На правах рукописи

Старицын Максим Владимирович

ВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Иркутск — 2026

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (ИДСТУ СО РАН)

Научный консультант:	**Толстоногов Александр Александрович**, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН
Официальные оппоненты:	**Гомоюнов Михаил Игоревич**, доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник отдела динамических систем
	Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина», директор научно-образовательного центра «Фундаментальные математические исследования»
	Шапошников Станислав Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»

Защита состоится «17» сентября 2026 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 24.1.060.01 на базе ФГБУН Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук по адресу:
664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте ИДСТУ СО РАН: https://idstu.irk.ru/ru/thesis_council.

Автореферат разослан «____» ____________________ 2026 г.

Ученый секретарь диссертационного совета к.ф.-м.н. Т. В. Груздева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

В диссертации развивается вариационный подход к анализу задач оптимального управления динамическими системами разных типов. Он позволяет получать необходимые условия оптимальности программных управлений, сохраняющие информацию о вариациях функционала всех порядков и потому усиливающие принцип максимума Л. С. Понтрягина и другие известные условия динамического экстремума. Этот подход реализован для задач управления обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) на банаховом пространстве, а также нелокальными уравнениями неразрывности и баланса на пространствах мер. Наряду с традиционными постановками рассматриваются вырожденные задачи управления в среднем поле и их импульсно-траекторные расширения в классе функций ограниченной вариации.

Актуальность темы диссертационного исследования. Проблема разрыва между необходимыми и достаточными условиями оптимальности — одна из центральных в теории динамического экстремума. Эта проблема имеет выраженный прикладной аспект, связанный с вопросами численного решения задач динамической оптимизации, и особенно остро проявляется в задачах управления уравнениями в частных производных и эволюционными системами. Изучаемые в работе постановки охватывают ряд моделей статистической физики и их аналогов, возникающих в математической биологии, экономике и машинном обучении. Переход к импульсным процессам обусловлен потребностями развития математического аппарата теории управления ансамблями (пучками) траекторий и сплошными средами в условиях интенсивных (шоковых) воздействий.

Степень разработанности проблемы в литературе. Фундамент классической теории оптимального управления составляют принцип максимума Л. С. Понтрягина (ПМП) и метод динамического программирования Р. Беллмана (ДП).[1] Первый характеризует стационарность исследуемого процесса в классе малых игольчатых возмущений опорного управления и, вообще говоря, не исключает неоптимальных экстремалей, а соответствующие численные методы спуска требуют дорогостоящих процедур параметрического поиска.[2] Второй подразумевает решение нелинейного уравнения Гамильтона–Якоби, что превосходит по трудоемкости исходную постановку и, как правило, недоступно на практике. Промежуточное положение занимают необходимые условия высших порядков, которые учитывают последующие члены разложения функционала по параметру варьирования;[3] эти условия выполняют роль

[1] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983; Bellman R. Dynamic Programming. Princeton: Princeton University Press, 1957.

[2] См. обзор: Аргучинцев А. В., Дыхта В. А., Срочко В. А. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Известия высших учебных заведений. Математика. 2009. № 1. С. 3–43; Borzì A. The Sequential Quadratic Hamiltonian Method: Solving Optimal Control Problems. Boca Raton: CRC Press, 2023.

[3] Габасов Р. Ф. Об оптимальности особых управлений // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 6. С. 1000–1011; Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. К теории необходимых условий оптимальности высокого порядка // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 4. С. 665–676; Gabasov R., Kirillova F. M. High Order Necessary

дополнительных критериев проверки (преимущественно, особых) ПМП–экстремалей и также характеризуются быстро возрастающей вычислительной сложностью.

Оригинальный подход к усилению ПМП был предложен В. А. Дыхтой.[4] Основная идея состояла в использовании «позиционных» вариаций опорного управления, построенных по принципу экстремального прицеливания на подмножество уровня некоторого решения неравенства Гамильтона–Якоби — опорной мажоранты; реализация этой идеи привела к неклассическим необходимым условиям вариационного типа, асимметричным к достаточным условиям В. Ф. Кротова.[5] Класс опорных мажорант фиксировался заранее, исходя из структуры задачи; фактически, выбор ограничивался линейными и линейно-квадратичными по фазовой переменной функциями, коэффициентами которых выступали опорная котраектория и соответствующий матричный импульс Р. Ф. Габасова. В нелинейной постановке использование подобных функций носило характер эвристики, а вопрос построения точной опорной мажоранты оставался открытым. Ответ на него был получен нами в работах [1, 3] и оказался связанным со специальным точным представлением приращения функционала; искомой мажорантой оказалась функция цены опорного управления — решение линейного транспортного уравнения в частных производных.

Особое внимание в диссертации уделено задачам управления в пространствах мер. Известные результаты в этом направлении опираются на достижения теории оптимального переноса Монжа–Канторовича[6] и соответствующие разделы анализа.[7] Подавляющая часть работ относится к случаю, когда состояние является вероятностной мерой, а динамика описывается уравнением неразрывности, возможно нелокальным. Для таких задач известны формы ПМП и ДП,[8] однако теория экстремума высших порядков здесь фактически не разработана.

Conditions for Optimality // SIAM Journal on Control. 1972. Vol. 10, no. 1. P. 127–168; Frankowska H., Hoehener D. Pointwise Second-Order Necessary Optimality Conditions and Second-Order Sensitivity Relations in Optimal Control // Journal of Differential Equations. 2017. Vol. 262, no. 12. P. 5735–5772.

[4]Дыхта В. А. Позиционный принцип минимума: вариационное усиление понятий экстремальности в оптимальном управлении // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 19–39; О множестве необходимых условий оптимальности с позиционными управлениями, порожденном слабо убывающими решениями неравенства Гамильтона–Якоби // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 83–93; Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления. 2014. Т. 75, №. 11. С. 19–37.

[5]Krotov V. F. Global Methods in Optimal Control Theory. New York: Marcel Dekker, 1996.

[6]Богачев В. И., Колесников А. В., Шапошников С. В. Задачи Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки. Москва–Ижевск: Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2023. 664 с.; Santambrogio F. Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Springer International Publishing, 2015; Villani C. Optimal Transport: Old and New. Berlin: Springer, 2009.

[7]Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Gradient Flows: In Metric Spaces and in the Space of Probability Measures. Boston: Birkhäuser, 2005; Cardaliaguet P., Delarue F., Lasry J.-M., Lions P.-L. The Master Equation and the Convergence Problem in Mean Field Games. Princeton: Princeton University Press, 2019; Kolokoltsov V. N. Nonlinear Markov Processes and Kinetic Equations. Cambridge Tracts in Mathematics. Vol. 182. Cambridge: Cambridge University Press, 2010; Otto F. The Geometry of Dissipative Evolution Equations: The Porous Medium Equation // Communications in Partial Differential Equations. 2001. Vol. 26, no. 1–2. P. 101–174.

[8]Averboukh Y., Khlopin D. Pontryagin maximum principle for the deterministic mean field type optimal control problem via the Lagrangian approach // Journal of Differential Equations. 2025. Vol. 430. P. 113205; Averboukh Y. Viability Theorem for Deterministic Mean Field Type Control Systems // Set-Valued and Variational Analysis. 2018.

К менее изученному классу динамических систем на пространствах мер относятся уравнения неразрывности с источником — законы баланса. Они описывают не только перенос и взаимодействие, но и изменение «состава популяции»: рождение и гибель, генерацию и оседание частиц, приток и отток массы. Состоянием такой системы служит уже произвольная мера (вообще говоря, знакопеременная), что ведет к утрате «удобной» метрической структуры и топологических свойств фазового пространства, присущих пространству вероятностей.[9] Несмотря на широкий спектр приложений, исследования в данной области ограничиваются отдельными вопросами существования, единственности, регулярности и представления решений, а также математического моделирования;[10] задачи оптимального управления практически не затрагивались, а базовый аппарат соответствующей теории, включая ПМП, по-видимому, не был развит до появления работ [2, 5, 7].

Еще один круг вопросов связан с тематикой импульсного управления — особым типом релаксации вырожденных задач динамической оптимизации, в которых управляющее воздействие концентрируется на малых промежутках времени, а траектории стремятся к разрывным функциям времени. В классической теории переход к импульсным процессам является результатом расширения множества управляющих функций до мер или распределений и обеспечивает корректность постановок, в которых ограничение на управление носит энергетический (интегральный) характер.[11] Соответствующий математический аппарат был перво-

---

Vol. 26, no. 4. P. 993–1008; Bongini M., Fornasier M., Rossi F., Solombrino F. Mean-field Pontryagin maximum principle // Journal of Optimization Theory and Applications. 2017. Vol. 175, no. 1. P. 1–38; Bonnet B. A Pontryagin Maximum Principle in Wasserstein spaces for constrained optimal control problems // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2019. Vol. 25. Art. 52; Pogodaev N. Optimal control of continuity equations // NoDEA Nonlinear Differential Equations and Applications. 2016. Vol. 23, no. 2. Art. 21; Marigonda A., Quincampoix M. Mayer control problem with probabilistic uncertainty on initial positions // Journal of Differential Equations. 2018. Vol. 264, no. 5. P. 3212–3252.

[9] Bogachev V. I. Measure Theory. Berlin-New York: Springer, 2007.

[10] Averboukh Y. Nonlocal Balance Equation: Representation and Approximation of Solution // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2024. Vol. 37, no. 3. P. 2461–2495; Colombo R. M., Marcellini F. Nonlocal systems of balance laws in several space dimensions with applications to laser technology // Journal of Differential Equations. 2015. Vol. 259, no. 11. P. 6749–6773; Piccoli B., Rossi F., Tournus M. A Wasserstein norm for signed measures, with application to non-local transport equation with source term // Communications in Mathematical Sciences. 2023. Vol. 21, no. 5. P. 1279–1301; Carrillo J. A., Colombo R. M., Gwiazda P., Ulikowska A. Structured populations, cell growth and measure valued balance laws // Journal of Differential Equations. 2012. Vol. 252, no. 4. P. 3245–3277; Düll C., Gwiazda P., Marciniak-Czochra A., Skrzeczkowski J. Structured population models on Polish spaces: a unified approach including graphs, Riemannian manifolds and measure spaces to describe dynamics of heterogeneous populations // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2024. Vol. 34, no. 1. P. 109–143.

[11] Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления. Теоретические основы технической кибернетики. Москва: Наука, 1977. 304 с.; Дыхта В. А., Самсонюк О. Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000; Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: модели и приложения. Москва: Наука, 1991. 256 с.; Кротов В. Ф. Разрывные решения вариационных задач // Известия высших учебных заведений. Математика. 1960. № 5. С. 86–98; Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. L. Optimal Impulsive Control: The Extension Approach. Cham: Springer, 2019; Bressan A., Piccoli B. Introduction to the mathematical theory of control. Springfield, MO: AIMS, 2007; Miller B. M., Rubinovich E. Y. Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003; Rishel R. W. An extended Pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures // J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control. 1965. Vol. 3. P. 191–205; Warga J. Variational problems with unbounded controls // J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control. 1965. Vol. 3. P. 424–438; Warga J. Optimal Control of Differential and Functional Equations. New York; London: Academic Press, 1972.

начально развит для задач управления ОДУ с аффинной зависимостью от управления. Определяющую роль сыграла абстракция В. И. Гурмана о двух фазах движения, позволившая описать скачки траектории с помощью пространственно-временных преобразований типа Келли и Гоха и разрывной замены времени. Позднее было показано, что близкий тип вырождения возникает и в задачах, нелинейных по управлению; в частности, модели механических систем с активными голономными связями привели к понятию гиперимпульсных режимов, которые можно трактовать как бесконечно быстрые вибрации с исчезающе малой амплитудой.[12] Дальнейшие обобщения касались нелинейных дифференциальных уравнений и включений, а также постановок, где предельное движение зависит не только от управления–меры, но и от способа его аппроксимации «обычными» воздействиями.[13] Попытки переноса упомянутых конструкций на динамические системы в бесконечномерных линейных пространствах предпринимались лишь в нескольких работах и касались вопросов существования оптимального управления и необходимых условий первого порядка в форме ПМП.[14]

Постановки, рассматриваемые в диссертации, имеют иную природу: здесь объектом импульсного управления выступает эволюция вероятностной меры на метрическом пространстве, лишенном линейной структуры; они охватывают задачи того же спектра, что и в сосредоточенном случае, но при наличии внешних возмущений и/или погрешности в определении начального состояния моделируемого объекта. Первой работой в этом направлении стала статья автора [16], посвященная расширению вырожденной задачи управления линейным уравнением неразрывности. Соответствующий вариант ПМП и основанный на нем численный метод были получены в статьях [4, 9, 13].

Цели и задачи исследования. Работа преследует несколько взаимосвязанных целей. Первая и наиболее общая состоит в развитии нового подхода к вариационному анализу задач динамической оптимизации, направленного на сокращение разрыва между известными необходимыми и достаточными условиями оптимальности и предполагающего усиление стандартных понятий локального экстремума. Речь идет о задачах, свободных от фазовых ограничений.

Другая цель состоит в реализации указанного подхода в отдельных классах постановок, представляющих теоретическую и содержательную ценность. Среди них — задачи

[12] Bressan A., Rampazzo F. On Differential Systems with Quadratic Impulses and Their Applications to Lagrangian Mechanics // SIAM Journal on Control and Optimization. 1993. Vol. 31, no. 5. P. 1205–1220; Moving Constraints as Stabilizing Controls in Classical Mechanics // Arch. Ration. Mech. Anal. 2010. Vol. 196, no. 1. P. 97–141.

[13] Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. L. Optimal Impulsive Control: The Extension Approach. Cham: Springer, 2019; Karamzin D. Y., De Oliveira V. A., Pereira F. L., Silva G. N. On Some Extension of Optimal Control Theory // European Journal of Control. 2014. Vol. 20, no. 6. P. 284–291; Miller B. M., Rubinovich E. Y. Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.

[14] Ahmed N. U. Vector Measures for Optimal Control of Impulsive Systems in Banach Spaces // Nonlinear Functional Analysis and Applications. 2000. Vol. 5, no. 2. P. 95–106; Ahmed N. U. Measure Solutions for Evolution Equations with Discontinuous Vector Fields // Nonlinear Functional Analysis and Applications. 2004. Vol. 9, no. 3. P. 467–484; Ahmed N. U. Vector and Operator Valued Measures as Controls for Infinite Dimensional Systems: Optimal Control // Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization. 2008. Vol. 28. P. 95–131; Ahmed N. U., Teo K. L., Hou S. H. Nonlinear Impulsive Systems on Infinite Dimensional Spaces // Nonlinear Analysis. 2003. Vol. 54, no. 5. P. 907–925.

управления обыкновенными дифференциальными уравнениями и их ансамблями, описываемыми уравнениями переноса и баланса в пространствах мер.

Последняя цель связана с исследованием вырожденных задач управления в среднем поле и их импульсно-траекторных расширений. Основное внимание здесь уделено переносу аппарата сингулярных пространственно-временных преобразований на уравнения переноса в пространстве вероятностей, а также развитию базовых элементов теории оптимального импульсного управления ансамблями траекторий.

Методы исследования. Исследование опирается на методы функционального анализа, теории меры и теории функций действительного переменного. Существенную роль играют утверждения о слабых топологиях сопряженных банаховых пространств, такие как теорема Банаха–Алаоглу и теорема Петтиса. Используются варианты теоремы о точках Лебега, стандартные результаты теории интегралов Лебега и Бохнера, включая теоремы о монотонной и мажорируемой сходимости. В разделах, посвященных управлению ОДУ, применяются элементы соответствующей классической теории: теоремы о неподвижной точке, оценки типа Гронуолла и др. Исследование динамических систем на пространствах мер опирается на свойства образа меры под действием отображения и на исчисление производных функций по мере.

Научная новизна. Подход, развиваемый в работе, отличается от классических: источником необходимых условий оптимальности здесь служат не малые вариации целевого функционала в классах игольчатых или слабых возмущений управления, а точные нелокальные формулы приращения, записанные в терминах функции цены опорного управления. В гладком случае указанные формулы воспроизводят иерархию сопряженных траекторий всех порядков и приводят к позиционным принципам оптимальности, не сводящимся к ПМП и другим известным необходимым условиям динамического экстремума. В рамках этого подхода получены новые результаты для задач управления нелокальными уравнениями неразрывности и баланса на пространствах мер, включая первые из известных нам условий экстремума высших порядков. К числу новых относятся также методы преобразования и декомпозиции законов баланса и уравнений переноса, основанные на барицентрическом проектировании. Новой является постановка задачи оптимального импульсного управления в среднем поле и представленные в работе результаты ее анализа.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы определяется результатами в области математической теории оптимального управления нелинейными дифференциальными уравнениями. В диссертации установлены связи между точными формулами приращения функционала, позиционными условиями экстремума, принципом максимума Понтрягина и условиями высших порядков. Полученные результаты расширяют аппарат вариационного анализа на классы задач, для которых соответствующая теория ранее отсутствовала или была развита лишь частично.

Практическая значимость связана с проблематикой численного решения задач динамической оптимизации. Полученные условия оптимальности служат основой вычислительных процедур спуска в широком классе задач управления сосредоточенными и распределенными системами, включая постановки, в которых непрямые методы не были реализованы ранее.

Положения, выносимые на защиту.

1. Предложен общий подход к вариационному анализу нелинейных задач оптимального управления без фазовых ограничений, основанный на канонической линеаризации и точных представлениях приращения целевого функционала.
2. Для задач оптимального управления обыкновенными дифференциальными уравнениями на банаховом пространстве, а также нелокальными уравнениями неразрывности на пространствах мер получены точные формулы приращения функционала и позиционные условия оптимальности; проведено их сопоставление с каноническими условиями типа Понтрягина.
3. Для управляемых нелокальных уравнений баланса на пространстве неотрицательных мер предложен метод редукции к уравнению неразрывности на пространстве вероятностных мер. Метод применим к системам с полулинейным источником и позволяет перенести на такие задачи аппарат позиционного вариационного анализа.
4. Для вырожденной задачи управления нелокальным уравнением неразрывности на пространстве вероятностных мер построено импульсно-траекторное расширение в классе функций ограниченной вариации. Поставлена задача оптимального импульсного управления в среднем поле.
5. Для задачи импульсного управления в среднем поле найден явный вид сопряженной системы ПМП. Получена новая форма ПМП, допускающая численную интерпретацию и сопоставление с позиционными условиями экстремума.

Достоверность результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается математической строгостью доказательств и подтверждается их согласованностью с известными частными случаями, широкой апробацией на профильных научных мероприятиях, а также публикацией в ведущих рецензируемых изданиях.

