

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ  
ИМЕНИ В.М. МАТРОСОВА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
(ИДСТУ СО РАН)

УДК 51-72

Reg. № НИОКТР 121041300058-1

Шифр научной темы FWEW-2021-0001

Reg. № ИКРБС

Инв. № 2021-1



УТВЕРЖДАЮ

Директор ИДСТУ СО РАН

академик

И.В. Бычков

г.

ОТЧЕТ  
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
ФИЗИКИ В ЗАДАЧАХ ТОМОГРАФИИ, КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И  
МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА  
(промежуточный, этап 1)

Руководитель НИР  
главный науч. сотр.,  
д-р физ.-мат. наук

Марков Марков Ю.А.  
24.12.2021

Иркутск 2021

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель НИР, зав.  
отделения, д-р физ.-мат.  
наук

Марков 24.12.2021  
подпись, дата

Ю.А. Марков (введение,  
заключение)

Исполнители темы:

ст. науч. сотр.  
д-р физ.-мат. наук

Баландин 24.12.2021  
подпись, дата

А.Л. Баландин (разделы 2-3)

гл. науч. сотр.  
д-р физ.-мат. наук

Казаков 24.12.2021  
подпись, дата

А.Л. Казаков (разделы 2-3)

ст. науч. сотр.  
канд. физ.-мат. наук

Свинин 24.12.2021  
подпись, дата

А.К. Свинин (разделы 2-3)

ст. науч. сотр.  
канд. физ.-мат. наук

Семенов 24.12.21  
подпись, дата

Э.И. Семенов (разделы 2-3)

ст. науч. сотр.  
канд. физ.-мат. наук

Ломов 24.12.2021  
подпись, дата

В.П. Ломов (разделы 2-3)

ст. науч. сотр.  
д-р физ.-мат. наук

Маркова 24.12.2021  
подпись, дата

М.А. Маркова (разделы 2-3)

вед. науч. сотр.  
д-р физ.-мат. наук

Раджабов 24.12.2021  
подпись, дата

А.Е. Раджабов (разделы 2-3)

мл. науч. сотр.  
канд. физ.-мат. наук

Кузнецов 24.12.2021  
подпись, дата

П.А. Кузнецов (разделы 2-3)

ст. науч. сотр.  
канд. физ.-мат. наук

Жевлаков 24.12.2021  
подпись, дата

А.С. Жевлаков (разделы 2-3)

мл. науч. сотр.

Бондаренко 24.12.2021  
подпись, дата

А.И. Бондаренко (разделы 2-3)

Нормоконтролер  
канд. тех. наук

Фереферов 24.12.2021  
подпись, дата

Е.С. Фереферов

## РЕФЕРАТ

Отчет 35 с., 2 рис., 82 источн., 2 прил.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ФОРМ-ФАКТОР, ПРОЦЕСС ДРЕЛЛА-ЯНА, ПАРАФЕРМИ-СТАТИСТИКА, НЕКОММУТАТИВНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МОЙЛА, СООТНОШЕНИЯ ТИПА ФУНКА-ХЕККЕ, ВЕКТОРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ, РАЗЛОЖЕНИЕ МАГНУСА, ОСЦИЛЛЯЦИИ НЕЙТРИНО, НЕЛИНЕЙНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, НЕЛИНЕЙНАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ТИПА «РЕАКЦИЯ-ДИФфуЗИЯ», ДИФфуЗИОННАЯ ВОЛНА, ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ.

Объектом НИР являются: оценка влияния обмена аксиально-векторным мезоном на извлечение протонных электромагнитных форм-факторов; тензорные петлевые интегралы для процесса рассеяния два в два; метод редукции произведения двух и более массивных пропагаторов; анализа процесса Drell-Yan в порядке  $\alpha_s^2$  константы сильного взаимодействия; некоммутативное ассоциативное произведение звездочка в алгебре параграсмановых чисел; доказательство изоморфности алгебры операторов рождения и уничтожения, подчиняющихся параферми-статистике и алгебры параграсмановых чисел; кинетическое уравнение больцмановского типа для аномальной моды фермионных бесцветных возбуждений в кварк-глюонной плазме; системы уравнений "реакция-диффузия"; диффузионные волны; нелинейные параболические системы с вырождением; система двух нелинейных гиперболических уравнений в частных производных четвёртого порядка; эволюционное дифференциально-разностное уравнение; числа Фибоначчи; интегральные соотношения типа Функа-Хекке для векторных сферических волновых функций; численные методы решения уравнения осцилляции нейтрино в среде.

Целью НИР является доказательство утверждения о том, что алгебра операторов рождения и уничтожения, подчиняющихся параферми-статистике порядка  $p = 2$  и алгебра параграсмановых чисел того же порядка, снабжённая произведением Мойла, являются изоморфными; получение интегральных соотношений типа Функа-Хекке для векторных сферических волновых функций и использование их для вывода лучевых преобразований векторных функций Хансена, а также для разработки численных алгоритмов для исследования линейных полей Бельтрами; построение диффузионной волны для нелинейной параболической системы типа «реакция-диффузия» при наличии цилиндрической или сферической симметрии и доказательство теоремы существования и единственности кусочно-аналитического решения; доказательство существования и единственности решений, имеющих вид диффузионной волны, распространяющейся по абсолютно холодному (покоящемуся) фону с конечной скоростью для нелинейного

эволюционного параболического уравнения второго порядка достаточно общего вида; оценка влияния обмена аксиально-векторным мезоном на извлечение протонных электромагнитных форм-факторов; доказательство теоремы о совместности уравнений, входящих в счетный класс обыкновенных дискретных уравнений, возникающих как ограничения, совместные с цепочкой Вольтерра; анализ системы двух нелинейных гиперболических уравнений в частных производных четвертого порядка, правые части которой содержат двукратные операторы Лапласа и квадраты градиентов искомым функций; построения точных решений указанной системы уравнений; вывод аналитических формул для тензорных петлевых интегралов для процесса рассеяния  $2$  в  $2$  через функции Пасарино-Вельтмана; вывод аналитических выражений для угловых интегралов процесса рассеяния  $2$  в  $3$  вплоть до случая наличия  $2$ -х массивных пропагаторов; исследование качественных и количественных свойств численных методов решения уравнения осцилляции нейтрино в среде; анализ возможности расширения области сходимости разложения Магнуса для уравнения осцилляций в связи с использованием численного интегрирования и вариации шагов в промежуточных вычислениях.

В процессе работы проводились аналитические и численные исследования изучаемых задач математической физики, физики сплошных сред и квантовой теории поля.

В результате выполнения НИР в 2020 г. были доказаны теоремы существования и единственности кусочно-аналитических решений типа диффузионных (тепловых) волн; построены точные решения типа диффузионных волн с различными фронтами в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрии; разработана и реализована методика верификации численных расчетов, выполненных на основе метода граничных элементов, с помощью отрезков рядов и точных решений; получены интегральные соотношения типа Функа-Хекке для векторных сферических волновых функций и выведены лучевые преобразования для векторных функций Хансена; разработаны численные алгоритмы для исследования линейных полей Бельтрами; доказана теорема о совместности уравнений в счетном классе обыкновенных дискретных уравнений, возникающих как ограничения, совместные с цепочкой Вольтерра; также доказана аналогичная теорема о совместности счетного класса билинейных уравнений, тесно связанного с исходными уравнениями подстановкой и имеющего приложения в теории кластерных алгебр; построены точные решения системы двух нелинейных гиперболических уравнений в частных производных четвертого порядка, правые части которой содержат двукратные операторы Лапласа и квадраты градиентов искомым функций; для частного случая, когда квадраты градиентов

не входят в систему, установлено существование точных решений определённого вида у исходной системы, выражаемых через произвольные гармонические функции от пространственных переменных и экспоненциальные функции времени; доказано утверждение, что алгебра операторов рождения и уничтожения, подчиняющихся параферми-статистике порядка  $p = 2$  и алгебра параграсмановых чисел того же порядка, снабжённая произведением Мойла, являются изоморфными; построено кинетическое уравнение больцмановского типа, описывающее процесс упругого рассеяния плазминов на плазмонах в кварк-глюонной плазме и эффект так называемого нелинейного затухания Ландау для мягких ферми-возбуждений; проведена оценка влияния обмена аксиально-векторным мезоном на извлечение протонных электромагнитных форм-факторов; в качестве примера проведены оценки с обменом  $f_1(1285)$  мезоном и показано, как он влияет на методы Розенблута и передачи поляризации; получены аналитические формулы для записи тензорных петлевых интегралов для процесса рассеяния два в два через функции Пасарино-Вельтмана; выведены аналитические выражения для угловых интегралов процесса рассеяния два в три вплоть до случая наличия 2-х массивных пропагаторов; проанализирована возможность расширения области сходимости разложения Магнуса для уравнения осцилляций в связи с использованием численного интегрирования и вариации шагов в промежуточных вычислениях; исследована алгебраическая структура задачи смешивания фермионов с разными физическими характеристиками (разной чётности).

## СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ.....	2
РЕФЕРАТ .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	7
1 Развитие методов математической физики в теории солитонов, механике сплошных сред и плазме .....	14
2 Развитие методов математической физики в квантовой теории поля, ядерной физике и кварк-глюонной плазме.....	16
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	19
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	21
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	28
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Список конференций.....	31

## ВВЕДЕНИЕ

*Оценка современного состояния решаемой научно-технической проблемы и обоснование необходимости проведения НИР.* Имеется небольшое количество работ, в которых рассматривался вопрос о построении интеграла по путям для системы одинаковых частиц, подчиняющихся парастатистике (см., например, Polychronakos [1], Greenberg и Mishra [2]). В этом направлении исследований особый интерес представляют работы Omote и Kamefuchi [3] и Ohnuki и Kamefuchi [4]. Для обобщения понятия интеграла по путям на случай парафермионных переменных в этих работах первым шагом было проведено обобщение известной алгебры Грассмана на так называемую параграссманову алгебру (термин "параграссмановость" был впервые введен K'alny [5]). Это обобщение является прямым аналогом обобщения фермионных операторов на случай парафермионных операторов в парастатистике. Авторы ввели определение параграссмановской алгебры произвольного порядка  $p$ , понятия интегрирования и дифференцирования в этой алгебре, замены переменных в интегралах, преобразования Фурье и т.д. Они также определили понятие когерентных состояний для операторов пара-Ферми и выписали формулу разложения единицы (соотношение полноты). Эти парафермионные когерентные состояния и соотношение полноты имеют фундаментальное значение в процедуре построения квантово-механических интегралов по траекториям. Авторы построили интеграл по путям для пара-ферми полей с использованием параграссмановых переменных, следуя определению интеграла по путям как предела произведения временных операторов эволюции для малых временных интервалов. Отметим, что работы [3,4] являются прямым обобщением работы Ohnuki и Kashiwa [6], в которой было представлено построение интегралов по путям по грассмановым переменным.

Однако имеется еще один аспект алгебры параграссмановых чисел, который ранее не обсуждался в литературе и который также может быть использован в задаче построения интеграла по путям для системы тождественных частиц, подчиняющихся парастатистике [7]. В параграссмановской алгебре мы вводим некоммутативное и ассоциативное произведение звёздочка  $*$  (произведение Мойяла) в рамках парафермионного когерентного состояния, которое на самом деле представляет собой интегральную свертку определенного типа двух параграссманово-значных функций. Это является прямым обобщением аналогичного произведения в алгебре Грассмана (см., например, Bayen и др. [8], Тютин [9], Смилга [10], Hirshfeld и Henselder [11], Daoud [12]). Такое произведение возникает естественным образом при вычислении матричных элементов сложных операторных выражений в базисе парафермионных когерентных

состояний. Произведение звёздочка позволяет лучше понять связь между алгеброй операторов рождения и уничтожения парафермионовских частиц и параграсмановой алгеброй, снабжённой произведением  $*$ , делая их фактически изоморфными, как это имеет место для обычных фермионных операторов и грасмановых переменных [12].

Для практического выполнения операции  $*$  мы можем использовать два различных подхода. Первый из них был предложен в работе Омоте и Kamefuchi [3]. Идея этого подхода состоит в том, чтобы свести интегрирование по параграсмановым переменным к вычислению определенных операторных выражений, усредненных по состоянию вакуума. Здесь, в конечном счете, вычисления сводятся к сдвигу операторов уничтожения вправо до тех пор, пока вакуумные условия могут быть использованы. Правила перестановки определяются алгеброй операторов, подчиняющихся параферми-статистике конкретного порядка  $p$ . Другой способ эвристического характера, который был использован в рамках данного проекта, состоит в том, чтобы руками выделить из различных вкладов в интеграл только те, которые дают нетривиальный результат при интегрировании. Для этого мы воспользовались простым фактом, что интеграл по параграсмановой переменной  $\mu$  порядка  $p$  не равен нулю тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение содержит эту параграсманову переменную точно в степени  $p$  [4]. Два различных подхода к вычислению произведения  $*$  позволяют независимо проверить результаты вычислений, которые усложняются при увеличении порядка  $p$ .

Параболические дифференциальные уравнения (PDE) являются содержательными математическими объектами с нетривиальными свойствами; они интенсивно изучаются в научной литературе. Существует большое количество статей и монографий, затрагивающих различные аспекты PDE. Мы отметим лишь три классические монографии, оказавшие значительное влияние на развитие теории нелинейных параболических уравнений [13,14,15].

Новый этап в изучении решений нелинейных параболических уравнений с диффузионным типом волны начался в 1980-х и 1990-х годах, когда были опубликованы монографии А. Фридмана [16] и А. А. Самарского (с соавторами) [17]. Монографии не были полностью посвящены построению и исследованию таких решений, но соответствующие результаты были получены как вспомогательные. Мы выделяем результаты А. Ф. Сидорова 80-х годов, который построил решения некоторых начальных краевых задач, порождающих диффузионные волны в классе аналитических функций [18]. В российской математической литературе в настоящее время эта проблема иногда называется проблемой Андрея Сахарова. Несколько позже, но независимо, аналогичные результаты были получены С. Ангенентом [19]. Затем исследования А.Ф. Сидорова были



продолжены его учениками [20], в том числе и одним из участников данного проекта. В 2013 году участники данного базового проекта опубликовали статью, в которой вопросы, ранее оставшиеся открытыми, были решены; основной вопрос заключался в том, сходятся ли построенные ряды [21]. Была доказана теорема существования и единственности решения задачи возникновения диффузионной волны для уравнения пористой среды в случае плоской симметрии. Она является аналогом классической теоремы Коши-Ковалевской [20] для рассматриваемого случая.

Далее эти результаты были распространены на случай круговой и сферической симметрии [23], двумерный случай [24,25], а также на случай простейших нелинейных систем [26]. Поскольку доказанные теоремы являются локальными, как и все подобные утверждения, начиная с теоремы Коши-Ковалевской, актуален вопрос об области существования решения. В общем случае ответ на него, по-видимому, можно найти только численно. Поэтому мы разработали численно-аналитический метод на основе известного метода граничных элементов (МГЭ) [27,28] с использованием метода двойной взаимности [29]. Были разработаны и реализованы алгоритмы БЭМ для решения различных начально-граничных задач, решения которых имеют вид диффузионной (тепловой) волны. Рассмотрены случаи одной [23,30] и двух пространственных переменных [31], при этом для устранения сингулярности используются отрезки специальных рядов [32], а для вычисления интегралов применяются полученные ранее явные аналитические формулы [33].

Все предложенные вычислительные алгоритмы являются эвристическими, и их сходимости не доказана; однако это типично для нелинейных сингулярных PDE. В такой ситуации вопрос о проверке результатов вычислений становится особенно актуальным. Один из эффективных методов - сравнение численных результатов с точными решениями. В литературе нам удалось найти относительно небольшое число решений нужного типа, хотя в целом, известно достаточно большое число точных решений уравнения пористой среды и обобщенного уравнения пористой среды [34]. В такой ситуации мы предприняли попытку найти точные решения этих уравнений с помощью методов группового анализа [35], а также различных типов анзацев [34]. В некоторых случаях конструкция была доведена до явной формулы, но обычно мы сводим ее к задаче Коши.

C. Foias и соавторы ввели понятие инерционного многообразия для нелинейных эволюционных уравнений; в частности, для параболических уравнений. Эти многообразия содержат глобальный аттрактор, они притягивают все решения экспоненциально и устойчивы к возмущениям. В бесконечномерном случае они сводят динамику к

конечномерному ОДУ [36]. (см. также [37]). Эти результаты были распространены на параболические уравнения и системы в [38].

