



## РЕЗУЛЬТАТЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРОГРАММАМ РАН

В соответствии с Планом НИР и Государственным заданием на 2020 год выполнялись исследования по 7 научным (базовым) темам в рамках двух приоритетных направлений и программ фундаментальных исследований СО РАН на 2017–2020 гг.

### I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Приоритетное направление 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА

Программа I.1.4. Исследование задач динамики и управления: качественный и численный анализ

Координатор программы: чл.-к. РАН А.А. Толстоногов

**Тема I.1.4.1. Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения**

№ гос. регистрации: АААА-А17-117032210080-7

Научный руководитель – чл.-к. РАН А.А. Толстоногов

Рассмотрена модель кипения недогретой жидкости в кольцевом канале, представленная в виде смешанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, алгебраических соотношений и одного уравнения в частных производных. С помощью теории дифференциально-алгебраических уравнений определена область существования решения математической модели и предложен численный метод. Определенное в результате расчетов время исчезновения жидкой пленки соответствует данным физического эксперимента по изучению нарушения эффекта Лейденфроста при охлаждении металлической поверхности, омываемой потоком этанола (*авторы: д.ф.-м.н. В.Ф. Чистяков, к.ф.-м.н. Е.В. Чистякова*).

Рассмотрены вырожденные системы интегральных уравнений Вольтерра, предложены способы вычисления индекса таких систем и численная схема решения, основанная на методе наименьших квадратов (*авторы: д.ф.-м.н. В.Ф. Чистяков, к.ф.-м.н. Е.В. Чистякова*).

Рассмотрен один класс эволюционных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных, найден критерий, при выполнении которого рассматриваемые системы уравнений имеют единственное решение в заданной области. Показано, что зачастую метод наименьших квадратов является безальтернативным численным методом решения таких систем (*автор: д.ф.-м.н. В.Ф. Чистяков*).

Исследованы линейные системы интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с матрицами-ядрами как Вольтерра, так и Фредгольма. Изучены системы, когда искомая вектор-функция зависит от одного аргумента и матрица перед главной частью является квадратной и тождественно вырожденной. В терминах матричных пучков и полиномов сформулированы условия существования и единственности решения рассматриваемых задач в классе достаточно-гладких функций (*автор: д.ф.-м.н. М.В. Булатов*).



Исследован коллокационно-вариационный метод с одной точкой коллокации. На тестовом примере показано, что данная разностная схема может порождать регуляризирующий алгоритм (обладать так называемым свойством саморегуляризации) с параметром регуляризации – шагом сетки (*автор: к.ф.-м.н. Л.С. Соловарова*).

Рассмотрена линейная гибридная система, неразрешенная относительно производной непрерывной составляющей искомой функции. Анализ работы существенным образом опирается на методику исследования вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и проводится в предположении существования эквивалентной структурной формы. Данная структурная форма эквивалентна исходной системе в смысле решений, а преобразующий к ней оператор обладает левым обратным. Построение структурной формы носит конструктивный характер и не использует замену переменных, при этом автоматически решается проблема согласования начальных данных. Для случая с постоянными коэффициентами получены необходимые и достаточные условия  $R$ -управляемости (управляемости в пределах множества достижимости). Для нестационарных гибридных систем получены необходимые и достаточные условия разрешимости начальной задачи (*автор: к.ф.-м.н. П.С. Петренко*).

Рассмотрена начально-краевая задача для линейной многомерной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных первого порядка с определенной нормальной структурой многопараметрического матричного пучка, построенного по коэффициентам системы. Для численного решения такой задачи применен метод дробных шагов (J. Douglas, Н.Н. Яненко, А.А. Самарский и др.) с аппроксимацией искомой функции сплайном произвольного порядка. На языке Си++ создана расчетная программа, реализующая вычислительный процесс. Показано, что в методе дробных шагов набор разностных схем сохраняет первый порядок аппроксимации по времени. Также показано, что метод дробных шагов (локально-одномерный метод) связан с сильными ограничениями на структуру многопараметрического пучка матриц, что делает его менее эффективным при численном решении дифференциально-алгебраических уравнений. Таким же недостатком обладает другой экономичный метод – метод переменных направлений. Показано, что для численного решения многомерных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных, как и для уравнения переноса, наиболее эффективны схемы бегущего счета с аппроксимацией искомого решения сплайном произвольного порядка (*автор: к.ф.-м.н. С.В. Свинина*).

Представлен один из подходов исследования асимптотического поведения решений механических систем с кулоновым трением с переменными коэффициентами трения. Аналогичные методы могут использоваться для более общих неавтономных систем уравнений в случае, когда от времени зависят какие-либо активные силы, коэффициенты инерции или же позиционные управления. Примеры показали, что принцип инвариантности и его обобщения эффективны как основа в исследованиях притяжения и асимптотической динамики решений неавтономных систем. Это делает исследования актуальными. Результаты получены на стыке теорий дифференциальных включений, прямого метода Ляпунова. Использовались результаты и методы многозначного анализа, что обусловило новизну развиваемых методов в задачах притяжения и устойчивости (*автор: д.ф.-м.н. И.А. Финогенко*).