Апробация результатов. Результаты работы представлены в докладах на российских и международных конференциях, таких как V Конференция математических центров России, Красноярск, 2025; 16th APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing, Porto, Portugal, 2024; International conference «Nonlinear Analysis and Extremal Problems», 2018, 2022, 2024, Irkutsk, Russia; 9th International Conference on Control, Decision, and Information Technologies, Rome, Italy, 2023; 18th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization, Paris, France, 2022; 60th IEEE Conference on Decision and Control, Austin, TX, USA, 2021; 59th IEEE Conference on Decision and Control, Jeju Island, Republic of Korea, 2020; International Conference «Crowds: Models and Control», CIRM, Marseille, France, 2019; IX International Conference «Optimization and Applications», Petrovac, Montenegro, 2018; 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization, Yekaterinburg, Russia, 2018; 14th Viennese Conference «Optimal Control and Dynamic Games», Vienna, Austria, 2018; Constructive Nonsmooth Analysis and Related

Topics, Saint Petersburg, Russia, 2017 и др.

Публикации и личный вклад автора. Результаты работы опубликованы в 24 статьях, 18 из которых — в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК или индексируемых в международных базах научного цитирования Scopus и Web of Science. Все результаты, выносимые на защиту, получены автором лично. Из совместных работ в диссертацию включены только те результаты, которые принадлежат непосредственно автору.

Соответствие паспорту специальности 1.1.2. Основные результаты диссертационного исследования относятся к теории дифференциальных уравнений и оптимального управления, что соответствует научной специальности 1.1.2 — «Дифференциальные уравнения и математическая физика». Результаты о позиционных условиях экстремума, принципе максимума Понтрягина, редукции задач управления и импульсно-траекторных расширениях отвечают направлению «Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений в задачах оптимального управления и вариационного исчисления». Результаты, касающиеся нелокальных уравнений неразрывности и баланса на пространствах мер, относятся к направлениям «Нелинейные дифференциальные уравнения и системы нелинейных дифференциальных уравнений» и «Общая теория дифференциальных уравнений и систем».

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 262 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** формулируются цели и задачи работы, обосновывается актуальность темы исследования, дается обзор литературы, обсуждаются методы и подходы, научная новизна и сведения об апробации, выделяются основные защищаемые положения.

Первая глава носит методологический характер и содержит, наряду с основными определениями и предварительными сведениями, описание общего подхода к вариационному анализу задач оптимального управления без фазовых ограничений. Этот подход опирается на следующие технические приемы:

- *каноническую линеаризацию* — погружение нелинейной задачи в обобщенную линейную постановку;
- *точные формулы приращения* целевого функционала полученной линейной задачи, вытекающие из стандартных соотношений двойственности.

Поясним указанные шаги на примере классической постановки на конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$(P) = (P_{(0,\mathrm{x}_0)}) \qquad \inf \Big\{ \mathcal{I}[u] \doteq \ell(x^u(T)) \colon u \in \mathcal{U} \doteq L^\infty(I; U) \Big\}.$$

Здесь $I \doteq [0, T]$; $T > 0$ и $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ фиксированы, $U \subset \mathbb{R}^m$ — заданный компакт, $\ell \in C^1_b(\mathbb{R}^n)$, и векторное поле $f\colon I\times(\mathbb{R}^n\times U)\to\mathbb{R}^n,\ (t,\mathrm{x},\mathrm{u})\mapsto f_t(\mathrm{x},\mathrm{u})$, удовлетворяет условиям регулярности типа Коши-Каратеодори; траектория x^u, порожденная управлением u, есть решение задачи Коши для системы ОДУ

$$\dot{x}=f_t(x,u),\qquad x(0)=\mathrm{x}_0. \tag{1}$$

Покажем, что (P) является частным случаем некоторой задачи динамической оптимизации, аффинной по переменной состояния: рассмотрим пространство $C_b=(C_b(\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_\infty)$ непрерывных ограниченных функций $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ и его топологически сопряженное C_b'; выделим в последнем выпуклое подмножество $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из борелевских счетно-аддитивных вероятностных мер, и наделим это подмножество слабой* топологией $\sigma(C_b',C_b)$. Имеет место каноническое вложение $\mathbb{R}^n\hookrightarrow\mathcal{P}$, сопоставляющее точке $x(t)\in\mathbb{R}^n$ меру Дирака $\mu_t\doteq\delta_{x(t)}\in\mathcal{P}$. Последняя задает линейный непрерывный функционал на C_b по правилу

$$\langle\mu_t,\phi\rangle\doteq\int_{\mathbb{R}^n}\phi\,d\mu_t=\phi(x(t)),\qquad\phi\in C_b.$$

Заметим, что для всякой $\phi\in C_b^1\subset C_b$ композиция $\phi\circ x$ дифференцируема почти всюду относительно меры Лебега (п.в.), и

$$\frac{d}{dt}\langle\mu_t,\phi\rangle\doteq\frac{d}{dt}\phi(x(t))=\nabla\phi(x(t))\cdot f_t^u(x(t))\doteq\Big\langle\mu_t,\nabla\phi\cdot f_t^u\Big\rangle, \tag{2}$$

где $f_t^u(\cdot)\doteq f(\cdot,u(t))$, и $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Система условий (2), в которых ϕ пробегает семейство $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ гладких функций с компактным носителем, составляет стандартное определение[15] слабого* решения уравнения неразрывности

$$\partial_t\mu_t+\nabla\cdot(f_t^u\,\mu_t)=0. \tag{3}$$

В предположениях регулярности типа Коши–Каратеодори решение $\mu=\mu^u$ с начальными данными $t=0$ и $\mu_0=\vartheta\in\mathcal{P}$ существует, единственно в классе $C\big(I,(\mathcal{P},\sigma(C_b',C_b))\big)$ и представимо явно в терминах потока $(s,t,\mathrm{x})\to\Phi_{s,t}^u(\mathrm{x})$ неавтономного векторного поля f^u:[16]

$$\mu_t=(\Phi_{0,t}^u)_\sharp\vartheta\doteq\vartheta\circ(\Phi_{0,t}^u)^{-1}\quad\iff\quad\langle\mu_t,\phi\rangle=\Big\langle\vartheta,\phi\circ\Phi_{0,t}^u\Big\rangle\quad\forall\phi\in C_b.$$

В частности, при $\vartheta=\delta_{\mathrm{x}_0}$ единственным решением указанного типа является кривая $t\mapsto\delta_{x^u(t)}$, тождественная траектории x^u системы (1).

Теперь можно представить целевой функционал $\mathcal{I}$ задачи (P) как билинейную форму $\mathcal{I}[u]\doteq\ell(x^u(T))=\Big\langle\mu_T^u,\ell\Big\rangle\doteq\mathcal{J}[u]$; это приводит к следующей задаче оптимального управления

[15] Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures. Basel: Birkhäuser, 2008.

[16] См. там же, Утверждения 8.1.7 и 8.1.8.

на пространстве $\mathcal{P}$, аффинной по соответствующей фазовой переменной — мере:

$$(\boldsymbol{P}) = (\boldsymbol{P}_\vartheta) \qquad \inf\left\{\mathcal{J}[u] \doteq \langle \mu_T, \ell\rangle \colon\ u \in \mathcal{U}\right\}, \quad \mu = \mu^u.$$

Полученную постановку можно воспринимать как обобщение исходной на случай, когда начальное состояние x_0 является случайной величиной с заданным законом распределения $\vartheta \sim \mathrm{x}_0$ на некотором подлежащем вероятностном пространстве, или иначе, как задачу управления ансамблем (пучком) обыкновенных управляемых систем. Очевидно, $(\boldsymbol{P}_{\delta_{\mathrm{x}_0}})$ эквивалентна $(P_{(0,\mathrm{x}_0)})$.

Возьмем теперь произвольные управления $\bar{u}, u \in \mathcal{U}$; объекты, зависящие от $\bar{u}$, помечаем чертой, а зависимость от u опускаем. Рассмотрим цену управления $\bar{u}$ в задаче $\big(P_{(t,\mathrm{x})}\big)$ с теми же данными (ℓ, f, T, U) и начальной позицией $\big(t, x(t) = \mathrm{x}\big)$:

$$\bar{\boldsymbol{p}}_t(\mathrm{x}) \doteq \ell\left(\bar{\Phi}_{t,T}(\mathrm{x})\right). \tag{4}$$

При достаточной регулярности поля f (см. [3]) функция $\bar{\boldsymbol{p}}$ является решением системы

$$\partial_t \boldsymbol{p} + \nabla \boldsymbol{p}_t \cdot f_t^{\bar{u}} = 0 \text{ при п.в. } t \in I, \qquad \boldsymbol{p}_T = \ell, \tag{5}$$

сопряженной к (3) в том смысле, что кривые $\bar{\mu}$ и $\bar{\boldsymbol{p}}$, отвечающие одному и тому же управлению $\bar{u}$, удовлетворяют тождеству: $\langle \bar{\mu}_t, \bar{\boldsymbol{p}}_t\rangle \equiv \mathrm{const}$.

Далее рассмотрим другую траекторию $\mu = \mu^u$ системы (3). Элементарные манипуляции с линейными формами позволяют представить приращение целевого функционала задачи $(\boldsymbol{P})$ на паре управлений $(\bar{u}, u)$ в следующем виде (см. [1, 3]):

$$\mathcal{J}[u] - \mathcal{J}[\bar{u}] = \int_I \left\langle \mu_t, \nabla \bar{\boldsymbol{p}}_t \cdot \left(f_t^u - f_t^{\bar{u}}\right)\right\rangle dt.$$

В частности, для траектории $\mu_t = \delta_{x(t)}$, отвечающей мере $\vartheta = \delta_{\mathrm{x}_0}$, имеем

$$\mathcal{I}[u] - \mathcal{I}[\bar{u}] = \int_I \nabla \bar{\boldsymbol{p}}_t(x(t)) \cdot \Big(f_t(x(t), u(t)) - f_t(x(t), \bar{u}(t))\Big)\, dt. \tag{6}$$

Это точная нелокальная формула приращения функционала исходной задачи (P).

Если поле f аффинно по фазовой переменной, а ℓ линейна, то градиент $\nabla \bar{\boldsymbol{p}}_t$ не зависит от x и совпадает с решением $\bar{p}$ линейной системы ОДУ

$$\dot{p} = -[Df]' p, \qquad p(T) = \nabla \ell,$$

сопряженной к (1). Таким образом, (6) включает в себя в качестве частного случая известную формулу приращения в обобщенно-линейной постановке.[17]

[17] Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000.

Обозначим через $\bar{H}_t = H|_{\psi=\nabla \bar{\boldsymbol{p}}_t}$ сужение функции Понтрягина $H_t(\mathrm{x}, \psi, \mathrm{u}) \doteq \psi \cdot f_t(\mathrm{x}, \mathrm{u})$ на градиент $\nabla \bar{\boldsymbol{p}}_t$ функции $\bar{\boldsymbol{p}}_t$ по переменной x и перепишем выражение (6) в виде

$$\mathcal{I}[u] - \mathcal{I}[\bar{u}] = \int_I \Big[\bar{H}_t(x(t), u(t)) - \bar{H}_t(x(t), \bar{u}(t))\Big]\, dt. \tag{7}$$

Предположим, что множество U выпукло, а f гладко по x и аффинно по u (при необходимости последнее условие обеспечивается переходом к обобщенным управлениям типа Янга–Варги–Гамкрелидзе[18]). Разлагая $\bar{H}_t$ в ряд Тейлора по переменной x в окрестности траектории $\bar{x}$ до членов порядка k, можно представить (7) в виде вариационного ряда, известного в теории особых управлений.[19] Доминирующую часть получаемого так приближения величины $\mathcal{I}[u] - \mathcal{I}[\bar{u}]$ принято трактовать как соответствующего порядка вариацию $\Delta_u^k \mathcal{I}[\bar{u}]$ функционала $\mathcal{I}$ в классе слабых вариаций управления $\bar{u}$ — функций вида $u^\epsilon \doteq \bar{u} + \varepsilon(u - \bar{u})$, $u \in \mathcal{U}$. Анализ первой вариации $\Delta_u^1 \mathcal{I}[\bar{u}]$ приводит к ПМП, а из аналогичных представлений $\Delta_u^k \mathcal{I}[\bar{u}]$, $k > 1$, следуют необходимые условия оптимальности высших порядков. Тогда сужение формулы (7) на класс слабых вариаций управления естественно интерпретировать как вариацию $\Delta_u^\infty \mathcal{I}[\bar{u}]$ «бесконечного порядка»; как и в случае конечного k, эта формула дает конструктивный способ построения управления спуска из точки $\bar{u}$ и тем самым порождает необходимое условие оптимальности.

Предположим, что для заданного $\bar{u}$ удалось найти новое управление $u \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее при п.в. $t \in I$ равенству

$$\bar{H}_t(x(t), u(t)) = \min_{\mathrm{u} \in U} \bar{H}_t(x(t), \mathrm{u}). \tag{8}$$

В этом случае подынтегральный член (7) неположителен, и $\mathcal{I}[u] \le \mathcal{I}[\bar{u}]$. Если $\bar{u}$ оптимально, то $\mathcal{I}[u] = \mathcal{I}[\bar{u}]$, и равенства

$$\bar{H}_t(x(t), \bar{u}(t)) = \bar{H}_t(x(t), u(t)) \doteq \min_{\mathrm{u} \in U} \bar{H}_t(x(t), \mathrm{u})$$

также верны при п.в. t. Этот факт составляет необходимое условие минимума в задаче (P), отличное от ПМП и известных условий высших порядков. Наряду с $\bar{u}$ здесь фигурируют дополнительные «управления сравнения» u с обратной связью $x = x^u$, превращающей (8) в операторное уравнение на пространстве $\mathcal{U}$. Ниже будет показано, что решение этого уравнения (вообще говоря, неединственное) существует при стандартных предположениях на исходные данные. Более того, как установлено в § 1.9 диссертации, подходящая пара (u, x^u) может быть построена с помощью процедуры конструктивных движений Красовского–Субботина.[20]

[18] Young L. C. Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Philadelphia: W. B. Saunders, 1969; Warga J. Optimal Control of Differential and Functional Equations. New York; London: Academic Press, 1972; Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1977.

[19] Габасов Р. Ф. Об оптимальности особых управлений // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 6. С. 1000–1011; Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.

[20] Krasovskii N., Subbotin A. Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer, 2011.

Фундаментальная природа формулы (7) проявляется и за пределами классической постановки: при п.в. t и всех $\mathrm{u} \in U$ определим производящий оператор системы (1)

$$\mathfrak{L}_t^{\mathrm{u}}\colon C_b^1 \to C_b, \qquad (\mathfrak{L}_t^{u(t)}\phi)(\mathrm{x}) = \lim_{h\to+0}\frac{\phi(\Phi^u_{t,t+h}(\mathrm{x})) - \phi(\mathrm{x})}{h}, \tag{9}$$

и заметим, что $\mathfrak{L}_t^{u(t)}\phi$ совпадает с производной Ли $\mathfrak{L}_t^{\mathrm{u}}\phi \doteq \nabla\phi\cdot f_t(\cdot,\mathrm{u})$ функции ϕ по направлению поля $f_t(\cdot,\mathrm{u})$. Учитывая, что $\bar H_t(\mathrm{x},\mathrm{u}) \doteq \nabla\bar{\boldsymbol{p}}_t(\mathrm{x})\cdot f_t(\mathrm{x},\mathrm{u}) = (\mathfrak{L}_t^{\mathrm{u}}\bar{\boldsymbol{p}}_t)(\mathrm{x})$, представим (5) в форме линейного эволюционного уравнения в обратном времени,

$$\dot{\boldsymbol{p}} + \mathfrak{L}_t^{\bar u(t)}\boldsymbol{p} = 0, \qquad \boldsymbol{p}_T = \ell,$$

и перепишем (7) в виде

$$\mathcal{I}[u] - \mathcal{I}[\bar u] = \int_I \left\{\mathfrak{L}_t^{u(t)} - \mathfrak{L}_t^{\bar u(t)}\right\}\bar{\boldsymbol{p}}_t\Big|_{x(t)}\,dt. \tag{10}$$

Выражение (10) уже не апеллирует к явному дифференциальному представлению (1) управляемой системы в терминах поля $f_t(\cdot,\mathrm{u})$: подынтегральная функция задается условиями (4) и (9), в которых фигурируют лишь целевой критерий ℓ и потоки $(\Phi^{\bar u},\Phi^u)$. Описанный переход позволяет воспроизвести формулу (10) и основанный на ней вариационный анализ в достаточно общей постановке, фазовым множеством которой служит метрическое пространство $\mathcal{X} \doteq (\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$, а общий класс допустимых управлений описывается следующими условиями.

Пусть $\boldsymbol{U}$ — сепарабельное банахово пространство, $\boldsymbol{U}'$ — его сопряженное, а $U \subset \boldsymbol{U}'$ — непустое, выпуклое, ограниченное в норме и замкнутое в топологии $\sigma(\boldsymbol{U}',\boldsymbol{U})$ множество. Полагаем

$$\mathcal{U} \doteq \{u \in L^\infty_{w^*}(I;\boldsymbol{U}') :\ u_t \in U \text{ при п.в. } t \in I\},$$

и наделяем $\mathcal{U}$ топологией $\sigma(L^\infty_{w^*}, L^1)$. Данная конструкция охватывает типичные для большинства приложений классы управляющих функций — обыкновенные программные управления, обобщенные управления типа Янга–Варги–Гамкрелидзе, а также некоторые распределенные воздействия (см. Пример 1.1 в диссертации).

Утверждение 1.1. *Множество U допускает структуру компактного метрического пространства в индуцированной слабой* топологии. То же верно для $\mathcal{U}$ в топологии $\sigma(L^\infty_{w^*}, L^1)$. Кроме того, включение $u \in \mathcal{U}$ имеет место тогда и только тогда, когда u измерима по Лебегу как функция $I \to U$ со значениями в указанном компакте.*

Управляемой системой на $\mathcal{X}$ называем набор $(\Phi^u)_{u\in\mathcal{U}}$, где для каждого $u \in \mathcal{U}$ семейство $\Phi^u = (\Phi^u_{s,t})_{(s,t)\in\Delta}$, $\Phi^u_{s,t}\colon \mathcal{X}\to\mathcal{X}$, $\Delta = \{(s,t) : 0 \le s \le t \le T\}$, удовлетворяет аксиомам потока: $\Phi^u_{b,c}\circ\Phi^u_{a,b} = \Phi^u_{a,c}$ и $\Phi^u_{a,a} = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ при всех $0 \le a \le b \le c \le T$,[21] и выполнена импликация: $\bar u = u$ п.в. на $[s,t]$ влечет $\Phi^{\bar u}_{s,t} = \Phi^u_{s,t}$.

[21] $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ обозначает тождественно отображение $\mathcal{X}\to\mathcal{X}$.

