2013. Т. 6, № 4. С. 69–84.

[95] Рыжков И.И., Андреев В.К. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2013. 199 с.

[96] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.

[97] Самарский А.А., Курдюмов С.П., Волосевич П.П. Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью // Журнал выч. математики и матем. физики, 1965. Т. 5, № 2. С. 199–217.

[98] Сидоров А.Ф. Метод решения некоторых краевых задач для нелинейных уравнений гиперболического типа и распространение слабых ударных волн // Прикладная математика и механика, 1972. Т. 36, вып. 3. С. 426–434.

[99] Сидоров А.Ф. О некоторых представлениях решений квазилинейных гиперболических уравнений // Числ. методы механики сплошной среды, 1975. Т. 6, № 4. С. 106–115.

[100] Сидоров А.Ф. О некоторых классах решений уравнения нестационарной фильтрации // Числ. методы механики сплош. среды. 1984. Т. 15, № 2. С. 121–133.

[101] Сидоров А.Ф. Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280., № 1. С 47–51.

[102] Сидоров А.Ф. О некоторых аналитических представлениях решений нелинейного уравнения нестационарной фильтрации // Числ. методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости: (Сб. науч. тр.). ИТПМ СО АН СССР. Новосибирск. 1987. С. 247–257.

[103] Сидоров А.Ф. Некоторые новые аналитические методы исследования нелинейных волновых процессов в газовой динамике // Фундамент. исслед. надежности и качества машин. М., 1990. С. 48–67.

[104] Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

[105] Сидоров Н.А. Дифференциальные уравнения с оператором Вольтерра при производной // Известия ВУЗов. Математика, 1984. № 1. С. 77–84.

[106] Соболев С.Л. Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Мат. сб., 1931. Т. 38, вып. 1-–2. С. 107-–147.

[107] Соболев С.Л. К вопросу об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Тр. физико–математического института им. В.А.Стеклова, 1934. Т. 5. С. 265-–282.

[108] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 444 с.

[109] Спевак Л.Ф., Казаков А.Л. Численное решение краевой задачи для нелинейного вырождающегося параболического уравнения в случаях круговой и сферической симметрии // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева, 2013. Т. 69, № 3. С. 100–105.

[110] Тешуков В.М. Пространственная задача о распространении контактного разрыва в идеальном газе // Динамика сплошной среды, 1977. Вып. 32. С. 82–94.

[111] Тешуков В.М. Центрированные волны в пространственных течениях газа // Динамика сплошной среды, 1979. Вып. 39. С. 102–118.

[112] Тешуков В.М. Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // Прикл. механика и технич. физика, 1980. № 2. С. 126–133.

[113] Тешуков В.М. Пространственный аналог центрированных волн Римана и Прандтля-Мейера // Прикл. механика и технич. физика, 1982. № 4. С. 98–106.

[114] Титов С.С. Представление решений нелинейного осесимметрического уравнения фильтрации газа в виде логарифмического ряда // Динамика сплошной среды. 1984. Вып. 68. С. 132–144.

[115] Титов С.С. О движении фронта нелинейной диффузии // Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 37, № 4. С. 113–118.

[116] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

[117] Фалалеев М.В. Фундаментальная опреатор-функция вырожденного уравнения теплопроводности в банаховых пространствах // Доклады академии наук, 2007. Т. 416, № 6. С. 745–749.

[118] Фалалеев М.В. Задача Коши для вырожденного уравнения теплопроводности в банаховы пространствах // Диф. уравнения, 2008. Т. 44, № 8. С. 1120–1130.

[119] Филимонов М.Ю. Применение метода специальных рядов для построения новых классов решений нелинейных уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39, № 6. С. 801–808.

[120] Филимонов М.Ю. Применение обобщенных систем базисных функций при построении решений нелинейных уравнений с частными производными // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2007. Т. 13, № 4. С. 138–153.

[121] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: «Мир», 1968. 428 с.

[122] Abdulla U.G. On the Dirichlet Problem for the Nonlinear Diffusion Equation in Non-Smooth Domains // J. Math. Anal. Appl., 2001. Vol. 260, N 2. P. 384-–403.

[123] Alikakos N., Rostamian R. Large Time Behavior of Solutions of Neumann Boundary Value Problem for the Porous Medium Equation // Indiana Univ. Math. J., 1981. Vol. 30, N 5. P. 749—785.