Рассмотрено уравнение неразрывности, заданное нелокальным (зависящим от меры) многозначным векторным полем в предположении, что последнее полунепрерывно сверху либо снизу в метрике Канторовича. Показано, что в обоих случаях для всякого начального распределения уравнение имеет решение, которое является абсолютно-непрерывной кривой в пространстве вероятностных мер. Данный результат применен для сведения смешанной системы, состоящей из нелокального закона сохранения и ОДУ, к функционально-дифференциальному уравнению, для исследования которого оказалось возможным применить разработанные ранее методы (*автор: к.ф.-м.н. Н.И. Погодаев*).

Рассмотрена нелинейная управляемая система в частных производных, возникающая при моделировании динамики популяций. Система состоит из трех уравнений диффузии, описывающих эволюцию трех биологических видов: добыча, хищник и пища для добычи. Уравнение для плотности пищи включает в себя гистерезисный оператор типа обобщенный упор, учитывающий гистерезисные эффекты, возникающие при рассмотрении данного процесса. Изучена задача минимизации заданного интегрального функционала на решениях указанной системы. Многозначное отображение, определяющее ограничение на управление, имеет замкнутые, невыпуклые значения, а интегрант целевого функционала является функцией, невыпуклой по управлению. Наряду с исходной рассматривается релаксационная задача минимизации интегрального функционала с овыпукленным по управлению интегрантом на решениях управляемой системы с овыпукленным ограничением на управление. Доказан аналог классической теоремы Н.Н. Боголюбова в вариационном исчислении, устанавливающей связь между исходной задачей минимизации и релаксационной задачей (*автор: к.ф.-м.н. С.А. Тимошин*).

Изучен процесс выметания с многозначным возмущением в сепарабельном гильбертовом пространстве. Предполагалось, что значения многозначного оператора возмущения – замкнутые, не обязательно выпуклые множества, а ретракция процесса выметания ограничена положительной мерой Радона. Решение процесса выметания – это пара непрерывных справа функций ограниченной вариации, производная которых является абсолютно-непрерывной относительно некоторой положительной меры Радона и измеримый селектор возмущения рассматривается вдоль этой функции, при этом плотность производной относительно описанной выше меры Радона удовлетворяет соответствующему включению. Помимо исходного возмущения рассматривалось возмущение с овыпукленными значениями. Доказаны теорема о существовании решений и теорема о релаксации. Под релаксацией подразумевается плотность множества решений процесса выметания с исходным возмущением в множестве решений процесса выметания с овыпукленным возмущением. Указанные множества решений являются подмножествами в прямом произведении пространства непрерывных справа функций ограниченной вариации и пространства интегрируемых функций. Эти пространства снабжены топологией равномерной сходимости на интервалах и слабой топологией, соответственно (*авторы: чл.-к. РАН А.А. Толстоногов, к.ф.-м.н. С.А. Тимошин*).

Изучены свойства многозначных отображений, определенных на отрезке числовой прямой, значениями которых являются полиэдры из сепарабельного гильбертова пространства. Пространство полиэдров наделяется метрикой, сходимость в которой эквивалентна сходимости по Моско последовательности замкнутых выпуклых множеств. Полиэдр определяется как пересечение конечного числа замкнутых полупространств,



которые описываются с помощью гиперплоскостей. В уравнении гиперплоскости присутствуют нормальные векторы и свободные члены. У полиэдрального многозначного отображения нормальные векторы и свободные члены являются функциями времени и рассматриваются как внутренние управления. Пространство полиэдральных многозначных отображений наделяется топологией равномерной сходимости. Изучены свойства множеств в пространстве полиэдральных отображений, выраженные в терминах внутренних управлений. Полученные результаты применены для изучения вопросов существования решений полиэдральных процессов выметания и зависимости решений от внутренних управлений. Рассмотрены задачи минимизации интегральных функционалов на решениях управляемых полиэдральных процессов выметания, в которых наряду с внутренними управлениями присутствуют традиционные измеримые управления, называемые внешними (автор: чл.-к. РАН А.А.Толстоногов).

Рассмотрено эволюционное включение в гильбертовом пространстве, правая часть которого содержит зависящий от времени максимально монотонный оператор и многозначное отображение с замкнутыми невыпуклыми значениями. Зависимость максимально монотонного оператора от времени описывается с помощью функции расстояния между максимально монотонными операторами в смысле Владимирова. Предполагается, что такое расстояние, как функция от времени, имеет ограниченную вариацию с верхней границей заданной некоторой положительной неатомической мерой Радона. Под решением включения понимается непрерывная функция ограниченной вариации, чья производная (мера Стильеса) абсолютно-непрерывна относительно указанной выше положительной меры Радона, а значения соответствующей функции плотности принадлежат почти всюду множеству из правой части включения. При традиционных предположениях (измеримость, липшицевость по фазовой переменной в метрике Хаусдорфа, условие подлинейного роста) доказываются существование решений и устанавливается ряд их свойств (автор: чл.-к. РАН А.А.Толстоногов).