Рассмотрим задачу Майера

$$(P) \qquad \inf\{\mathcal{I}[u] \doteq \ell(x^u_T) : u \in \mathcal{U}\}, \qquad \ell\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}; \quad x^u_t = \Phi^u_{0,t}(\mathrm{x}_0),\ t \in I; \ \ \mathrm{x}_0 \in \mathcal{X}.$$

Предположение 1.1: *для любых* $(s,u) \in [0,T) \times \mathcal{U}$ *отображение* $(t,\mathrm{x}) \mapsto \Phi^u_{s,t}(\mathrm{x})$ *непрерывно на* $[s,T] \times \mathcal{X}$*, зависимость от* t *липшицева равномерно по* (u,s,x)*, а зависимость от* x *— липшицева равномерно по* (u,s,t)*. Кроме того,* ℓ *предполагается липшицевой.*

При этих условиях траектории x^u абсолютно непрерывны как функции $I \to \mathcal{X}$.[22]

Пусть $\bar u \in \mathcal{U}$ — заданное управление, подлежащее проверке на оптимальность; мы называем это управление и соответствующий процесс $(\bar x \doteq x^{\bar u}, \bar u)$ опорными. Анализ опорного процесса на динамический экстремум предлагается проводить в следующем нестандартном классе вариаций управления $\bar u$: зафиксируем произвольное $u \in \mathcal{U}$ и определим функции $t \mapsto (u \rhd_s \bar u)_t$, $s \in (0,T]$, условием

$$(u \rhd_s \bar u)_t \doteq \mathbf{1}_{[0,s)}(t)\ u_t + \mathbf{1}_{[s,T]}(t)\ \bar u_t. \tag{11}$$

Включение $u \rhd_s \bar u \in \mathcal{U}$ проверяется элементарно. Как показано в работе, данный класс вариаций в точности отвечает формулам приращения типа (6).

Обозначим, как и ранее, $\bar\Phi \doteq \Phi^{\bar u}$, $\Phi \doteq \Phi^u$ и т.д., и определим функцию $\bar{\boldsymbol{p}}\colon I \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ выражением (4). Замечая, что $x^{u \rhd_s \bar u}_T = \bar\Phi_{s,T}(\Phi_{0,s}(\mathrm{x}_0))$, представим приращение функционала $\mathcal{I}$ на паре $(u \rhd_s \bar u, \bar u)$ в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{I}[u \rhd_s \bar u] - \mathcal{I}[\bar u] &\doteq \ell(x^{u \rhd_s \bar u}_T) - \ell(\bar x_T) \\ &\doteq \bar{\boldsymbol{p}}_s(\Phi_{0,s}(\mathrm{x}_0)) - \bar{\boldsymbol{p}}_0(\Phi_{0,0}(\mathrm{x}_0)) = \int_0^s \frac{d}{dt}\bar{\boldsymbol{p}}_t(\Phi_{0,t}(\mathrm{x}_0))\,dt, \end{aligned} \tag{12}$$

где последнее соотношение корректно ввиду липшицевости отображения $t \mapsto \bar{\boldsymbol{p}}_t(\Phi_{0,t}(\mathrm{x}_0)) \doteq \ell(\bar\Phi_{t,T} \circ \Phi_{0,t}(\mathrm{x}_0))$. Тогда (12) влечет при п.в. $s \in I$ равенство

$$\frac{d}{ds}\left(\mathcal{I}[u \rhd_s \bar u] - \mathcal{I}[\bar u]\right) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \bar{\boldsymbol{p}}_t(\Phi_{0,t}(\mathrm{x}_0)) \doteq \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \ell(\bar\Phi_{t,T} \circ \Phi_{0,t}(\mathrm{x}_0)), \tag{13}$$

т. е. подынтегральная функция в (12) характеризует чувствительность приращения целевого функционала задачи (P) к малому изменению параметра s. Следующий шаг сводится к вычислению производной (13) и опирается на понятие внешнего генератора потока Φ^u.

Рассмотрим банаховое пространство $BL \doteq BL(\mathcal{X})$ ограниченных липшицевых функций $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|\phi\|_{BL} = \max\big\{\|\phi\|_\infty, \mathrm{Lip}(\phi)\big\}$. Зафиксируем $u \in \mathcal{U}$, $\Phi \doteq \Phi^u$ и $t \in [0,T)$;

[22] Принятые в работе предположения носят избыточный характер, но, как правило, удовлетворены в приложениях и позволяют существенно упростить технические выкладки.

через $\boldsymbol{D}_t$ обозначим множество функций $\varphi \in BL(\mathcal{X})$, для которых определен предел

$$\mathfrak{L}_t\phi \doteq \lim_{h\to 0+} \frac{\phi\circ\Phi_{t,t+h} - \phi}{h} \quad \text{в} \quad C_b \doteq \big(C_b(\mathcal{X}), \|\cdot\|_\infty\big). \tag{14}$$

Утверждение 1.4 диссертации показывает, что $\boldsymbol{D}_t$ является подалгеброй $BL(\mathcal{X})$, содержит постоянные функции, а равенство (14) определяет линейное отображение $\mathfrak{L}_t\colon \boldsymbol{D}_t \to C_b$, удовлетворяющее правилу Лейбница $\mathfrak{L}_t(\varphi\psi) = \varphi\,\mathfrak{L}_t\psi + \psi\,\mathfrak{L}_t\varphi$ и оценке $\|\mathfrak{L}_t\|_{\mathcal{L}((\boldsymbol{D}_t,\|\cdot\|_{BL});C_b)} \leq \mathrm{Lip}(\Phi)$.

Удобно доопределить $\mathfrak{L}_t$ в точках $t \in I\setminus J$ нулевыми значениями и далее сузить операторы $(\mathfrak{L}_t, \boldsymbol{D}_t)_{t\in I}$ на универсальную область $\boldsymbol{D}$, не зависящую от t. В качестве $\boldsymbol{D}$ выбирается подалгебра BL, содержащая постоянные отображения и отделяющая точки пространства $\mathcal{X}$ (в широком смысле, алгебра Стоуна).

Предположение 1.2: *существуют подмножество $J \doteq J_\Phi \subseteq I$ полной меры, зависящее лишь от Φ, а также алгебра Стоуна $\boldsymbol{D} \subseteq BL$, такие что $\boldsymbol{D} \subseteq \bigcap_{t\in J}\boldsymbol{D}_t$. Более того, $\boldsymbol{D}$ инвариантно относительно Φ в смысле импликации: $\phi\in\boldsymbol{D} \implies \phi\circ\Phi_{s,t}\in\boldsymbol{D}\ \ \forall (s,t)\in\Delta$.*

Семейство $(\mathfrak{L},\boldsymbol{D}) \doteq (\mathfrak{L}_t,\boldsymbol{D})_{t\in I}$ назовем производящим для Φ или внешним генератором потока на $\boldsymbol{D}$. Оно заключает в себе ту информацию о динамике Φ, которая может быть получена в процессе наблюдения за эволюцией величин $\phi\circ\Phi_{s,t}$, $\phi\in\boldsymbol{D}$. В статистической механике класс $\boldsymbol{D}$ исполняет роль множества числовых характеристик неизвестного состояния, доступных для измерения в ходе эксперимента, а его элементы ϕ называют «наблюдаемыми». В нашем случае класс наблюдаемых состоит из функций, «равномерно дифференцируемых вдоль потока»; при работе с семействами функций возникает потребность в следующем усилении данного понятия: пусть $\mathcal{A}$ — заданное множество; семейство $(\phi_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset \boldsymbol{D}$ назовем равностепенно Φ-дифференцируемым, если выполнено условие

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\Big\|\phi_\alpha\circ\Phi_{t,t+h} - \phi_\alpha - h\,\mathfrak{L}_t\phi_\alpha\Big\|_\infty = 0 \qquad \forall\, t\in J.$$

Следующий шаг состоит в погружении исходной системы в двойственную пару линейных систем. Для этого вновь зафиксируем u и заметим, что всякое отображение $F\in C(\mathcal{X};\mathcal{X})$ порождает линейные операторы $F^\star$ и $F_\sharp$ на пространствах C_b и C_b':

$$F^\star\phi \doteq \phi\circ F, \quad \langle F_\sharp\mu,\phi\rangle \doteq \langle\mu, F^\star\phi\rangle, \quad \phi\in C_b,\ \mu\in C_b'.$$

В частности, потоку Φ^u отвечают линейные системы на указанных пространствах, действующие, соответственно, в обратном и прямом времени:

$$\boldsymbol{\Psi}^u_{t,s} \doteq (\Phi^u_{s,t})^\star, \quad \boldsymbol{\Phi}^u_{s,t} \doteq (\Phi^u_{s,t})_\sharp.$$

Эти системы оказываются сопряженными в смысле равенства $\langle\boldsymbol{\Phi}^u_{s,t}\mu,\phi\rangle = \langle\mu,\boldsymbol{\Psi}^u_{t,s}\phi\rangle$; пару $(\boldsymbol{\Phi}^u, C_b')$ называем супер-системой относительно $(\Phi^u,\mathcal{X})$, а $(\boldsymbol{\Psi}^u, C_b)$ — супер-сопряженной к последней. Даже если исходный поток Φ не имел явного дифференциального представления, таковым обладают порождаемые им супер-системы, суженные, соответственно, на $\boldsymbol{D}$ и на подходящее множество $\boldsymbol{M} \subset C_b'$. Последнее предполагаем замкнутым в топологии $\sigma(C_b', C_b)$, содержащим все меры Дирака δ_{x}, $\mathrm{x} \in \mathcal{X}$, и инвариантным относительно операторов $\boldsymbol{\Phi}_{s,t}^u$.

Для заданных $\ell \in \boldsymbol{D}$, $t \in (0,T]$ и $\vartheta \in \boldsymbol{M}$, положим

$$\xi_s \doteq \boldsymbol{\Psi}_{t,s}\ell = \ell \circ \Phi_{s,t}, \quad s \in [0,t]; \quad \boldsymbol{x}_\tau \doteq (\Phi_{0,\tau})_\sharp \vartheta, \quad \tau \in I.$$

Справедливы следующие факты.

Утверждение 1.6. 1) *Пусть выполнены Предположения 1.1 и 1.2. Тогда отображение* $s \mapsto \xi_s$ *липшицево в норме* $\|\cdot\|_\infty$ *с константой* $\mathrm{Lip}(\Phi)^2\,\mathrm{Lip}(\phi)$.

2) *Пусть дополнительно выполнено*

Предположение 1.3: *семейство* $(\boldsymbol{\Psi}_{t,s}\ell)_{(s,t)\in\Delta}$ *равностепенно* Φ*-дифференцируемо. Кроме того, существует такая константа* $M_\ell^{\mathfrak{L}} \geq 0$*, что для всех* $t \in (0,T]$ *и* $a, b \in [0,t]$ *справедливо*

$$\sup_{\tau \in J} \left\| \mathfrak{L}_\tau (\boldsymbol{\Psi}_{t,a} - \boldsymbol{\Psi}_{t,b})\ell \right\|_\infty \leq M_\ell^{\mathfrak{L}} |a-b|.$$

Тогда производная $\frac{d}{ds}\xi_s$ *в* C_b *определена при всех* $s \in J \cap [0,t]$ *и задается внешним генератором потока* Φ*:*

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \left\| \xi_{s+h} - \xi_s + h\mathfrak{L}_s \xi_s \right\|_\infty = 0, \quad s \in J \cap [0,t].$$

Теорема 1.1. *Пусть выполнены Предположения 1.1–1.3. Тогда верно следующее.*

1) *Функции* $t \mapsto \langle \boldsymbol{x}_t, \phi\rangle$, $\phi \in \boldsymbol{D}$*, липшицевы на* I *(каждое со своей константой); если* $\vartheta = \delta_{\mathrm{x}}$*, то кривая* $t \mapsto \delta_{\Phi_{0,t}(\mathrm{x})}$ *липшицева в норме* $\|\cdot\|_{BL'}$.

2) *Орбита* $(\boldsymbol{x}_t)_{t \in I}$ *ограничена в* C_b'.

3) *Функции* $t \mapsto \langle \boldsymbol{x}_t, \mathfrak{L}_t \phi\rangle$ *принадлежат* $L^\infty(I)$*, и для всех* $(s,t) \in \Delta$ *справедлива формула Ньютона-Лейбница*

$$\langle \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_s, \phi\rangle = \int_s^t \langle \boldsymbol{x}_\tau, \mathfrak{L}_\tau \phi\rangle\, d\tau.$$

Описанный прием, названный в диссертации принципом погружения, дает точное линейное представление нелинейного объекта; близкая идея канонической линеаризации лежит в основе хронологического исчисления.[23] Этот прием применяется далее к задаче (P) для получения точных формул приращения. Результатом являются обобщенная линейная постановка, аналогичная представленной выше задаче $(\boldsymbol{P})$ управления ансамблем ОДУ, и двойственная к ней задача. Поскольку речь теперь идет не об одном потоке, а о семействе $(\Phi^u)_{u\in\mathcal{U}}$, дальнейший анализ требует равномерных по u вариантов сделанных ранее предположений.

[23] Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В. Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление // Математический сборник. 1978. Т. 107, № 4. С. 467–532; Agrachev A. A., Sachkov Yu. L. Control Theory from the Geometric Viewpoint. Berlin; Heidelberg: Springer, 2004; Kipka R. J., Ledyaev Yu. S. Extension of chronological calculus for dynamical systems on manifolds // Journal of Differential Equations. 2015. Vol. 258, no. 5. P. 1765–1790.

Предположение 1.4: *потоки Φ^u, $u \in \mathcal{U}$, удовлетворяют Предположению 1.1 с общей константой Липшица $\mathrm{Lip}_{\mathcal{U}}(\Phi)$. Для каждого представителя класса $u \in \mathcal{U}$ определены алгебра Стоуна $\boldsymbol{D}^u \subset BL(\mathcal{X})$, инвариантная относительно Φ^u, и множество $J^u \subset I$ полной меры Лебега, такие что $\boldsymbol{D}^u \subset \bigcap_{t\in J^u} \boldsymbol{D}^u_t$; соответствующий внешний генератор обозначаем через $(\mathfrak{L}^u_t, \boldsymbol{D}^u)_{t\in I}$. Для любых $\bar u, u \in \mathcal{U}$ и $\phi \in \boldsymbol{D}^{\bar u} \cap \boldsymbol{D}^u$ семейство $\big((\bar\Phi_{s,t})^\star\phi\big)_{(s,t)\in\Delta}$ равностепенно Φ^u-дифференцируемо. Наконец, множество $\boldsymbol{D}^{\mathcal{U}} \doteq \bigcap_{u\in\mathcal{U}} \boldsymbol{D}^u$ отделяет точки пространства $\mathcal{X}$, и $\ell \in \boldsymbol{D}^{\mathcal{U}}$.*

Зафиксируем $\vartheta \in \boldsymbol{M}$ и поставим задачу динамической оптимизации

$$(\boldsymbol{P}) \doteq (\boldsymbol{P}_\vartheta) \qquad \inf\Big\{\mathcal{J}[u] \doteq \langle \boldsymbol{x}^u_T, \ell\rangle\colon\ u \in \mathcal{U}\Big\}, \quad \boldsymbol{x}^u_T = \boldsymbol{\Phi}^u_{0,T}(\vartheta),$$

линейную по соответствующей переменной состояния (для упрощения записи сохраняем прежние обозначения). Как и в случае ОДУ, вариант $(\boldsymbol{P}_{\delta_{\mathrm{x}_0}})$ этой задачи с начальным состоянием $\vartheta = \delta_{\mathrm{x}_0}$ эквивалентен (P) ввиду равенства $\mathcal{I}[u] \doteq \ell\big(x^u_T\big) = \langle \boldsymbol{x}^u_T, \ell\rangle \doteq \mathcal{J}[u]$ и установленных выше связей. Постановка $(\boldsymbol{P})$ названа в диссертации канонической (в классе $\boldsymbol{M}$), а ее специальный случай $(\boldsymbol{P}_{\delta_{\mathrm{x}_0}})$ — супер-формой задачи (P).

Рассмотрим теперь сопряженную к $(\boldsymbol{\Phi}^u, \boldsymbol{M})$ систему $(\boldsymbol{\Psi}^u, \boldsymbol{D}^{\mathcal{U}})$. Постоянство отображений $t \mapsto \langle \boldsymbol{x}^u_t, \boldsymbol{p}^u_t\rangle \doteq \big\langle \boldsymbol{\Phi}^u_{0,t}(\vartheta), \boldsymbol{\Psi}^u_{T,t}(\ell)\big\rangle$ влечет равенство

$$\mathcal{J}[u] \doteq \langle \boldsymbol{x}^u_T, \ell\rangle \doteq \langle \boldsymbol{x}^u_T, \boldsymbol{p}^u_T\rangle = \langle \boldsymbol{x}^u_0, \boldsymbol{p}^u_0\rangle \doteq \langle \vartheta, \boldsymbol{p}^u_0\rangle,$$

позволяющее переформулировать $(\boldsymbol{P})$ в терминах котраекторий $\boldsymbol{p}^u$, полностью исключив переменную $\boldsymbol{x}^u$:

$$(\boldsymbol{P}') \quad \inf\Big\{\mathcal{J}'[u] \doteq \langle \vartheta, \boldsymbol{p}^u_0\rangle\colon\ \ u \in \mathcal{U}\Big\}, \quad \boldsymbol{p}^u_0 = \boldsymbol{\Psi}^u_{T,0}(\ell).$$

Это задача оптимального управления линейной системой в обратном времени на предсопряженном пространстве; постановки $(\boldsymbol{P}')$ и $(\boldsymbol{P})$ имеют общие минимизирующие последовательности управлений, поэтому их естественно интерпретировать как взаимно двойственные. В частности, задача

$$(P') \doteq (\boldsymbol{P}'_{\delta_{\mathrm{x}_0}}) \qquad \inf\Big\{\mathcal{I}'[u] \doteq \langle \delta_{\mathrm{x}_0}, \boldsymbol{p}^u_0\rangle = \boldsymbol{p}^u_0(\mathrm{x}_0)\colon\ u \in \mathcal{U}\Big\}, \qquad \boldsymbol{p}^u_0 = \boldsymbol{\Psi}^u_{T,0}(\ell),$$

представляет собой двойственную к исходной задаче (P). Этот факт можно считать проявлением т. н. нестандартной или невыпуклой двойственности.[24]

Варьируя $\boldsymbol{M}$, можно получать различные варианты задачи $(\boldsymbol{P})$. Таким образом, принцип погружения служит не только инструментом анализа, но и источником новых нетривиальных математических постановок задач управления.

