

Федеральное агентство научных организаций

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
ИМЕНИ В.М. МАТРОСОВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 51-72

№ государственной регистрации АААА-А17-
117032210076-0

Инв. № 2017-5

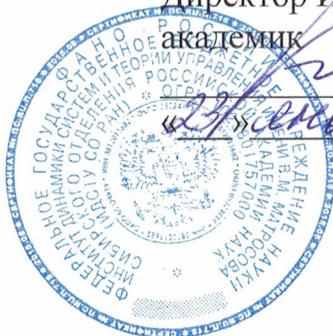
УТВЕРЖДАЮ

Директор ИДСТУ СО РАН

академик

И.В. Бычков

«27» сентября 2018 г.



ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

то теме:

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ В
ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ, ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ И
МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД
(промежуточный)

Руководитель темы

Марков 23.01.2018 д-р физ.-мат. наук Ю.А. Марков
подпись, дата

Иркутск 2017

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы
д-р физ.-мат. наук


Ю.А. Марков (введение, заключение)
подпись, дата

Исполнители темы:

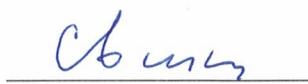
ст. науч. сотр.
д-р физ.-мат. наук


А.Л. Баландин (разделы 2-3)
подпись, дата

гл. науч. сотр.
д-р физ.-мат. наук


А.Л. Казаков (разделы 2-3)
подпись, дата 22.01.2018

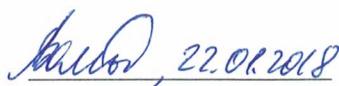
ст. науч. сотр.
канд. физ.-мат. наук


А.К. Свинин (разделы 2-3)
подпись, дата

ст. науч. сотр.
канд. физ.-мат. наук


Э.И. Семенов (разделы 2-3)
подпись, дата 22.01.2018

ст. науч. сотр.
канд. физ.-мат. наук


В.П. Ломов (разделы 2-3)
подпись, дата 22.01.2018

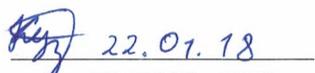
ст. науч. сотр.
д-р физ.-мат. наук


М.А. Маркова (разделы 2-3)
подпись, дата 22.01.2018

вед. науч. сотр.
канд. физ.-мат. наук


А.Е. Раджабов (разделы 2-3)
подпись, дата 22.01.2018

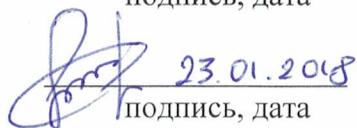
науч. сотр.
канд. физ.-мат. наук


П.А. Кузнецов (разделы 2-3)
подпись, дата 22.01.18

ст. науч. сотр.
канд. физ.-мат. наук


А.С. Жевлаков (разделы 2-3)
подпись, дата 22.01.2018

программист


Св.С. Орлов (разделы 2-3)
подпись, дата 23.01.2018

программист


А.И. Бондаренко (разделы 2-3)
подпись, дата 23.01.2018

Нормоконтролер
канд. тех. наук


Е.С. Фереферов
подпись, дата 23.01.2018

Реферат

Отчет составляет 16 стр., 1 ч., 13 источников.

ВНЕШНЕЕ ЛУЧЕВОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, ЦЕПОЧКИ БОГОЯВЛЕНСКОГО, НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, НЕЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ, ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, СПИН $3/2$, МОДЕЛЬ НАМБУ-ЙОНА-ЛАЗИНИО, ПЕРЕХОД МОТТА, ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЧАСТИЦЫ

Объектом исследования являются: скалярные и векторные поля; внешнее лучевое преобразование; нелинейное уравнение; иерархия эволюционных дифференциально-разностных уравнений цепочки Богоявленского; волновое уравнение четвертого порядка для частицы со спином $3/2$; мезонный газ; кварк-глюонная плазма; нелинейная система реакции-диффузии; поляризация квантовых частиц в промежуточном состоянии