В сепарабельном банаховом пространстве рассмотрено дифференциальное включение, правая часть которого является суммой двух многозначных отображений. Значениями первого являются замкнутые ограниченные не обязательно выпуклые множества, и оно является липшицевым по фазовой переменной. Значениями второго отображения являются замкнутые множества, и оно обладает смешанными условиями полунепрерывности: либо в фазовой точке отображение имеет замкнутый график и его значением является выпуклое множество, либо в некоторой окрестности этой точки оно является полунепрерывным снизу. При дополнительных предположениях, связанных с измеримостью и условиями роста, доказана теорема существования решения (автор: чл.-к. РАН А.А.Толстоногов).

Рассмотрена задача минимизации интегрального функционала на решениях управляемой системы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением в сепарабельном банаховом пространстве и вариационным неравенством. Это вариационное неравенство определяет гистерезисный оператор, входом которого является траектория управляемой системы, а выход содержится в правой части дифференциального уравнения, в ограничении на управление и в минимизируемом функционале. Ограничением на управление является многозначное отображение с замкнутыми, невыпуклыми значениями, а интегрант является функцией, невыпуклой по управлению. Наряду с исходной рассмотрена



задача минимизации интегрального функционала с овыпукленным по управлению интегрантом на решениях управляемой системы с овыпукленным ограничением на управление (релаксационная задача). Под решением управляемой системы понимается тройка: выход гистерезисного оператора, траектория и управление. Установлена связь между исходной задачей минимизации и релаксационной задачей. Эта связь является аналогом классической теоремы Н. Н. Боголюбова в вариационном исчислении. Изучена также связь между решениями исходной управляемой системы и системы с овыпукленным ограничением на управление. Эту связь обычно называют релаксацией. Для конечномерного пространства доказано существование оптимального решения в релаксационной задаче оптимизации (*автор: чл.-к. РАН А.А.Толстоногов*).

Исследована проблема робастной устойчивости линейной стационарной системы дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) произвольно высокого индекса неразрешенности с интервальными возмущениями. Получены достаточные условия существования семейства линейных дифференциальных операторов, преобразующих рассматриваемое интервальное семейство в семейство ДАУ с разделенными дифференциальной и алгебраической частями. Эти условия представляют собой условия малости некоторых матричных норм, которым должны удовлетворять интервальные возмущения. Найдены условия, при которых каждый из этих операторов этого семейства обладает левым обратным оператором. Получены конструктивные оценки величины, определяющей размах неопределенностей, при выполнении которых каждая из систем интервального семейства асимптотически устойчива. В частности, условия робастной устойчивости получены в предположении сверхустойчивости номинальной системы (*автор: д.ф.-м.н. А.А. Щеглова*).

Рассмотрена динамическая система, состоящая из двух объектов - распределенная масса, движущаяся вдоль некоторого нелокального векторного поля и множество, движение которого определяется некоторым обыкновенным дифференциальным уравнением. Пример - движение большого автобуса в потоке машин. Вообще смысл в том, что мера должна обратно действовать на множество. Будет сформулировано корректное понятие решения для смешанной системы, включающей в себя нелинейный закон сохранения и ОДУ. Будут доказаны теоремы о непрерывной зависимости такого решения от начальных данных и управления системы (*автор: к.ф.-м.н. Н.И. Погодаев*).

Рассмотрен класс задач оптимизации нелинейных импульсных процессов с управлениями, заданными борелевскими мерами, и ограничениями на промежуточные значения разрывной траектории. Развита метод составных (векторных) функций типа Ляпунова со свойствами сильной и/или слабой монотонности относительно импульсной управляемой системы. Получены условия оптимальности, основанные на использовании множеств составных функций типа Ляпунова. Для билинейной задачи оптимального импульсного управления найдены составные функции, точно описывающие множества достижимости в промежуточные моменты времени и конкретизирующие необходимые и достаточные условия оптимальности (*автор: к.ф.-м.н. О.Н. Самсонок*).

Рассмотрен управляемый процесс выметания, заданный системой, состоящей из дифференциального уравнения с мерой (импульсным управлением) и дифференциального включения с правой частью, зависящей от многозначного отображения с ограниченной полной вариацией относительно метрики Хаусдорфа. Процесс выметания задан в



конечномерном пространстве, его решения принадлежат пространству пополнений графиков функций ограниченной вариации. Изучены вопросы существования и единственности решения при заданном импульсном управлении и вопросы получения условий оптимальности для одной задачи оптимального управления с гистерезисной нелинейностью типа «люфт», моделируемой таким процессом выметания (автор: к.ф.-м.н. О.Н. Самсонок).

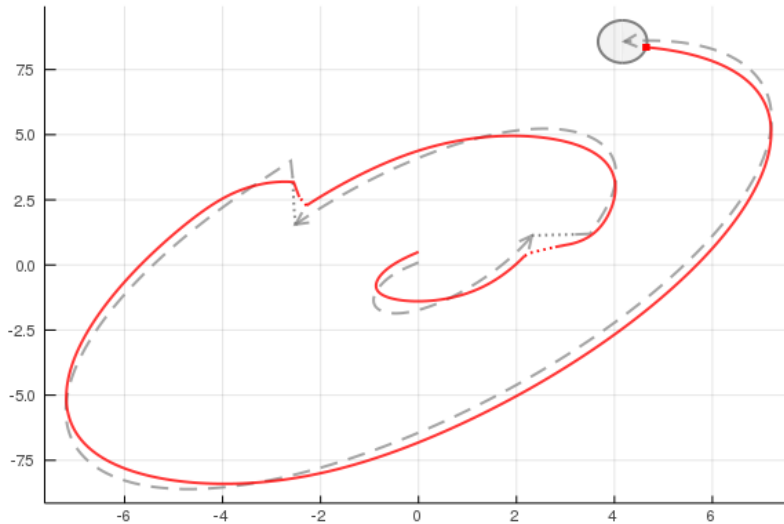


Рис. 25. Разрывный процесс выметания, соответствующий допустимому пополнению графика управляющей BV-функции

Для задачи оптимального импульсного управления нелокальным уравнением неразрывности в пространстве вероятностных мер с линейным терминальным функционалом получено представление в терминах интегрального уравнения с мерами в пространстве разрывных мерозначных кривых ограниченной вариации. Предложено эквивалентное преобразование поставленной задачи к задаче с ограниченным векторным полем и терминальным ограничением. Доказано необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума (авторы: к.ф.-м.н. Н.И. Погодаев, к.ф.-м.н. М.В. Старицын).

Для гибридной задачи управления динамической системой с двумя независимыми типами импульсных воздействий разработана схема численного решения на основе нового сингулярного пространственно-временного преобразования, сочетающего разрывную замену времени с расширением фазового пространства. Последнее соответствует расщеплению разрывной траектории на две ветви, отвечающие её (левому и правому) односторонним пределам. Схема позволяет адаптировать для изучаемого класса задач существующие алгоритмы оптимального управления и сторонние решатели. В рамках апробации развиваемого подхода получены результаты численного исследования нескольких моделей механических систем с блокируемыми степенями свободы и гиперимпульсными воздействиями вибрационной природы (см. рис. 26). Расчёты проведены прямым методом с привлечением пакета GEKKO и решателей IPOPT, APOPT и WPOPT (авторы: к.ф.-м.н. Е.В. Гончарова, к.ф.-м.н. М.В. Старицын).

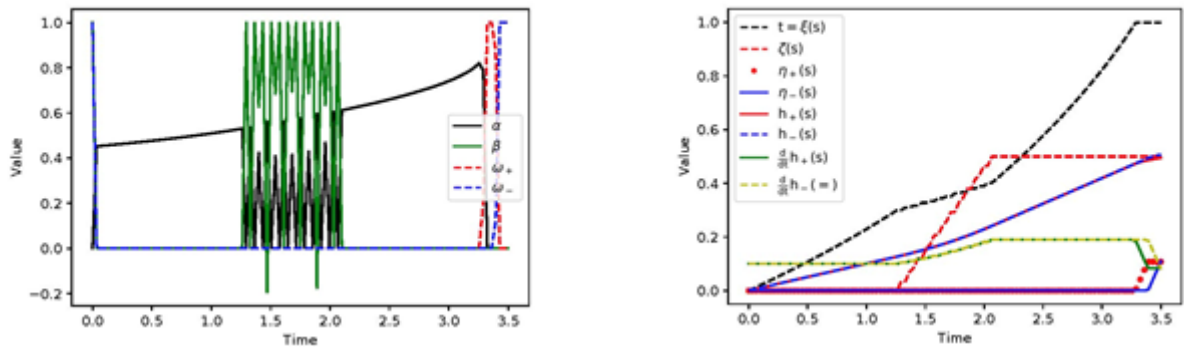


Рис. 26. Телескопический маятник с блокируемой степенью свободы: управления (слева) и траектории (справа) в преобразованной задаче. Пилообразный участок на графике управлений (зеленый и черный цвет) соответствует вибрации – гиперимпульсу; финальный сегмент (красная и синяя пунктирные линии) характеризует импульсное блокирование линейной координаты

Изучены базовые свойства нелокального неоднородного уравнения типа переноса (уравнения баланса) в пространстве знакопеременных мер на  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Одной из интерпретаций таких моделей может служить описание динамики бесконечного ансамбля взаимодействующих заряженных частиц, движущихся в пространстве под воздействием векторного поля в присутствии «источника», моделирующего процесс появления новых частиц, их исчезновения или изменения заряда. Доказана теорема о существовании и единственности решения, а также установлена непрерывная зависимость решения от параметра и начального распределения. Даны примеры векторных полей и источников, возникающие в математической биологии. Исследование обобщает известные результаты по нелокальным транспортным уравнениям с источником в пространстве знакопеременных мер на более широкий класс векторных полей и источников, и составляет основу для исследования задач управления неконсервативными мультиагентными системами (автор: к.ф.-м.н. М.В. Старицын).

Разработаны три численных алгоритма оптимального управления импульсными системами с линейным состоянием. Алгоритмы основаны на стандартном преобразовании задач импульсного управления посредством разрывной замены времени и так называемых прямом и двойственном позиционных принципах минимума. Позиционные принципы минимума – это вариационные необходимые условия оптимальности, использующие управления с обратной связью, конструируемые с помощью обычных конструкций принципа максимума Понтрягина (ПМП); хотя эти условия оптимальности полностью сформулированы в формализме ПМП, они существенно усиливают этот классический результат. Все алгоритмы нелокальны в том смысле, что они нацелены на улучшение неоптимальных экстремалей ПМП (авторы: к.ф.-м.н. С.П. Сорокин, к.ф.-м.н. М.В. Старицын).

Разработана вычислительная технология решения невыпуклых задач динамической оптимизации с программным и параметрическим управлением. Рассматриваются задачи оптимального управления, включающие как управления-функции, так и управления-константы. Управления-функции традиционно располагаются в правых частях системы. Управления-константы могут находиться как в правых частях, так и в начальных состояниях,



так и в оптимизируемом функционале, который предполагается невыпуклым. Предложенная технология включает этап первоначального неявного сканирования множества достижимости системы, выполняемый с помощью модификации метода Лууса-Яколы, что позволяет – в не слишком сложных задачах – найти приближение в области притяжения глобального экстремума. Для улучшения найденного приближения – уточнения точки глобального экстремума – применяется декомпозиционная алгоритмическая градиентная схема, реализующая итеративный спуск сначала по управляющим параметрам, затем по управлениям-функциям.

**Пример.** Задача успокоения нелинейного маятника, в которой необходимо, помимо стабилизирующего управления, найти также наилучшее начальное положение системы и его скорость. Динамика системы описывается уравнениями  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u(t) - \sin x_1, t \in [0,5]$ , на управление и начальные состояния наложены ограничения  $|u(t)| \leq 1$  и  $|x_1(0)| \leq 1, |x_2(0)| \leq 4$ . Необходимо найти, перебирая  $u(t)$  и  $x_1(0), x_2(0)$ , минимальное значение функционала  $I(u, x(0)) = \|x(5)\|^2 + x_1^2(0) - x_2^2(0)$ . Выбрана равномерная сетка дискретизации управления-функции с числом узлов равным 50. Найдено два глобальных решения с одинаковым оптимальным значением  $I^* = I(u^*, x^*(0)) = -9.7394$ , первое представлено на рис. 27а):

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,3] \\ 1, & t \in (3,5] \end{cases}, \quad x^*(0) = (-0.4000, 3.2204);$$

второе – на рис. 27б):

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,3] \\ -1, & t \in (3,5] \end{cases}, \quad x^*(0) = (0.4000, -3.2204).$$

Множество достижимости системы и концы оптимальных траекторий, выделенные красными крестиками, изображены на рис. 28 (автор: д.т.н. А.Ю. Горнов).

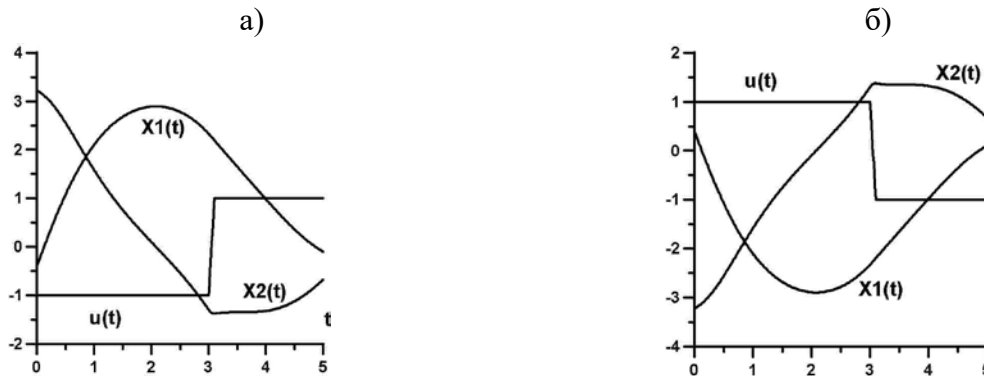


Рис. 27. Оптимальные траектории и управление в тестовой задаче стабилизации нелинейного маятника



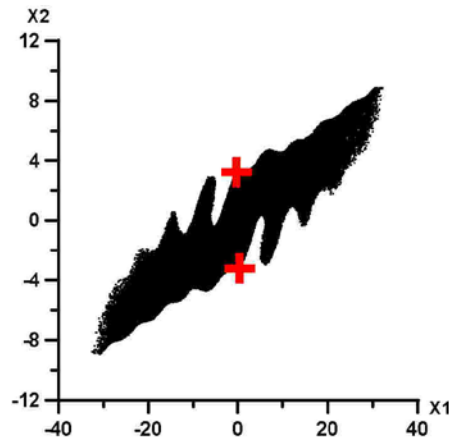


Рис. 28. Множество достижимости и экстремальные точки  
в тестовой задаче стабилизации нелинейного маятника

### **Тема I.1.4.2. Развитие математических методов описания процессов в физике высоких энергий, высокотемпературной плазме и механике сплошных сред**