Как и выше, переход к линейной задаче $(\boldsymbol{P}_{\delta_{\mathrm{x}_0}})$ позволяет получить точную формулу

[24] Дыхта В. А. Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2014. № 11. С. 19–37; Clarke F., Nour C. Nonconvex Duality in Optimal Control // SIAM Journal on Control and Optimization. 2005. Vol. 43. P. 2036–2048.

приращения целевого функционала $\mathcal{I}$ исходной нелинейной задачи (P): рассмотрим произвольную пару допустимых управлений $(\bar{u}, u)$, первое из которых считаем опорным, а второму отводим роль управления спуска; следуя принятой договоренности, пишем

$$\boldsymbol{x}_t \doteq \boldsymbol{\Phi}^u_{0,t}(\vartheta) = (\Phi^u_{0,t})_\sharp\vartheta, \quad \bar{\boldsymbol{x}}_t \doteq \boldsymbol{\Phi}^{\bar{u}}_{0,t}(\vartheta) = (\bar{\Phi}_{0,t})_\sharp\vartheta; \quad \bar{\boldsymbol{p}}_t \doteq \bar{\boldsymbol{\Psi}}_{T,t}\ell = (\bar{\Phi}_{t,T})^\star\ell, \quad t \in I.$$

Утверждение 1.8. *Пусть выполнены условия Предположения 1.4. Тогда функция* $t \mapsto \langle \boldsymbol{x}_t, \bar{\boldsymbol{p}}_t\rangle$ *липшицева на* I*, и ее производная при п.в.* t *вычисляется по правилу*

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{x}_t, \bar{\boldsymbol{p}}_t\rangle = \langle \boldsymbol{x}_t, (\mathfrak{L}^u_t - \mathfrak{L}^{\bar{u}}_t)\bar{\boldsymbol{p}}_t\rangle.$$

Используя соотношения $\bar{\boldsymbol{p}}_T = \ell$, $\boldsymbol{x}_0 = \bar{\boldsymbol{x}}_0 = \vartheta$ и $\langle \bar{\boldsymbol{x}}_T, \bar{\boldsymbol{p}}_T\rangle = \langle \bar{\boldsymbol{x}}_0, \bar{\boldsymbol{p}}_0\rangle$, представим приращение $\Delta_u\mathcal{J}[\bar{u}] \doteq \mathcal{J}[u] - \mathcal{J}[\bar{u}]$ в виде

$$\Delta_u\mathcal{J}[\bar{u}] = \langle \boldsymbol{x}_T - \bar{\boldsymbol{x}}_T, \bar{\boldsymbol{p}}_T\rangle - \langle \boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}_0, \bar{\boldsymbol{p}}_0\rangle = \langle \boldsymbol{x}_T, \bar{\boldsymbol{p}}_T\rangle - \langle \boldsymbol{x}_0, \bar{\boldsymbol{p}}_0\rangle = \int_I \frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{x}_t, \bar{\boldsymbol{p}}_t\rangle\, dt.$$

Отсюда и из Утверждения 1.8 вытекает точная формула приращения функционала канонической задачи:

$$\Delta_u\mathcal{J}[\bar{u}] = \int_I \Big\langle \boldsymbol{x}_t, (\mathfrak{L}^u_t - \mathfrak{L}^{\bar{u}}_t)\, \bar{\boldsymbol{p}}_t\Big\rangle\, dt,$$

откуда при $\vartheta = \delta_{\mathrm{x}_0}$ следует искомое представление:

$$\Delta_u\mathcal{I}[\bar{u}] = \int_I \Big\{(\mathfrak{L}^u_t - \mathfrak{L}^{\bar{u}}_t)\bar{\boldsymbol{p}}_t\Big\}(x_t)\, dt. \tag{15}$$

Выражение (15) исполняет ту же роль в рассматриваемом классе постановок, что и формула Вейерштрасса в задачах вариационного исчисления;[25] оно носит универсальный характер и сводит проблему вариационного анализа задачи (P) к проверке требуемой регулярности и вычислению внешнего генератора фазового потока. В случае, когда последний зависит от управления поточечным образом, т. е. при п.в. t корректна запись $\mathfrak{L}^u_t = \mathfrak{L}_t(u_t)$, формулу (15) можно переписать в виде, аналогичном (7):

$$\Delta_u\mathcal{I}[\bar{u}] = \int_I \Big[\bar{H}_t(x_t, u_t) - \bar{H}_t(x_t, \bar{u}_t)\Big]\, dt, \qquad \bar{H}_t(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \doteq \Big(\mathfrak{L}_t(\mathrm{u})\, \bar{\boldsymbol{p}}_t\Big)(\mathrm{x}). \tag{16}$$

Отсюда сразу следуют структура управления спуска и необходимое условие оптимальности опорного процесса: достаточно заметить, что подынтегральное выражение в (16) представляет собой разность значений функции $\bar{H}_t(x_t, \cdot)$ в точках u_t и $\bar{u}_t$. Тогда выбор нового управления

[25] Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Основы вариационного исчисления; Том 1. Часть 2. ОНТИ-НКТИ, 1935. 400 с.

u из условия

$$\bar{H}_t(x^u_t, u_t) = \min_{\mathrm{u}\in U} \bar{H}_t(x^u_t, \mathrm{u}) \text{ для п.в. } t \in I, \quad x \doteq x^u, \tag{17}$$

обеспечивает неравенство $\Delta_u \mathcal{I}[\bar{u}] \leq 0$.

Утверждение 1.9. *Пусть, в дополнение ко всем сделанным ранее предположениям, функция* $\mathrm{u} \mapsto \bar{H}_t(\mathrm{x}, \mathrm{u})$ *аффинна, а оператор* $u \mapsto x^u$ *непрерывен как отображение* $\mathcal{U} \to C(I; \mathcal{X})$. *Тогда множество решений уравнения* (17) *непусто.*

Элементы указанного множества называем управлениями сравнения с $\bar{u}$. Если последнее оптимально, то для каждого управления сравнения интеграл в точной формуле приращения не может быть отрицательным. Из этого вытекает

Теорема 1.2. *Пусть* $\bar{u}$ *оптимально в задаче* (P). *Тогда для всякого управления сравнения* u *выполнено равенство*

$$\bar{H}_t(x^u_t, \bar{u}_t) = \min_{\mathrm{u}\in U} \bar{H}_t(x^u_t, \mathrm{u}) \text{ для п.в. } t \in I \tag{18}$$

и, кроме того, $\mathcal{I}[u] = \mathcal{I}[\bar{u}]$.

Теорема 1.2 выражает неизвестный ранее принцип оптимальности, отличный как от канонических необходимых условий,[26] так и от их позиционных усилений.[27] Ряд примеров, иллюстрирующих эффект отбраковки условиями такого типа неоптимальных экстремалей Понтрягина, приведен в работах.[28] Примеры, подтверждающие факт усиления Теоремой 1.2 всех перечисленных условий, приведены в пп. 2.3.2 и 3.2.3 диссертации.

Допустимое управление $\bar{u}$, удовлетворяющее условию (18) со всеми своими управлениями сравнения, называем позиционной экстремалью. В завершающей части главы дается интерпретация свойства позиционной экстремальности в контексте общей теории экстремума. Для этого динамическая постановка (P) трактуется как задача математического программирования на множестве достижимости $\mathcal{R}_T(\mathrm{x}_0) = \left\{x^u_T \colon u \in \mathcal{U}\right\} \subset \mathcal{X}$ системы $(\Phi^u)_{u\in\mathcal{U}}$ из точки x_0 в момент времени T:

$$(MP) \qquad \ell(\mathrm{x}) \to \inf, \quad \mathrm{x} \in \mathcal{R}_T(\mathrm{x}_0).$$

[26] Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1977; Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд. М.: Наука, 1983. 392 с.; Габасов Р. Ф., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.

[27] Дыхта В. А. Вариационные условия оптимальности с позиционными управлениями спуска, усиливающие принцип максимума // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2014. Т. 8. С. 86–103; Дыхта В. А. Позиционный принцип минимума: вариационное усиление понятий экстремальности в оптимальном управлении // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 19–39.

[28] Дыхта В. А. Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2014. № 11. С. 19–37; Дыхта В. А. Слабо монотонные решения неравенства Гамильтона–Якоби и условия оптимальности с позиционными управлениями // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 31–49; Дыхта В. А. Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 73–86; Дыхта В. А. Позиционный принцип минимума для квазиоптимальных процессов в задачах управления с терминальными ограничениями // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2017. Т. 19. С. 113–128.

Рассмотрим отображение $s \mapsto \gamma_s \doteq \gamma^u_s = x_T^{u \triangleright_s \bar{u}}$, порожденное вариацией (11); оно задает параметризацию кривой на $\mathcal{R}_T(\mathrm{x}_0)$, соединяющей точки $\bar{x}_T \doteq x_T^{u \triangleright_0 \bar{u}} = \gamma_0$ и $x_T \doteq x_T^{u \triangleright_T \bar{u}} = \gamma_T$.

Определение 1.9. Будем говорить, что управление $\bar{u}$ доставляет в задаче (P) локальный Т-минимум, если из точки $\bar{x}_T$ невозможен монотонный спуск по абсолютно непрерывным кривым на множестве $\mathcal{R}_T(\mathrm{x}_0)$, т. е. не существует функции $\gamma\colon I \to \mathcal{R}_T(\mathrm{x}_0)$ указанного класса, одновременно удовлетворяющей всем условиям $\gamma_0 = \bar{x}_T$; $\ell(\gamma_s) \geq \ell(\gamma_t)\ \forall s \leq t$, и $\ell(\gamma_T) < \ell(\gamma_0)$.

Теорема 1.2 нацелена на проверку именно указанного типа оптимальности; для этого используется специальный класс липшицевых кривых γ^u со свойством гарантированного монотонно невозрастания вдоль ℓ, которое обеспечено условием (17):

$$\frac{d}{dt}\ell(\gamma^u_t) = \frac{d}{dt}\mathcal{I}[u \triangleright_t \bar{u}] \doteq \bar{H}_t(x_t, u_t) - \bar{H}_t(x_t, \bar{u}_t) \leq 0 \ \text{ п.в. } t \in I.$$

В свою очередь, (18) — это требование того, чтобы никакая из указанных кривых γ^u не спускалась за время I на множество $\ell(\bar{x}_T)$-подуровня функции ℓ, т. е. чтобы все γ^u оставались в множестве $\{\mathrm{x} \in \mathcal{X}\colon \ell(\mathrm{x}) = \ell(\bar{x}_T)\}$. Очевидно, допустимое управление $\bar{u}$, доставляющее в задаче (P) локальный Т-минимум, является позиционной экстремалью. Отмечается также, что понятие Т-минимума сильнее понтрягинского (сильного) минимума, и именно оно отражает фактическую «концевую» природу изучаемой постановки.

Во второй главе изложенный выше общий подход применяется к задачам управления обыкновенными и стохастическими системами, а также их ансамблями. В первой части роль множества $\mathcal{X}$ исполняет вещественное банахово пространство $\boldsymbol{B}$.

Через $C^1_b(\boldsymbol{B})$ обозначаем множество функций $\phi \in C_b(\boldsymbol{B})$, производная Фреше $D\phi(\mathrm{x}) \in \boldsymbol{B}'$ которых существует при всех $\mathrm{x} \in \boldsymbol{B}$, непрерывна как отображение $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ и ограничена: $\|D\phi\|_\infty \doteq \sup_{\mathrm{x}\in\boldsymbol{B}} \|D\phi(\mathrm{x})\|_{\boldsymbol{B}'} < \infty$. Включение $\phi \in C^{1,1}_b(\boldsymbol{B})$ означает, что $\phi \in C^1_b(\boldsymbol{B})$ и найдется такая константа $\mathrm{Lip}(D\phi) \geq 0$, что

$$\|D\phi(\mathrm{x}) - D\phi(\mathrm{y})\|_{\boldsymbol{B}'} \leq \mathrm{Lip}(D\phi)\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|_{\boldsymbol{B}}, \qquad \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \boldsymbol{B}.$$

Классы $C^1_b(\boldsymbol{B};\boldsymbol{B})$ и $C^{1,1}_b(\boldsymbol{B};\boldsymbol{B})$ отображений $F\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}$ определяются по аналогии в терминах производной Фреше $DF\colon \boldsymbol{B} \to \mathcal{L}(\boldsymbol{B};\boldsymbol{B})$ с соответствующими константами регулярности.

Показано, что множество $C^{1,1}_b(\boldsymbol{B})$ отвечает условиям Предположения 1.2, предъявляемым к универсальному классу наблюдаемых $\boldsymbol{D}$, т. е. является алгеброй, содержит постоянные функции и отделяет точки пространства $\boldsymbol{B}$.

§ 2.1 диссертации посвящен потокам решений ОДУ, порожденным неавтономным векторным полем $f\colon I \times \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}$, $(t, \mathrm{x}) \mapsto f_t(\mathrm{x})$. Предположим, что $t \mapsto f_t(\mathrm{x})$ сильно измерима при каждом $\mathrm{x} \in \boldsymbol{B}$, отображения $\mathrm{x} \mapsto f_t(\mathrm{x})$ липшицевы при п.в. $t \in I$ с общей константой $\mathrm{Lip}(f)$, и существует число $\|f\|_\infty$, такое что $\|f_t(\mathrm{x})\|_{\boldsymbol{B}} \leq \|f\|_\infty$ при всех $\mathrm{x} \in \boldsymbol{B}$ и п.в. $t \in I$.

Утверждение 2.2. *При указанных условиях интегральное в смысле Бохнера уравнение*

$$\Phi_{s,t}(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + \int_s^t f_\tau(\Phi_{s,\tau}(\mathrm{x}))\, d\tau$$

имеет при всех $(s, \mathrm{x}) \in [0, T) \times \boldsymbol{B}$ единственное решение $t \mapsto \Phi_{s,t}(\mathrm{x})$ класса $C([s, T]; \boldsymbol{B})$, а порожденное им семейство $\Phi = (\Phi_{s,t})_{(s,t)\in\Delta}$ образует поток $(\Phi, \boldsymbol{B})$, удовлетворяющий Предположению 1.1. Если, кроме того, найдется подмножество $J \subset [0, T)$ полной меры Лебега, для которого

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \sup_{\mathrm{x}\in\boldsymbol{B}} \left\| \int_t^{t+h} [f_\tau(\mathrm{x}) - f_t(\mathrm{x})]\, d\tau \right\|_{\boldsymbol{B}} = 0, \quad t \in J, \tag{19}$$

то внешний генератор потока $(\Phi, \boldsymbol{B})$ определен на универсальной алгебре Стоуна $\boldsymbol{D} \doteq C_b^{1,1}(\boldsymbol{B})$ выражением

$$(\mathfrak{L}_t \phi)(\mathrm{x}) = D\phi(\mathrm{x})[f_t(\mathrm{x})].$$

Если же $f_t \in C_b^1(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{B})$ при п.в. $t \in I$, соответствующие константы $\|f\|_\infty$, $\|Df\|_\infty$ ограничены равномерно, а $t \mapsto Df_t(\mathrm{x})$, $I \to \mathcal{L}(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{B})$, сильно измеримо при каждом x, то $\mathfrak{L}_t(\boldsymbol{D}) \subset BL(\boldsymbol{B})$, причем соответствующие оценки не зависят от t; вместе с предыдущим пунктом это гарантирует выполнение Предположения 1.2.

Наконец, пусть $\bar{f} \colon I \times \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}$ — другое поле, удовлетворяющее гипотезам предыдущих пунктов с соответствующим множеством $\bar{J} \subseteq I$ полной меры и константами регулярности $\mathrm{Lip}(\bar{f}) \geq 0$ и $\|\bar{f}\|_\infty \geq 0$, и пусть $\bar{f}_t \in C_b^{1,1}(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{B})$ для п.в. $t \in I$ с константами $\|D\bar{f}\|_\infty, \mathrm{Lip}(D\bar{f}) \geq 0$, а $t \mapsto D\bar{f}_t(\mathrm{x})$, $I \to \mathcal{L}(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{B})$, сильно измерима при каждом x. Обозначим через $\bar{\Phi}$ поток $\bar{f}$ и зафиксируем элемент $\phi \in \boldsymbol{D}$. В этом случае семейство $(\phi_\alpha \doteq \phi\circ\bar{\Phi}_\alpha)_{\alpha\doteq(a,b)\in\Delta}$ равностепенно Φ-дифференцируемо; в частности, $\boldsymbol{D}$ является $\bar{\Phi}$-инвариантным. Вместе с предположениями предыдущего пункта относительно $\bar{f}$ это означает выполнение Предположения 1.4.

Условия Утверждения 2.2 легко проверяются в ряде случаев, когда поле f имеет управляемую структуру $f_t(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x}, u_t)$, $u \in \mathcal{U}$, где класс $\mathcal{U}$ отвечает общему определению первой главы, а $g \colon \boldsymbol{B} \times U \to \boldsymbol{B}$ непрерывна в топологии $\|\cdot\|_{\boldsymbol{B}} \otimes d_U$. В частности, (19) справедливо при любой из следующих структурных гипотез:

1) пространство $\boldsymbol{U}$ рефлексивно и сепарабельно, а g липшицева по u в норме $\|\cdot\|_{\boldsymbol{U}'}$ с константой, не зависящей от x;

2) $\boldsymbol{U}$ сепарабельно, и существует метрика d_U, задающая на $U \subset \boldsymbol{U}'$ топологию $\sigma(\boldsymbol{U}', \boldsymbol{U})$, относительно которой функция $\mathrm{u} \mapsto g(\mathrm{x}, \mathrm{u})$ липшицева с константой, не зависящей от x; это так, например, если $\boldsymbol{U} = C(K)$, $U = \mathcal{P}(K)$, где (K, d_K) — метрический компакт, и

$$g(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \doteq \int_K G(\mathrm{x}, \kappa)\, d\mathrm{u}(\kappa),$$

где $G\colon \boldsymbol{B}\times K\to\boldsymbol{B}$ непрерывна, ограничена константой $M_G\geq 0$ и липшицева по κ с равномерной по x постоянной, не превосходящей M_G. Последний случай возникает в теории скользящих режимов управления, и ему уделяется особое внимание в § 2.1.2. В частности, отмечается, что класс $C_b^{1,1}(\boldsymbol{B})$ удовлетворяет условиям, предъявляемым к множеству $\boldsymbol{D}^{\mathcal{U}}$ в Предположении 1.4.