Цель работы – исследование возможности томографической реконструкции скалярных и векторных полей для случая наличия экспериментальных данных во внешности шара радиуса r_0 (внешнее лучевое преобразование); построение новых точных и приближенных решений нелинейного уравнения теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры; доказательство новых теорем существования и единственности аналитических решений (в виде кратных степенных рядов); исследование взвешенных сумм степеней натуральных чисел, возникающих при построении непрерывного предела интегрируемой иерархии эволюционных дифференциально-разностных уравнений цепочки Богоявленского; исследование нелинейной системы реакции-диффузии, моделируемой системой уравнений параболического типа со степенными нелинейностями; развитие подхода к определению поляризации частицы в промежуточном (виртуальном) состоянии; построение корня четвертой степени волнового оператора четвертого порядка для частицы со спином $3/2$ и

обобщение полученного результата на случай присутствия в системе внешнего калибровочного поля; исследование эволюции как связанных состояний, так и состояний рассеяния на основе модели Намбу-Йона-Лазинио с петлями Полякова.

В процессе работы проводились аналитические и численные исследования изучаемых задач математической физики, физики сплошных сред и квантовой теории поля.

В результате исследования впервые была разработана техника обращения внешнего лучевого преобразования для скалярных и векторных полей в области $R^3 \setminus B^3(0, r_0)$; лучевые преобразования от базисных скалярных и векторных волновых функций получены в аналитическом виде и проведена верификация метода на модельных задачах; были найдены новые точные решения для нелинейного уравнения теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры; доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений и получены новые классы специальных точных решений; изучен класс взвешенных сумм, возникающих при исследовании непрерывного предела интегрируемых иерархий дифференциально-разностных уравнений цепочки Богоявленского; разработан подход к определению поляризации частицы после взаимодействия; введено новое понятие поляризации для частиц в промежуточном состоянии, в котором частица описывается при помощи функции распространения; предложен самосогласованный подход вывода системы волновых уравнений четвертого порядка для описания частицы со спином $3/2$; рассмотрено построение корня четвертой степени волнового оператора четвертого порядка и для данного построения предложен дифференциальный оператор первого порядка, сингулярный по параметру деформации; проведено изучение эволюции как связанных состояний, так и состояний рассеяния; дана оценка зависимости от температуры и химического потенциала фазовых сдвигов для псевдоскалярных, скалярных изовекторных мезонных каналов для трех ароматов кварков; разработан подход к определению поляризации частицы

после взаимодействия; введено новое понятие поляризации частиц в промежуточном (виртуальном) состоянии, в котором частица описывается при помощи функции распространения; рассмотрены конкретные приложения к физическим процессам; изучена система обыкновенных дифференциальных уравнений со степенными нелинейностями и получены условия на параметры системы, при выполнении которых она имеет явные точные решения, представимые степенными либо экспоненциальными функциями времени.

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ	2
Реферат	3
ВВЕДЕНИЕ.....	7
1. Развитие методов математической физики в теории солитонов, механике сплошных сред и плазмы.....	8
2. Развитие методов математической физики в квантовой теории поля, ядерной физики и кварк-глюонной плазме	9
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	12
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	15

ВВЕДЕНИЕ

Задачи и цели исследований: Разработать метод обращения внешнего лучевого преобразования в томографии для скалярных и векторных полей для случая наличия экспериментальных данных во внешности шара радиуса r_0 . Продолжить аналитическое исследование нелинейного уравнения теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры) и предложить оригинальные численные алгоритмы построения приближенных решений (на основе гранично-элементного подхода). Исследовать свойства взвешенных суммы степеней натуральных чисел, возникающие при построении непрерывного предела интегрируемой иерархии эволюционных дифференциально-разностных уравнений цепочки Богоявленского. Исследовать нелинейную систему реакции-диффузии, моделируемую системой уравнений параболического типа со степенными нелинейностями и построить новые многопараметрические семейства точных решений, задаваемых элементарными функциями.

Разработать подход к определению поляризации частицы после взаимодействия и рассмотреть в качестве приложения две конкретных физических системы: распространение нейтрино и поляризация t-кварка. Представить общий анализ вывода системы волновых уравнений четвертого порядка для описания частицы со спином $3/2$ и рассмотреть вопрос о приложении полученного формализма к задаче построения в рамках теории Баба-Мадхаварао представления в виде континуального интеграла по траекториям в парасуперпространстве для пропагатора массивной заряженной частицы со спином $3/2$ во внешнем электромагнитном поле. В рамках подхода Бет-Уленбека на основе модели Намбу-Йона-Лазинио с петлями Полякова рассмотреть эволюцию как связанных состояний, так и состояний рассеяния.

1. Развитие методов математической физики в теории солитонов, механике сплошных сред и плазмы

Предложен метод обращения внешнего лучевого преобразования для скалярных и векторных полей в области $R^3 \setminus B^3(0, r_0)$, т.е. для случая наличия экспериментальных данных во внешности шара радиуса r_0 . Метод основан на разложении полей по базисным, скалярным и векторным волновым функциям. Лучевые преобразования от базисных функций получены в аналитическом виде. Задача определения коэффициентов разложения сведена к задаче минимизации квадратичного функционала, которая эффективно решается с использованием метода сингулярного разложения. Доказаны соответствующие леммы. Примеры базисных векторов Хансена $M_1^m(\vec{r})$, $N_1^m(\vec{r})$ для $l=3$, $m=2$ приведены на рисунках:

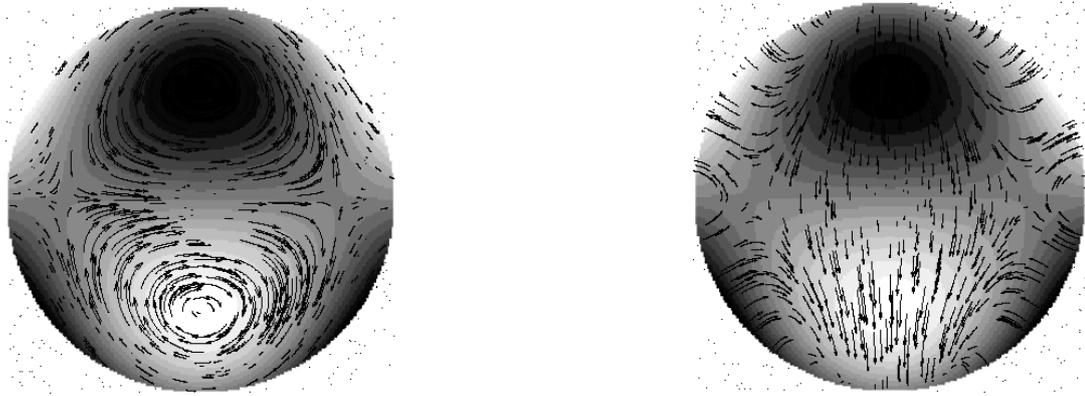


Рисунок 1. Примеры базисных векторов Хансена.

Для нелинейного уравнения теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений (в виде кратных степенных рядов), получены новые классы специальных точных решений (построение сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка) и предложены оригинальные численные алгоритмы построения приближенных решений (на основе гранично-элементного подхода). Все найденные решения описывают распространение с конечной скоростью тепловых волн различного вида на прямой, плоскости, а также в трехмерном пространстве симметрично относительно начала координат [2-3].

Исследованы взвешенные суммы степеней натуральных чисел, возникающие при построении непрерывного предела интегрируемой иерархии эволюционных дифференциально-разностных уравнений цепочки Богоявленского. На основе вычислений в среде Maple, предложен ряд гипотез относительно представления этих сумм специальными многочленами, а также относительно связи этих сумм с суммами степеней высшего порядка [4].

Исследована нелинейная система реакции-диффузии, моделируемая системой уравнений параболического типа со степенными нелинейностями. Предложена конструкция точных решений, позволяющая декомпозировать процесс отыскания компонент, зависящих от времени и пространственных координат. Построены новые многопараметрические семейства точных решений, задаваемых элементарными функциями. Выделены случаи взрывающихся (blow-up solutions) или периодических по времени и анизотропных по пространственным переменным точных решений [5-7].

2. Развитие методов математической физики в квантовой теории поля, ядерной физики и кварк-глюонной плазме

В рамках формализма Баба-Мадхаварао предложен самосогласованный подход вывода системы волновых уравнений четвертого порядка для описания частицы со спином $3/2$. Для этой цели были введены в рассмотрение дополнительный алгебраический объект, так называемый q -коммутатор (q – примитивный корень четвертой степени из единицы) и новый набор матриц η_{μ} вместо исходных β_{μ} -матриц. Были детально исследованы различные коммутационные соотношения η -матриц и на их основе рассмотрено построение корня четвертой степени волнового оператора четвертого порядка для частицы со спином $3/2$. Для данного построения был предложен дифференциальный оператор первого порядка, сингулярный по параметру деформации. Было проведено соответствующее обобщение полученных результатов на случай присутствия в системе внешнего электромагнитного поля и рассмотрен вопрос о возможном приложении

данного формализма к задаче построения в рамках теории Баба-Мадхаварао представления в виде континуального интеграла по траекториям в парасуперпространстве для пропагатора массивной заряженной частицы со спином $3/2$ во внешнем электромагнитном поле [8-9].

В рамках подхода Бет-Уленбека на основе модели Намбу-Йона-Лазинио с петлями Полякова рассмотрена эволюция как связанных состояний, так и состояний рассеяния. Оценены зависимости от температуры и химического потенциала фазовых сдвигов для псевдоскалярных, скалярных изовекторных мезонных каналов для ароматов кварков $N_f=2+1$. Показано, что изменение характера псевдоскалярных связанных состояний при температуре перехода Мотта сигнализируется скачком фазового сдвига на пороге от π до нуля в соответствии с теоремой Левинсона. Показана важность учета состояний рассеяния континуума, что гарантирует исчезновение полного фазового сдвига в каждом из мезонных каналов при высоких энергиях. Таким образом, данный подход обеспечивает унифицированное описание перехода от мезонного газа к кварк-глюонной плазме. Обсуждено возникновение аномальной моды для мезонов, состоящих из кварков с неравными массами, и возможное отношение данной моды к объяснению эффекта пика в отношении K^+/π^+ в столкновениях тяжелых ионов [10-12].

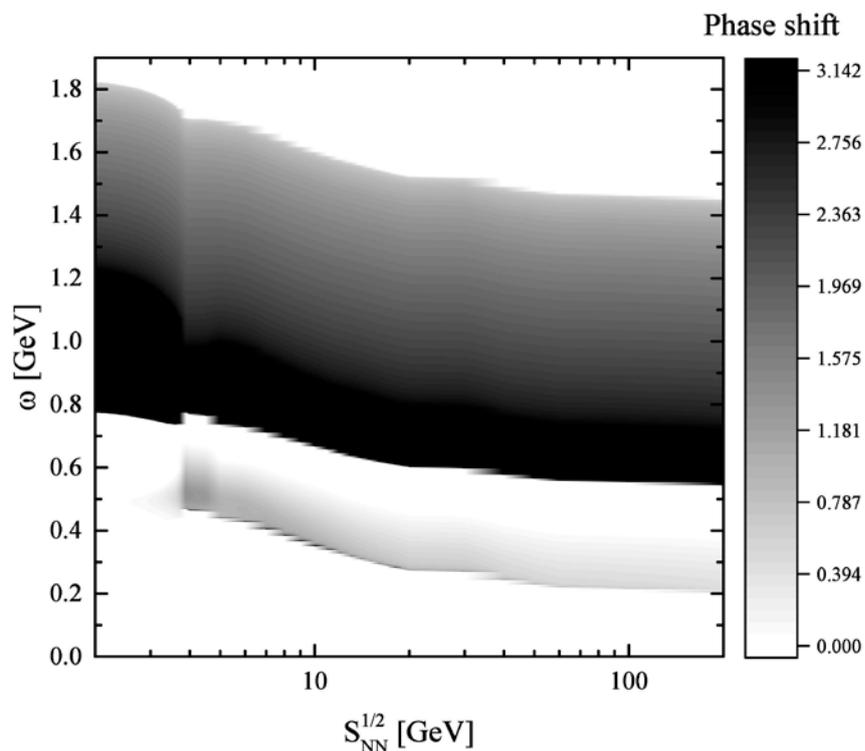


Рисунок 2. График энергетической зависимости (ω) фазовых сдвигов для положительно заряженного каона вдоль линии химического замораживания (“freeze out”) фазовой диаграммы параметризованной с помощью энергии столкновения тяжелых ионов в системе центра масс. При этом возникает дополнительное квази-связанное состояние с малой массой, которое является заметным в области энергий эффекта пика в отношении K^+/π^+ .

Развит подход к определению поляризации частицы после взаимодействия. Было показано, что вместо стандартного подхода с вычислением поляризации конечных продуктов взаимодействия с помощью квадрата матрицы рассеяния можно найти эту поляризацию прямо из амплитуды (т.е. из самой матрицы рассеяния). Хотя новый подход не дал ничего нового для конечных частиц, однако позволил определить понятие поляризации для частиц в промежуточном состоянии, в котором частица описывается при помощи пропагатора (функции распространения). Данное новое понятие - поляризации для частиц в промежуточном состоянии - была интерпретирована как комбинация частицы–античастицы с некоторой, вполне определённой, поляризацией. Было показано, что этот подход имеет приложение к распространению нейтрино, в котором рассматривается макроскопический пропагатор, что позволило нам говорить о поляризации нейтрино в момент взаимодействия. В качестве другого приложения было рассмотрено поляризация t-кварка [13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения проекта были решены следующие задачи:

- для обращения внешнего лучевого преобразования для скалярных и векторных полей в области $\mathbb{R}^3 \setminus B^3(0, r_0)$, разработан метод томографической реконструкции для случая наличия экспериментальных данных во внешности шара радиуса r_0 , основанный на разложении полей по базисным, скалярным и векторным волновым функциям; получены в аналитическом виде лучевые преобразования от базисных функций, при этом задача определения коэффициентов разложения сведена к задаче минимизации квадратичного функционала, которая эффективно решена с использованием метода сингулярного разложения;
- доказаны новые теоремы существования и единственности аналитических решений (в виде кратных степенных рядов) для нелинейного уравнения теплопроводности в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, получены новые классы специальных точных решений и предложены оригинальные численные алгоритмы построения приближенных решений (на основе гранично-элементного подхода);
- исследованы взвешенные суммы степеней натуральных чисел, возникающие при построении непрерывного предела интегрируемой иерархии эволюционных дифференциально-разностных уравнений цепочки Боявленского и на основе вычислений в среде Maple, предложен ряд гипотез относительно представления этих сумм специальными многочленами, а также относительно связи этих сумм с суммами степеней высшего порядка;
- проанализирована нелинейная система реакции-диффузии, моделируемая системой уравнений параболического типа со степенными нелинейностями и предложена конструкция точных решений, позволяющая декомпозировать процесс отыскания компонент, зависящих от времени и пространственных координат; построены новые многопараметрические семейства точных решений, задаваемых элементарными функциями и выделены

случаи взрывающихся (blow-up solutions) или периодических по времени и анизотропных по пространственным переменным точных решений;

- предложен самосогласованный подход вывода системы волновых уравнений четвертого порядка для описания частицы со спином $3/2$, для чего были введены в рассмотрение дополнительный алгебраический объект, так называемый q -коммутатор (q – примитивный корень четвертой степени из единицы) и новый набор матриц η_μ вместо исходных β_μ -матриц; были детально исследованы различные коммутационные соотношения η -матриц и на их основе рассмотрено построение корня четвертой степени волнового оператора четвертого порядка для частицы со спином $3/2$ и для данного построения был предложен дифференциальный оператор первого порядка, сингулярный по параметру деформации; было проведено соответствующее обобщение полученных результатов на случай присутствия в системе внешнего электромагнитного поля и рассмотрен вопрос о возможном приложении данного формализма к задаче построения в рамках теории Баба-Мадхаварао представления в виде континуального интеграла по траекториям в парасуперпространстве для пропагатора массивной заряженной частицы со спином $3/2$ во внешнем электромагнитном поле.

- на основе модели Намбу-Йона-Лазинио с петлями Полякова рассмотрена эволюция как связанных состояний, так и состояний рассеяния и дана оценка зависимости от температуры и химического потенциала фазовых сдвигов для псевдоскалярных, скалярных изовекторных мезонных каналов для ароматов кварков $N_f=2+1$; показано, что изменение характера псевдоскалярных связанных состояний при температуре перехода Мотта сигнализируется скачком фазового сдвига на пороге от π до нуля в соответствии с теоремой Левинсона и в дополнение показана важность учета состояний рассеяния континуума, что гарантирует исчезновение полного фазового сдвига в каждом из мезонных каналов при высоких энергиях; проведено обсуждение возникновения аномальной моды для мезонов, состоящих из кварков с

неравными массами, и возможное отношение данной моды к объяснению эффекта пика в отношении K^+/π^+ в столкновениях тяжелых ионов.

- развит оригинальный подход к определению поляризации частицы после взаимодействия и показано, что вместо стандартного подхода с вычислением поляризации конечных продуктов взаимодействия с помощью квадрата матрицы рассеяния можно найти эту поляризацию прямо из амплитуды (т.е. из самой матрицы рассеяния); новый подход позволил определить понятие поляризации для частиц в промежуточном состоянии, в котором частица описывается при помощи пропагатора (функции распространения); данное новое понятие - поляризации для частиц в промежуточном состоянии - была интерпретирована как комбинация частицы–античастицы с некоторой, вполне определённой, поляризацией; в качестве приложений были рассмотрены два физических примера: распространение нейтрино, в котором рассматривается макроскопический пропагатор, что позволило нам говорить о поляризации нейтрино в момент взаимодействия и в качестве другого приложения было рассмотрено поляризация t-кварка.

Уровень научных результатов, полученных по теме “Развитие математических методов описания процессов в физике высоких энергий, высокотемпературной плазме и механике сплошных сред” в 2017 г., соответствует лучшим достижениям в изучаемой области. Перечень научных публикаций по теме в российских и международных журналах, индексируемых в Web of Science, Scopus и РИНЦ: [1-13].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Balandin A.L. The least square inversion method for the exterior ray transform of 3D scalar and vector fields // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2017. – V. 40 – P. 7062–7076 (Wiley).
2. Kazakov A.L., Lempert A.A., Orlov S.S., Orlov Sv.S. On exact solutions of a heat-wave type with logarithmic front for the porous medium equation // *Journal of Physics: Conference series*. – 2017. – V. 894. – P. 012038 (P. 1-6).
3. Kazakov A.L., Lempert A.A., Orlov S.S., Orlov Sv.S. Some exact solutions of a heat wave type of a nonlinear heat equation // *CEUR Workshop Proceedings*. 2017. – V. 1839. – P. 344-356.
4. Svinin A.K. Conjectures Involving a Generalization of the Sums of Powers of Integers // *Experimental Mathematics*. – 2017. – P. 1-7.
5. Kosov A.A., Semenov E.I. Multidimensional exact solutions to the reaction-diffusion system with power-law nonlinear terms // *Siberian Mathematical Journal*. – 2017. – V. 58. – No. 4. – P. 619-632.
6. Косов А.А., Семенов Э.И. О точных многомерных решениях системы уравнений реакции-диффузии со степенными нелинейностями // *Сибирский математический журнал*. – 2017. – Т. 58. – № 4. – С. 796-812.
7. Косов А.А., Семенов Э.И., Гольшева С.П. О первых интегралах и точных решениях одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений со степенными нелинейностями // *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*. – 2017. – Т. 20. – С. 45-60.
8. Markov Yu.A., Markova M.A., Bondarenko A.I. Fourth-order wave equation in Bhabha-Madhavarao spin 3/2 theory // *International Journal of Modern Physics A*. – 2017. – V. 32. – No 25. – P. 1750144.
9. Markov Yu.A., Markova M.A., Bondarenko A.I. Higher-order wave equation within the Duffin–Kemmer–Petiau formalism // *Russian Physics Journal*. – 2017. – Vol. 59. – No. 11. – P. 1948-1955.

10. Zhang B., Radzhabov A., Kochelev N., Zhang P. Pauli form factor of quark and nontrivial topological structure of the QCD // *Physical Review D*. – 2017. – V. 96. – No. 5. – P. 054030.
11. Dubinin A., Radzhabov A., Blaschke D., Wergieluk A. // Mott dissociation of pions and kaons in hot, dense quark matter // *Physical Review D*. – 2017. – V. 96. – No. 9. – P. 094008.
12. Dorokhov A.E., Radzhabov A.E., Zhevlakov A.S. Light-by-light hadronic corrections to the muon $g-2$ Problem within the nonlocal chiral quark model // *Russian Physics Journal*. – 2017. – Vol. 59. – No. 11. – P. 1842-1845.
13. Kaloshin A.E., Lomov V.P. On the polarization of fermion in an intermediate state // *International Journal of Modern Physics A*. – 2017. – V. 32. – No. 17. – P. 1750096(18).