В 21 веке появилось большое количество публикаций, посвященных вопросам асимптотических свойств решений уравнений и систем параболического типа. Упомянем, например, работу [39], где рассматриваются, в частности, уравнения вида, близкого к (1), и приводится обширная библиография. Из недавних публикаций можно упомянуть работу [40], которая посвящена изучению асимптотического поведения решений для неклассических уравнений диффузии в гладкой ограниченной области с динамическим граничным условием.

Особого упоминания в контексте данной работы заслуживают исследования С.Н. Антонцева и С.И. Шмарева, которые рассматривают задачи со свободной границей для нелинейных параболических уравнений в общих формулировках в абстрактных функциональных пространствах [41,42]. Следует упомянуть также работу А.А. Косова и Е.И. Семенова, которые строят точные решения для уравнений рассматриваемого типа, не являющихся диффузионными волнами [43], и И.В. Степанову, занимающуюся вопросами моделирования тепломассопереноса с помощью нелинейных параболических систем [44,45].

**Актуальность и новизна.** В ходе выполнения проекта исследовалась актуальная проблема квантовой теории поля: оценка петлевых и угловых интегралов. За последние пять десятилетий был достигнут огромный прогресс в аналитической обработке петлевых интегралов в КХД. Несмотря на то, что разработано много различных методов для оценки петлевых диаграмм, они в основном используют следующие методы:

- редуцирование тензорной структуры петлевых диаграмм с помощью метода Пассарино-Вельтмана (PV) [46], основанного на лоренцевой ковариантности матричных элементов и дроблении знаменателей в петлевых интегралах;
- сокращение числителей, содержащих виртуальные моменты, с помощью производных, действующих на линейные комбинации внешних моментов [47];
- сведение тензорных интегралов к скалярным со смещенной размерностью, которые далее сводятся к петлевым интегралам произвольной размерности [48];
- использование методов спиральности при оценке петлевых интегралов [49] и т.п..

Успех метода Пассарино-Вельтмана стимулировал дальнейшее развитие идеи использования комбинаций внешних импульсов для построения базиса при разложении тензорных петлевых интегралов. В частности, разложение векторов Лоренца в параллельном и ортогональном пространстве уже широко использовалось в контексте

одноконтурной и многоконтурной редукции интегралов, обобщенной унитарности и недавних разработок в декомпозиции амплитуд на тензоры и форм-факторы.

В рамках данного проекта нами было впервые предложено обобщение метода Пассарино-Вельтмана. Вместо разложения петлевых интегралов в тривиальном базисе возникающих внешних моментов мы выполнили разложение в базисе ортогональных линейных комбинаций внешних моментов. Это позволяет нам исключить этап алгебраического решения системы уравнений для того, чтобы определить скалярные функции, по которым мы расширяем тензорные петлевые диаграммы. Вместо этого мы получили эти скалярные функции непосредственно с помощью дробных соотношений, включающих обратные знаменатели в петлевых интегралах. Мы рассмотрели только петлевые интегралы, не обращаясь к конкретному типу частиц, распространяющихся в петле. Предложенный формализм может быть адаптирован к полным амплитудам. Наш метод очень полезен для аналитического рассмотрения процессов с безмассовыми частицами, например, процессов Дрелла-Яна (DY) и SIDIS, рождения быстрых фотонов и тяжелых флейворов и т.д. Кроме того, важно отметить, что предложенный метод может быть обобщен на произвольное число внешних линий в однопетлевых диаграммах и на массивные частицы.

Теорема Функа-Хекке нашла ряд применений в выпуклой геометрии для определения выпуклых или звездчатых тел по информации об их проекциях или сечениях [50], дифференциальных уравнениях [51], геометрической томографии [52], и математической томографии [53] и в некоторых случаях способствовала поразительно коротким доказательствам важных результатов, поэтому актуальность данного направления исследования не вызывает сомнения. В рамках данного проекта формулы типа Функа-Хекке выведены для векторных сферических волновых функций и используются для оценки лучевого преобразования (также называемого рентгеновским преобразованием) этих векторных функций.

Преобразование лучей, аналогичное преобразованию Радона, представляет важный интерес для всех задач томографии и интегральной геометрии. Методы томографии могут быть применены к любым объектам, для которых мы можем определить (измерить) лучевое или радоновское преобразования любыми методами. Такие интегральные методы используются для исследования внутренней структуры, параметров анизотропных сред методами тензорной томографии [54], для определения параметров плазмы по эмиссионному излучению [55,56], для реконструкции векторных полей [57]. Томография ближнего поля для некоторых нанотехнологий рассмотрена в большой работе [58]; многие приложения теории обратного рассеяния обсуждаются в обзорной статье [59].

Многомерное обратное рассеяние имеет очень важные применения в радиолокации, медицинской диагностике, геофизической разведке и неразрушающем контроле. Для такой диагностики используются акустические, электромагнитные и упругие волны [60].

Актуальность построения точных многомерных решений нелинейных эллиптических, параболических, гиперболических систем и отдельных уравнений помимо ценности и значимости самих точных решений, обусловлена как широким спектром применения указанных уравнений в различных областях: физике плазмы, механике жидкости и газа, гидрологии, биологии и определяется внутренней логикой развития теории дифференциальных уравнений с частными производными и уравнений математической физики, где одним из ключевых направлений является изучение вырожденных случаев, так и приложениями рассматриваемых решений в физике плазмы, механике жидкости и газа, гидрологии и биологии.

Исследования в рамках НИР организованы в виде двух блоков: Блок 1 – «Развитие методов математической физики в теории солитонов, механике сплошных сред и плазмы»; Блок 2 – «Развитие методов математической физики в квантовой теории поля, ядерной физики и кварк-глюонной плазме».

Цели и задачи этапа НИР в 2021 г.:

- построить новые точные решения нелинейного уравнения диффузии, имеющие вид диффузионных волн, распространяющихся по невозмущенному фону с конечной скоростью, доказать теоремы существования и единственности решений типа тепловой волны в классе аналитических функций и получить аналогичные результаты для системы уравнений "реакция-диффузия";
- разработать подход к построению представления функции Грина для массивной векторной частицы во внешнем калибровочном поле в виде континуального интеграла по траекториям в суперпространстве на основе деформированной алгебры Дэффина-Кеммера-Петье и расширенной системы парафермионных трилинейных коммутационных соотношений;
- построить эффективный гамильтониан четвертого порядка по операторам рождения и уничтожения квазичастиц в кварк-глюонной плазме, описывающий процесс упругого рассеяния двух бесцветных плазмонов друг на друге и дать диаграммную интерпретацию эффективной амплитуды плазмон-плазмонного взаимодействия;
- доказать ряд теорем о тождествах для чисел Дженочки первого и второго рода, участвующих в представлении некоторого класса сумм, возникающих в

непрерывном пределе некоторых интегрируемых дифференциально-разностных эволюционных уравнений;

- исследовать обобщенное уравнение Ричардсона со степенными нелинейностями и найти семейства явных точных решений, выражаемых через элементарные функции или  $W$ -функцию Ламберта;

- изучить нелинейное уравнение в частных производных четвертого порядка, правая часть которого содержит многомерные аналоги уравнения Буссинеска, выражаемые через двукратные операторы Лапласа и квадраты градиентов искомых функций;

- вычислить адронные поправки в аномальный магнитный момент мюона и сверхтонкое расщепление уровней мюонного водорода, предложить возможные динамические механизмы, способные объяснить эффект появления пика в отношении выходов положительно заряженных каонов и пионов в экспериментах по столкновению тяжелых ионов;

- получить ограничения на константы связи возможных гипотетических частиц темной материи: скалярных, псевдоскалярных, векторных и аксиально-векторных, с учетом того, что эти частицы имеют  $P$ -четные и  $P$ -нечетные вершины взаимодействия с обычной материей Стандартной модели;

- вычислить электрический дипольный момент протона и нейтрона;

- решить трехмерную обратную задачу рассеяния применительно к комптоновскому рассеянию с использованием принципа максимума энтропии и разработать итерационную процедуру для реконструкции рассеивающего объекта по результатам комптоновского рассеяния, т.е. восстановить объект по лучевому преобразованию в конической системе координат.