§ 2.3.1 посвящен связи точной формулы приращения с необходимыми условиями высших порядков в конечномерном случае $\boldsymbol{B}=\mathbb{R}^n$. Предполагая достаточную гладкость функции $\mathrm{x}\mapsto\boldsymbol{p}_t(\mathrm{x})$, разложим ее в ряд Тейлора в окрестности опорной траектории $\bar{x}$:

$$\bar{\boldsymbol{p}}_t(\mathrm{x})=\bar{\boldsymbol{p}}_t(\bar{x}(t))+\nabla\bar{\boldsymbol{p}}_t(\bar{x}(t))(\mathrm{x}-\bar{x}(t))+\frac{1}{2}(\mathrm{x}-\bar{x}(t))^T\nabla^2\bar{\boldsymbol{p}}_t(\bar{x}(t))(\mathrm{x}-\bar{x}(t))+\cdots$$

Замечая, что композиция $\nabla\bar{\boldsymbol{p}}_t\circ\bar{x}$ совпадает с опорной котраекторией $\bar{p}$ ($\doteq\bar{p}^1$), а матричная функция $\bar{p}^2\doteq\nabla^2\bar{\boldsymbol{p}}\circ\bar{x}$ совпадает с импульсом Р. Ф. Габасова, дадим следующее общее

Определение 2.1: *Сопряженной к траектории $\bar{x}$ порядка $k\in\mathbb{N}$ назовем композицию $\bar{p}^k=\nabla^k\bar{\boldsymbol{p}}\circ\bar{x}$, в которой ∇^k обозначает симметрический тензор дифференциальных операторов с компонентами* $\left(\frac{\partial^k}{\partial \mathrm{x}_{i_1}\cdots\partial \mathrm{x}_{i_k}}\right)\Big|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}$.

Компоненты функций $t\mapsto\bar{p}_t^k\doteq\nabla^k\bar{\boldsymbol{p}}_t(\bar{x}_t)$ удовлетворяют краевым задачам Р. Ф. Габасова с концевыми условиями $\bar{p}_T^k=\nabla^k\ell(\bar{x}_T)$.[29] В аффинном по управлению случае указанные представления позволяют выписать вариацию $\Delta_u^k\mathcal{I}[\bar{u}]$ функционала $\mathcal{I}$ в точке $\bar{u}$ в классе слабых возмущений управления до любого конечного порядка $k\geq 1$. При этом структура функции $\bar{\boldsymbol{p}}$ в окрестности траектории $\bar{x}$ включает информацию о всех «высших» сопряженных $\bar{p}^k$.

В завершение раздела обсуждается перенос аппарата точных формул приращения на задачи стохастического управления. Пусть класс $\mathcal{U}$ удовлетворяет общей конструкции Определения 1.1 с множествами $(\boldsymbol{U},U)$, и заданы отображения $\ell\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $R\colon I\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}$, $f\colon I\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$, $\sigma\colon I\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^{n\times k}$; $W=(W^j)_{j=1}^k$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, заданный на полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ и прогрессивно измеримый относительно естественной фильтрации $(\mathcal{F}_t^W)_{t\in I}$, а $X_0\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ — независимая от $\mathcal{F}_T^W$ случайная величина. Для заданных $\zeta\colon I\times\mathbb{R}^n\times U\to Z, (t,\mathrm{x},\kappa)\mapsto\zeta_t[\kappa](\mathrm{x})$, и $u\in\mathcal{U}$ пишем $\zeta_t^u(\mathrm{x})\doteq\zeta_t[u_t](\mathrm{x})$; так определяются функции R^u, f^u и σ^u.

Задача оптимального стохастического управления имеет вид

$$(SP)\quad \inf\left\{\mathcal{I}[u]\doteq\mathbb{E}\left[\ell(X_T^u)+\int_I R_\tau^u(X_\tau^u)\,d\tau\right]\,:\,u\in\mathcal{U}\right\},$$

где X^u есть решение стохастического уравнения Ито (СДУ)

$$X_t^u=X_0+\int_0^t f_\tau^u(X_\tau^u)\,d\tau+\int_0^t\sigma_\tau^u(X_\tau^u)\,dW_\tau,\qquad t\in I.$$

---

[29] Габасов Р. Ф. Об оптимальности особых управлений // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, № 6. С. 1000–1011.

Решением СДУ понимается в сильном смысле.[30] В § 2.4.2 выделены два класса управляющих функций. Первый, обозначаемый $\mathcal{U}_M$, образован марковскими стратегиями[31] $(t,\omega) \mapsto u_t(X_t(\omega))$, $u \in L^\infty_{w^*}(I; L^\infty(\mathbb{R}^n; U))$. Второй $\mathcal{U}_R$ отвечает открытому контуру $u_t(\omega) \equiv u(t)$, $u \in L^\infty(I; U)$; такие управления мы называем робастными.

Предположение 2.2: *функция $\ell \in C^2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет квадратичному условию роста: $|\ell(\mathrm{x})| \leq M_\ell(1 + |\mathrm{x}|^2)$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$, а X_0 интегрируема с квадратом. Кроме того, в зависимости от используемого класса воздействий выполнено одно из условий.*

(A_M) *Функции f и R ограничены и измеримы по Борелю, а $\sigma \equiv \sqrt{2\beta}\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, $\beta > 0$.*

(A_R) *Функции R, f, σ измеримы по t при всех (x, κ), непрерывны по (x, κ) при п.в. t и липшицевы по x равномерно по (t, κ); кроме того, функция $t \mapsto \sup_{\kappa \in U}\big(|f_t(0,\kappa)| + \|\sigma_t(0,\kappa)\|_{\mathbb{R}^n}\big)$ существенно ограничена на I.*

Предположения (A_R) обеспечивают существование и единственность сильного решения СДУ при любом $u \in \mathcal{U}_R$. В случае (A_M) поле дрейфа f^u, $u \in \mathcal{U}_M$, вообще говоря, разрывно по x, однако сильное решение существует и единственно в сильном смысле.[32]

Погружение задачи (SP) состоит в переходе к динамике законов распределения случайных величин X_t^u. Канонической для (SP) выступает постановка

$$(\boldsymbol{SP}) \quad \inf\left\{\mathbb{E}_{\mu_T^u}\ell + \int_I \mathbb{E}_{\mu_\tau^u}[R_\tau^u]\,d\tau : u \in \mathcal{U}\right\}, \quad \mu_t^u = \mathrm{Law}(X_t^u).$$

Согласно классической лемме Ито функция $t \mapsto \mu_t^u$ является (при известных условиях[33], единственным) слабым* решением задачи Коши для линейного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t \mu = (\mathcal{L}_t^u)' \mu, \qquad \mu_t\big|_{t=0} = \vartheta \doteq \mathrm{Law}(X_0),$$

где $(\mathcal{L}_t^u)'$ есть формально сопряженный к дифференциальному оператору

$$\mathcal{L}_t^u\,\phi \doteq \nabla_{\mathrm{x}}\phi \cdot f_t^u + \mathrm{Tr}\left(\mathrm{D}_t^u\ \nabla^2_{\mathrm{xx}}\phi\right);$$

Tr обозначает след матрицы, и $\mathrm{D}_t^u \doteq \frac{1}{2}\,\sigma_t^u\,(\sigma_t^u)^{\mathrm{T}}$. Обозначим через $J = J_{f,\sigma,u} \subseteq I$ множество всех t, в которых определены функции (f_t^u, σ_t^u); это подмножество зависит лишь от (f, σ) и представителя класса u, и имеет меру Лебега всего отрезка I, поэтому операторы семейства $(\mathcal{L}_t^u)_{t \in J}$ можно сузить на общее плотное подмножество $C_c^2(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$.

Точная формула приращения в задаче (SP) может быть получена в рамках общей тео-

---

[30] См. Øksendal B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010.

[31] Крылов Н. В. Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977. 400 с.

[32] Веретенников А. Ю. О сильных решениях и явных формулах для решений стохастических дифференциальных уравнений // Математический сборник. 1980. Т. 111(153), № 3. С. 434–452.

[33] Bogachev V. I., Da Prato G., Röckner M., Shaposhnikov S. V. On the uniqueness of solutions to continuity equations // Journal of Differential Equations. 2015. Vol. 259, no. 8. P. 3854–3873; Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M., Shaposhnikov S. V. Fokker–Planck–Kolmogorov Equations. Providence: American Mathematical Society, 2015.

рии стохастических процессов, без перехода к погружению. Для простоты ограничимся случаем функционала Майера и неуправляемой диффузии: $R \equiv 0$, а σ не зависит от u.

Пусть $\bar{u}, u \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_M$ или $\mathcal{U}_R$. Рассмотрим вариацию $u \triangleright_s \bar{u}$ вида (11) и соответствующую кривую $s \mapsto \gamma_s \doteq X_T^{u \triangleright_s \bar{u}} = \bar{X}_{s,T}(X_s)$. Стандартные оценки моментов и квадратичное условие роста функции ℓ гарантируют, что отображение $s \mapsto \mathbb{E}\ell(\gamma_s)$ абсолютно непрерывно на I, и

$$\Delta\mathcal{I} = \mathcal{I}[u] - \mathcal{I}[\bar{u}] = \int_I \frac{d}{ds}\mathbb{E}\ell(\gamma_s)\, ds.$$

Пусть $\bar{\boldsymbol{p}}$ является слабым решением уравнения Колмогорова

$$\{\partial_t + \mathcal{L}_t^{\bar{u}}\}\boldsymbol{p} = 0, \qquad \boldsymbol{p}_T = \ell.$$

Тогда справедливо представление $\bar{\boldsymbol{p}}_s(\mathrm{x}) \doteq \mathbb{E}\,\ell(\bar{X}_{s,T}(\mathrm{x})),\ (s, \mathrm{x}) \in I \times \mathbb{R}^n$, и закон последовательных математических ожиданий дает: $\mathbb{E}\,\bar{\boldsymbol{p}}_s(X_s) = \mathbb{E}\,\mathbb{E}[\ell(\gamma_s) \mid X_s] = \mathbb{E}\,\ell(\gamma_s)$. Вновь применяя лемму Ито и пользуясь теоремой о дифференцировании под знаком интеграла Лебега и стандартными свойствами мартингалов, вычисляем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mathbb{E}\ell(\gamma_s) &= \mathbb{E}\left[\{\partial_s + \mathcal{L}_s^u\}\,\bar{\boldsymbol{p}} \circ X_s\right] = \mathbb{E}\left[\left\{\mathcal{L}_s^u - \mathcal{L}_s^{\bar{u}}\right\}\bar{\boldsymbol{p}}_s(X_s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\nabla_{\mathrm{x}}\bar{\boldsymbol{p}}_s(X_s) \cdot \left(f_s^u - f_s^{\bar{u}}\right)(X_s)\right]. \end{aligned}$$

Определим функционал Понтрягина $H_s^u(\mathrm{x}, \psi) \doteq \psi \cdot f_s^u(\mathrm{x})$ и положим $\bar{H}_s^u \doteq H_s^u\big|_{\psi \doteq \nabla_{\mathrm{x}}\bar{\boldsymbol{p}}_s(\mathrm{x})}$. Тогда можно переписать формулу приращения в следующих эквивалентных формах:

$$\Delta\mathcal{I} = \int_I \mathbb{E}\left[\bar{H}_s^u(X_s) - \bar{H}_s^{\bar{u}}(X_s)\right] ds = \int_I \mathbb{E}^{\mu_s}\left[\bar{H}_s^u - \bar{H}_s^{\bar{u}}\right] ds = \int_I \left\langle \mu_s, \left[\bar{H}_s^u - \bar{H}_s^{\bar{u}}\right]\right\rangle ds.$$

Из полученных выражений следуют позиционные принципы оптимальности в указанных классах стратегий u. Дальнейший вариационный анализ в точности следует схеме предыдущих разделов при подходящей структуре поля дрейфа.

Третья глава посвящена задачам управления нелокальными уравнениями неразрывности и баланса на пространствах мер. Этот раздел существенно использует аппарат анализа и дифференциального исчисления в пространствах мер.[34]

Рассмотрим множество $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}(\boldsymbol{Q})$ вероятностных мер на вещественном сепарабельном банаховом пространстве $\boldsymbol{Q}$; это множество наделяется топологией $\sigma(C_b'(\boldsymbol{Q}), C_b(\boldsymbol{Q}))$, которая, в свою очередь, метризуется функцией $d_{BL'}(\mu, \nu) = \|\mu - \nu\|_{BL'}$.[35] Образом меры $\mu \in \mathcal{P}$ при

[34] Kolokoltsov V. N. Nonlinear Markov Processes and Kinetic Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2010; Cardaliaguet P. Notes on Mean Field Games. From P.-L. Lions' lectures at Collège de France, 2013; Cardaliaguet P., Delarue F., Lasry J.-M., Lions P.-L. The Master Equation and the Convergence Problem in Mean Field Games. Princeton: Princeton University Press, 2019.

[35] Bogachev V. I. Weak Convergence of Measures. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 234. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2018.

отображении $X \in C(\boldsymbol{Q};\boldsymbol{Q})$ называют меру $X_\sharp\mu \in \mathcal{P}$, определяемую действием $\langle X_\sharp\mu, \phi\rangle = \langle \mu, \phi\circ X\rangle$, $\phi \in C_b(\boldsymbol{Q})$.

Пусть $\boldsymbol{\phi} \in C_b(\mathcal{P})$. Зафиксируем $\mu \in \mathcal{P}$ и предположим, что для всякой $\nu \in \mathcal{P}$ функция $\varepsilon \mapsto \boldsymbol{\phi}(\mu+\varepsilon(\nu-\mu))$ имеет правую производную в нуле. Предположим, существует отображение $\boldsymbol{d\phi}(\mu) \in C_b(\boldsymbol{Q})$, для которого

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0+}\boldsymbol{\phi}(\mu+\varepsilon(\nu-\mu)) = \langle \nu-\mu, \boldsymbol{d\phi}(\mu)\rangle \doteq \int_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{d\phi}(\mu)\, d(\nu-\mu)$$

при всех $\nu \in \mathcal{P}$. Это отображение, называемое вариационной производной $\boldsymbol{\phi}$ в точке μ, определено с точностью до аддитивной константы; далее используется нормировка $\langle \mu, \boldsymbol{d\phi}(\mu)\rangle = 0$.

Допустим, что $\boldsymbol{d\phi}(\mu)$ дифференцируемо по Фреше в точке $q \in \boldsymbol{Q}$. Внутренней производной функции $\boldsymbol{\phi}$ на паре (μ, q) называют линейный ограниченный оператор $\boldsymbol{d}_\mu\boldsymbol{\phi}(\mu)(q)\colon \boldsymbol{Q} \to \mathbb{R}$, определенный условием $\boldsymbol{d}_\mu\boldsymbol{\phi}(\mu)(q) \doteq D\{\boldsymbol{d\phi}(\mu)\}(q)$. Через $\boldsymbol{C}_b^1(\mathcal{P})$ обозначаем совокупность функций $\boldsymbol{\phi} \in C_b(\mathcal{P})$, внутренняя производная которых существует при всех (μ, q) и удовлетворяет условиям:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{(q,v,\mu)\in \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{Q}_\varepsilon\times\mathcal{P}} \frac{1}{\varepsilon}\Big|\boldsymbol{d\phi}(\mu)(q+v) - \boldsymbol{d\phi}(\mu)(q) - \boldsymbol{d}_\mu\boldsymbol{\phi}(\mu)(q)[v]\Big| = 0,$$

где $\boldsymbol{Q}_\varepsilon$ — замкнутый ε-шар пространства $\boldsymbol{Q}$ с центром в нуле; отображение $(q,\mu) \mapsto \boldsymbol{d}_\mu\boldsymbol{\phi}(\mu)(q)$, $\boldsymbol{Q}\times\mathcal{P} \to \boldsymbol{Q}'$, непрерывно в топологии произведения, и $\sup_{(q,\mu)\in\boldsymbol{Q}\times\mathcal{P}(\boldsymbol{Q})}\big\|\boldsymbol{d}_\mu\boldsymbol{\phi}(\mu)(q)\big\|_{\mathcal{L}(\boldsymbol{Q};\mathbb{R})} < \infty$. Включение $\boldsymbol{\phi} \in \boldsymbol{C}_b^{1,1+}$ означает, что $\boldsymbol{\phi} \in C_b^1(\mathcal{P})$, функция $\boldsymbol{\phi}$ липшицева в норме $\|\cdot\|_{BL'}$, и отображение $\mu \mapsto \boldsymbol{d}_\mu\boldsymbol{\phi}(\mu)$ липшицево в норме $\|\cdot\|_{BL'}$.

Аналогичным образом вводятся понятия вариационной и внутренней производных отображения $\mathcal{P} \to \boldsymbol{Q}$, а также соответствующие классы гладкости.

§ 3.2 посвящен уравнениям эволюции среднего поля. В нем представлены три до определенной степени эквивалентных способа описания процессов переноса и взаимодействия на пространстве вероятностных мер — т. н. лагранжева форма в терминах нелокального потока на подлежащем пространстве, эйлерова форма в виде нелинейного уравнения неразрывности на $\mathcal{P}$, а также ОДУ на подходящем банаховом пространстве отображений. Первые два представления стандартны[36], а третье обеспечивает непосредственное применение результатов первой главы к соответствующим задачам управления.

Существенно, что подлежащее пространство $\boldsymbol{Q}$ предполагается сепарабельным; при этом сепарабельным оказывается также метрическое пространство $(\mathcal{P}(\boldsymbol{Q}), d_{BL'})$.[37]

Лагранжева форма задается потоком нелокального векторного поля $F\colon I\times(\boldsymbol{Q}\times\mathcal{P}) \to \boldsymbol{Q}$, $(t,q,\mu) \mapsto F_t(q,\mu)$ на пространстве $\boldsymbol{Q}$.

[36] Cavagnari G., Lisini S., Orrieri C., Savaré G. Lagrangian, Eulerian and Kantorovich formulations of multi-agent optimal control problems: Equivalence and Gamma-convergence // Journal of Differential Equations. 2022. Vol. 322. P. 268–364. doi:10.1016/j.jde.2022.03.019.

[37] Dudley R. M. Real Analysis and Probability. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Pacific Grove, CA: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1989.

Предположение 3.1: *сечение* $t \mapsto F_t(q,\mu)$ *сильно измеримо при всех* $(q,\mu) \in \boldsymbol{Q} \times \mathcal{P}$; F *существенно ограничена, т.е.* $\|F\|_\infty \doteq \operatorname{ess\,sup}_{t\in I} \sup_{(q,\mu)\in\boldsymbol{Q}\times\mathcal{P}} \|F_t(q,\mu)\|_{\boldsymbol{Q}} < \infty$, *и*

$$\|F_t(q_1,\mu_1) - F_t(q_2,\mu_2)\|_{\boldsymbol{Q}} \le \operatorname{Lip}(F)\big(\|q_1-q_2\|_{\boldsymbol{Q}} + d_{BL'}(\mu_1,\mu_2)\big)$$

при всех $q_1,q_2 \in \boldsymbol{Q}$, $\mu_1,\mu_2 \in \mathcal{P}$ *и п.в.* $t \in I$.