[124] Andreev V.K., Kaptsov O.V., Pukhnachov V.V., Rodionov A.A. Application of Group-Theoretical Methods in Hydrodynamics. Springer, 2010.

[125] Antontsev S.N., Shmarev S.I. Extinction of Solutions of Parabolic Equations with Variable Anisotropic Nonlinearities // Труды Матем. института им. В.А. Стеклова, 2008. Т. 261. С. 16–25.

[126] Aronson D. Regularity Properties of Flows Through Porous Media // SIAM J. Appl. Math., 1969. Vol. 17, N 2. P. 461–467.

[127] Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks. Kluwer Academic Publ., 1990. 396 p.

[128] Benilan P., Igbida N. Singular Limit of Changing Sign Solutions of the Porous Medium Equation // J. Evol. Equation, 2003. Vol. 3(2). P. 215—224.

[129] Benilan P., Vazquez J.L. Concavity of Solutions of the Porous Medium Equation // Trans. Amer. Math. Soc., 1987. Vol. 199, N 1. P. 81-–93.

[130] Biler P., Karch G., Monneau R. Nonlinear Diffusion of Dislocation Density and Self-Similar Solutions // Comm. in Math. Physics, 2010. Vol. 294, N 1. P. 145–168.

[131] J. Boussinesq. Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrés dans le sol et sur le débit de sources // J. Math. Pures Appl., 1904. Vol. 10, N 1. P. 5-–78.

[132] Cauchy A. Note sur certaines solutions complétes d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Comptes Rendus. Paris, 1842. V. XIV, p. 1026–1028. V. XV, p. 44,85, 131.

[133] Dahlberg B.E., Kenig C.E. Non-Negative Solutions of the Initial-Dirichlet Problem for Generalized Porous Medium Equations in Cylinders // J. Amer. Math. Soc., 1988. Vol. 1, N 2. P. 401—412.

[134] Dahlberg B.E., Kenig C.E. Weak Solutions of the Porous Medium Equation in a Cylinder // Trans. Amer. Math. Soc., 1993. Vol. 336, N 2. P. 702-–725.

[135] Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Paris, 1856. 647 p.

[136] Daskalopoulos P., Hamilton R. Regularity of the Free Boundary for the Porous Medium Equation // J. Amer. Math. Soc., 1998. Vol. 11, N 4. P. 899–965.

[137] De Pablo A., Quiros F., Rodriguez A., Vazquez J.L.. A General Fractional Porous Medium Equation // Comm. Pure Appl. Math., 2012. Vol. 65, N 9. P. 1242–1284.

[138] Egert M. Barenblatt's Solution to the Porous Medium Equation. Bachelor's thesis, TU Darmstadt, 2010. 49 p.

[139] Evans L. Partial Differential Equations. Amer. Math. Soc., 1998. 662 p.

[140] Filimonov M. Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F. Approximate Methods for Solving Nonlinear Initial Boundary-Value Problems Based on Special Constructions of Series // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. Vol. 8, N 2. P. 101–125.

[141] Fourier J. *Théorie de la Chaleur*. Reprint of the 1822 original: Editions Jacques Gabay, Paris. English version: *The Analytical Theory of Heat*, Dover, New York.

[142] Huang Y.H. Explicit Barenblatt Profiles for Fractional Porous Medium Equations. (2014). Preprint: http://arxiv.org/pdf/1312.0469v2.pdf

[143] Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On One Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in the Case of Two Space Variables // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2014. Vol. 8, N 2. P. 1–11.

[144] Kazakov A.L., Spevak L.F. Numerical and Analytical Studies of a Nonlinear Parabolic Equation with Boundary Conditions of a Special Form // Applied Mathematical Modelling, 2013. Vol. 37. Iss. 10–11. P. 6918–6928.

[145] Knerr B. The Porous Medium Equation in One Dimensional // Trans. Amer. Math. Soc., 1977. Vol. 234, N 2. P. 381–415.

[146] Lieberman G. Second Order Parabolic Differential Equations. World Scientific, 2005. 447 p.

[147] Ludvig D. Exact and Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem // Communications on Pure and Applied Mathematics, 1960. Vol. 13, N 3. P. 473–508.

[148] Murray J. Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, Vol. 17, Springer-Verlag, New York, 2002. 551 p.

[149] Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media. McGraw-Hill, New York, 1937. 763 p.

[150] Riquier Ch. Les systèmes d'*é*quations aux d*é*riv*é*es partielles. Paris: Gauthier–Villars, 1910. 590 p.

[151] Shmarev S.I. Interfaces in Multidimensional Diffusion Equations with Absorption Terms // Nonlinear Anal., 2003. Vol. 53, N 6. P. 791-–828.

[152] Vazquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007. 648 p.

[153] Vazquez J.L. Barenblatt Solutions and Asymptotic Behaviour for a Nonlinear Fractional Heat Equation of Porous Medium Type. J. Europ. Math. Soc., 2014. Vol. 16, Iss. 4. P. 769–803.

Приложения

Приложение 1

В этом разделе проводится вывод уравнения (2).

Для удобства приведем здесь уравнение (1)

$$U_t = \mathrm{div}(k\nabla U). \tag{4.1.1}$$

Правую часть уравнения (4.1.1) можно записать в виде

$$\mathrm{div}(k\nabla U) = k\Delta U + \nabla k \nabla U.$$

Мы рассматриваем случай степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, т. е. $k = \alpha U^{\sigma}$. В этой ситуации естественно выглядит замена вида $U = u^{\frac{1}{\sigma}}$. Тогда мы получим соотношения

$$k = \alpha u;$$

$$\nabla k = \nabla(\alpha u) = \alpha \nabla u;$$
$$\nabla U = \nabla u^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{\sigma} u^{\frac{1}{\sigma}-1}\nabla u;$$
$$\nabla k \nabla U = \alpha \frac{1}{\sigma} u^{\frac{1}{\sigma}-1}(\nabla u)^2;$$
$$\Delta U = \Delta u^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{\sigma}\Big(\frac{1}{\sigma}-1\Big)u^{\frac{1}{\sigma}-2}(\nabla u)^2 + \frac{1}{\sigma}u^{\frac{1}{\sigma}-1}\Delta u.$$

Левая часть уравнения (4.1.1) запишется в виде

$$U_t = (u^{\frac{1}{\sigma}})_t = \frac{1}{\sigma}u^{\frac{1}{\sigma}-1}u_t.$$

С использованием данных равенств получаем соотношение

$$\frac{1}{\sigma}u^{\frac{1}{\sigma}-1}u_t = \alpha u \left[\frac{1}{\sigma}\Big(\frac{1}{\sigma}-1\Big)u^{\frac{1}{\sigma}-2}(\nabla u)^2 + \frac{1}{\sigma}u^{\frac{1}{\sigma}-1}\Delta u\right] + \\ + \alpha\frac{1}{\sigma}u^{\frac{1}{\sigma}-1}(\nabla u)^2. \tag{4.1.2}$$

Разделив обе части (4.1.2) на $\alpha\frac{1}{\sigma}u^{\frac{1}{\sigma}-1}$, получим уравнение

$$\frac{1}{\alpha}u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2. \qquad (4.1.3)$$

С помощью замены $t' = \alpha t$ уравнение (4.1.3) можно привести к виду (2) (штрих для удобства написания опущен).

Приложение 2

В этом разделе проводится подробный вывод уравнения (13).

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности в случае трех пространственных переменных

$$u_t = u(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{1}{\sigma}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2). \qquad (4.2.1)$$

Для перехода к сферической системе координат сделаем замену

$$\begin{cases} t = \tau; \\ x = \rho\cos\varphi\sin\theta; \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta; \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \qquad (4.2.2)$$

при известных ограничениях на новые переменные.

Сначала полностью выразим новые переменные через старые. Учитывая равенство $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, получаем формулу для переменной ρ:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Из последнего соотношения замены (4.2.2) выразим θ:

$$\theta = \arccos\frac{z}{\rho} = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Поделив третье и второе соотношения из (4.2.2), получим

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Таким образом, получаем формулу для переменной φ:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Получаем систему соотношений

$$\begin{cases} \tau = t; \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{cases}$$

Производные первого порядка преобразуются в соответствии с соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} = \tau_t \frac{\partial}{\partial \tau} + \rho_t \frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_t \frac{\partial}{\partial \varphi} + \theta_t \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \tau};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \tau_x \frac{\partial}{\partial \tau} + \rho_x \frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_x \frac{\partial}{\partial \varphi} + \theta_x \frac{\partial}{\partial \theta} = \rho_x \frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_x \frac{\partial}{\partial \varphi} + \theta_x \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \tau_y \frac{\partial}{\partial \tau} + \rho_y \frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_y \frac{\partial}{\partial \varphi} + \theta_y \frac{\partial}{\partial \theta} = \rho_y \frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_y \frac{\partial}{\partial \varphi} + \theta_y \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \tau_z \frac{\partial}{\partial \tau} + \rho_z \frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_z \frac{\partial}{\partial \varphi} + \theta_z \frac{\partial}{\partial \theta} = \rho_z \frac{\partial}{\partial \rho} + \theta_z \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Определяя производные от ρ по x, y, z, получаем

$$\rho_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos\varphi \sin\theta; \quad \rho_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \sin\varphi \sin\theta;$$

$$\rho_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \cos\theta.$$

Производные от φ принимают вид

$$\varphi_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin\varphi}{\rho \sin\theta}; \quad \varphi_y = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho \sin\theta}.$$

И, наконец, производные от θ определяются по формулам

$$\theta_x = \frac{zx}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\cos\varphi \cos\theta}{\rho};$$

$$\theta_y = \frac{zy}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{\sin\varphi \cos\theta}{\rho}; \quad \theta_z = -\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{\sin\theta}{\rho}.$$

Таким образом, производные первого порядка преобразуются в виде

$$u_t = u_\tau;$$

$$u_x = \cos\varphi \sin\theta \; u_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho \sin\theta} u_\varphi + \frac{\cos\varphi \cos\theta}{\rho} u_\theta;$$

$$u_y = \sin\varphi \sin\theta\; u_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta} u_\varphi + \frac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho} u_\theta;$$

$$u_z = \cos\theta\; u_\rho - \frac{\sin\theta}{\rho} u_\theta.$$

Производные первого порядка по пространственным переменным входят в уравнение (4.2.1) в виде суммы $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. Опуская промежуточные преобразования, получаем равенство

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} u_\varphi^2 + \frac{1}{\rho^2} u_\theta^2.$$

Вычислим теперь производные второго порядка, входящие в уравнение (4.2.1). Запишем формулу для u_{xx}.

$$u_{xx} = \left(\rho_x \frac{\partial}{\partial\rho} + \varphi_x \frac{\partial}{\partial\varphi} + \theta_x \frac{\partial}{\partial\theta}\right) u_x =$$

$$= \left(\rho_x \frac{\partial}{\partial\rho} + \varphi_x \frac{\partial}{\partial\varphi} + \theta_x \frac{\partial}{\partial\theta}\right) \left(\cos\varphi\sin\theta\; u_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta} u_\varphi + \frac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho} u_\theta\right) =$$

$$= \rho_x \cos\varphi\sin\theta\; u_{\rho\rho} - \rho_x \frac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta} u_{\varphi\rho} + \rho_x \frac{\sin\varphi}{\rho^2\sin\theta} u_\varphi - \rho_x \frac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho^2} u_\theta +$$

$$+ \rho_x \frac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho} u_{\theta\rho} - \varphi_x \sin\varphi\sin\theta\; u_\rho + \varphi_x \cos\varphi\sin\theta\; u_{\rho\varphi} - \varphi_x \frac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta} u_\varphi -$$

$$- \varphi_x \frac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta} u_{\varphi\varphi} + \varphi_x \frac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho} u_{\theta\varphi} - \varphi_x \frac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho} u_\theta + \theta_x \cos\varphi\cos\theta\; u_\rho +$$

$$+ \theta_x \cos\varphi\sin\theta\; u_{\rho\theta} + \theta_x \frac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho\sin^2\theta} u_\varphi - \theta_x \frac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta} u_{\varphi\theta} -$$

$$- \theta_x \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\rho} u_\theta + \theta_x \frac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho} u_{\theta\theta}.$$

Подставляя выражения для ρ_x, φ_x, θ_x, получаем

$$u_{xx} = \cos^2\varphi\sin^2\theta\; u_{\rho\rho} - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho} u_{\varphi\rho} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2} u_\varphi - \frac{\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{\rho^2} u_\theta +$$

$$+ \frac{\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta}{\rho} u_{\theta\rho} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho} u_\rho - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho} u_{\rho\varphi} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2\sin^2\theta} u_\varphi +$$

$$+ \frac{\sin^2\varphi}{\rho^2\sin^2\theta} u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{\rho^2\sin\theta} u_{\theta\varphi} + \frac{\sin^2\varphi\cos\theta}{\rho^2\sin\theta} u_\theta +$$

$$+ \frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{\rho} u_\rho + \frac{\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{\rho} u_{\rho\theta} + \frac{\cos\varphi\cos^2\theta\sin\varphi}{\rho^2\sin^2\theta} u_\varphi -$$

$$-\frac{\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi}{\rho^2\sin\theta}u_{\varphi\theta}-\frac{\cos^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}u_\theta+\frac{\cos^2\varphi\cos^2\theta}{\rho^2}u_{\theta\theta}.$$

Аналогичным образом преобразуется u_{yy}.

$$u_{yy}=\left(\rho_y\frac{\partial}{\partial\rho}+\varphi_y\frac{\partial}{\partial\varphi}+\theta_y\frac{\partial}{\partial\theta}\right)u_y=$$

$$=\left(\rho_y\frac{\partial}{\partial\rho}+\varphi_y\frac{\partial}{\partial\varphi}+\theta_y\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\varphi\sin\theta\ u_\rho+\frac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta}u_\varphi+\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho}u_\theta\right)=$$

$$=\rho_y\sin\varphi\sin\theta\ u_{\rho\rho}+\rho_y\frac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta}u_{\varphi\rho}-\rho_y\frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\theta}u_\varphi-\rho_y\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho^2}u_\theta+$$

$$+\rho_y\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho}u_{\theta\rho}+\varphi_y\cos\varphi\sin\theta\ u_\rho+\varphi_y\sin\varphi\sin\theta\ u_{\rho\varphi}-\varphi_y\frac{\sin\varphi}{\rho\sin\theta}u_\varphi+$$

$$+\varphi_y\frac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta}u_{\varphi\varphi}+\varphi_y\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho}u_{\theta\varphi}+\varphi_y\frac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho}u_\theta+\theta_y\sin\varphi\cos\theta\ u_\rho+$$

$$+\theta_y\sin\varphi\sin\theta\ u_{\rho\theta}-\theta_y\frac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho\sin^2\theta}u_\varphi+\theta_y\frac{\cos\varphi}{\rho\sin\theta}u_{\varphi\theta}-$$

$$-\theta_y\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\rho}u_\theta+\theta_y\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho}u_{\theta\theta}.$$

Подставляя теперь ρ_y, φ_y, θ_y, получаем

$$u_{yy}=\sin^2\varphi\sin^2\theta\ u_{\rho\rho}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}u_{\varphi\rho}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}u_\varphi-\frac{\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}u_\theta+$$

$$+\frac{\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta}{\rho}u_{\theta\rho}+\frac{\cos^2\varphi}{\rho}u_\rho+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}u_{\rho\varphi}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi+$$

$$+\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}u_{\theta\varphi}+\frac{\cos^2\varphi\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}u_\theta+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{\rho}u_\rho+$$

$$+\frac{\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{\rho}u_{\rho\theta}-\frac{\cos\varphi\cos^2\theta\sin\varphi}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi+\frac{\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi}{\rho^2\sin\theta}u_{\varphi\theta}-$$

$$-\frac{\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}u_\theta+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{\rho^2}u_{\theta\theta}.$$

Остается преобразовать производную u_{zz}.

$$u_{zz}=\left(\rho_z\frac{\partial}{\partial\rho}+\theta_z\frac{\partial}{\partial\theta}\right)u_z=\left(\rho_z\frac{\partial}{\partial\rho}+\theta_z\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\ u_\rho-\frac{\sin\theta}{\rho}u_\theta\right)=$$

$$=\rho_z\cos\theta\ u_{\rho\rho}+\rho_z\frac{\sin\theta}{\rho^2}u_\theta-\rho_z\frac{\sin\theta}{\rho}u_{\theta\rho}-\theta_z\sin\theta\ u_\rho+\theta_z\cos\theta\ u_{\rho\theta}-\theta_z\frac{\cos\theta}{\rho}u_\theta-$$

$$-\theta_z\frac{\sin\theta}{\rho}u_{\theta\theta}=\cos^2\theta\ u_{\rho\rho}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}u_\theta-\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho}u_{\theta\rho}+\frac{\sin^2\theta}{\rho}u_\rho-$$

$$-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}u_{\rho\theta}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}u_\theta+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}u_{\theta\theta}.$$

Складывая все определенные выше производные второго порядка, получаем

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}+\frac{2}{\rho}u_\rho+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}u_\theta.$$

Таким образом, уравнение (4.2.1) после преобразования (4.2.2) приобретает вид

$$u_\tau=u\left(\frac{2}{\rho}u_\rho+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\rho^2}u_\theta+u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}\right)+$$
$$+\frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2+\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}u_\varphi^2+\frac{1}{\rho^2}u_\theta^2\right). \tag{4.2.3}$$

Уравнение (1.1.1) при $\nu=2$ (случай сферической симметрии) представляет собой частный случай уравнения (4.2.3), если положить в последнем $u=u(\tau,\rho)$.

Приложение 3

В этом разделе проводится подробный вывод уравнения (16).

В случае, когда $u=u(t,x,y)$, нелинейное уравнение теплопроводности имеет вид

$$u_t=u(u_{xx}+u_{yy})+\frac{1}{\sigma}(u_x^2+u_y^2). \tag{4.3.1}$$

Перейдем к полярной системе координат. Для этого сделаем замену

$$\begin{cases} t=\tau; \\ x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

при известных ограничениях на новые переменные.

Выразим новые переменные через старые, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из раздела 3.3. Так как $x^2+y^2=\rho^2$, то

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Поделив третье соотношение из (4.3.2) на второе, получим

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Выражая переменную φ, получаем

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Таким образом, мы получили систему

$$\begin{cases} \tau = t; \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{cases}$$

Так как теперь $u = u(\tau, \varphi, \theta)$, то производные первого порядка преобразуются в соответствии с соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} = \tau_t\frac{\partial}{\partial \tau} + \rho_t\frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_t\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \tau};$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \tau_x\frac{\partial}{\partial \tau} + \rho_x\frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_x\frac{\partial}{\partial \varphi} = \rho_x\frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_x\frac{\partial}{\partial \varphi};$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \tau_y\frac{\partial}{\partial \tau} + \rho_y\frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_y\frac{\partial}{\partial \varphi} = \rho_y\frac{\partial}{\partial \rho} + \varphi_y\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Определяя производные от ρ по x, y, получаем

$$\rho_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\varphi; \quad \rho_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\varphi.$$

Производные от φ принимают вид

$$\varphi_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}; \quad \varphi_y = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

Таким образом, в уравнении (4.3.1) производные первого порядка преобразуются в виде

$$u_t = u_\tau;$$
$$u_x = \cos\varphi\, u_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho}u_\varphi;$$
$$u_y = \sin\varphi\, u_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}u_\varphi.$$

Получаем, что сумма $u_x^2 + u_y^2$ запишется в виде

$$u_x^2 + u_y^2 = u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\varphi^2.$$

Вычислим теперь производные второго порядка, входящие в уравнение (4.3.1). Для u_{xx} получаем

$$u_{xx} = \left(\rho_x \frac{\partial}{\partial\rho} + \varphi_x \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) u_x = \left(\rho_x \frac{\partial}{\partial\rho} + \varphi_x \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \left(\cos\varphi\, u_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho} u_\varphi\right) =$$

$$= \rho_x \cos\varphi\, u_{\rho\rho} + \rho_x \frac{\sin\varphi}{\rho^2} u_\varphi - \rho_x \frac{\sin\varphi}{\rho} u_{\varphi\rho} -$$

$$-\varphi_x \sin\varphi\, u_\rho + \varphi_x \cos\varphi\, u_{\rho\varphi} - \varphi_x \frac{\cos\varphi}{\rho} u_\varphi - \varphi_x \frac{\sin\varphi}{\rho} u_{\varphi\varphi}.$$

Подставляя выражения для ρ_x, φ_x, получаем

$$u_{xx} = \cos^2\varphi\, u_{\rho\rho} + \left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\right) u_\varphi +$$

$$+ \left(-\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho} - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}\right) u_{\rho\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho} u_\rho + \frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} =$$

$$= \cos^2\varphi\, u_{\rho\rho} + 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2} u_\varphi - 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho} u_{\rho\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho} u_\rho + \frac{\sin^2\varphi}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}.$$

Аналогичным образом преобразуется u_{yy}.

$$u_{yy} = \left(\rho_y \frac{\partial}{\partial\rho} + \varphi_y \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) u_y = \left(\rho_y \frac{\partial}{\partial\rho} + \varphi_y \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \left(\sin\varphi\, u_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho} u_\varphi\right) =$$

$$= \rho_y \sin\varphi\, u_{\rho\rho} - \rho_y \frac{\cos\varphi}{\rho^2} u_\varphi + \rho_y \frac{\cos\varphi}{\rho} u_{\rho\varphi} +$$

$$+\varphi_y \cos\varphi\, u_\rho + \varphi_y \sin\varphi\, u_{\rho\varphi} - \varphi_y \frac{\sin\varphi}{\rho} u_\varphi + \varphi_y \frac{\cos\varphi}{\rho} u_{\varphi\varphi}.$$

Подставляя ρ_y, φ_y, получим

$$u_{yy} = \sin^2\varphi\, u_{\rho\rho} + \left(-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\right) u_\varphi +$$

$$+ \left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho} + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho}\right) u_{\rho\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho} u_\rho + \frac{\cos^2\varphi}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} =$$

$$= \sin^2\varphi\, u_{\rho\rho} - 2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2} u_\varphi + 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\rho} u_{\rho\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho} u_\rho + \frac{\cos^2\varphi}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}.$$

Складывая u_{xx} и u_{yy}, получаем

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi}.$$

Таким образом, после преобразования (4.3.2) уравнение (4.3.1) приобретает вид

$$u_\tau = u\left(\frac{1}{\rho}u_\rho + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}\right) + \frac{1}{\sigma}\left(u_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}u_\varphi^2\right). \qquad (4.3.3)$$

Если положить в уравнении (4.3.3) $u = u(\tau, \rho)$, то мы получим уравнение (1.1.1) в цилиндрически симметричном случае ($\nu = 1$).

Приложение 4

Представленная ниже лемма представляет собой необходимое при доказательстве свойство трехдиагональных матриц [32] и устанавливает обратимость матрицы (1.3.11).

Лемма. *Пусть* A_n *— квадратная трехдиагональная матрица вида*

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

элементы которой удовлетворяют неравенствам $a_i > 0$, $i = 1, ..., n$; $c_j > 0$, $b_j < 0$, $j = 1, ..., n-1$. *Тогда* $|A_n| > 0$.

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по порядку матрицы.

При $k = 1, 2$ неравенство $|A_k| > 0$ выполняется:

$$|A_1| = a_1 > 0;$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - b_1 c_1 > 0.$$

Предположим теперь, что $|A_k| > 0$ при $k = 1, ..., n$. Вычислим определитель

$$|A_{n+1}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_n & a_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Разлагая $|A_{n+1}|$ по последней строке, получаем

$$|A_{n+1}| = (-1)^{n+1+n+1} a_{n+1}|A_n| + (-1)^{n+1+n} c_n |A_n^1| =$$

$$= a_{n+1}|A_n| - c_n|A_n^1|, \tag{4.4.1}$$

где матрица A_n^1 получена вычеркиванием из A_{n+1} $(n+1)$-ой строки и n-го столбца, т. е.

$$A_n^1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix}.$$

Разлагая определитель $|A_n^1|$ по последнему столбцу, получаем, что

$$|A_n^1| = (-1)^{2n} b_n |A_{n-1}| = b_n |A_{n-1}|.$$

Подставляя полученное в (4.4.1), получаем

$$|A_{n+1}| = a_{n+1}|A_n| - c_n|A_n^1| = a_{n+1}|A_n| - c_n b_n |A_{n-1}| > 0.$$

На основании принципа математической индукции заключаем, что $|A_n| > 0$ для всех n. Лемма доказана.

Приложение 5

В разделе 1.2 было доказано, что уравнение

$$2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)Z+\Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)vZ_v+v^2Z_{vv}=[1+B(w)]H, \qquad (4.5.1)$$

в котором

$$H_0=H_0(v,w);$$

$$H_1=H_1(v,w,Z,Z_w);$$

$$H_2=H_2(v,w,Z,Z_w,Z_{ww},Z_v,Z_{vw}),$$

является мажорантным для уравнения (1.2.24).

При этом было построено решение уравнения (4.5.1) в виде ряда

$$Z(v,w)=\sum_{k=0}^{\infty}Z_k(w)\frac{v^k}{k!}, \qquad (4.5.2)$$

в котором

$$Z_0=\Big(2+\frac{2}{\sigma}\Big)(1+B)H_0|_{v=0};$$

$$Z_1=\Big(6+\frac{3}{\sigma}\Big)(1+B)(H_{0v}+H_1)|_{v=0};$$

$$Z_k=\frac{1}{\xi_k}(1+B)\sum_{i=0}^{2}\frac{k!}{(k-i)!}\frac{\partial^{k-i}H_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0}\quad k\geq 2. \qquad (4.5.3)$$

Константа ξ_k определяется по формуле

$$\xi_k=2\Big(1+\frac{1}{\sigma}\Big)+\Big(4+\frac{1}{\sigma}\Big)k+(k-1)k.$$

Требуется доказать, что решение задачи Коши

$$Z_{vv}=[1+B(w)](H_{0vv}+H_{1v}+H_2); \qquad (4.5.4)$$

$$Z_v|_{v=0}=Z_1; \qquad (4.5.5)$$

$$Z|_{v=0}=Z_0 \qquad (4.5.6)$$

мажорирует решение уравнения (4.5.1).

Построим решение задачи (4.5.4)–(4.5.6) в виде ряда (4.5.2). Коэффициенты Z_0 и Z_1 известны. По определению любая мажоранта является функцией, мажорирующей нуль. Отсюда следует, что любая мажоранта мажорирует саму себя. Таким образом, мы получаем справедливость оценок $Z_0 \ll Z_0$ и $Z_1 \ll Z_1$.

Теперь, предполагая, что $k \geq 2$, продифференцируем уравнение (4.5.4) $k-2$ раза по v и положим $v = 0$. Получаем формулу

$$Z_k = (1+B) \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial^{k-i} H_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0}. \tag{4.5.7}$$

Докажем, что для $k \geq 2$ выполняется мажорантная оценка

$$\frac{1}{\xi_k}(1+B) \sum_{i=0}^{2} \frac{k!}{(k-i)!} \frac{\partial^{k-i} H_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0} \ll (1+B) \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial^{k-i} H_i}{\partial v^{k-i}}\Big|_{v=0}, \tag{4.5.8}$$

т. е. правая часть (4.5.3) мажорируется правой частью (4.5.7). При доказательстве будем пользоваться свойствами мажорант, перечисленными в замечании 2.

Перепишем (4.5.8) в более наглядном виде

$$(1+B)\Big[\frac{1}{\xi_k}\frac{\partial^k H_0}{\partial v^k} + \frac{k}{\xi_k}\frac{\partial^{k-1} H_1}{\partial v^{k-1}} + \frac{k(k-1)}{\xi_k}\frac{\partial^{k-2} H_2}{\partial v^{k-2}}\Big]\Big|_{v=0} \ll$$

$$\ll (1+B)\Big[\frac{\partial^k H_0}{\partial v^k} + \frac{\partial^{k-1} H_1}{\partial v^{k-1}} + \frac{\partial^{k-2} H_2}{\partial v^{k-2}}\Big]\Big|_{v=0}.$$

Очевидно, что числа $\frac{1}{\xi_k}$, $\frac{k}{\xi_k}$, $\frac{k(k-1)}{\xi_k}$ принадлежат интервалу $(0,1)$, что дает нам право воспользоваться пунктом 3 замечания 2. Из этого и других пунктов замечания 2 следует, что мажорантная оценка (4.5.8) справедлива при $k \geq 2$.

Получаем, что решение уравнения (4.5.1) мажорируется решением задачи (4.5.4)–(4.5.6).