Результаты выполнения этапов НИР в 2021 г. создают теоретическую и практическую базу для успешного выполнения заключительного этапа НИР и достижения поставленных целей.

## **1 Развитие методов математической физики в теории солитонов, механике сплошных сред и плазме**

Исследована система двух нелинейных гиперболических уравнений в частных производных четвёртого порядка, правые части которой содержат двукратные операторы Лапласа и квадраты градиентов искомым функций. Такого рода уравнения, близкие к уравнению Буссинеска и уравнениям Навье-Стокса, встречаются в задачах гидродинамики. Для построения точных решений указанной системы уравнений был предложен анзац специального вида, содержащий квадратичную зависимость от пространственных переменных и произвольные функции от времени. Использование предложенного анзаца позволило разбить на несколько этапов процесс отыскания компонент решения, зависящих от пространственных переменных и времени [61,62].

Отыскание зависимости от пространственных переменных свелось к алгебраической системе матричных, векторных и скалярного уравнений. Найдено общее решение этой системы уравнений в параметрическом виде. При отыскании компонент решения исходной системы, зависящих от времени, возникает система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В частном случае, когда квадраты градиентов не входят в систему, установлено существование точных решений определённого вида у исходной системы, выражаемых через произвольные гармонические функции от пространственных переменных и экспоненциальные функции времени. Приводится ряд примеров построенных точных решений, в том числе периодических по времени и анизотропных по пространственным переменным. Найденные точные решения можно использовать для верификации численных методов приближённого построения решений прикладных краевых задач [63,64].

Получены интегральные соотношения типа Функа-Хекке для векторных сферических волновых функций, которые использованы для вывода лучевых преобразований для векторных функций Хансена (Hansen W.W.) а также для разработки численных алгоритмов для исследования линейных полей Бельтрами. Метод основан на разложении векторного поля и его лучевого преобразования по базисным сферическим векторным волновым функциям. На рисунке 1 представлены два частных случая базисных векторных сферических волновых функций  $M_5^3(r)$  и  $N_5^3(r)$  [65-67].

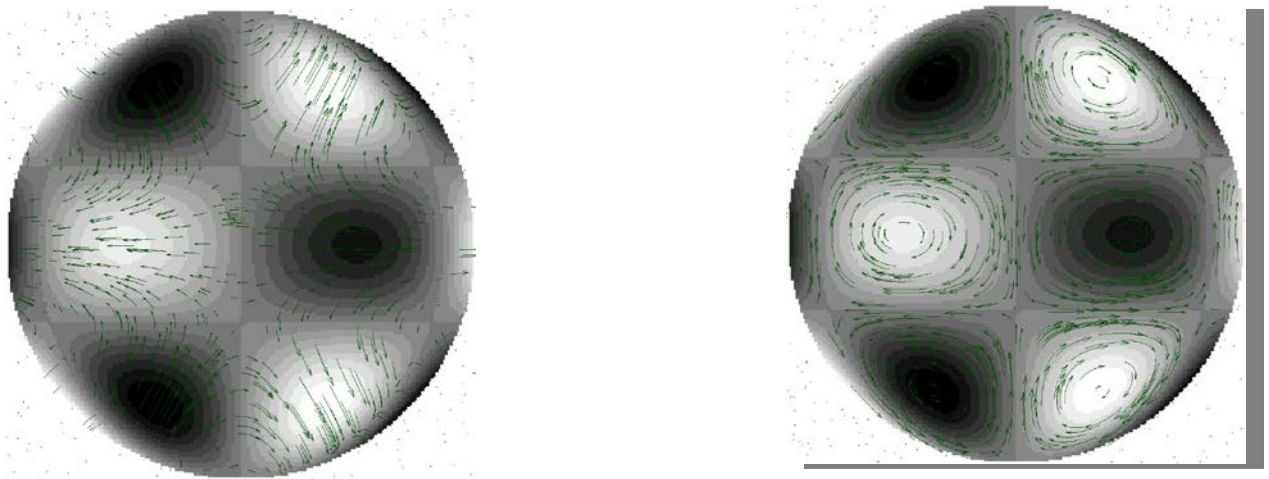


Рисунок 1 – Направление векторного поля для двух частных случаев базисных векторных сферических волновых функций  $M_5^3(r)$  и  $N_5^3(r)$

Исследована задача о построении диффузионной волны для нелинейной параболической системы типа «реакция-диффузия» при наличии цилиндрической или сферической симметрии (случай плоской симметрии рассматривался авторами ранее). Доказана теорема существования и единственности кусочно-аналитического решения (диффузионная волна). Решение построено в виде сходящихся рядов Тейлора, получены рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов. Приведен и подробно разобран контрпример, иллюстрирующий поведение решения при нарушении некоторых условий теоремы (аналог контрпримера Ковалевской). Приведены точные решения типа диффузионных волн с экспоненциальным и степенным фронтами при степенном задании функций источника. При этом выполнена редукция к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, наследующей особенности исходной [68-71].

Для нелинейного эволюционного параболического уравнения второго порядка достаточно общего вида был исследован вопрос о существовании, единственности и свойствах решений, имеющих вид диффузионной волны, распространяющейся по абсолютно холодному (покоящемуся) фону с конечной скоростью. Подобные решения совершенно не типичны для параболических уравнений и появляются вследствие вырождения задачи. Доказаны утверждения о существовании и единственности решений рассматриваемого типа в классе аналитических функций с построением примера, являющегося аналогом классического промера С.В. Ковалевской в рассмотренном случае. Поскольку теоремы не позволяют исследовать свойства решений, были рассмотрены анзацы, которые сводят построение решений к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Их удалось проинтегрировать и получить информацию о

свойствах решений в частных случаях, которые особенно интересны для приложений. На рисунке представлено наиболее интересное из полученных решений  $u=u(t,x)$ , имеющее вид уединенной волны (солитона), который движется по покоящемуся фону с постоянной скоростью [72-76].

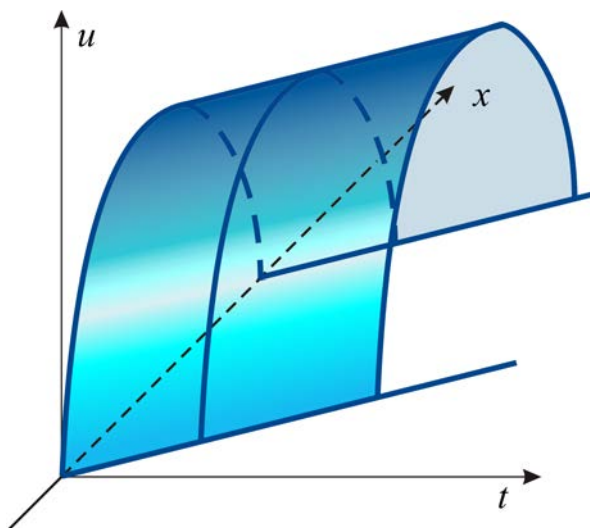


Рисунок 2 – Вид уединенной волны (солитона), который движется по покоящемуся фону с постоянной скоростью

Рассмотрен счетный класс обыкновенных дискретных уравнений, возникающих как ограничения, совместные с цепочкой Вольтерра (эволюционное дифференциально-разностное уравнение, имеющее применение в физике плазмы). Доказана теорема о совместности уравнений в этом классе. Также доказана аналогичная теорема о совместности счетного класса билинейных уравнений, тесно связанного с исходными уравнениями подстановкой и имеющего приложения в теории кластерных алгебр. Для этих уравнений найдены решения, выражающиеся в терминах последовательностей, порождаемых линейным рекуррентным соотношением второго порядка. В качестве простейшего примера можно привести последовательность чисел Фибоначчи [77].



## 2 Развитие методов математической физики в квантовой теории поля, ядерной физики и кварк-глюонной плазме

В рамках базового проекта оценено влияние обмена аксиально-векторным мезоном на извлечение протонных электромагнитных форм-факторов. В качестве примера проведены оценки с обменом  $f_1(1285)$  мезоном, показано, как он влияет на методы Розенблута и передачи поляризации. Вклад аксиально-векторного мезона незначителен по сравнению с традиционным двухфотонным обменом и не может быть причиной различий в форм-факторах, извлеченных различными методами [78,79].

В работе рассмотрены тензорные петлевые интегралы для процесса рассеяния  $2 \rightarrow 2$ . Получены аналитические формулы для записи данных интегралов через функции Пасарино-Вельтмана. Главной составляющей результата является вывод аналитических выражений для угловых интегралов процесса рассеяния  $2 \rightarrow 3$  вплоть до случая наличия 2-х массивных пропагаторов, который не был рассмотрен ранее в применяемом подходе. Полученный результат развивает идеи, предложенные в работе Gabor Somogyi (J. Math. Phys. 52 (2011) 083501). При этом метод редукции произведения двух и более массивных пропагаторов позволяет выражать это произведение через сумму с меньшим числом массивных пропагаторов. Это даёт возможность вычислять более сложные классы угловых интегралов, важных для физики частиц. Полученные выражения позволяют их использовать для расчета большого класса процессов. В частности, данный результат будет использован для анализа процесса Drell-Yan в порядке  $\alpha_s^2$  константы сильного взаимодействия и анализа поведения при малом поперечном импульсе векторного бозона, распадающегося на лептонную пару [80].

В рамках базового проекта проводится исследование качественных и количественных свойств численных методов решения уравнения осцилляции нейтрино в среде. Подбираются способы качественной и количественной оценки методов численного решения в отсутствие точного решения, а также сильно осциллирующего решения. Проверяется возможность расширения области сходимости разложения Магнуса для уравнения осцилляций в связи с использованием численного интегрирования и вариации шагов в промежуточных вычислениях. Также в рамках базового проекта было проведено исследование алгебраической структуры задачи смешивания фермионов с разными физическими характеристиками (разной чётности). В данном направлении получил своё дальнейшее развитие подход на основе спектрального разложения. Это позволило найти матричную форму полного пропагатора системы фермионов, что существенно упрощает анализ задач смешивания и «одевания» матрицы смешивания нейтрино. На простом

примере было показано, что учёт полного пропагатора для смешивающихся фермионов не оказывает влияния на параметры смешивания в физических ситуациях.

Рассмотрена алгебра параграсмановых чисел, имеющая порядок  $p = 2$  и находящаяся в инволюции. В данной алгебре на основе парафермионных когерентных состояний введено некоммутативное, ассоциативное произведение звёздочка  $*$  (произведение Мойла), которое является прямым обобщением аналогичного понятия в алгебре грасмановых чисел, имеющей порядок  $p = 1$ . Произведение такого типа возникает естественным образом при вычислении матричных элементов сложных операторных выражений в базисе парафермионных когерентных состояний.

Рассмотрена также алгебра операторов рождения и уничтожения, подчиняющихся параферми-статистике того же порядка  $p = 2$ . Эти операторы удовлетворяют системе тринейных соотношений параферми-алгебры. В частном случае, когда  $N = 2$  доказано следующее

Утверждение. Алгебра операторов рождения и уничтожения, подчиняющихся параферми-статистике порядка  $p = 2$ , уравнение (2), и алгебра параграсмановых чисел того же порядка (1), снабжённая произведением Мойла, являются изоморфными. Было проведено обсуждение возможности обобщения полученного результата на случай, когда  $N = 3$  и/или когда параграсманова и параферми алгебры имеют порядок  $p = 3$ . Показано, что в силу громоздкости вычислений прямой подход при доказательстве изоморфизма двух алгебр, использованный в работе, становится неэффективным при  $N \geq 3$  и/или  $p \geq 3$ , что требует развития качественно иного подхода [81].

В рамках формализма Баба-Мадхаварао предложен самосогласованный подход к получению системы волновых уравнений четвертого порядка для описания массивных частиц со спином  $3/2$ . Для этой цели вводится новый набор матриц вместо исходных матриц алгебры Баба-Мадхаварао. Показано, что в терминах новых матриц процедуру построения корня четвертой степени из волнового оператора четвертого порядка можно свести к некоторым простым алгебраическим преобразованиям и операции перехода к пределу при  $z \rightarrow q$ , где  $z$  – комплексный параметр деформации и  $q$  – примитивный корень четвертой степени из единицы, входящий в определение  $\eta$ -матриц. Проведено соответствующее обобщение полученных результатов на случай взаимодействия с внешним электромагнитным полем, введенным посредством минимальной подстановки. Обсуждается соответствующее приложение полученных результатов к задаче построения представления интеграла по траекториям в парасуперпространстве для пропагатора массивной частицы со спином  $3/2$  во внешнем калибровочном поле в рамках подхода Баба-Мадхаварао [82].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все исследования в рамках этапа НИР 2021 г. выполнены в полном объеме в соответствии с государственным заданием по теме № 121041300058-1 «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа». Содержание работы раскрыто в Плане научно-исследовательских работ Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения РАН на 2021-2025 годы (Направление 1.1 Математические науки, Раздел 1.1.1.7. «Математическая физика» Программы фундаментальных научных исследований на 2021-2030 гг.).

В процессе выполнения работ на этапе НИР 2021 г. получены следующие результаты:

- получены интегральные соотношения типа Функа-Хекке для векторных сферических волновых функций и выведены лучевые преобразования для векторных функций Хансена;
- разработаны численные алгоритмы для исследования линейных полей Бельтрами;
- доказаны теоремы существования и единственности кусочно-аналитических решений типа диффузионных (тепловых) волн, и построены точные решения типа диффузионных волн с различными фронтами в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрии;
- разработана и реализована методика верификации численных расчетов, выполненных на основе метода граничных элементов, с помощью отрезков рядов и точных решений;
- доказана теорема о совместности уравнений в счетном классе обыкновенных дискретных уравнений, возникающих как ограничения, совместные с цепочкой Вольтерра;
- доказана аналогичная теорема о совместности счетного класса билинейных уравнений, тесно связанного с исходными уравнениями подстановкой и имеющего приложения в теории кластерных алгебр;
- построены точные решения системы двух нелинейных гиперболических уравнений в частных производных четвёртого порядка, правые части которой содержат двукратные операторы Лапласа и квадраты градиентов искомых функций;

- для частного случая, когда квадраты градиентов не входят в систему, установлено существование точных решений определённого вида у исходной системы, выражаемых через произвольные гармонические функции от пространственных переменных и экспоненциальные функции времени;
- доказано утверждение, что алгебра операторов рождения и уничтожения, подчиняющихся параферми-статистике порядка  $p = 2$  и алгебра параграсмановых чисел того же порядка, снабжённая произведением Мойла, являются изоморфными;
- построено кинетическое уравнение больцмановского типа, описывающее процесс упругого рассеяния плазминов на плазмонах в кварк-глюонной плазме и эффект так называемого нелинейного затухания Ландау для мягких ферми-возбуждений;
- проведена оценка влияния обмена аксиально-векторным мезоном на извлечение протонных электромагнитных форм-факторов; в качестве примера проведены оценки с обменом  $f_1(1285)$  мезоном и показано, как он влияет на методы Розенблута и передачи поляризации
- получены аналитические формулы для записи тензорных петлевых интегралов для процесса рассеяния два в два через функции Пасарино-Вельтмана и найдены аналитические выражения для угловых интегралов процесса рассеяния два в три вплоть до случая наличия 2-х массивных пропагаторов;
- проанализирована возможность расширения области сходимости разложения Магнуса для уравнения осцилляций в связи с использованием численного интегрирования и вариации шагов в промежуточных вычислениях.

По результатам НИР опубликовано 14 статей в российских и зарубежных изданиях, включенных в международные базы цитирования Web of Science и Scopus [1,4-6,8-11,14,17-21] и 8 статей в изданиях, включенных в базу данных РИНЦ [2,3,7,12,13,15,16,22].

Общее количество индексируемых публикаций по результатам этапа НИР – 22 (планируемый результат по государственному заданию на 2021 г. - 14).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Polychronakos A.P. Path integrals and parastatistics // Nuclear Physics B. 1996. Vol. 474. P. 529–539.
2. Greenberg O.W., Mishra A.K. Path integrals for parastatistics // Phys. Rev. D. 2004. Vol. 70. P. 125013.
3. Omote M., Kamefuchi S. Paragrassmann algebras and para-Fermi systems // Lett. Nuovo Cimento. 1974. Vol. 24. P. 345–350.
4. Ohnuki Y., Kamefuchi S. Para-Grassmann algebras with applications to para-Fermi systems // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. P. 609–616.
5. K'alnay A.J. A note on Grassmann algebras // Rep. Math. Phys. 1976. Vol. 9. P. 9–13.
6. Ohnuku Y., Kashiwa T. Coherent states of Fermi operators and the path integral // Prog. Theor. Phys. 1978. Vol. 60. P. 548–564.
7. Markov Y.A., Markova M.A., Bondarenko A.I. Path integral representation for inverse third order wave operator within the Duffin–Kemmer–Petiau formalism. I // J. High Energy Phys. 7, 094 (2020).
8. Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz, A., Sternheimer D. Deformation theory and quantization. II // Physical applications. Ann. Phys. 110, 111–151 (1978).
9. Tyutin I.V. General form of the \*-commutator on the Grassmann algebra // Theor. Math. Phys. 128, 1271–1292 (2001).
10. Smilga A.V. Quasiclassical expansion for  $\text{Tr}((-1)^F e^{-\beta H})$  // Commun. Math. Phys. 230, 245–269 (2002).
11. Hirshfeld A.C., Henselder P. Deformation quantization for systems with fermions // Ann. Phys. 302, 59–77 (2002).
12. Daoud M. Covariance of the Grassmann star product // Rep. Math. Phys. 52, 281–294 (2003).
13. Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type; Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, USA, 1964.
14. Ladyzenskaja O., Solonnikov V., Ural'ceva N. Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type. Translations of Mathematical Monographs; American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 1988; Volume 23.
15. DiBenedetto E. Degenerate Parabolic Equations; Springer: New York, NY, USA, 1993.
16. Friedman A. Variational Principles and Free Boundary Problems; John Wiley & Sons: New York, NY, USA, 1982.

17. Samarskii A., Galaktionov V., Kurdyumov S., Mikhailov A. Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations; Walter de Gruyter: Berlin, Germany, 1995.
18. Sidorov A.F. Analytic representations of solutions of nonlinear parabolic equations of time-dependent filtration type // *Sov. Math. Dokl.* 1985. Vol. 31. P. 40–44.
19. Angenent S. Solutions of the one-dimensional porous medium equation are determined by their free boundary // *J. Lond. Math. Soc.* 1990. Vol. 42. P. 339–353.
20. Filimonov M.Y., Korzunin L.G., Sidorov A.F. Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special constructions of series // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 1993. Vol. 8. P. 101–125.
21. Kazakov A., Lempert A. Existence and Uniqueness of the Solution of the Boundary-Value Problem for a Parabolic Equation of Unsteady Filtration // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. Vol. 54. P. 251–258.
22. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations*; Interscience Publishers, Inc.: New York, NY, USA, 2008.
23. Kazakov A., Spevak L. An analytical and numerical study of a nonlinear parabolic equation with degeneration for the cases of circular and spherical symmetry // *Appl. Math. Model.* 2016. Vol. 40. P. 1333–1343.
24. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On One Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in the Case of Two Space Variables // *J. Appl. Ind. Math.* 2014. Vol. 8. P. 255–263.
25. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On the Analytic Solutions of a Special Boundary Value Problem for a Nonlinear Heat Equation in Polar Coordinates // *J. Appl. Ind. Math.* 2018. Vol. 812. P. 227–235.
26. Kazakov A., Kuznetsov P., Lempert A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // *Symmetry.* 2020. Vol. 12. P. 999.
27. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques*; Springer: Berlin, Germany, 1984.
28. Wrobel L., Brebbia C. The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1987. Vol. 65. P. 147–164.
29. AL-Bayati S.A., Wrobel L.C. A novel dual reciprocity boundary element formulation for two-dimensional transient convectiondiffusion-reaction problems with variable velocity // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2018. Vol. 94. P. 60–68.

30. Kazakov A., Spevak L. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // *Appl. Math. Model.* 2013. Vol. 37. P. 6918–6928.
31. Kazakov A., Spevak L., Nefedova O., Lempert A. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term // *Symmetry.* 2020. Vol. 12. P. 921.
32. Filimonov M.Y. Application of method of special series for solution of nonlinear partial differential equations // *AIP Conf. Proc.* 2014. Vol. 1631. P. 218.
33. Fedotov V.P., Spevak L.F. One approach to the derivation of exact integration formulae in the boundary element method // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2008. Vol. 32. P. 883–888.
34. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физике: Точные решения (М: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 432 с.)
35. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений (Физматлит, "Наука", 1978).
36. Foias C., Sell G.R., Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations // *J. Differ. Equation.* 1988. Vol. 73. P. 309–353.
37. Constantin P., Foias C., Nicolaenko B., Teman R. *Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations*; Springer: New York, NY, USA, 1989.
38. Cholewa J.W., Dlotko T. *Global Attractors in Abstract Parabolic Problems*; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2000.
39. Gal C.G. On a class of degenerate parabolic equations with dynamic boundary conditions // *J. Differ. Equation.* 2012. Vol. 253. P. 126–166.
40. Lee J., Toi V.M. Attractors for nonclassical diffusion equations with dynamic boundary conditions // *Nonlinear Anal.* 2020. Vol. 195. P. 111737.
41. Antontsev S., Shmarev S. *Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions. Existence, Uniqueness, Localization, Blow-Up*; Atlantis Press: Paris, France, 2015.
42. Antontsev S., Shmarev S. Global estimates for solutions of singular parabolic and elliptic equations with variable nonlinearity // *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.* 2020. Vol. 195. P. 111724.
43. Косов А.А., Семенов Э.И. О точных решениях уравнения нелинейной диффузии // *Сибирский математический журнал.* 2019. Т. 60, № 1. С. 123-140.

44. Stepanova I.V. Symmetry of heat and mass transfer equations in case of dependence of thermal diffusivity coefficient either on temperature or concentration // *Math. Methods Appl. Sci.* 2018. Vol. 41. P. 3213-3226.
45. Stepanova I.V. Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity // *Appl. Math. Comput.* 2019. Vol. 343. P. 57–66.
46. Passarino G. and Veltman M. J. G. One-loop corrections for  $e^+e^-$  annihilation into  $\mu^+\mu^-$  in the Weinberg model // *Nuclear Physics B.* 1979. Vol. 160. P. 151-207.
47. Davydychev A.I. A simple formula for reducing Feynman diagrams to scalar integrals // *Physics Letters B.* 1991. Vol. 263. P. 107-111.
48. Tarasov O.V. Connection between Feynman integrals having different values of the space-time dimension // *Physical Review D.* 1996. Vol. 54. P. 6479-6499.
49. Korner J.G. and Sieben P. Use of helicity methods in evaluating loop integrals: A QCD example // *Nuclear Physics B.* 1991. Vol. 363. P. 65-82.
50. Schneider R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory.* Cambridge: Cambridge University Press; 1993.
51. Müller C. *Analysis of Spherical Symmetries in Euclidean Spaces.* New York: Springer-Verlag; 1998.
52. Gardner RJ. *Geometric Tomography.* Cambridge: Cambridge University Press; 2006.
53. Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography.* New York: John Wiley & Sons; 1986.
54. Sharafutdinov V.A. *Integral Geometry of Tensor Fields.* The Netherlands: VSP Utrecht; 1994.
55. Howard J. Vector tomography applications in plasma diagnostics // *Plasma Phys Control Fusion.* 1996. Vol.38. P. 489-503.
56. Balandin A.L, Ono Y. The method of series expansion for 3-D vector tomography reconstruction // *J. Comput. Phys.* 2005. Vol. 202. P. 52-64.
57. Norton S.J. Tomography reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging // *Gophysical J.* 1988. Vol. 97. P. 161-168.
58. Uhlmann G, ed.. *Inside Out: Inverse Problems and Applications,* Vol. 47. WA: Cambridge University Press; 2003.
59. Wolf E, ed.. *Progress in Optics,* Vol. 57. New York: Elsevier; 2012.



60. Boerner W-M. Inverse Methods in Electromagnetic Imaging, Part 2. Dordrecht Holland: D. Reidel Publishing Company; 1985.
61. Косов А.А., Семенов Э.И. Тирских В.В. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы гиперболических уравнений четвертого порядка // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т.24. № 2. С.77-86.
- Kosov A.A., Semenov E.I., Tirskikh V.V. On Exact Multidimensional Solutions to a Nonlinear System of Fourth-Order Hyperbolic Equations // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021. V.15, № 2. P.1-9.
62. Косов А.А., Семенов Э.И. О существовании периодических решений одной нелинейной системы параболических уравнений четвертого порядка // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. Мат. и ее прил. Темат. Обз. ВИНТИ РАН. 2021, Т. 196. С. 98-104.
63. Косов А.А., Семенов Э.И. О точных решениях уравнений вращательного движения твердого тела при действии момента циркулярно-гироскопических сил // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 159-170.
64. Kosov A.A., Semenov E.I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // Dynamic Systems and Computer Science: Theory and Applications (DYSC) 2020. Irkutsk, 19-22 October 2020. [Journal of Physics: Conference Series](#). 2021, Vol. 1847, 012007.
65. Balandin A.L. The Funk-Hecke type relations and ray transform for the vector spherical wave functions. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. Vol. 44. issue 14. P.11124-11137.
66. Balandin A.L. Solution of a certain problem of scattering by using of the maximum entropy principle // Journal of Mathematical Modeling. 2021. Vol. 9, №2. pp. 229-238.
67. Баландин А.Л. Исследование полей Бельтрами методами интегральной геометрии // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. Мат. и ее прил. Темат. Обз. ВИНТИ РАН. 2021, Т. 196. С. 3–14.
68. Kazakov A. Solutions to Nonlinear Evolutionary Parabolic Equations of the Diffusion Wave Type // Symmetry-Basel. 2021. Vol. 13, № 5.
69. Kazakov A.L., Spevak L.F. Exact and approximate solutions of a problem with a singularity for a convection-diffusion equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol. 62, № 1. pp. 18-26.
70. Kazakov A.L., Spevak L.F. Exact and approximate solutions to the degenerated reaction-diffusion system // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol. 62, № 4. pp. 673-683.

71. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. Analytical diffusion wave-type solutions to a nonlinear parabolic system with cylindrical and spherical symmetry // The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics, 2021. Vol. 37. P. 31-46.
72. Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы // Сибирский журнал индустриальной математики, 2021. Т. 24, № 4. С. 64-78.
73. Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. О решениях типа бегущей волны для нелинейного уравнения теплопроводности // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 196. С. 36-43.
74. Kazakov A.L., Lempert A.A., Spevak L.F. On an exact solution to the nonlinear heat equation with a source // Journal of Physics: Conference Series. Dynamic Systems and Computer Science: Theory and Applications (DYSC 2020, 19-22 October 2020). 2021. Vol. 1847, № 115.
75. Казаков А.Л., Кузнецов П.А. О некоторых точных решениях типа диффузионной волны системы уравнений «реакция-диффузия» со степенными нелинейностями // Материалы 3-й международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (DYSC 2021), г. Иркутск. 2021. С. 32-35.
76. Казаков А.Л., Спевак Л.Ф. Численное построение решений типа диффузионной волны для системы уравнений «реакция - диффузия» с произвольными нелинейностями // Материалы 3-й Междунар. конф. "Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения" (DYSC 2021; Иркутск, 13–17 сентября 2021 г.). 2021. С. 36-39.
77. Svinin A.K. On solutions for some class of integrable difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2021. pp. 1-12.
78. Blaschke D., Friesen A., Kalinovsky Yu., Radzhabov A. Mott Dissociation and Kaon to Pion Ratio in the EPNJL Model // Phys. Part. Nucl. 2021. Vol. 52. P. 609-614.
79. Blaschke D., Friesena A.V., Ivanov Yu.B., Kalinovsky Yu.L., Kozhevnikova M., Liebing S., Radzhabov A., Röpke G. QCD Phase Diagram at NICA Energies:  $(K+\pi+)$  Horn Effect and Light Clusters in THESEUS // Acta Physica Polonica B, Proceedings Supplement. 2021, Vol. 14. P. 485-489.
80. Lyubovitskij V.E., Wunder F. and Zhevhlakov A.S. New ideas for handling of loop and angular integrals in D-dimensions in QCD // Journal of High Energy Physics. 2021. Vol. 06. P. 066.
81. Markov Yu.A., Markova M.A. Star product for para-Grassmann algebra of order two // Advances in Applied Clifford Algebras. 2021. Vol. 31. P. 27(18).

82. Марков Ю.А., Маркова М.А., Бондаренко А.И. «Алгебраический подход к построению волнового уравнения для частиц со спином  $3/2$ » // Итоги науки и техники. Сер. Современ. Мат. и ее прил. Темат. Обз. ВИНТИ РАН. 2021, Т. 196. С. 50–65.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Список публикаций по проекту

1. Косов А.А., Семенов Э.И. Тирских В.В. О точных многомерных решениях одной нелинейной системы гиперболических уравнений четвертого порядка // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т.24. № 2. С.77-86.

Kosov A.A., Semenov E.I., Tirskikh V.V. On Exact Multidimensional Solutions to a Nonlinear System of Fourth-Order Hyperbolic Equations // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2021. V.15, № 2. P.1-9. DOI: 10.1134/S199047892102006X (**Web of Science (ESCI), Scopus Q2**)

2. Косов А.А., Семенов Э.И. О существовании периодических решений одной нелинейной системы параболических уравнений четвертого порядка // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. Мат. и ее прил. Темат. Обз. ВИНТИ РАН. 2021, Т. 196. С. 98-104. DOI: 10.36535/0233-6723-2021-196-98-104 (**РИНЦ**)

3. Косов А.А., Семенов Э.И. О точных решениях уравнений вращательного движения твердого тела при действии момента циркулярно-гироскопических сил // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 159-170. DOI: 10.15507/2079-6900.23.202102 (**РИНЦ**)

4. Kosov A.A., Semenov E.I. Distributed model of space exploration by two types of interacting robots and its exact solutions // Dynamic Systems and Computer Science: Theory and Applications (DYSC) 2020. Irkutsk, 19-22 October 2020. [Journal of Physics: Conference Series](#). 2021, Vol. 1847, 012007. (**Scopus**)

5. Balandin A.L. The Funk-Hecke type relations and ray transform for the vector spherical wave functions. Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. Vol. 44. issue 14. P.11124-11137. DOI: 10.1002/mma.7475 (**Web of Science Q1**)

6. Balandin A.L. Solution of a certain problem of scattering by using of the maximum entropy principle // Journal of Mathematical Modeling. 2021. Vol. 9, №2. pp. 229-238. DOI: 10.22124/JMM.2020.17714.1526 (**Scopus, Q3**)

7. Баландин А.Л. Исследование полей Бельтрами методами интегральной геометрии // Дифференциальные уравнения и оптимальное управление. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. Мат. и ее прил. Темат. Обз. ВИНТИ РАН. 2021, Т. 196. С. 3–14. DOI: 10.36535/0233-6723-2021-196-3-1 (**РИНЦ**)

8. Kazakov A. Solutions to Nonlinear Evolutionary Parabolic Equations of the Diffusion Wave Type // Symmetry-Basel. 2021. Vol. 13, № 5. DOI: 10.3390/sym13050871 (**Web of Science Q2**)

9. Kazakov A.L., Spevak L.F. Exact and approximate solutions of a problem with a singularity for a convection-diffusion equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol. 62, № 1. pp. 18-26. DOI: 10.1134/S002189442101003X (**Web of Science Q4**)
10. Kazakov A.L., Spevak L.F. Exact and approximate solutions to the degenerated reaction-diffusion system // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2021. Vol. 62, № 4. pp. 673-683. DOI: 10.1134/S0021894421040179 (**Web of Science Q4**)  
Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. Analytical diffusion wave-type solutions to a nonlinear parabolic system with cylindrical and spherical symmetry // The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics, 2021. Vol. 37. P. 31-46. DOI: 10.26516/1997-7670.2021.37.31 (**Web of Science (ESCI), Scopus Q3**)
11. Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спёвак Л.Ф. Построение решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы // Сибирский журнал индустриальной математики, 2021. Т. 24, № 4. С. 64-78. (**РИНЦ**)  
DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.405
12. Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спёвак Л.Ф. О решениях типа бегущей волны для нелинейного уравнения теплопроводности // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 196. С. 36-43. DOI: 10.36535/0233-6723-2021-196-36-43 (**РИНЦ**)
13. Kazakov A.L., Lempert A.A., Spevak L.F. On an exact solution to the nonlinear heat equation with a source // Journal of Physics: Conference Series. Dynamic Systems and Computer Science: Theory and Applications (DYSC 2020, 19-22 October 2020). 2021. Vol. 1847, № 115. (**Scopus**)
14. Казаков А.Л., Кузнецов П.А. О некоторых точных решениях типа диффузионной волны системы уравнений «реакция-диффузия» со степенными нелинейностями // Материалы 3-й международной конференции «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (DYSC 2021), г. Иркутск. 2021. С. 32-35. (**РИНЦ**)
15. Казаков А.Л., Спёвак Л.Ф. Численное построение решений типа диффузионной волны для системы уравнений «реакция - диффузия» с произвольными нелинейностями // Материалы 3-й Междунар. конф. "Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения" (DYSC 2021; Иркутск, 13–17 сентября 2021 г.). 2021. С. 36-39. (**РИНЦ**)

16. Svinin A.K. On solutions for some class of integrable difference equations // Journal of Difference Equations and Applications. 2021. pp. 1-12. DOI: 10.1080/10236198.2021.2012169 (**Web of Science Q2**)
17. Blaschke D., Friesen A., Kalinovsky Yu., Radzhabov A. Mott Dissociation and Kaon to Pion Ratio in the EPNJL Model // Phys. Part. Nucl. 2021. Vol. 52. P. 609-614. DOI: 10.1134/S1063779621040146. (**Web of Science Q4**)
18. Blaschke D., Friesena A.V., Ivanov Yu.B., Kalinovsky Yu.L., Kozhevnikova M., Liebing S., Radzhabov A., Röpke G. QCD Phase Diagram at NICA Energies: ( $K^+/\pi^+$ ) Horn Effect and Light Clusters in THESEUS // Acta Physica Polonica B, Proceedings Supplement. 2021, Vol. 14. P. 485-489. DOI: 10.5506/APhysPolBSupp.14.485 (**Scopus Q4**)
19. Lyubovitskij V.E., Wunder F. and Zhevlakov A.S. New ideas for handling of loop and angular integrals in D-dimensions in QCD // Journal of High Energy Physics. 2021. Vol. 06. P. 066. DOI:10.1007/JHEP06(2021)066. (**Web of Science Q1**)
20. Markov Yu.A., Markova M.A. Star product for para-Grassmann algebra of order two // Advances in Applied Clifford Algebras. 2021. Vol. 31. P. 27(18). DOI:10.1007/s00006-021-01125-8. (**Web of Science Q3**)
21. Марков Ю.А., Маркова М.А., Бондаренко А.И. «Алгебраический подход к построению волнового уравнения для частиц со спином  $3/2$ » // Итоги науки и техники. Сер. Современ. Мат. и ее прил. Темат. Обз. ВИНТИ РАН. 2021, Т. 196. С. 50–65. (**РИНЦ**)

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б Список конференций

№ п/п	Наименование доклада	Дата доклада (ДД.ММ.ГГГГ)	Место проведения конференции	Название конференции, семинара	Статус конференции (Международная, Всероссийская, Региональная, Локальная)	Статус доклада (Пленарный, Секционный, Стендовый)	Авторы	Докладчик	Ссылка на web-страницу
1	О некоторых точных решениях типа диффузионной волны системы уравнений «реакция-диффузия» со степенными нелинейностями	14 сентября 2021 г.	г. Иркутск, Россия	3-я международная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (DYSC 2021)	Международная	Секционный	Казаков А.Л., Кузнецов П.А.	Кузнецов П.А.	<a href="http://math.isu.ru/ru/conference/2021/index.html">http://math.isu.ru/ru/conference/2021/index.html</a>
2	Численное построение решений типа диффузионной волны для системы уравнений «реакция-диффузия» с произвольным и нелинейностями	15 сентября 2021 г.	г. Иркутск, Россия	3-я международная конференция «Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения» (DYSC 2021)	Международная	Пленарный	Казаков А.Л., Спесак Л.Ф.	Казаков А.Л.	<a href="http://math.isu.ru/ru/conference/2021/index.html">http://math.isu.ru/ru/conference/2021/index.html</a>
3	О построении кусочно-аналитических решений	7 декабря 2021 г.	г. Иркутск, Россия	37-я Всероссийская конференция «Ляпуновские чтения»	Всероссийская	Секционный	Казаков А.Л., Кузнецов П.А.	Кузнецов П.А.	<a href="http://www.icc.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-cheniya-2021">http://www.icc.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-cheniya-2021</a>

	краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы								
4	Построение решений нелинейных параболических уравнений механики сплошных сред методом граничных элементов	21 сентября 2021 г.	г. Новосибирск, Россия	XXVIII Всероссийская конференция с международным участием «Высокоэнергетические процессы в механике сплошной среды», посвященная 100-летию со дня рождения Н.Н. Яненко	Всероссийская с международным участием	Секционный	Казаков А.Л., Спёвак Л.Ф.	Казаков А.Л.	<a href="http://hepcm2021.itam.nsc.ru/ru/hepcm2021_fff">http://hepcm2021.itam.nsc.ru/ru/hepcm2021_fff</a>
5	Численное решение нелинейной вырождающейся параболической системы	7 июля 2021 г.	г. Красноярск, Россия	27-я Международная конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, посвященная 100-летию со дня рождения Николая Николаевича Яненко	Международная	Секционный	Казаков А.Л., Спёвак Л.Ф.	Казаков А.Л.	<a href="http://epps2021.itam.nsc.ru/ru">http://epps2021.itam.nsc.ru/ru</a>
6	Exact solutions having diffusion wave type in nonlinear models of thermal conductivity, filtration, and diffusion	26 августа 2021 г.	online	International Conference Analytical and Numerical Methods in Differential Equations	Международная	Секционный	Казаков А.Л., Ли М.-Г., Лемперт А.А.	Казаков А.Л.	<a href="https://math.sut.ac.th/Mathematics/Home">https://math.sut.ac.th/Mathematics/Home</a>
7	Точные решения	3 марта 2021 г.	г. Новосибирск,	Всероссийская конференция с	Всероссийская с международным	Секционный	Казаков А.Л.	Казаков А.Л.	<a href="http://conf.nsc.ru/nw2021/ru">http://conf.nsc.ru/nw2021/ru</a>



	нелинейных эволюционных уравнений параболического типа с особенностями		Россия	международным участием «Нелинейные волны – 2021» посвященная 75-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Тешукова	участием				
8	К вопросу о применении теории массового обслуживания при моделировании и работы железнодорожных станций	23 сентября 2021 г.	г. Москва, Россия	24th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks (DCCN 2021)	Международная	Секционный	Жарков М.Л., Казаков А.Л., Лемперг А.А.	Казаков А.Л.	<a href="https://dccn.ru/">https://dccn.ru/</a>
9	Существование и построение тепловой волны, порожденной краевым режимом на подвижной границе	24 декабря 2021 г.	г. Екатеринбург, Россия	XV Международная конференция Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций	Международная	Стендовый	Казаков А.Л., Спёвак Л.Ф.	Казаков А.Л.	<a href="https://www.imach.uran.ru/conf2021/">https://www.imach.uran.ru/conf2021/</a>
10	Произведение Мойла для параграсмановой алгебры порядка 2	7 декабря 2021 г.	г. Иркутск, Россия	37-я Всероссийская конференция «Ляпуновские чтения»	Всероссийская	Секционный	Марков Ю.А., Маркова М.А.	Марков Ю.А.	<a href="http://www.icc.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021">http://www.icc.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021</a>
11	Гамильтонов формализм для фермионных возбуждений в кварк-глюонной плазме	7 декабря 2021 г.	г. Иркутск, Россия	37-я Всероссийская конференция «Ляпуновские чтения»	Всероссийская	Секционный	Марков Ю.А., Маркова М.А., Марков Н.Ю.	Марков Н.Ю.	<a href="http://www.icc.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021">http://www.icc.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021</a>

12	О решениях некоторых дискретных уравнений	7 декабря 2021 г.	г. Иркутск, Россия	37-я Всероссийская конференция «Ляпуновские чтения»	Всероссийская	Секционный	Свинин А.К.	Свинин А.К.	<a href="http://www.icc.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021">http://www.icc.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021</a>
----	---	-------------------	--------------------	---	---------------	------------	-------------	-------------	---