Утверждение 3.2. *Пусть выполнено Предположение 3.1. Тогда верно следующее.*

1) *Интегральное в смысле Бохнера уравнение*

$$\Xi^\mu_{s,t}(q) = q + \int_s^t F_\tau\big(\Xi^\mu_{s,\tau}(q), (\Xi^\mu_{s,\tau})_\sharp\mu\big)\, d\tau$$

имеет при всех $0 \le s \le t \le T$, $q \in \boldsymbol{Q}$ *и* $\mu \in \mathcal{P}$ *единственное решение* $t \mapsto \Xi^\mu_{s,t}(q)$ *с тем свойством, что функция* $t \mapsto \Xi^\mu_{s,t} - \mathrm{id}_{\boldsymbol{Q}}$ *принадлежит классу* $C([s,T];\mathscr{B})$, $\mathscr{B} \doteq (C_b(\boldsymbol{Q};\boldsymbol{Q}), \|\cdot\|_\infty)$. *Отображение* $q \mapsto \Xi^\mu_{s,t}(q)$, $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$, *липшицево равномерно по* (s,t,μ); $t \mapsto \Xi^\mu_{s,t} - \mathrm{id}_{\boldsymbol{Q}}$, $I \to \mathscr{B}$, *липшицево равномерно по* (s,μ), *а* $\mu \mapsto \Xi^\mu_{s,t} - \mathrm{id}_{\boldsymbol{Q}}$, $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_{BL'}) \to \mathscr{B}$, *липшицево с константой, зависящей лишь от* F *и* T.

2) *Семейство* $(\Xi^\mu_{s,t})_{(s,t)\in\Delta,\,\mu\in\mathcal{P}}$ *удовлетворяет композиционным условиям*

$$\Xi^{(\Xi^\mu_{a,b})_\sharp\mu}_{b,c} \circ \Xi^\mu_{a,b} = \Xi^\mu_{a,c}, \qquad \Xi^\mu_{a,a} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{Q}};$$

такое семейство мы называем нелокальным потоком.

3) *Зафиксируем* μ *и рассмотрим поток* Φ^μ *на* $\boldsymbol{Q}$, *порожденный полем* $f^\mu_t(q) \doteq F_t(q,\mu)$:

$$\Phi^\mu_{s,t}(q) = q + \int_s^t F_\tau(\Phi^\mu_{s,\tau}(q),\mu)\, d\tau, \quad (s,t)\in\Delta,\ q\in\boldsymbol{Q}.$$

Пусть дополнительно выполнено условие дифференцируемости по Лебегу

$$\lim_{h\to0+}\frac1h \sup_{q\in\boldsymbol{Q}} \left\| \int_t^{t+h} \big(F_\tau(q,\mu) - F_t(q,\mu)\big)\, d\tau \right\| = 0 \ \text{при п.в. } t\in I.$$

Тогда для любого $\phi \in C^{1,1}_b(\boldsymbol{Q})$ *справедливо равенство*

$$\lim_{h\to0+}\frac1h \left\|\phi(\Xi^\mu_{t,t+h}) - \phi - hD\phi\big[F_t(\cdot,\mu)\big]\right\|_\infty = 0 \quad \text{для п.в. } t\in I. \tag{20}$$

Если предположить более сильное условие[38]

$$\lim_{h\to0+}\frac1h \sup_{(q,\mu)\in\boldsymbol{Q}\times\mathcal{P}} \left\| \int_t^{t+h} \big(F_\tau(q,\mu) - F_t(q,\mu)\big)\, d\tau \right\| = 0 \ \text{п.в. } t\in I, \tag{21}$$

[38] Измеримость выражения в левой части (21) как функции от t обеспечена ее композиционной непрерывностью и сепарабельностью $(\mathcal{P}, d_{BL'})$.

то сходимость в (20) *имеет равномерный по* μ *характер, т. е.*

$$\lim_{h\to 0+}\sup_{\mu\in\mathcal{P}}\frac{1}{h}\Big\|\phi(\Xi^{\mu}_{t,t+h})-\phi-hD\phi\big[F_t(\cdot,\mu)\big]\Big\|_{\infty}=0 \quad \textit{для п.в. } t\in I. \tag{22}$$

Пусть класс $\mathcal{U}$ отвечает общему определению Главы I, и $G\colon \boldsymbol{Q}\times\mathcal{P}\times U\to\boldsymbol{Q}$ — заданная функция. При каждом $u\in\mathcal{U}$ определим нелокальное векторное поле $F^u\colon I\times\boldsymbol{Q}\times\mathcal{P}\to\boldsymbol{Q}$ равенством $F^u_t(q,\mu)\doteq G(q,\mu,u_t)$ и рассмотрим соответствующее семейство нелокальных потоков $((\Xi^u)_{u\in\mathcal{U}},\boldsymbol{Q}),\ \Xi^u=(\Xi^{\mu,u}_{s,t})_{\mu\in\mathcal{P},\,(s,t)\in\Delta}$. Фиксируя $\vartheta\in\mathcal{P}$ и трактуя $\mathcal{U}$ как пространство управлений, поставим следующую задачу оптимизации:

$$(P_1)\qquad \inf\Big\{\mathcal{I}_1[u]\doteq\ell\left((x^u_T)_\sharp\vartheta\right)\,:\ u\in\mathcal{U}\Big\},\qquad x^u_T=\Xi^{\vartheta,u}_{0,T}.$$

Это первая из упомянутых выше интерпретаций задачи оптимального управления в среднем поле; она отличается от постановок главы 2 наличием нелокальных связей и не допускает применения общего подхода напрямую. Тем не менее, данную задачу удается свести к уже изученной постановке — управлению ОДУ на (вообще говоря, уже не сепарабельном) банаховом пространстве $\mathscr{B}\doteq C_b(\boldsymbol{Q};\boldsymbol{Q})$ ограниченных непрерывных векторных полей над $\boldsymbol{Q}$. В доказательстве соответствующих оценок используется стандартный прием перехода к эквивалентной норме в банаховом пространстве.[39]

Предположение 3.3: *отображение* $(q,\mu)\mapsto G(q,\mu,\mathrm{u})$ *липшицево в метрике* $d((q_1,\mu_1),(q_2,\mu_2))\doteq\|q_1-q_2\|_{\boldsymbol{Q}}+d_{BL'}(\mu_1,\mu_2)$ *с общей для* $\mathrm{u}\in U$ *константой;* $\mathrm{u}\mapsto G(q,\mu,\mathrm{u})$ *непрерывно в метрике* d_U *равномерно по* (q,μ)*; функция* G *ограничена на* $\boldsymbol{Q}\times\mathcal{P}\times U$.

Для фиксированных $\mu\in\mathcal{P}$, $u\in\mathcal{U}$ и $X\in\mathscr{B}$ положим:

$$\mathscr{F}^{\mu,u}_t(X)(q)\doteq G(\tilde X(q),\tilde X_\sharp\mu,u_t),\qquad \tilde X\doteq X+\mathrm{id}_{\boldsymbol{Q}}\,.$$

Утверждение 3.4. *Пусть выполнено Предположение 3.3. Верны следующие факты: отображение* $\mathscr{F}^{\mu,u}\colon(t,X)\mapsto\mathscr{F}^{\mu,u}_t(X)$ *сильно измеримо по* t *при каждом* X *и липшицево по* X *равномерно по* t*; для всех* $X\in\mathscr{B}$ *и п.в.* $t\in I$ *справедливо включение* $\mathscr{F}^{\mu,u}_t(X)\in\mathscr{B}$*;* $\mathscr{F}^{\mu,u}$ *ограничена на* $I\times\mathscr{B}$ *и задает поток* $\mathscr{X}\doteq\mathscr{X}^{\mu,u}$ *на банаховом пространстве* $\mathscr{B}$ *как семейство единственных решений обыкновенного интегрального в смысле Бохнера уравнения*

$$\mathscr{X}_{s,t}(X)=X+\int_s^t\mathscr{F}^{\mu,u}_\tau\big(\mathscr{X}_{s,\tau}(X)\big)\,d\tau. \tag{23}$$

Семейства $(\Xi^{\mu,u}_{s,t})$ *и* $(\mathscr{X}^{\mu,u}_{s,t})$ *связаны равенствами* $\Xi^{\mu,u}_{s,t}(q)=q+\Big(\mathscr{X}^{\mu,u}_{s,t}(0_{\mathscr{B}})\Big)(q)$*,* $q\in\boldsymbol{Q},\ \mu\in\mathcal{P}$*.*

Таким образом, к нелокальному потоку применимы утверждения § 2.1 о потоках решений ОДУ на банаховом пространстве.

[39] Толстоногов А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1986. 296 с.

Если, кроме того, G обладает производными по q и μ, то $\mathscr{F}_t^{\mu,u}$ имеет производную Фреше, допускающую явное представление

$$D\mathscr{F}_t^{\mu,u}(X)[V](q) = D_q G(\tilde{X}(q), \tilde{X}_\sharp\mu, u_t)[V(q)] + \int_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{D}_\mu G(\tilde{X}(q), \tilde{X}_\sharp\mu, u_t)(\tilde{X}(r))[V(r)]\, d\mu(r).$$

Это выражение дает явный вид производной правой части ОДУ на $\mathscr{B}$ и позволяет проверять условия гладкости в соответствующих утверждениях второй главы.

Обозначим $\mathscr{L}^\mu(X) \doteq \ell((\tilde{X})_\sharp\mu)$, $X \in \mathscr{B}$, $\mu \in \mathcal{P}$. Предположим, что $\ell \in \boldsymbol{C}_b^{1,1+}(\mathcal{P})$, и поставим задачу оптимального управления системой (23) с теми же данными $(\mathcal{U}, \vartheta, \ell, T)$:

$$(P_2) \qquad \inf\Big\{\mathcal{I}_2[u] \doteq \mathscr{L}^\vartheta(\mathscr{Y}_T):\ u \in \mathcal{U}\Big\}, \qquad \mathscr{Y}_T \doteq \mathscr{X}_{0,T}^{\vartheta,u}(0_{\mathscr{B}}).$$

Из установленных прежде связей следует, что (P_2) эквивалентна (P_1).

Пусть $\bar{u} \in \mathcal{U}$ — заданное опорное управление. Супер-сопряженная к опорному семейству траекторий $t \mapsto \bar{\mathscr{X}}_{0,t}(X)$, $X \in \mathscr{B}$, имеет здесь вид

$$\bar{\boldsymbol{p}}_t^\mu(X) \doteq \mathscr{L}(\bar{\mathscr{X}}_{t,T}(X)) \doteq \ell\Big(\big[\bar{\mathscr{X}}_{t,T}^\mu(X) + \mathrm{id}_{\boldsymbol{Q}}\big]_\sharp\mu\Big), \qquad (t, X) \in I \times \mathscr{B}, \quad \mu \in \mathcal{P},$$

и удовлетворяет при всех $(t, X) \in J^{\bar{u}} \times \mathscr{B}$ линейному уравнению

$$\partial_t \bar{\boldsymbol{p}}_t^\mu(X) + D\bar{\boldsymbol{p}}_t^\mu(X)\left[\mathscr{G}^\mu(X, \bar{u}_t)\right] = 0; \qquad \mathscr{G}^\mu(X, \mathrm{u})(q) \doteq G(\tilde{X}(q), \tilde{X}_\sharp\mu, \mathrm{u}).$$

Точная формула приращения (16) функционала задачи (P_2) на паре управлений $(\bar{u}, u)$, условие спуска и позиционный принцип оптимальности записываются в терминах функционала

$$\bar{H}_t(X, \mathrm{u}) \doteq \bar{H}_t^\mu(X, \mathrm{u}) \doteq D\bar{\boldsymbol{p}}_t^\mu(X)\left[\mathscr{G}^\mu(X, \mathrm{u})\right].$$

Определим отображение

$$(t, \mu) \mapsto \bar{\boldsymbol{\xi}}_t(\mu) \doteq \ell\Big(\big[\bar{\mathscr{X}}_{t,T}^\mu(0_{\mathscr{B}}) + \mathrm{id}_{\boldsymbol{Q}}\big]_\sharp\mu\Big) \doteq \ell\big((\bar{\Xi}_{t,T}^{\mu,\bar{u}})_\sharp\mu\big), \qquad I \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}.$$

Можно показать, что для любых $t \in J^{\bar{u}}$, $X \in \mathscr{B}$ и $\mu \in \mathcal{P}$ справедливо равенство $\bar{\boldsymbol{p}}_t^\mu(X) = \bar{\boldsymbol{\xi}}_t(\tilde{X}_\sharp\mu)$. Это приводит к следующему варианту точной формулы приращения в задаче (P_1):

$$\Delta_u \mathcal{I}_1[\bar{u}] = \int_I dt \int_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{d}_\mu \bar{\boldsymbol{\xi}}_t(\nu_t)(q)\Big[G\big(q, \nu_t, u_t\big) - G\big(q, \nu_t, \bar{u}_t\big)\Big]\, d\nu_t(q), \quad \nu_t \doteq \big(\Xi_{0,t}^{\vartheta,u}\big)_\sharp\vartheta.$$

Подынтегральный член зависит здесь от нелокального потока лишь посредством меры $\nu_t = (\Xi_{0,t}^{\vartheta,u})_\sharp\vartheta$. Такие меры образуют поток на $\mathcal{P}$, которому отвечает еще одна, эйлерова форма задачи управления в среднем поле.

Для каждого $u \in \mathcal{U}$ определим поток на $\mathcal{P}$ выражением $\boldsymbol{\Phi}_{s,t}^u(\mu) \doteq (\Xi_{s,t}^{\mu,u})_\sharp\mu$. Как следует из соотношений предыдущего пункта, задачи (P_1) и (P_2) эквивалентны следующей:

$$(P_3) \qquad \inf\Big\{\mathcal{I}_3[u] \doteq \ell(\boldsymbol{x}_T)\colon u \in \mathcal{U}\Big\}, \qquad \boldsymbol{x}_T = \boldsymbol{\Phi}^u_{0,T}(\vartheta).$$

Внешние генераторы потоков $\boldsymbol{\Phi}^u$, $u \in \mathcal{U}$, имеют вид $(\mathfrak{L}^u_t \boldsymbol{\phi})(\mu) \doteq (\widetilde{\mathfrak{L}}(u_t)\boldsymbol{\phi})(\mu)$, $t \in J^u$, $\mu \in \mathcal{P}$, где линейные операторы $\widetilde{\mathfrak{L}}(\mathrm{u})\colon \boldsymbol{C}^{1,1+}_b \to C_b(\mathcal{P})$, $\mathrm{u} \in U$, определены явной формулой

$$(\widetilde{\mathfrak{L}}(\mathrm{u})\boldsymbol{\phi})(\mu) \doteq \int_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{d}_\mu \boldsymbol{\phi}(\mu)(q)\big[G(q,\mu,\mathrm{u})\big]\,d\mu(q).$$

Утверждение 3.7. *Пусть выполнены условия, обеспечивающие равномерное по μ разложение* (22) *и регулярность класса $\boldsymbol{C}^{1,1+}_b(\mathcal{P})$. Тогда семейство $(\mathfrak{L}^u_t)_{t\in J^u}$ является внешним генератором потока $\boldsymbol{\Phi}^u$:*[40]

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \sup_{\mu\in\mathcal{P}} \left|\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\Phi}^u_{t,t+h}(\mu)) - \boldsymbol{\phi}(\mu) - h(\mathfrak{L}^u_t\boldsymbol{\phi})(\mu)\right| = 0 \quad \textit{при п.в. } t \in I.$$

В результате, формула (16) в задаче (P_3) записывается явно в терминах функции

$$\bar{H}_t(\mu,\mathrm{u}) \doteq \int_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{d}_\mu \bar{\boldsymbol{p}}_t(\mu)(q)[G(q,\mu,\mathrm{u})]\,d\mu(q).$$

В завершение п. 3.2.3 приводится пример, показывающий, что соответствующая реализация Теоремы 1.2 отклоняет особую неоптимальную экстремаль; это подтверждает усиление условий первого порядка в задаче управления на пространстве мер.

§ 3.3 посвящен уравнениям баланса, т. е. уравнениям неразрывности с источником. Центральным вопросом здесь становится не только проверка гипотез общей схемы, но и построение редукции, возвращающей уравнение баланса к консервативной динамике на пространстве вероятностных мер. Рассматриваются два частных класса моделей: линейные уравнения на пространстве знакопеременных мер [2] и нелокальные уравнения с полулинейным источником на пространстве неотрицательных мер [5, 7].

В первом случае роль множества $\mathcal{X}$ исполняет пространство $\mathcal{M}_1 \doteq \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ конечных борелевских знакопеременных мер, удовлетворяющих условию $m_1(\mu) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathrm{x}|\,d|\mu|(\mathrm{x}) < \infty$; это пространство наделяется нормой $\|\cdot\|_{BL'}$.

Пусть заданы отображения $\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f\colon I\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}^n,\ g\colon I\times\mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R},\ h\colon I\times U \to \mathcal{M}_1$, а также начальная мера $\vartheta \in \mathcal{X}$. Для краткости пишем $f^u_t(\mathrm{x}) \doteq f_t(\mathrm{x},u_t),\ g^u_t(\mathrm{x}) \doteq g_t(\mathrm{x},u_t),\ h^u_t \doteq h_t(u_t)$. Допустимыми полагаются управления класса $\mathcal{U} = L^\infty(I;U)$, где $U \subset \mathbb{R}^m$ непусто, выпукло и компактно; это относит постановку к задачам управления ансамблями траекторий.

[40] Супремум здесь берется по сепарабельному множеству, что гарантирует измеримость предела.