№ гос. регистрации: АААА-А17-117032210076-0

Научный руководитель – д.ф.-м.н. Ю.А. Марков

Установлена связь между деформированной алгеброй Дэффина-Кеммера-Петье и расширенной системой парафермионных трилинейных коммутационных соотношений для операторов рождения и уничтожения и некоторого дополнительного оператора, подчиняющихся парастатистике порядка 2, основанной на алгебре Ли  $SO(2M + 2)$ . Введена соответствующая система парафермионных когерентных состояний как функция параграссмановых чисел. Получено представление для дополнительного оператора в терминах генераторов ортогональной группы  $SO(2M)$ , правильно воспроизводящее действие этого оператора на векторы состояний конечномерного пространства Фока. В алгебре параграссмановых чисел введено некоммутативное ассоциативное произведение звездочка \* (произведение Мойла) как прямое обобщение произведения звездочка в алгебре Грассмана. Показано, что при вычислении матричных элементов различных операторных выражений необходимо принимать во внимание, что мы работаем в так называемом обобщенном пространстве состояний Ohnuki и Kametuchi, векторы состояний которого включают в свое определение параграссмановы числа, вместо стандартного пространства состояний (пространство Фока) (авторы: д.ф.-м.н. Ю.А. Марков, д.ф.-м.н. М.А. Маркова, А.И. Бондаренко).

Решена трехмерная обратная задача рассеяния применительно к комптоновскому рассеянию с использованием принципа максимума энтропии. Разработана итерационная процедура для реконструкции рассеивающего объекта по результатам комптоновского рассеяния, т.е. восстановление объекта по лучевому преобразованию в конической системе координат. Представлены результаты численного эксперимента (автор: д.ф.-м.н. А.Л. Баландин).

Построены новые точные решения нелинейного уравнения диффузии, имеющие вид диффузионных волн, распространяющихся по невозмущенному фону с конечной скоростью. Доказаны теоремы существования и единственности решений типа тепловой волны в классе



аналитических функций. Аналогичные результаты получены для системы уравнений «реакция-диффузия» (авторы: д.ф.-м.н. А.Л. Казаков, к.ф.-м.н. П.А. Кузнецов).

В ходе выполнения проекта исследовались актуальные проблемы физики элементарных частиц в рамках эффективных кварковых моделей: адронные поправки в аномальный магнитный момент мюона и сверхтонкое расщепление уровней мюонного водорода, возможные динамические механизмы, способные объяснить эффект появления пика в отношении выходов положительно заряженных каонов и пионов. Аномальный магнитный момент мюона является одной из наиболее точно измеренных величин в физике элементарных частиц и в ближайшее время ожидаются новые экспериментальные результаты, поэтому вычисление возможных поправок за счёт сильного взаимодействия представляет несомненный интерес. Была последовательно реализована программа вычислений возможных адронных поправок в процесс рассеяния света на свете в рамках нелокальной кварковой модели: были оценены вклады с участием псевдоскалярных, скалярных и аксиально-векторных промежуточных состояний, а также нерезонансные вклады. Далее модель была расширена на сектор с участием тензорных мезонов. Похожим образом были оценены в рамках кварковых моделей мезонные вклады в сверхтонкое расщепление уровней мюонного водорода.

Наличие пика в отношении выходов положительно заряженных каонов к пионам является одним из интересных экспериментальных наблюдений и в литературе часто обсуждается его возможное отношение к критической точке фазовой диаграммы квантовой хромодинамики. Были проведены исследования отношений выходов заряженных каонов к пионам в рамках различных вариантов кварковых моделей с участием эффективного потенциала калибровочных степеней свободы, записанных на основе петли А.М. Полякова, в том числе исследовались возможные расширения на сектор с участием векторных частиц, а также случай, когда константы четырех- и шести-кварковых взаимодействий имеют связь с калибровочными степенями свободы, и фазовые переходы деконфайнмента и восстановления киральной симметрии оказываются связанными. Проведенные исследования показали, что эффект пика может быть объяснен наличием химического потенциала у странных кварков, а также наличием неравновесного пионного химического потенциала и может не иметь отношения к критической точке фазовой диаграммы КХД (автор: д.ф.-м.н. А.Е. Раджабов).

Доказаны теоремы о тождествах для чисел Дженочки первого и второго рода, обобщающие одно известное тождество. Исследование основано на подходе, использующем некоторые специальные многочлены, порождающие эти числа. Числа Дженочки, в свою очередь, участвуют в представлении некоторого класса сумм, возникающих в непрерывном пределе некоторых интегрируемых дифференциально-разностных уравнений (автор: к.ф.-м.н. А.К. Свинин).

Исследовано обобщенное уравнение Ричардса со степенными нелинейностями, которое моделирует процессы фильтрации в пористых средах. Частными случаями обобщенного уравнения Ричардса являются известное уравнение нелинейной теплопроводности и уравнение конвекции-диффузии. Получены условия, при выполнении которых задача сводится к линейному уравнению теплопроводности или к нелинейным уравнениям с известными решениями. Найдены семейства явных точных решений,



выражаемых через элементарные функции или W-функцию Ламберта. Приводится ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

Исследована нелинейная кинетическая модель, описываемая системой двух уравнений эллиптического типа с экспоненциальными нелинейностями. Построены точные решения указанной модели в классе логарифмов от квадратичных функций пространственных переменных. Коэффициенты решений модели находятся из их систем квадратных матричных и линейных векторных уравнений. Предложенный подход применен, в частности, для построения анизотропных решений уравнения Лиувилля, часто используемого в качестве модели стационарных распределений в физике плазмы.

Изучено нелинейное уравнение в частных производных четвертого порядка, правая часть которого содержит многомерные аналоги уравнения Буссинеска, выражаемые через двукратные операторы Лапласа и квадраты градиентов искомым функций. С помощью специальной конструкции точного решения исходное уравнение в частных производных редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведены примеры построенных точных решений уравнения типа Буссинеска, в том числе выражаемые через эллиптические функции Вейерштрасса и Якоби по времени и анизотропные по пространственным переменным. Найденные явные точные решения имеют не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и верификации численных методов и алгоритмов построения приближенных решений краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка, моделирующих гидродинамические процессы и явления (*автор: к.ф.-м.н. Э.И. Семенов*).

Получены ограничения на константы связи возможных гипотетических частиц темной материи: скаляра, псевдоскаляра, вектора и аксиального вектора, с учетом того, что эти частицы имеют  $P$ -четные и  $P$ -нечетные вершины взаимодействия с обычной материей Стандартной модели. Были даны оценки для чувствительности к поиску такой материи на эксперименте NA64 SPS CERN. В случае поиска за счет потери энергии на мюонном пучке, возможен канал, связанный с промежуточной скалярной или векторной частицей темной материи. Была проведена оценка гипотетической частицы ( $X17$  МэВ), её вклада в радиус протона и показано, что этот вклад пренебрежимо мал.

Было проведено вычисление электрического дипольного момента (ЭДМ) протона и нейтрона, а также величина их Schiff импульса. Было показано что ЭДМ протона имеет тот же порядок что и в случае, когда они оба сгенерированы за счет CP-нарушенного перехода распадов  $\eta$  и  $\eta'$  мезонов в пару  $\pi$ -мезонов.

Величина ЭДМ дейтрона представляет собой сумму ЭДМ отдельных нуклонов и вклада от обменного слагаемого. Учет обмена нейтральным пионом был сделан в нулевом приближении, как было предложено ранее Хриповичем и Коркиным. Для этого были вычислены CP-нарушенные константы связи нейтрально пи-мезона с нуклонами, с учетом и без нарушения изоспина. Как итог было получено значение для ЭДМ дейтрона с учетом одно-мезонного обмена,  $|d_D| < 2.2 \cdot 10^{-26}$  е см. Проведенный анализ для CP-нарушенных распадов  $\eta$  и  $\eta'$  мезонов в пару  $\pi$ -мезонов с учетом будущих измерений ЭДМ протона и дейтрона коллаборациями EDM и JEDI показывает, что относительные ширины для этих распадов будут на уровне  $\sim 10^{-21}$  и  $\sim 10^{-23}$ . Измерение относительной ширины на таком уровне является невозможным. Поэтому если нижняя граница прямого измерения для таких



распадов будет выше, то это является сигналом для другого механизма, ответственного за эти CP-распады (*автор: к.ф.-м.н. А.С. Жевлаков*).

Введены качественные параметры для оценки корректности численного решения уравнения осцилляций нейтрино в среде. Рассмотрены фазовые картины эволюции решений при изменении энергии начального нейтрино. Проведено сравнение с точным решением для постоянной плотности и приближённым решением с медленно растущей линейной плотностью среды (*автор: к.ф.-м.н. В.П. Ломов*).



### **Тема I.1.4.3. Качественный анализ динамических свойств и синтез управлений гибридными механическими системами с развитием средств компьютерной алгебры и средств численной реализации**

№ гос. регистрации: АААА-А17-117032210082-1

Научный руководитель – д.т.н. Э.И. Дружинин

Разработана новая технология расчета программных управлений ориентацией космических аппаратов (КА) с исполнительной гиросистемой, состоящей из 6-ти и 4-х гироскопов. Значение разработанной технологии заключается в радикальном решении знаменитой «проблемы сингулярности» гироскопов. Многовариантная численная реализация технологии для динамических моделей КА с числовыми данными из проектных (открытых) разработок АО «НПО Лавочкина» подтвердила её эффективность.

Помимо распространения новой технологии на 4 гироскопа в 2020 году исследования проводились по двум новым направлениям:

1) для КА с общим распределением масс и априорно не ограниченных законов движения исследовалась возможность изоляции динамики от воздействия неразгруженного до нуля кинетического момента аппарата;

2) обеспечение получения *одношагового* расчета законов управления, не содержащих сингулярных состояний гироскопов, для *динамически сбалансированного* орбитального телескопа, при этом обеспечить и *одношаговое* исполнение процессов наведения на цель телескопа с заданной точностью по времени и по состоянию.

При решении первой задачи предложен оригинальный прием формирования уравнений для расчета *законов управления, не порождающих сингулярных состояний* исполнительных гироскопов. Оригинальность заключается в использовании впервые 3-степенного гироскопа для освобождения динамики КА от влияния не разгружаемого разгонным блоком полностью кинетического момента аппарата. Важно отметить, что при этом не использовалось никакого априорного выбора *законов движения* КА.

Достигнутое решение второй задачи для динамически симметричного орбитального телескопа обеспечило отсутствие в законах программной ориентации телескопа сингулярных состояний гироскопов. Вычисленные по новой технологии законы управления исполняются *в один шаг* непрерывно по состоянию. Эти законы обеспечивают высокоточное наведение телескопа за заданное время на заданную область на подстилающей орбиту поверхности планеты. Такие законы ориентации реализуются параметризованным семейством *устойчивых прецессионных решений* двух точечных краевых задач уравнений динамики.

Результаты реализации технологии расчета законов управления КА, не содержащих сингулярных состояний **4-х гироскопов, получены, численно реализованы и опубликованы.** После завершения численных реализаций полученные результаты для первой и второй задач будут опубликованы в центральной печати (*автор: д.т.н. Э.И. Дружинин*).

Проведено изучение алгебраического расширения счетного семейства управляемых нелинейных динамических процессов, обладающего дифференциальной реализацией в классе обыкновенных квазилинейных неавтономных дифференциальных уравнений (с



программно-позиционным управлением и без) в сепарабельном гильбертовом пространстве. Данная конструкция служит отправной точкой развития общей теории нестационарных квазилинейных векторных полей, попутно создавая ей репутацию полезного инструмента в прецизионном апостериорном математическом моделировании сложных бесконечномерных динамических систем (*авторы: д.ф.-м.н. А.В. Лакеев, д.ф.-м.н. В.А. Русанов*).

Получены функционально-геометрические условия (необходимые и достаточные) существования пяти нестационарных билинейных операторов в модели дифференциальной реализации континуального пучка управляемых траекторных кривых (динамических процессов типа «вход–выход») в классе билинейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (в том числе квазилинейных гиперболических моделей) в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве. Данная задача относится к типу нестационарных нелинейных коэффициентных обратных задач для эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве и решалась на основе качественного изучения свойства непрерывности функционального оператора Релея–Ритца. Полученные результаты имеют приложение к качественной теории нелинейной структурной идентификации полилинейных нестационарных дифференциальных моделей высших порядков (*авторы: д.ф.-м.н. А.В. Лакеев, д.ф.-м.н. В.А. Русанов*).

Проведен анализ стационарных движений системы двух связанных твердых тел в постоянном поле тяжести. При помощи средств компьютерной алгебры построена характеристическая функция системы и получены уравнения движения. Стационарные решения этих уравнений, соответствующие перманентным вращениям системы, исследованы на устойчивость по Ляпунову. Для решения вычислительных задач применялась система компьютерной алгебры «Mathematica» и созданный на ее основе комплекс программ (*авторы: д.ф.-м.н. В.Д. Иртегов, к.т.н. Т.Н. Титоренко*).

Рассмотрена задача о движении твердого тела в случае Гесса-Аппельрота, когда уравнения движения кроме трех первых интегралов имеют инвариантное многообразие (ИМ) Гесса. На основе метода Рауса-Ляпунова и его обобщений проведен качественный анализ дифференциальных уравнений на этом многообразии. Выделены ИМ указанных уравнений. Предложено некоторое расширение методики нахождения таких множеств: получение новых множеств из ранее известных, применение «обратного метода Лагранжа». С использованием этих способов для дифференциальных уравнений на многообразии Гесса найдено семейство ИМ, из которого получено несколько ИМ более высокой размерности, и проведен анализ дифференциальных уравнений на одном из них. Найдены положения равновесия и семейства перманентных вращений тела. Для ряда решений получены достаточные условия устойчивости (*авторы: д.ф.-м.н. В.Д. Иртегов, к.т.н. Т.Н. Титоренко*).

Рассматривается механическая система двух связанных нелинейных осцилляторов. В описании потенциальной энергии системы участвует вещественный параметр для возможности достижения устойчивости по Ляпунову нулевого решения. Искомый параметр нужно подобрать в виде алгебраической зависимости от коэффициентов «притяжения» осцилляторов, из которых только один положителен. По известной теореме Лагранжа для устойчивости положения покоя рассматриваемой системы достаточно, чтобы в этой точке достигался минимум потенциальной энергии. Линейным преобразованием Чирнгаузена выражение потенциальной энергии системы можно привести к неполной форме четвертого порядка. По известному критерию положительной определенности знакоопределенность



такой формы выражается, в частности, неположительностью дискриминанта резольвентного кубического относительно параметра уравнения, составленного из приведенной формы неполного вида. Наибольший корень резольвентного уравнения задает нижнюю границу искомого параметра для области устойчивости нулевого решения. В полученном резольвентном уравнении с целью упрощения выполняются последовательные линейные преобразования. В результате многочлен удалось привести к виду, где коэффициенты первой и второй степеней принимают только положительные значения, а свободный член получается отрицательным. Проведено сравнение символьных выражений корней последнего уравнения. Окончательно оценка искомого параметра получается в виде суммы четырех дробных слагаемых, представленных символьными выражениями от коэффициентов «притяжения» осцилляторов (*автор: д.ф.-м.н. М.А. Новиков*).

Для формаций с произвольным ориентированным бесконтурным графом получены необходимые и достаточные условия внутренней устойчивости. Показано, что внутренней устойчивостью могут обладать практически только однолидерные формации. В классе формаций с одним лидером выделен подкласс (формации, граф которых является входящим деревом), в котором не возникает ограничений типа равенств на вектора, задающие требуемое взаимное расположение между ведомыми и ведущими и являющиеся основным препятствием для внутренней устойчивости многолидерных формаций (*автор: д.ф.-м.н. А.В. Лакеев*).