Рассмотрим задачу

$$(LP) \qquad \inf\Big\{\mathcal{I}[u] \doteq \langle \mu^u_T, \ell\rangle \colon u \in \mathcal{U}\Big\}, \qquad \mu = \mu^u,$$

где μ^u — слабое* решение линейного уравнения баланса

$$\partial_t \mu_t + \nabla \cdot (f^u_t \mu_t) = g^u_t \mu_t + h^u_t, \qquad \mu_0 = \vartheta,$$

т. е. для всякой пробной функции $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ отображение $t \mapsto \langle \mu_t, \phi\rangle$ абсолютно непрерывно, и при п.в. $t \in I$

$$\frac{d}{dt}\langle \mu_t, \phi\rangle = \langle \mu_t, \nabla\phi \cdot f^u_t + g^u_t \phi\rangle + \langle h^u_t, \phi\rangle.$$

Предположение 3.4: $\ell \in \boldsymbol{D} \doteq C^1_c(\mathbb{R}^n)$*; функция* f *ограничена в области своего определения, измерима по* t *при всех* (x, u)*, непрерывна по* (x, u) *при п.в.* t*, и* $\mathrm{x} \mapsto f_t(\mathrm{x}, \mathrm{u})$ *принадлежит* $C^{1,1}_b(\mathbb{R}^n)$ *на множестве* $J^f \subset I$ *полной меры с равномерными по* (t, u) *константами* $\mathrm{Lip}(f)$, $\|Df\|_\infty$, $\mathrm{Lip}(Df)$. *Функция* g *удовлетворяет тем же условиям с множеством* $J^g \subset I$*, причем* $J \doteq J^f \cap J^g$ *не зависит от* (x, u). *Для всякого борелевского* $A \subset \mathbb{R}^n$ *и любого* $\mathrm{u} \in U$ *функция* $t \mapsto h_t(\mathrm{u})(A)$ *измерима по Лебегу, а отображение* $\mathrm{u} \mapsto h_t(\mathrm{u})$ *непрерывно. Кроме того,*

$$\int_I \Big(\|h_t(u_t)\|_{TV} + m_1(h_t(u_t))\Big)\, dt < +\infty \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

Предположение 3.4 обеспечивает существование единственного непрерывного решения задачи Коши для уравнения баланса. Если f, g и h аффинны по управлению, то оператор $u \mapsto \mu^u$ непрерывен как отображение из $(\mathcal{U}, \sigma(L^\infty, L^1))$ в $C(I; \mathcal{X})$ [7, теорема 1].

Утверждение 3.8. *Пусть выполнено Предположение 3.4. Тогда функция* $\mu = \mu^u$ *допускает явное представление в терминах потока* $X = X^u$ *векторного поля* f^u*:*

$$\mu_t = \exp\left[\int_0^t g^u_s \circ X_{t,s}\, ds\right] (X_{0,t})_\sharp \vartheta + \int_0^t \exp\left[\int_s^t g^u_\tau \circ X_{t,\tau}\, d\tau\right] \Big((X_{s,t})_\sharp h^u_s\Big)\, ds.$$

Ввиду линейности (LP) точная формула приращений выводится здесь непосредственно, без этапа погружения. Роль сопряженного к опорной траектории $\bar\mu \doteq \mu^{\bar u}$, $\bar u \in \mathcal{U}$, играет решение $\bar{\boldsymbol{p}}$ системы

$$\partial_t \boldsymbol{p}_t + \nabla \boldsymbol{p}_t \cdot f^{\bar u}_t + g^{\bar u}_t \boldsymbol{p}_t = 0, \quad \bar{\boldsymbol{p}}_T = \ell,$$

а функция $\bar H$ определена условием

$$\bar H_t(\mu, \mathrm{u}) \doteq \langle \mu, \nabla \bar{\boldsymbol{p}}_t \cdot f_t(\cdot, \mathrm{u}) + g_t(\cdot, \mathrm{u}) \bar{\boldsymbol{p}}_t\rangle + \langle h_t(\mathrm{u}), \bar{\boldsymbol{p}}_t\rangle.$$

§ 3.3.2 посвящен следующему обобщению задачи (LP):

$$(P) \qquad \inf\Big\{\mathcal{I}[u] \doteq \ell(\mu^u_T) \colon u \in \mathcal{U}\Big\}.$$

Динамика μ^u задается нелокальным уравнением баланса

$$\partial_t \mu_t + \nabla \cdot \left[F\big(\cdot, \mu_t, u_t\big)\, \mu_t\right] = G\big(\cdot, \mu_t, u_t\big)\, \mu_t, \quad t \in I; \qquad \mu_0 = \vartheta \in \mathcal{X}, \tag{24}$$

на пространстве $\mathcal{X} \doteq \mathcal{M}_c^+(\mathbb{R}^n)$ конечных неотрицательных мер с компактным носителем; функции $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{X} \times U \to \mathbb{R}^n$ и $G\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{X} \times U \to \mathbb{R}$ заданы; множество $\mathcal{U}$ остается прежним. Особенностью данной постановки является специальный вид источника: правая часть является фазовой мерой с нелокальной плотностью.

Предположение 3.5: *отображения* $\mathrm{u} \mapsto F(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{u})$ *и* $\mathrm{u} \mapsto G(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{u})$ *непрерывны при всех* $\mu \in \mathcal{X}$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$*;* $(\mu, \mathrm{x}) \mapsto F(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{u})$ *и* $(\mu, \mathrm{x}) \mapsto G(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{u})$ *локально липшицевы, т. е. удовлетворяют соответствующим оценкам на компактах* $K \subset \mathbb{R}^n$ *(с константами, зависящими от* K*), и выполнены равномерные оценки* $|F(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{u})| \leq R(1 + \mu(\mathbb{R}^n))$ *и* $|G(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{u})| \leq R$.

Предположение 3.5 обеспечивает существование и единственность слабого* решения μ^u при каждом $u \in \mathcal{U}$.

Дальнейший анализ основан на сведении задачи (P) к задаче управления нелокальным уравнением неразрывности в пространстве вероятностных мер на $\mathbb{R}^{n+1}$; в основе этого приема лежит операция барицентрического проектирования: положим $K_y \doteq [e^{-RT}, e^{RT}]$ и определим линейный оператор $\beta\colon \mathcal{M}_c(\mathbb{R}^n \times K_y) \to \mathcal{M}_c(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$\langle \beta(\rho), \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n \times K_y} y \phi(\mathrm{x})\, d\rho(\mathrm{x}, y), \quad \phi \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Утверждение 3.9. *Наделим множество* $\mathbb{R}^n \times K_y$ *метрикой* $d_1\big([\mathrm{x}_1, y_1], [\mathrm{x}_2, y_2]\big) \doteq |\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2|_{\mathbb{R}^n} + |y_1 - y_2|$. *Тогда оператор* β *непрерывен, и его норма не превосходит* e^{RT}.

Нас интересует сужение β на $\mathcal{Y} \doteq \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^n \times K_y)$; при этом $\beta(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{X}$.

Обозначим $\mathbf{x} = (\mathrm{x}, y)^\top$ и определим нелокальное векторное поле

$$\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathcal{Y} \times U \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \rho, \mathrm{u}) \doteq \Big(F(\mathrm{x}, \beta(\rho), \mathrm{u}),\ \mathrm{y} G(\mathrm{x}, \beta(\rho), \mathrm{u})\Big)^\top.$$

Это поле порождает задачу Коши для нелокального уравнения неразрывности

$$\partial_t \rho_t + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \big(\mathbf{F}(\cdot; \rho_t; u_t)\, \rho_t\big) = 0, \qquad \rho_0 = \vartheta \otimes \delta_1, \tag{25}$$

на метрическом пространстве $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{BL})$ в том смысле, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \rho_t, \eta \rangle = \big\langle \rho_t,\ \nabla_{\mathbf{x}} \eta \cdot \mathbf{F}(\cdot, \rho_t, u_t) \big\rangle,$$

для всех $\eta \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, где $\nabla_{\mathbf{x}} \eta \cdot \mathbf{F}(\mathrm{u}, \rho, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathrm{x}} \eta \cdot F(\mathrm{x}, \beta(\rho), \mathrm{u}) + \mathrm{y}\, \partial_{\mathrm{y}} \eta\, G(\mathrm{x}, \beta(\rho), \mathrm{u})$. Предположение 3.5 гарантирует регулярность $\mathbf{F}$, достаточную для существования единственного решения (25) при каждом u.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено Предположение 3.5. Тогда единственные решения* $\mu = \mu^u$ *и* $\rho = \rho^u$ *задач Коши* (24) *и* (25), *отвечающие одному и тому же управлению* u, *связаны соотношением*

$$\mu_t = \beta(\rho_t) \qquad \forall t \in I.$$

Оператор β определяет поднятие отображений вида $Q\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ в пространство $\mathcal{Y}$ по правилу $\widehat{Q}(\rho) = (\beta^\star Q)(\rho) \doteq Q\big(\beta(\rho)\big)$. Если $Q\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ липшицева, то такова и $\widehat{Q}\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$.

Предположение 3.6: *отображения* $\mathrm{x} \mapsto F(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{u})$ *и* $\mathrm{x} \mapsto G(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{u})$ *непрерывно дифференцируемы при всех* $\mathrm{u} \in U$ *и* $\mu \in \mathcal{X}$, *а* $\mu \mapsto F(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{u}) \in \boldsymbol{C}_b^{1,1+}(\mathcal{X}; \mathbb{R}^n)$, $\mu \mapsto G(\mathrm{x}, \mu, \mathrm{u}) \in \boldsymbol{C}_b^{1,1+}(\mathcal{X})$ *имеют константы регулярности, общие для всех* $\mathrm{u} \in U$ *и* $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 3.1. *Если* $Q \in \boldsymbol{C}_b^{1,1+}(\mathcal{X})$, *то* $\widehat{Q} \in \boldsymbol{C}_b^{1,1+}(\mathcal{Y})$. *Более того,*

$$\begin{aligned} &\frac{\delta \widehat{Q}}{\delta \rho}(\rho, \mathbf{x}) = \mathrm{y}\, \frac{\delta Q}{\delta \mu}\big(\beta(\rho), \mathrm{x}\big), \\ &\boldsymbol{d}_\rho \widehat{Q}(\rho, \mathbf{x}) = \left(\mathrm{y}\, \boldsymbol{d}_\mu Q\big(\beta(\rho), \mathrm{x}\big),\ \frac{\delta Q}{\delta \mu}\big(\beta(\rho), \mathrm{x}\big)\right)^\top, \end{aligned} \qquad \mathbf{x} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})^\top.$$

Установленные факты дают возможность переформулировать постановку (P) в виде

$$(\widehat{P}) \qquad \inf\Big\{\widehat{\ell}(\rho_T)\colon \rho = \rho^u,\ u \in \mathcal{U}\Big\}.$$

Это частный случай задачи (P_3) п. 3.2.3 на пространстве $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$. По Теореме 3.2 множества оптимальных управлений в задачах (P) и $(\widehat{P})$ совпадают, а оптимальные траектории задачи (P) являются барицентрическими проекциями оптимальных траекторий задачи $(\widehat{P})$.

Таким образом, в Предположениях 3.5 и 3.6 поле $\mathbf{F}$ и функционал $\widehat{\ell}$ удовлетворяют условиям п. 3.2.3, и к $(\widehat{P})$ применимы результаты третьей главы.

В четвертой главе рассматриваются задачи импульсного управления в среднем поле. Этот раздел логически связан с третьей главой, но речь в нем идет уже не столько о методах решения, сколько о специальных постановках экстремальных задач. Здесь мы отказываемся от универсальной конструкции класса $\mathcal{U}$ и допускаем неограниченно высокую мгновенную интенсивность воздействия на систему, приводящую в пределе к разрывам фазовой траектории. Основная цель — перенести стандартный подход, основанный на методе разрывной замены времени[41], на задачу управления ансамблем траекторий и дать полное структурное описание импульсно-траекторного расширения последней в классе мерозначных функций ограниченной вариации.

[41] Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. L. Optimal Impulsive Control: The Extension Approach. Cham: Springer, 2019; Miller B. M., Rubinovich E. Y. Impulsive Control in Continuous and Discrete-Continuous Systems. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003; Miller B. M., Rubinovich E. Y. Discontinuous Time Substitution in Optimal Control Problems // Automation and Remote Control. 2005. Vol. 66, no. 5. P. 751–766.

Полной вариацией функции $x\colon I \to \mathcal{X}$ со значениями в метрическом пространстве $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ называется величина $\mathrm{Var}_I(x) \doteq \sup_\pi \sum_i d_{\mathcal{X}}(x_{t_i}, x_{t_{i+1}})$, где супремум берется по всем конечным разбиениям отрезка I. Через $BV_+(I;\mathcal{X})$ обозначаем класс функций ограниченной вариации, непрерывных справа на $[0,T)$; каждый элемент рассматривается вместе с левым пределом x_{0-}.

Запись $x^k \rightharpoonup x$, означает сходимость последовательности $(x^k) \subset BV_+(I;\mathcal{X})$ во всех точках непрерывности предела x, а также в точках 0 и T. В случае $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ пространство $BV_+(I;\mathbb{R})$ изометрически изоморфно $\mathcal{M}(I) \times \mathbb{R}$: функции x отвечает мера Лебега–Стилтьеса $\mathfrak{u}_x$, а мере $\mathfrak{u}$ — ее функция распределения $F_{\mathfrak{u}}(t) = \mathfrak{u}([0,t])$.[42] В диссертации показано, что на всем пространстве $BV+(I;\mathbb{R})$ не существует топологии, сходимость последовательностей в которой совпадала бы со сходимостью во всех точках непрерывности предела; это объясняет, почему импульсно-траекторное расширение удобно описывать секвенциальным образом.

В основной части главы роль $\mathcal{X}$ играет семейство $\mathcal{P}_c \doteq \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^n)$ вероятностных мер с компактным носителем. Его удобно рассматривать как плотное подмножество полного сепарабельного пространства $\mathcal{P}_1 \doteq (\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^n), W_1)$ вероятностных мер с конечным первым моментом, где W_1 есть L^1-метрика Канторовича[43]

$$W_1(\mu_1,\mu_2) \doteq \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \phi\, d(\mu_1-\mu_2)\colon\ \mathrm{Lip}(\phi) \le 1\right\}.$$

Исследуется задача Майера

$$(P) \quad \inf\Big\{\ell(\mu_T)\colon u \in \mathcal{U}\Big\}, \quad \mu = \mu^u,$$
$$\partial_t\mu_t + \nabla_{\mathrm{x}} \cdot \left(F(\mathrm{x}, \mu_t, u(t))\,\mu_t\right) = 0, \quad \mu_0 = \vartheta, \quad t \in I \doteq [0,T]. \tag{26}$$

Здесь $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_1 \times U \to \mathbb{R}^n$, $\ell\colon \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}$, число $T > 0$ и начальное распределение $\vartheta \in \mathcal{P}_c$ считаются заданными, а класс $\mathcal{U}$ состоит из измеримых функций $u\colon I \to \mathbb{R}^m$ со значениями в заданном замкнутом (уже не обязательно компактном) множестве $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Нас интересует случай, когда множество $\{F(\mathrm{x},\mu,\mathrm{u})\colon \mathrm{u} \in U\}$ не ограничено на $\mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_1$. Типичный пример — $U = \mathbb{R}^m$ и $F(\mathrm{x},\mu,\mathrm{u}) = f_0(\mathrm{x}) + \sum f_j(\mathrm{x})\mathrm{u}_j + (K*\mu)(\mathrm{x})$, где $K*\mu$ означает свертку меры с заданным потенциалом $K\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; здесь и далее суммирование происходит по множеству $\{1,\dots,l\}$. Если $f_j \ne 0$ хотя бы для одного j, то $\sup_{\mathrm{u}\in U} |F(\cdot,\mathrm{u})| = +\infty$, и задача (P) может не иметь решения в стандартном классе $L^\infty(I;U)$: кривые μ^k, отвечающие минимизирующей последовательности управлений, стремятся к разрывной функции времени и не имеют предела в равномерной норме $C(I;\mathcal{P}_1)$. Однако при ограничении ресурса $\|u\|_{L^1(I;\mathbb{R}^m)} = M$ или $\|u\|_{L^1(I;\mathbb{R}^m)} \le M$, где $M > 0$ фиксировано, предел в подходящем смысле

[42] Bogachev V. I. Weak Convergence of Measures. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 234. Providence, RI: American Mathematical Society, 2018; Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems. Oxford: Clarendon Press, 2000.

[43] Ambrosio L., Gigli N., Savaré G. Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures. Basel: Birkhäuser, 2005; Villani C. Optimal Transport: Old and New. Berlin: Springer, 2009.

существует в пространстве $BV(I;\mathcal{P}(\mathbb{R}^n))$.

Далее рассматривается более общий случай:

$$F(\mathrm{x},\mu,\mathrm{u}) = f_0(\mathrm{x},\mu) + \sum f_j(\mathrm{x}) g_j(\mathrm{u})$$

с заданными функциями $f_0\colon \mathbb{R}^n\times\mathcal{P}_1\to\mathbb{R}^n$, $f_j\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $g_j\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $j=1,\dots,l$, и

$$u\in\mathcal{U}\doteq\left\{u\colon I\to U \text{ измерима},\ |g_j\circ u|\in L^1(I),\ \sum\int_I |(g_j\circ u)(t)|\,dt = M\right\}.$$

Предположение 4.1: *функционал $\ell\colon\mathcal{P}_1\to\mathbb{R}$ непрерывен; функции f_0 и f_j удовлетворяют условию не более чем линейного роста и локальному условию Липшица по* x*, а f_0 локально липшицева по μ в метрике W_1 и сублинейна по первому моменту меры; $U\neq\emptyset$, функции g_j непрерывны на U, и выполнено условие коэрцитивности $(0,+\infty)\subset(\sum|g_j|)(U)$.*

Анализ полученной постановки опирается на метод разрывной замены времени: сделаем в (26) замену переменной $t=\xi(s)$, где функция $\xi=\xi^u\colon J\doteq[0,S\doteq T+M]\to I$ есть обратная к монотонно возрастающей абсолютно непрерывной функции $\Xi\doteq\Xi^u\colon I\to J$,

$$\Xi^u(t)\doteq t+\sum\int_0^t \left|(g_j\circ u)(\varsigma)\right| d\varsigma.$$

Замена времени дает новую параметризацию кривой μ: $\mu_{\xi(s)}=\nu_s$, где ν — решение уравнения

$$\partial_s\nu_s+\nabla_{\mathrm{x}}\cdot\left(\hat F\left(\mathrm{x},\nu_s,w(s)\right)\,\nu_s\right)=0,\quad s\in J;\qquad \nu_0=\vartheta, \tag{27}$$

с нелокальным векторным полем $\hat F(\mathrm{x},\mu,\mathrm{w})=\mathrm{w}_0\,f_0(\mathrm{x},\mu)+\sum f_j(\mathrm{x})\,\mathrm{w}_j$ и измеримым по Борелю управлением

$$w[u]=(w_0,w_1,\dots,w_l)[u]\doteq\frac{(1,g_1,\dots,g_l)}{1+\sum|g_j|}\circ u\circ\xi^u.$$

По построению $w_0+\sum|w_j|=1$, и

$$\int_J w_0(s)\,ds=T. \tag{28}$$

Введем обозначения

$$W\doteq\overline{\mathrm{co}}\,\mathbf{g}(U),\quad \mathbf{g}(U)\doteq\{\mathbf{g}(\mathrm{u})\colon\mathrm{u}\in U\}\subset\mathbb{R}^{l+1},\quad \mathbf{g}(\mathrm{u})\doteq\frac{(1,g_1(\mathrm{u}),\dots,g_l(\mathrm{u}))}{1+\sum|g_j(\mathrm{u})|},$$

где $\overline{\mathrm{co}}$ обозначает замыкание выпуклой оболочки множества, и рассмотрим новый класс управляющих воздействий $\mathcal{W} \doteq (L^\infty(J;W), \sigma(L^\infty, L^1))$, а также его сужение

$$\mathcal{W}_T \doteq \{w = (w_0, \dots, w_l) \in \mathcal{W} : \text{ выполнено (28)}\}\,. \tag{29}$$

Заметим, что $W \subset \mathbb{R}^{l+1}$ компактно. Значит, $\mathcal{W}$ является слабым* замкнутым подмножеством шара пространства $L^\infty(J;\mathbb{R}^{l+1})$ и, следовательно, компактно в топологии $\sigma(L^\infty, L^1)$ по теореме Банаха–Алаоглу. Далее, $\mathcal{W}_T \subset \mathcal{W}$ замкнуто как прообраз точки при непрерывном отображении $w \mapsto \displaystyle\int_J w_0\; ds$, и потому тоже компактно.

Для произвольного $w \in \mathcal{W}_T$ функция $\xi \doteq \xi^w \colon J \to I$, определенная равенством

$$\xi(s) = \int_0^s w_0(\varsigma)\, d\varsigma,$$

монотонно не убывает, но уже не обязана быть строго возрастающей. Если $w_0 = 0$ на множестве положительной меры Лебега, то обратная к ξ^w, вообще говоря, не определена. Поэтому вводится псевдообратная функция

$$\xi^{\leftarrow}(t) \doteq \inf\{s \in J \colon \xi(s) > t\}, \quad t \in [0,T), \quad \xi^{\leftarrow}(T) = S.$$

Именно она возвращает предельную кривую ν из шкалы J в исходную шкалу времени I.

Управляемую систему (27), (29) называем преобразованной.

Теорема 4.1. *Пусть $(u^k) \subset \mathcal{U}$, $\mu^k = \mu^{u^k}$, $w^k = w[u^k]$, а $\nu^k = \nu^{w^k}$ есть решение преобразованного уравнения. Тогда существует подпоследовательность $(\mu^{k_q}, \nu^{k_q}, w^{k_q})$, сходящаяся к некоторому пределу (μ, ν, w) в произведении $BV(I;\mathcal{P}_1) \times C(J;\mathcal{P}_1) \times L^\infty_{\mathrm{w}}(J;\mathbb{R}^{l+1})$, где $L^\infty_{\mathrm{w}} \doteq (L^\infty, \sigma(L^\infty, L^1))$. Любой частичный предел (ν, w) удовлетворяет преобразованному уравнению и условию $w \in \mathcal{W}_T$. Если $\widetilde{\mu}$ — модификация μ, непрерывная справа на $[0,T)$, и $\widetilde{\mu}_{0^-} = \vartheta$, то $\widetilde{\mu}_t = \nu_{\xi^{\leftarrow}(t)}$ при всех $t \in I$.*

Это утверждение описывает расширение исходной системы в классе кривых ограниченной вариации.

Теорема 4.2. *Задача (RP) является релаксацией (P):*

$$\inf(P) \doteq \inf_{u \in \mathcal{U}} \ell(\mu^u_T) = \min_{w \in \mathcal{W}_T} \ell(\nu^w_S) \doteq \min(RP).$$

Основу доказательства составляет равенство $\mathcal{W}_T = \mathrm{cl}_{w^*}(\mathcal{W}_U \cap H_T)$, где $\mathcal{W}_U$ состоит из селекторов множества $\mathbf{g}(U)$, cl_{w^*} обозначает слабое* замыкание, а H_T задается условием (28).

После обратного преобразования $s = \xi^{\leftarrow}(t)$ кривая $t \mapsto \mu_t \doteq \nu_{\xi^{\leftarrow}(t)}$ может оказаться разрывной; ее скачки интерпретируются как результат импульсных воздействий дираковского типа и могут быть описаны с помощью т. н. предельного нелокального уравнения неразрывности в альтернативной временной шкале «быстрых движений» (см. [13]).

Далее формулируется и обсуждается принцип максимума Понтрягина (ПМП) для задачи (RP) (в форме эквивалентного принципа минимума). В подобных постановках известно несколько форм ПМП, и все они записываются в терминах гамильтоновой системы на пространстве мер или случайных величин.[44] Мы отталкиваемся от следующей формулировки.

Пусть выполнены Предположение 4.1 и дополнительные условия: $\vartheta \in \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^n)$; функционал ℓ непрерывно дифференцируем, а его производная $\boldsymbol{d}_\mu \ell$ локально ограничена и локально липшицева; отображения f_k, $k = 0, \dots, l$, непрерывно дифференцируемы по x и по μ, а производные $D_{\mathrm{x}} f_k$ и $\boldsymbol{D}_\mu f_k$ локально ограничены и локально липшицевы. Если допустимый процесс $(\bar{\nu}, \bar{w})$ оптимален в (RP), то найдутся множитель Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}$, отвечающий ограничению (28), и решение $\bar{\gamma}\colon J \to \mathcal{P}_c(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)')$ краевой задачи

$$\begin{cases} \partial_s \gamma_s + \nabla_{(\mathrm{x},\mathrm{p})} \cdot (\mathbb{J}_{2n} \boldsymbol{D}_\gamma \mathcal{H}_\lambda[\gamma_s, \bar{w}(s)] \gamma_s) = 0, \\ \pi^1_\sharp \gamma_s = \bar{\nu}_s, \quad s \in J, \\ \pi^2_\sharp \gamma_S = (\boldsymbol{d}_\mu \ell(\bar{\nu}_S))_\sharp \bar{\nu}_S, \end{cases}$$

такие, что

$$\mathcal{H}_\lambda(\bar{\gamma}_s, \bar{w}(s)) = \min_{\mathrm{w} \in W} \mathcal{H}_\lambda(\bar{\gamma}_s, \mathrm{w}) \quad \text{при п.в.} \quad s \in J.$$

Функционал Понтрягина определен здесь равенством

$$\mathcal{H}_\lambda(\gamma, \mathrm{w}) \doteq \iint \mathrm{p} \cdot \widehat{F}(\mathrm{x}, \pi^1_\sharp \gamma, \mathrm{w})\, d\gamma(\mathrm{x}, \mathrm{p}) + \lambda \mathrm{w}_0,$$

где $\pi^1, \pi^2\colon \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)' \to \mathbb{R}^n, (\mathbb{R}^n)'$ — координатные проекции на соответствующие подпространства, $\pi^1(\mathrm{x}, \mathrm{p}) = \mathrm{x}$, $\pi^2(\mathrm{x}, \mathrm{p}) = \mathrm{p}$, а $\mathbb{J}_{2n}$ — симплектическая матрица порядка $2n$.

Практическое применение этой и аналогичных ей форм ПМП наталкивается на принципиальные трудности: во-первых, гамильтонова система определена на кокасательном расслоении $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)' \simeq \mathbb{R}^{2n}$ подлежащего пространства состояний, а значит ее необходимо решать на пространстве удвоенной размерности; во-вторых, терминальная мера $\bar{\gamma}_S$ сосредоточена на графике функции $\mathrm{x} \mapsto \boldsymbol{d}_\mu \ell(\bar{\nu}_S)(\mathrm{x})$ и потому всегда сингулярна относительно $2n$-мерной меры Лебега. Последний факт исключает возможность прямого применения стандартных схем численного интегрирования.

Основной результат данного раздела — декомпозиция гамильтонова уравнения и выделение сопряженной системы. Этот подход основан на операции барицентрического проектирования: поскольку функционал Понтрягина и слабая* форма гамильтоновой системы

[44] Averboukh Y., Khlopin D. Pontryagin maximum principle for the deterministic mean field type optimal control problem via the Lagrangian approach // Journal of Differential Equations. 2025. Vol. 430. P. 113205; Averboukh Y. Viability Theorem for Deterministic Mean Field Type Control Systems // Set-Valued and Variational Analysis. 2018. Vol. 26, no. 4. P. 993–1008; Bongini M., Fornasier M., Rossi F., Solombrino F. Mean-field Pontryagin maximum principle // Journal of Optimization Theory and Applications. 2017. Vol. 175, no. 1. P. 1–38; Bonnet B. A Pontryagin Maximum Principle in Wasserstein spaces for constrained optimal control problems // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2019. Vol. 25. Art. 52; Pogodaev N. Optimal control of continuity equations // NoDEA Nonlinear Differential Equations and Applications. 2016. Vol. 23, no. 2. Art. 21.

линейны по переменной p, они могут быть выражены в терминах динамики соответствующих барицентров кривой γ — векторных мер $s \mapsto \varrho_s$ на $\mathbb{R}^n$, определенных действием

$$\langle \varrho_s, \phi \rangle \doteq \int \mathrm{p} \cdot \phi(\mathrm{x})\, d\gamma_s(\mathrm{x}, \mathrm{p}), \qquad \phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n).$$

При этом $\mathcal{H}_\lambda(\gamma, \mathrm{w})$ совпадает с

$$\mathbf{H}_\lambda(\nu, \varrho, \mathrm{w}) \doteq \int \widehat{F}(\mathrm{x}, \nu, \mathrm{w}) \cdot d\varrho(\mathrm{x}) + \lambda \mathrm{w}_0,$$

а слабая* форма терминального условия эквивалентна равенству

$$\frac{d\bar{\varrho}_S}{d\nu_S} = \boldsymbol{d}_\mu \ell(\bar{\nu}_S).$$

В свою очередь, слабая* форма уравнения, описывающего кривую $s \mapsto \bar{\varrho}_s$, восстанавливается из гамильтоновой системы при выборе тест-функций $\psi(\mathrm{x}, \mathrm{p}) = \mathrm{p} \cdot \phi(\mathrm{x})$, $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$; в результате возникает система линейных транспортных уравнений с нелокальным источником

$$\partial_s \bar{\varrho}_s^i + \nabla_{\mathrm{x}} \cdot (\bar{v}_s \bar{\varrho}_s^i) = \sum_j \left[\left(\int \bar{m}_i^j \, d\bar{\varrho}_s^j \right) \bar{\nu}_s - \partial_{\mathrm{x}_i} \bar{v}_s^j \, \bar{\varrho}_s^j \right], \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\bar{v}_s(\mathrm{x}) \doteq \widehat{F}(\mathrm{x}, \bar{\nu}_s, \bar{w}(s))$, а $\bar{m}_i^j$ суть элементы матрицы $\boldsymbol{D}_\nu \widehat{F}_s(\mathrm{y}, \bar{\nu}_s, \bar{w}(s))$. Именно эта система исполняет роль сопряженной к нелокальному уравнению неразрывности.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия Теоремы 4.3, и допустимый процесс $(\bar{\nu}, \bar{w})$ оптимален в (RP). Тогда найдутся $\lambda \in \mathbb{R}$ и решение $\bar{\varrho}\colon J \to \mathcal{M}_1^n(\mathbb{R}^n)$ указанной сопряженной системы с терминальным условием $d\bar{\varrho}_S / d\nu_S = \boldsymbol{d}_\mu \ell(\bar{\nu}_S)$, для которых выполнено равенство*

$$\mathbf{H}_\lambda(\bar{\nu}_s, \bar{\varrho}_s, \bar{w}(s)) = \min_{\mathrm{w} \in W} \mathbf{H}_\lambda(\bar{\nu}_s, \bar{\varrho}_s, \mathrm{w}) \quad \textit{п.в. } s \in J.$$

Новая формулировка ПМП имеет важное преимущество: меры $\bar{\varrho}_s$ обладают плотностью $d\bar{\varrho}_s / d\bar{\nu}_s$ относительно $\bar{\nu}_s$. В частности, если $\bar{\nu}_s$ абсолютно непрерывны относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^n$, то таковы и все $\bar{\varrho}_s$. Кроме того, сопряженная система определена уже на исходном пространстве $\mathbb{R}^n$; это снижает размерность сопряженной системы и открывает возможность ее численной интерпретации.

В заключительном пункте главы обсуждаются позиционные усиления ПМП для задачи (RP). Отмечается, что строгий вывод условия, аналогичного Теореме 1.2, требует полноценной теории позиционного экстремума в задачах с терминальными ограничениями; такая теория пока не построена. Указаны два возможных пути: использование условий типа Куна–Таккера в концевой задаче математического программирования с опорой на введенное автором понятие локального T-минимума и вариационный анализ в классе возмущений управления типа (11) с несколькими переключениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены новые результаты в области вариационного анализа задач оптимального управления для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, а также уравнениями неразрывности и баланса на пространствах мер.

Центральным объектом работы выступают «нелокальные» формулы приращения функционала, записанные в терминах функции цены опорного управления. Эти формулы не требуют обращения к аппарату малых вариаций и не содержат асимптотических разложений; они дают единый способ вывода как стандартных, так и оригинальных «позиционных» принципов оптимальности — характеризующих стационарность исследуемого процесса в смысле, более сильном, чем в классической теории динамического экстремума, и сохраняющих смысл в широком классе распределенных постановок.

Указанные тождества и условия получают естественную интерпретацию в терминах теории двойственности: функция цены заданного управления оказывается сопряженной к канонической линейной форме исходной системы; данное наблюдение связано с погружением нелинейной динамики в линейную систему на пространстве функционалов или мер — приемом, который не зависит от специальной природы рассмотренных моделей и может использоваться за пределами круга задач, изученных в диссертации.

Важное место в диссертационном исследовании занимают задачи управления в среднем поле: рассмотрен наиболее распространенный в литературе случай нелокального уравнения неразрывности, а также более общий класс уравнений баланса на пространствах мер. Для указанных задач получен первый в известной автору литературе вариант необходимых условий оптимальности высших порядков.

Отдельный интерес представляют взгляд на консервативную динамику на пространстве мер как на обыкновенное дифференциальное уравнение на банаховом пространстве отображений и редукция уравнения баланса к уравнению неразрывности; последняя позволяет переносить на уравнения с источником результаты, накопленные в теории управления консервативными транспортными уравнениями.

Завершающий круг результатов связан с задачами импульсного управления в среднем поле. Данная постановка, по-видимому, впервые предложена непосредственно автором как естественное обобщение классической задачи импульсного управления сосредоточенной системой на случай нечеткого начального состояния или ансамбля траекторий. В диссертации построено импульсно-траекторное расширение задачи управления нелокальным уравнением неразрывности и получена новая форма принципа максимума Понтрягина, допускающая численную интерпретацию. Позиционные усиления ПМП для таких постановок остаются предметом дальнейшего анализа.

Работа развивает идеи *Иркутской школы оптимального управления*, отраженные в работах А. В. Аргучинцева, В. И. Гурмана, В. А. Батурина, В. А. Дыхты, В. А. Срочко и др. Вместе с тем полученные результаты существенно отличаются от упомянутых выше как по типу, так и по области применения.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Погодаев Н. И., Самсонюк О. Н., Старицын М. В. О точной форме позиционного принципа минимума В. А. Дыхты в нелинейных задачах управления // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 54. С. 48–63.
2. Гончарова Е. В., Погодаев Н. И., Старицын М. В. Точные формулы приращения целевого функционала в задаче оптимального управления линейным уравнением баланса // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 51. С. 3–20.
3. Погодаев Н. И., Старицын М. В. Точные формулы приращения функционала и необходимые условия оптимальности, альтернативные принципу Понтрягина // Математический сборник. 2024. Т. 215, № 6. С. 77–110.
4. Старицын М. В., Погодаев Н. И., Гончарова Е. В. Принцип максимума Понтрягина и непрямой метод спуска в задаче оптимального импульсного управления нелокальным уравнением переноса // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 66–84.
5. Погодаев Н. И., Старицын М. В. Нелокальные уравнения баланса с параметром в пространстве знакопеременных мер // Математический сборник. 2022. Т. 213, № 1. С. 69–94.
6. Старицын М. В., Погодаев Н. И. Об одном классе задач оптимального импульсного управления уравнением неразрывности // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 229–244.
7. Pogodaev N. I., Staritsyn M. V. Optimal Control of Nonlocal Balance Equations in the Space of Nonnegative Measures // Siberian Mathematical Journal. 2025. Vol. 66, no. 2. P. 576–593.
8. Chertovskih R., Pogodaev N., Staritsyn M., Aguiar A. P. Optimal Control of Diffusion Processes: Infinite-Order Variational Analysis and Numerical Solution // IEEE Control Systems Letters. 2024. Vol. 8. P. 1469–1474.
9. Chertovskih R., Pogodaev N., Staritsyn M. Optimal Control of Nonlocal Continuity Equations: Numerical Solution // Applied Mathematics & Optimization. 2023. Vol. 88. Art. 86.
10. Chertovskih R., Pogodaev N., Staritsyn M., Aguiar A. P. Optimal Control of Distributed Ensembles With Application to Bloch Equations // IEEE Control Systems Letters. 2023. Vol. 7. P. 2059–2064.
11. Staritsyn M., Pogodaev N., Chertovskih R., Pereira F. L. Feedback Maximum Principle for Ensemble Control of Local Continuity Equations: An Application to Supervised Machine Learning // IEEE Control Systems Letters. 2022. Vol. 6. P. 1046–1051.
12. Staritsyn M., Pogodaev N., Pereira F. L. Linear-Quadratic Problems of Optimal Control in the Space of Probabilities // IEEE Control Systems Letters. 2022. Vol. 6. P. 3271–3276.
13. Pogodaev N., Staritsyn M. Impulsive Control of Nonlocal Transport Equations // Journal of Differential Equations. 2020. Vol. 269, no. 4. P. 3585–3623.

14. Staritsyn M., Sorokin S. On Feedback Strengthening of the Maximum Principle for Measure Differential Equations // Journal of Global Optimization. 2020. Vol. 76, no. 3. P. 587–612.
15. Sorokin S., Staritsyn M. Numeric Algorithm for Optimal Impulsive Control Based on Feedback Maximum Principle // Optimization Letters. 2019. Vol. 13, no. 6. P. 1953–1967.
16. Staritsyn M. On “Discontinuous” Continuity Equation and Impulsive Ensemble Control // Systems & Control Letters. 2018. Vol. 118. P. 77–83.
17. Sorokin S., Staritsyn M. Feedback Necessary Optimality Conditions for a Class of Terminally Constrained State-Linear Variational Problems Inspired by Impulsive Control // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2017. Vol. 7, no. 2. P. 201–210.
18. Goncharova E., Staritsyn M. Optimal Control of Dynamical Systems with Polynomial Impulses // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2015. Vol. 35, no. 9. P. 4367–4384.

Научно-организационный отдел
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН
664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
e-mail:rio@icc.ru
Подписано в печать 10.06.2026 г.
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 2 п.л.
Заказ № 6. Тираж 100 экз.

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН