

Федеральное агентство научных организаций
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
ИМЕНИ В.М. МАТРОСОВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 519.67

№ госрегистрации АААА-А17-117032210077-7

Инв. № 2017 - 6

УТВЕРЖДАЮ



Директор ИДСТУ СО РАН
академик

И.В. Бычков

«23» января 2018 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ НЕПРЕРЫВНОЙ И ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ
И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ
СИСТЕМАХ ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ МЕЖДИСЦИПЛИНАРНЫХ
НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
(промежуточный)

Руководитель темы

д.ф.-м.н., проф.

А.С. Стрекаловский

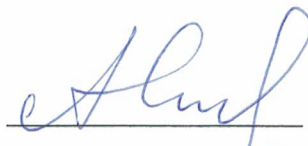
23.01.2018

Иркутск 2017

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Научный руководитель,

д.ф.-м.н., проф., зав. отделением



А.С. Стрекаловский

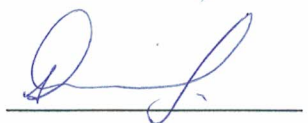
Ответственные исполнители проекта:

д.ф.-м.н., проф., зав. лаб.



А.С. Стрекаловский
(введение, раздел 1.1,
1.2, заключение)

к.т.н., зав. лаб.



А.А. Семенов

к.ф.-м.н., в.н.с.



А.А. Лемперт
(раздел 3.1, 3.2)

Исполнители:

д.ф.-м.н., проф., г.н.с.



В.А. Батурин
(раздел 3.5)

к.ф.-м.н., доцент, зав. лаб.



А.В. Орлов
(раздел 1.2)

к.ф.-м.н., доцент, в.н.с.



И.Л. Васильев
(раздел 2.3)

к.ф.-м.н., доцент, с.н.с.



Т.В. Груздева

к.т.н., с.н.с.



О.С. Заикин
(раздел 2.1)

к.ф.-м.н., н.с.



А.С. Игнатьев
(раздел 2.2)

к.т.н., н.с.



И.В. Отпущенников

к.ф.-м.н., м.н.с.



А.В. Ушаков

к.т.н., м.н.с.



А.Б. Столбов

(раздел 3.3)

м.н.с.



С.Е. Кочемазов

прогр.



М.Л. Жарков

(раздел 3.2)

прогр.



В.В. Козлов

(раздел 3.4)

прогр.



Н.С. Малтугуева

прогр.



М.В. Янулевич

(раздел 1.1)

прогр.



Д.Е. Горбатенко

прогр.



М.В. Баркова

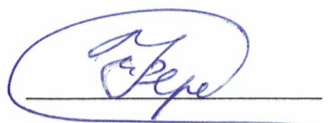
прогр.



И.А. Грибанова

Нормоконтроль:

к.т.н., ученый секретарь



Е.С. Фереферов

РЕФЕРАТ

Отчет 49 с., 2 рис., 5 табл., 44 источника.

СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ, НЕПРЕРЫВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, НЕВЫПУКЛАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, ИЕРАРХИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ, ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Объектами исследования являются невыпуклые задачи оптимизации, иерархические и равновесные задачи исследовании операций, задачи оптимального управления, задачи дискретного анализа, задачи целочисленного программирования (ЦП), а также эколого-экономические и транспортно-логистические системы.

Целью работы является разработка новых методов и информационно-вычислительных технологий (ИВТ) для задач поддержки принятия решений в междисциплинарных научных исследованиях с использованием и развитием аппарата математической оптимизации, исследования операций, вариационного исчисления, дискретного анализа.

На этапе исследований 2017 года в ходе НИР доказаны новые условия глобальной оптимальности (УГО) для минимизирующих последовательностей в задаче оптимального управления с функциями, представимыми в виде разности двух выпуклых функций. Разработана методология поиска глобальных решений в иерархических и равновесных задачах исследовании операций с билинейными структурами, использующей базовые свойства билинейных функций.

Разработана новая концепция организации грид-сред, объединяющих ресурсы проектов добровольных вычислений и свободные ресурсы кластеров. Кроме того, разработаны и реализованы новые вычислительные алгоритмы решения задачи восстановления параметров акустического волновода на основе данных от точечного гидрофона. Разработаны новые алгоритмы решения задачи MAXSAT, доказаны новые оценки сложности таких алгоритмов на некоторых классах булевых формул. Исследованы математические модели ЦП составления расписания работы взлетно-посадочной полосы и разработаны методы поиска оптимальных решений в практической задаче диспетчерского управления воздушным движением.

Для задач инфраструктурной логистики построены математические модели в виде задач оптимальной упаковки кругов равного радиуса. На основе многофазной системы массового обслуживания определены критические показатели работы транспортно-пересадочного узла. Проведен аналитический обзор программного обеспечения, используемого для поддержки исследований социо-эколого-экономических систем на основе комплекса моделей «Регион». Проведена оценка и исследована изменчивость теплового потока на границе вода-лед на основании экспериментальных данных и разработанной модели нарастания льда в озере Байкал. Для специальной задачи оптимального управления, содержащей дополнительные параметры регулирования, разработан метод и алгоритмы последовательных улучшений.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	7
1 Развитие теории глобального поиска в задачах исследования операций и оптимального управления	13
1.1 Условия глобальной оптимальности для минимизирующих последовательностей в задаче оптимального управления с функциями, представимыми в виде разности двух выпуклых функций	13
1.2 Методология поиска глобальных решений в иерархических и равновесных задачах исследования операций с билинейными структурами	16
2. Разработка алгоритмов решения задач дискретного анализа и целочисленного программирования и их реализация на высокопроизводительных вычислительных системах....	18
2.1 Вычислительные алгоритмы решения задачи восстановления параметров акустического волновода на основе данных от точечного гидрофона.....	18
2.2 Алгоритмы решения задачи MAXSAT и оценки их сложности на некоторых классах булевых формул.....	19
2.3 Математические модели и методы поиска оптимальных решений в задаче диспетчерского управления воздушным движением.....	23
3 Технологии создания математических, оптимизационных и имитационных моделей и методов для поддержки принятия решений в социо-эколого-экономических и транспортно-логистических системах.....	27
3.1 Математические модели для задач инфраструктурной логистики в виде задач оптимальной упаковки кругов равного радиуса	27
3.2 Критические показатели работы транспортно-пересадочного узла на основе многофазной системы массового обслуживания	29
3.3 Аналитический обзор программного обеспечения, используемого для поддержки исследований социо-эколого-экономических систем на основе комплекса моделей «Регион»	32
3.5 Метод и алгоритмы последовательных улучшений, основанные на разложении уравнения Беллмана до второго порядка для специальной задачи оптимального управления, содержащей дополнительные параметры регулирования.....	36
4 Перечень научных публикаций в российских и международных журналах, индексируемых в Web of Science, Scopus, РИНЦ	40
4.1 Статьи в журналах, индексируемых в Web of Science	40
4.2 Статьи в журналах, индексируемых в Scopus	40
4.3 Статьи в журналах и сборниках трудов, индексируемых в РИНЦ.....	41
4.4 Прочие публикации	42
4.5 Свидетельства о регистрации программ.....	43
Заключение.....	44
Список использованных источников.....	46

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ЗРВП – Задача составления расписания взлетов и посадок

ИВТ – Информационно-вычислительная технология

КНФ – Конъюнктивная нормальная форма

ЛЦ – Логистический центр

МГП – Методы глобального поиска

МЦК – Московское центральное кольцо

НИР – Научно-исследовательская работа

ОУ – Оптимальное управление

РИНЦ – Российский индекс научного цитирования

СМО – Система массового обслуживания

СППР – Системы поддержки принятия решений

ТПУ – Транспортный пересадочный узел

УГО – Условия глобальной оптимальности

ЦМ – Цепь Маркова

ЦП – Целочисленное программирование

DRE – Dual rail encoding

GRU – Graphics processing unit

MAXSAT – Maximum satisfiability problem

MPI – Message passing interface

SAT – Satisfiability problem

ВВЕДЕНИЕ

Настоящий проект направлен на разработку новых методов и информационно-вычислительных технологий (ИВТ) для задач поддержки принятия решений в междисциплинарных научных исследованиях. При этом предполагается использование и развитие аппарата статической и динамической, дискретной и непрерывной невыпуклой оптимизации, исследования операций, вариационного исчисления, дискретного анализа. Данный комплексный подход в сравнении с имеющимися позволит более адекватно описывать задачи и проблемы, возникающие в системах поддержки принятия решений (СППР), а также принимать оптимальные решения на более широком спектре значительно более сложных, интеграционных и гибридных моделей из СППР.

Достижению указанной цели будет способствовать решение следующих задач: построение адекватных математических моделей для процессов, возникающих в исследуемой области; развитие теоретической базы для качественного исследования построенных моделей; разработка алгоритмов решения соответствующих (в т.ч., оптимизационных) задач; их реализация в виде ИВТ с использованием высокопроизводительных вычислений.

Исследования по проекту организованы в три блока:

- Блок 1 «Развитие теории и методов глобального поиска в задачах исследования операций и оптимального управления (руководитель блока – д.ф.-м.н. А.С. Стрекаловский);
- Блок 2 «Разработка алгоритмов решения задач дискретного анализа и целочисленного программирования и их реализация на высокопроизводительных вычислительных системах» (руководитель блока – к.т.н. А.А. Семенов);
- Блок 3 «Технологии создания математических, оптимизационных и имитационных моделей и методов для поддержки принятия решений в социо-эколого-экономических и транспортно-логистических системах» (руководитель блока – к.ф.-м.н. А.А. Лемперт).

Блок 1 посвящен доказательству новых условий глобальной оптимальности (УГО), комбинирующих известные редукционные функции теории экстремума, для общей задачи оптимизации с (d.c.) функциями А.Д. Александрова, представимыми в виде разности двух выпуклых функций; построению и обоснованию методов локального поиска для указанной задачи оптимизации с помощью УГО; построению, обоснованию и тестированию методов глобального поиска для общей задачи d.c. оптимизации с помощью УГО, в том числе с использованием постановок и содержательных задач из блоков 2 и 3; развитию теоретических основ (УГО) для невыпуклого оптимального управления (ОУ) на невыпуклую негладкую задачу

ОУ с целевым функционалом и ограничениями типа неравенства, задаваемыми функционалами Больца с d.c. функциями; построению и обоснованию новых вычислительных методов ОУ для выпуклых задач, развивающих идеи методов, основанных на принципе Понтрягина, а также современных методов математического программирования; построению, обоснованию и тестированию методов локального и глобального поисков для указанной задачи ОУ, основанных на УГО, а также применение разработанной теории для решения задач поддержки принятия решений в конфликтных и иерархических системах управления, в том числе в области транспортной логистики.

В рамках блока 2 предполагалось: разработка новых методов организации грид-сред с привлечением ресурсов кластеров и проектов добровольных распределенных вычислений; решение в специализированных грид-средах оптимизационных задач, связанных с обработкой акустической информации; разработка новых методов оптимизации прогнозных функций и их применение к решению SAT в распределенных вычислительных средах; исследование приложений задач целочисленного программирования, в частности задач размещения, в области интеллектуального анализа больших массивов данных, а также разработка точных и эвристических методов поиска решений, в том числе с помощью теории, разработанной в блоке 1; приложение исследуемых подходов и моделей в различных практических областях, например, биоинформатике; разработка новых методов обращения криптографических функций, в том числе, с применением методов глобальной оптимизации; разработка и исследование новых моделей транспортной логистики, маршрутизации, диспетчерского управления и задач составления расписаний на основе подходов и методов целочисленного линейного программирования; разработка точных и эвристических алгоритмов поиска решений в предложенных постановках; приложение разработанных подходов в области управления воздушным, железнодорожным и автомобильным транспортом; разработка новых методов поиска коллизий и обращения криптографических хеш-функций, основанных на алгоритмах решения SAT, и их реализация в распределенных вычислительных средах, а также применение распределенных алгоритмов решения SAT к задачам дискретной оптимизации, в том числе к составлению расписаний и поиску максимальных клик.

Целью блока 3 является построение математических моделей для задач транспортной и инфраструктурной логистики в виде задач вариационного исчисления; разработка численных методов их исследования на основе физических аналогий с применением методов дискретной оптимизации из блока 2; разработка методологии построения многофазных стохастических моделей микрологистических транспортных систем с учетом неравномерности; разработка

методов решения непрерывной задачи размещения как задачи управления множеством достижимости дифференциального включения; разработка методов и средств поддержки создания математических и имитационных моделей динамических многокомпонентных систем; разработка моделей социо-эколого-экономических процессов и систем, рассматриваемых на разных уровнях агрегирования, и методики их идентификации; разработка вычислительных методов решения задач оптимального управления для многоэтапных и сетевых процессов, в том числе с использованием теории глобального поиска из блока 1, а также исследование нестационарных процессов тепло- и массопереноса с фазовыми превращениями в многослойных средах естественных водоемов на основе моделей с подвижными границами.

Невыпуклые задачи исследования операций и оптимального управления (ОУ) рассматривались ранее в ИДСТУ СО РАН и других институтах Сибирского отделения РАН. Прежде всего, хотелось бы отметить работы ветеранов науки и пионеров этого направления В.Т. Дементьева, Н.И. Глебова и В.П. Булатова по конечномерным и дискретным задачам оптимизации. Несомненно, что уровень их исследований отвечал всем мировым стандартам на то время и даже в чем-то опережал эти стандарты. То же самое можно сказать и об исследованиях по ОУ, которые в Сибирском регионе были сосредоточены, в основном, в Иркутске и возглавлялись такими учеными, как О.В. Васильев, В.А. Срочко и В.И. Гурман. Также в ИДСТУ под руководством В.А. Батурина разработан комплекс прикладных программ решения задач ОУ. Дискретными задачами оптимизации в настоящий момент в СО РАН занимаются в ИМ СО РАН (В.Л. Береснев, Ю.А. Кочетов, А.И. Ерзин, А.В. Кельманов, Э.Х. Гимади и др.), где образовалась всемирно известная школа, а также в филиале ИМ СО РАН в г. Омске (А.А. Колоколов и его ученики). Отметим также группу из Нижегородского университета (руководитель - д.ф.-м.н. Р.Г. Стронгин), которая разрабатывает методы решения невыпуклых экстремальных задач с липшицевыми функциями.

В области разработки методов решения невыпуклых задачи исследования операций в группе д.ф.-м.н. А.С. Стрекаловского построена оригинальная теория условий глобальной оптимальности (УГО). На основе этих УГО удалось построить методы глобального поиска (МГП) для канонических невыпуклых задач: выпуклая максимизация (вогнутая минимизация), обратно-выпуклые задачи, d.c. минимизация, задачи с d.c. ограничением. Кроме того, для гладкой общей задачи d.c. минимизации при ограничениях-неравенствах, заданных d.c. функциями, доказаны необходимые и достаточные УГО. Эти условия используют свертку ограничений в виде штрафной функции, а также теорему существования точного штрафа, которая влечет совпадение множества решений исходной и оштрафованной задачи. Условия обладают конструктивным

свойством, когда из нарушения условий оптимальности следует возможность отыскать допустимую точку, лучшую чем исследуемая. С другой стороны, УГО связаны с классической теорией экстремума, так что из УГО выводится, например, теорема Каруша-Куна-Таккера. Наконец, УГО сводят решение невыпуклой задачи к решению семейства выпуклых задач, что открывает возможность использования классических методов оптимизации, поскольку их необходимо применять для решения линеаризованных задач. Разработанные на этой основе МГП программно реализованы и применены для численного решения ряда непрерывных невыпуклых и комбинаторных задач оптимизации высокой размерности: полиматричных игр, задач о полиэдральной отделимости и линейной дополнительнойности, линейных и квадратично-линейных непрерывных двухуровневых задач оптимизации в оптимистической и гарантированной постановках, задач о (многомерном) рюкзаке, задач о максимальной клике, задач фракционного программирования, решения систем нелинейных алгебраических уравнений и др. В большинстве случаев получены рекордные по размерности решаемых задач результаты.

В области ОУ в группе А.С. Стрекаловского доказаны необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности в задачах ОУ терминальными, интегральными и смешанными d.c. функционалами, т.е. задаваемыми разностью выпуклых функций. Разработаны методы решения невыпуклых задач ОУ с целевым d.c. функционалом, которые базируются на УГО. Проведено их сравнительное тестирование на серии тестовых невыпуклых задач ОУ с квадратичным целевым функционалом. В частности, проведено численное сравнение с существующими пакетами программ, результаты которого продемонстрировали рекордную сравнительную эффективность разработанных методов, как по времени решения, так и по количеству успешно решенных задач с ростом их размерности.

Задел коллектива в части дискретного анализа включает в себя результаты по разработке параллельных алгоритмов решения проблемы булевой выполнимости и их применению к решению задач криптоанализа, исследованию дискретно-автоматных моделей коллективного поведения и поиску комбинаторных структур. Участниками проекта накоплен и большой опыт в развитии методов целочисленного программирования для решения дискретных задач размещения и составления расписаний, в том числе их распараллеливания, а также применения методов и моделей целочисленного программирования в задачах кластеризации.

На основе развиваемого исполнителями проекта оптико-геометрического подхода построены математические модели, разработаны и апробированы методы исследования следующих логистических задач: об оптимальном маршруте, об оптимальном размещении логистических объектов (в т.ч. в условиях конкуренции и кооперации), об идентификации и

сегментации логистических зон. Предложена и апробирована технология построения стохастических моделей микрологистических транспортных систем с учетом неравномерности. Разработаны методы численного решения специальных классов гибридных задач оптимального управления. Разработан прототип программной системы поддержки формирования медико-эколого-экономических моделей. Проведены расчеты с различными вариантами медико-экологических и эколого-экономических моделей.

На 2017 год по блоку 1 были поставлены следующие основные цели и задачи:

- доказать новые условия глобальной оптимальности (УГО) для минимизирующих последовательностей в задаче оптимального управления с (d.c.) функциями А.Д. Александрова, представимыми в виде разности двух выпуклых функций;
- разработать методологию поиска глобальных решений в иерархических и равновесных задачах исследовании операций с билинейными структурами, использующей базовые свойства билинейных функций.

По блоку 2 основными целями и задачами этапа исследований в 2017 году являлось:

- разработать новую концепцию организации грид-сред, объединяющих ресурсы проектов добровольных вычислений и свободные ресурсы кластеров, а также разработать и реализовать новые вычислительные алгоритмы решения задачи восстановления параметров акустического волновода на основе данных от точечного гидрофона;
- разработать новые алгоритмы решения задачи MAXSAT, которые в процессе работы обращаются к оракулам, оценивающим выполнимость хорновских КНФ. Будут доказаны новые оценки сложности таких алгоритмов на некоторых классах булевых формул;
- исследовать математические модели целочисленного программирования составления расписания работы взлетно-посадочной полосы и разработать методы поиска оптимальных решений в практической задаче диспетчерского управления воздушным движением.

Наконец, по блоку 3 в 2017 году были поставлены следующие цели и задачи:

- построить математические модели для задач инфраструктурной логистики в виде задач оптимальной упаковки кругов равного радиуса;
- определить критические показатели работы транспортно-пересадочного узла на основе многофазной системы массового обслуживания;
- провести аналитический обзор программного обеспечения, используемого для поддержки исследований социо-эколого-экономических систем на основе комплекса моделей «Регион»;
- провести оценки и исследовать изменчивость теплового потока на границе «вода-лед» на

основании экспериментальных данных и разработанной модели нарастания льда в озере Байкал;

- разработать метод и алгоритмы последовательных улучшений для специальной задачи оптимального управления, содержащей дополнительные параметры регулирования.

Все основные запланированные работы в указанных направлениях были проведены. Научные результаты, полученные в 2017 году, представлены в следующих трех разделах по каждому блоку исследований.

1 Развитие теории глобального поиска в задачах исследования операций и оптимального управления

1.1 Условия глобальной оптимальности для минимизирующих последовательностей в задаче оптимального управления с функциями, представимыми в виде разности двух выпуклых функций

Авторы результата – д.ф.-м.н. А.С. Стрекаловский, М.В. Янулевич.

Рассмотрим следующую управляемую систему:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad \forall t \in T =]t_0, t_1[, \quad x(t_0) = x_0 \in \check{Y}^n, \quad (1.1)$$

$$u(\cdot) \in U = \{u(\cdot) \in L_\infty^r(T) \mid u(t) \in U \quad \forall t \in T\}, \quad (1.2)$$

где выполнены стандартные предположения для задач ОУ, в частности, множество $U \subset \check{Y}^r$ является компактом, при этом здесь и далее в работе знак $\forall$ означает для почти всех. Также будем предполагать, что вектор-функция (x, u, t) а $f(x, u, t)$ непрерывна по совокупности переменных $(x, u, t) \in \check{Y}^n \times \check{Y}^r \times T$, и

$$P f(x, u, t) - f(y, u, t) P \leq L(t) P x - y P$$

при всех $(x, u, t), (y, u, t) \in \check{Y}^n \times \check{Y}^r \times T$, где $L(t) > 0$ и функция $L(\cdot)$ суммируема на T , $L(\cdot) \in L_1(T)$. При сделанных предположениях, как известно [1], для каждого управления $u(\cdot) \in U$ существует единственное состояние $x(t) = x(t, u(\cdot))$, $t \in T$, являющееся решением задачи Коши (1.1) из класса абсолютно непрерывных вектор-функций $AC^n(T)$, удовлетворяющих уравнению из (1.2) почти всюду на T . Далее в работе состояние $x(t, u(\cdot))$, $t \in T$, соответствующее управлению $u(\cdot) \in U$, для краткости будем обозначать $x(t, u)$, $t \in T$.

Исследуемая задача оптимального управления (ОУ) заключается в минимизации следующего функционала Больца:

$$J_0(u) := F_0(x(t_1, u)) + \int_T [F(x(t, u), t) + f_0(u(t), t)] dt \downarrow \min_u, \quad u(\cdot) \in U, \quad (1.3)$$

при условии ограничений-неравенств на терминальное состояние системы (1.1)-(1.3):

$$J_i(u) = F_i(x(t_1, u)) \leq 0, \quad i \in I = \{1, 2, K, m\}, \quad (1.4)$$

где $x(t) = x(t, u)$, $t \in T$, – решение системы (1.1)-(1.2), соответствующее управлению $u(\cdot) \in U$.

Далее, для краткости, задачу (1.1)-(1.2) будем называть задачей (Р). Предположим, что

функции x а $F_i(x)$, $i = 0, 1, K, m$, и (x, t) а $F(x, t)$ являются (d.c.) функциями А.Д. Александрова, т.е. представимы в виде разности двух выпуклых функций:

$$F_i(x) = g_i(x) - h_i(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad i = 0, 1, K, m, \quad (1.5)$$

$$F(x, t) = g(x, t) - h(x, t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in T, \quad (1.6)$$

где x а $g_i(x)$ и x а $h_i(x)$, $i = \overline{0, m}$, – выпуклые функции на $\mathbb{R}^n$, а функции x а $g(x, t)$ и x а $h(x, t)$ выпуклы по $x \in \mathbb{R}^n$ для любого $t \in T$. Кроме того, пусть функция (u, t) а $f_0(u, t): \check{Y}^{r+1} \rightarrow \check{Y}$ непрерывна по каждой переменной.

При выполнении данных предположений задача (P), вообще говоря, является невыпуклой, поскольку могут существовать процессы $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, но при этом отличные от глобально оптимального $(z(\cdot), w(\cdot))$, скажем по значению целевого функционала.

С помощью точного штрафа Задача (P) редуцируется к задаче следующей задаче (P_σ) :

$$J_\sigma(u) := G_\sigma(x(t_1, u)) - H_\sigma(x(t_1, u)) + \int_T [g(x(t, u), t) - h(x(t, t), t) + f_0(u(t), t)] dt \downarrow \min_u, \quad u(\cdot) \in U, \quad (1.7)$$

где функции $G_\sigma(\cdot)$ и $H_\sigma(\cdot)$ выпуклы и имеют следующий вид:

$$H_\sigma(x) := h_0(x) + \sigma \sum_{i \in I} h_i(x), \quad (1.8)$$

$$G_\sigma(x) := \theta_\sigma(x) + H_\sigma(x) = g_0(x) + \sigma \max \left\{ \sum_{j=1}^m h_j(x); g_i(x) + \sum_{j \in I}^{j \neq i} h_j(x), \quad i \in I \right\}. \quad (1.9)$$

Далее, пусть управление $u(\cdot) \in U$ является допустимым в задаче (P). Введем следующий функционал ($\sigma > 0$):

$$\varphi_\sigma(u(\cdot), y(\cdot), \beta) @ G_\sigma(x(t_1, u)) - \langle \nabla H_\sigma(y(t_1)), x(t_1, u) - y(t_1) \rangle - \beta + \int_T [g(x(t, u), t) - \langle \nabla h(y(t), t), x(t, u) - y(t) \rangle + f_0(u(t), t)] dt, \quad (1.10)$$

где $y(\cdot)$ – кусочно-непрерывная вектор-функция ($y(\cdot) \in PC^n(T)$).

Для проверки управления $w(\cdot) \in U$ на глобальную оптимальность в задаче (P) рассмотрим следующую вариационную задачу $(AP_\sigma(w))$, зависящую от управления $w(\cdot)$ и параметра $\sigma \geq \sigma_* > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_\sigma(u(\cdot), y(\cdot), \beta) \downarrow \min_{u, y, \beta}, \quad u \in U, \\ y(\cdot) \in PC^n(T), \quad H_\sigma(y(t_1)) + \int_T h(y(t), t) dt = \beta - J_\sigma(w), \quad \beta_-(y) \leq \beta \leq \beta_+, \end{array} \right. \quad (1.11)$$

где верхние и нижние оценки $\beta_-(y)$ и β_+ определены следующим образом:

$$\beta_-(y) = G_\sigma(y) + \inf_u \{F_0(u) \mid u \in U\}, \quad \beta_+ = \sup_u \{G_\sigma(x(\cdot, u)) + F_0(u) \mid u \in U\},$$

и функционалы $G_\sigma(\cdot)$ и $F_0(\cdot)$ определены равенствами

$$G_\sigma(y) @ G_\sigma(y(t_1)) + \int_T g(y(t), t) dt, \quad F_0(u) @ \int_T f_0(u(t), t) dt. \quad (1.12)$$

Обозначим через $\Phi_\sigma(w)$ оптимальное значение задачи $(AP_\sigma(w))$, так что

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma(w) &= \inf_{u, y, \beta} \{ \varphi_\sigma(u(\cdot), y(\cdot), \beta) \mid u(\cdot) \in U, \quad \beta_-(y) \leq \beta \leq \beta_+, \\ & y(\cdot) \in PC^n(T), \quad H_\sigma(y(t_1)) + \int_T h(y(t), t) dt = \beta - J_\sigma(w) \}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Отметим, что при $u(t) = w(t)$, $y(t) = z(t)$, $t \in T$, $\beta_z = G_\sigma(z(t_1)) + \int_T [g(z(t), t) + f_0(w(t), t)] dt$ из

определения функционала $\varphi_\sigma(\cdot)$ следует, что $\varphi_\sigma(w(\cdot), z(\cdot), \beta_z) = 0$, поэтому

$$\Phi_\sigma(u) \leq 0 \quad \forall u(\cdot) \in U. \quad (1.14)$$

Тогда условия глобальной оптимальности в задаче (P_σ) записываются в виде

$$\Phi_\sigma(w) = 0. \quad (1.15)$$

Доказана следующая теорема для минимизирующих последовательностей в задаче (P) .

Теорема 1 Если последовательность управлений $\{w^k(\cdot)\} \subset U$ является минимизирующей в задаче (P) , то для любого $\sigma \geq \sigma_* > 0$ справедливо условие оптимальности:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_\sigma(w^k) = 0. \quad (1.16)$$

Если, кроме того, справедливо предположение

$$\exists \chi > 0 \quad \exists \chi > 0: \quad J_\sigma(w^k) \geq J_\sigma(w^k) + \chi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.17)$$

то условие (1.16) становится и достаточным для того, чтобы последовательность управлений $\{w^k(\cdot)\}$ была минимизирующей в задаче (P_σ) .

Следует отметить, что предположение (1.17) не является ограничительным в условиях теоремы 1, поскольку оно означает, что ни одно из управлений $w^k(\cdot)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, не должно доставлять глобальный максимум целевому функционалу $J_\sigma(\cdot)$, в то время как задача (P_σ)

заключается в поиске его минимума.

1.2 Методология поиска глобальных решений в иерархических и равновесных задачах исследования операций с билинейными структурами

Авторы результата – к.ф.-м.н. А.В. Орлов, д.ф.-м.н. А.С. Стрекаловский.

Билинейные функции являются достаточно популярным объектом в задачах оптимизации и возникают при моделировании ряда задач экономики и транспорта, таких как задача производственного календарного планирования, задача о многопродуктовом потоке на сетях, трехмерная задача о назначениях и другие. Помимо этого, билинейные функции естественным образом присутствуют в формулировках классических матричных и полиматричных игр, а также возникают при исследовании ряда непрерывных иерархических задач.

Билинейные функции обычно содержат две переменные (две группы переменных) и аффинны по каждой из этих переменных при фиксированной другой. При этом, в них обязательно присутствуют члены, содержащие произведения переменных с некоторым ненулевым коэффициентом, которые порождают невыпуклость в данной задаче. Как известно, невыпуклые задачи обладают большим количеством локальных решений и стационарных точек, далеких от глобального оптимума даже по значению целевой функции, а классические методы выпуклой оптимизации в подобных задачах напрямую неприменимы.

В общем виде билинейная функция записывается следующим образом:

$$F(x, y) = \langle c, x \rangle + \langle x, Qy \rangle + \langle d, y \rangle, \quad (1.18)$$

где $c, x \in \mathbb{R}^m$; $d, y \in \mathbb{R}^n$; Q – ненулевая матрица размера $(m \times n)$.

Помимо свойства аффинности билинейной функции при фиксировании одной из переменных, вторым базовым ее свойством является возможность представления в виде разности двух выпуклых функций. Это означает, что билинейная функция принадлежит классу так называемых d.c. функций (функций А.Д. Александрова).

С использованием известного свойства скалярного произведения нетрудно построить явное разложение функции (1.18) на разность двух выпуклых:

$$F(x, y) = f(x, y) - g(x, y), \quad (1.19)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4} Px + QyP^T, \quad g(x, y) = \frac{1}{4} Px - QyP^T - \langle d, y \rangle - \langle c, x \rangle.$$

При этом возможны и другие варианты построения d.c. представлений билинейных функций.

Основываясь на двух упомянутых свойствах билинейных функций, разработана общая методология поиска глобальных решений в иерархических и равновесных задачах с билинейными структурами.

Прежде всего, исследуемая задача на поиск равновесия или с иерархией редуцируется к невыпуклой задаче (или к семейству невыпуклых задач) математической оптимизации с билинейной целевой функцией и выпуклым допустимым множеством. Затем, принимая, в частности, во внимание разложение (1.19), строится явная d.c. декомпозиция целевой функции редуцированной задачи. Для поиска глобального решения в редуцированной задаче далее применяется Теория глобального поиска А.С. Стрекаловского [2]. Согласно этой теории, методы глобального поиска должны состоять из двух основных этапов: специальных методов локального поиска, принимающих во внимание специфику исследуемых задач, а также процедур выхода из критических точек, полученных на этапе локального поиска, которые основаны на условиях глобальной оптимальности А.С. Стрекаловского.

Для задач с билинейными структурами локальный поиск предлагается осуществлять с использованием первого базового свойства билинейных функций путем организации решения последовательности выпуклых (аффинных) подзадач на каждом шаге локального поиска. Процедура глобального поиска, в свою очередь, использует d.c. структуру билинейных функций и соответствующие условия глобальной оптимальности для задач d.c. оптимизации.

Разработанная методология была успешно реализована при разработке численных методов глобального поиска в двухуровневых задачах оптимизации с квадратичными функциями на верхнем и нижнем уровнях, а также при разработке методов поиска ситуаций равновесия по Нэшу в полиматричных играх двух и трех лиц.

2. Разработка алгоритмов решения задач дискретного анализа и целочисленного программирования и их реализация на высокопроизводительных вычислительных системах

2.1 Вычислительные алгоритмы решения задачи восстановления параметров акустического волновода на основе данных от точечного гидрофона

Автор результата – к.т.н. О.С. Заикин.

Рассмотрим подводную среду мелкого моря. Параметрами данной среды являются профиль скорости звука в воде (т.е. зависимость скорости звука от глубины), а также скорость звука и плотность в слое осадков, составляющих морское дно. Под прямой задачей подводной акустики понимается задача распространения в среде акустического сигнала, при условии, что все параметры среды известны. Были исследованы обратные задачи подводной акустики, в рамках которых по полученному (приемником) акустическому сигналу и известным значениям некоторых параметров среды необходимо восстановить значения остальных параметров среды. Также одним из восстанавливаемых параметров может быть расстояние от источника до приемника. Был применен метод [3], согласно которому решение обратной задачи подводной акустики сводится к решению семейства прямых задач подводной акустики. При этом формируется конечномерное пространство поиска, в котором каждая точка – это набор значений восстанавливаемых параметров. Определяется целевая функция как функция невязки между принятым приемником акустическим сигналом и сигналом, полученным с помощью решения прямой задачи на текущих значениях параметров [4]. В итоге решение обратной задачи сводится к задаче минимизации указанной целевой функции, которая невыпукла.

Исследовались два класса обратных задач, при этом были использованы реальные экспериментальные данные, полученные на шельфе острова Сахалин при помощи одиночного гидрофона (подводного микрофона) сотрудниками Тихоокеанского института им. В.И. Ильичева ДВО РАН. Гидрофон выступал в роли приемника акустического сигнала. В задачах первого класса необходимо по полученному (от источника до приемника) импульсному акустическому сигналу восстановить параметры морского дна, а также расстояние между источником и приемником сигнала, при этом профиль скорости звука в воде известен. Для решения данных задач был использован поиск восхождением к вершине (hill climbing), с помощью которого на вычислительном кластере были найдены приемлемые решения (отклонение найденных значений параметров от истинных не превышало 5%). Пространство поиска самой сложной из задач

состояло из восьми миллионов точек. Была использована MPI-программа CAMBALA, созданная совместно с коллегами из ТОИ ДВО РАН. Программа CAMBALA предназначена для решения обратных задач подводной акустики на вычислительных кластерах. Данные результаты были опубликованы в [5,6].

В задачах второго класса необходимо по полученному импульсному акустическому сигналу восстановить профиль скорости звука в воде, при этом параметры морского дна, а также расстояние от источника до приемника известны. Для решения этих задач применялся полный перебор узлов равномерной сетки. Число слоев воды варьировалось от одного до шести. Для количества слоев от 1-го до 4-х включительно использовался вычислительный кластер, для 5-ти и 6-ти слоев был использован проект добровольных распределенных вычислений Acoustics@home. Данный проект был запущен специально для решения трудных задач подводной акустики. При проведении упомянутых вычислительных экспериментов Acoustics@home был усилен при помощи технологии, предложенной в статье [7]. Лучшие результаты (в смысле значения целевой функции) были получены для 6-ти слоев воды, при этом профиль скорости звука удалось восстановить достаточно точно – погрешность составила всего 0.5%. Пространство поиска для 6-ти слоев воды состояло из 887 миллионов точек. Данные результаты были опубликованы в статье [8].

2.2 Алгоритмы решения задачи MAXSAT и оценки их сложности на некоторых классах булевых формул

Автор результата – к.ф.-м.н. А.А. Игнатьев.

В направлении, касающемся новых алгоритмов решения задачи MAXSAT, были рассмотрены новые способы пропозициональной записи задачи MAXSAT, а именно была использована техника т.н. «двухрельсового кодирования» (Dual Rail Encoding, DRE). Ранее похожие идеи применялись в контексте совместного использования SAT и BDD [9]. Кратко суть техники DRE состоит в том, что по произвольной исходной КНФ C эффективно строится новая КНФ C^* , которая является хорновской. КНФ C^* сама по себе является невыполнимой. Однако можно показать, что исходная КНФ C выполнима тогда и только тогда, когда существует набор, выполняющий не менее определенного числа дизъюнктов в C^* . Использование DRE в контексте MAXSAT в работе [10] позволило получить ряд новых интересных теоретических результатов. Помимо сказанного, были предложены новые алгоритмы работы с задачами MAXSAT-типа, основанные на использовании резолюции над хорновскими дизъюнктами [11], [12]. Построенные

алгоритмы были применены к некоторым задачам вывода в дескриптивных логиках [13]. Также были предложены новые техники использования SAT для решения некоторых оптимизационных задач на графах [14].

В части, относящейся к новым алгоритмам решения MAXSAT, основным результатом является подход, использующий т.н. «двухрельсовую» процедуру кодирования. В рамках предложенного подхода была построена новая система пропозиционального вывода, более мощная, чем известный метод резолюций. Напомним, что в исходной задаче MAXSAT требуется для произвольной КНФ C максимизировать на множестве $\{0,1\}^n$ функцию, значение которой на произвольном наборе $\alpha \in \{0,1\}^n$ определяется как число дизъюнктов в C , выполненных на α . Данная задача является одной из классических NP-трудных задач. За последние несколько лет для решения MAXSAT предложено довольно много подходов. Один из наиболее эффективных заключается в выделении т.н. минимальных невыполнимых ядер в невыполнимых КНФ [15].

В работе [10] было описано сведение SAT для произвольной КНФ к задаче MAXSAT для невыполнимой хорновской КНФ. Хорошо известно, что проблема выполнимости хорновских КНФ относится к классу P, однако проблема MAXSAT для таких КНФ продолжает оставаться NP-трудной. Опишем кратко суть сведения, предложенного в [10].

Пусть C – произвольная КНФ над множеством булевых переменных $X = \{x_1, \dots, x_N\}$. Сопоставим каждой переменной из X две новых булевых переменных:

$$x_i \rightarrow \{p_i, n_i\}.$$

По исходной КНФ C построим новую КНФ C_H , используя следующие три шага.

Шаг 1. Пусть D – произвольный дизъюнкт из C и $l(x_i) \in \{x_i, \neg x_i\}$ – произвольный литерал, входящий в D . Тогда в новом дизъюнкте D' литералу $l(x_i)$ сопоставляется литерал $\neg n_i$, если $l(x_i) = x_i$, либо литерал $\neg p_i$, если $l(x_i) = \neg x_i$. КНФ $C = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$ сопоставляется КНФ $C' = D'_1 \wedge \dots \wedge D'_m$.

Шаг 2. Строим КНФ $\hat{C} = \bigwedge_{i=1}^N (\neg p_i \vee \neg n_i)$.

Шаг 3. Строим КНФ $\hat{C} = \bigwedge_{i=1}^N (p_i \wedge n_i)$

Итог: КНФ $C^* = C' \wedge \hat{C}$. Очевидно, что КНФ C^* является хорновской (каждый ее дизъюнкт содержит не более одного литерала в положительной фазе). Также ясно, что C^* является невыполнимой: это следует из очевидной невыполнимости КНФ $\hat{C}$. Далее мы

рассматриваем C^* в виде конъюнкции двух частей: $C^* = H \wedge S$, где $H = C' \wedge \mathcal{C}'$, $S = \hat{C}$. КНФ H называется hard-частью, а S – soft-частью. В [10] установлен следующий результат:

Теорема 2 [10] Пусть C – произвольная КНФ над множеством булевых переменных $X, |X| = N$, C^* – КНФ, построенная по C в соответствии с описанными выше шагами 1-3, и X^* – множество булевых переменных, фигурирующих в C^* . Утверждается, что C выполнима тогда и только тогда, когда существует набор значений переменных из X^* , который выполняет часть H и выполняет N дизъюнктов из части S .

Переход от исходной КНФ C к КНФ C^* и составляет суть техники «двухрельсового кодирования» (dual rail encoding, DRE). Основной результат работы [10] заключается в построении основанных на использовании DRE коротких доказательств невыполнимости для формул Дирихле RHP_m^{m+1} . Напомним здесь, что RHP_m^{m+1} – это булевы формулы в КНФ, кодирующие отрицание принципа Дирихле (для случая с m клетками и $m+1$ голубем). Более точно, RHP_m^{m+1} выглядит следующим образом:

$$RHP_m^{m+1} : \left(\bigwedge_{i=1}^{m+1} AtLeast1(x_{i1}, K, x_{im}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^m AtMost1(x_{1j}, K, x_{m+1j}) \right).$$

Предикат $AtLeastK(\alpha_1, K, \alpha_t)$, $\alpha_q \in \{0, 1\}$, $q \in \{1, K, t\}$, принимает значение «Истина» тогда и только тогда, когда набор (α_1, K, α_t) содержит не менее K единиц. Предикат $AtMostK(\alpha_1, K, \alpha_t)$, $\alpha_q \in \{0, 1\}$, $q \in \{1, K, t\}$, принимает значение «Истина» тогда и только тогда, когда набор (α_1, K, α_t) содержит не более K единиц. Переменная x_{ij} , $i \in \{1, K, m+1\}$, $j \in \{1, K, m\}$, принимает значение 1 тогда и только тогда, когда i – тый голубь сидит в j – той клетке. Таким образом, любая формула вида RHP_m^{m+1} ($m \geq 1$) является логическим противоречием (невыполнима). В своей известной работе 1985 г. А. Хакен установил, что любое доказательство невыполнимости формулы RHP_m^{m+1} методом резолюций будет порождать экспоненциальное от m число резольвент. Из ряда работ начала – середины 2000-х годов следует, что метод резолюций и алгоритм CDCL, являющийся основой большинства современных эффективных SAT-решателей, полиномиально моделируют друг друга. Следовательно, формулы RHP_m^{m+1} являются трудными тестами для SAT решателей, основанных на CDCL.

Удивительный факт, установленный в [10], состоит в том, что для формул RHP_m^{m+1}

возможна полиномиальная от m схема доказательства, использующая переход от RHP_m^{m+1} к ее DRE-образу. Дадим более детальное пояснение сказанному.

Пусть C формула RHP_m^{m+1} , и C^* – КНФ, полученная из C в результате процедуры DRE. В КНФ C содержится $m(m+1)$ булевых переменных. Тогда в соответствии с процедурой DRE в C^* содержится $2m(m+1)$ переменных. Следовательно, soft-часть S содержит $2m(m+1)$ однолитеральных дизъюнктов. В соответствии с теоремой 2 RHP_m^{m+1} выполнима тогда и только тогда, когда найдется набор, выполняющий H и выполняющий при этом $m(m+1)$ однолитеральных дизъюнктов из S . Пусть теперь $\beta \in \{0,1\}^{2m(m+1)}$ – произвольный набор, выполняющий часть H . Но, как показано в [10], любой такой β обязательно обращает в 0 не менее чем $m(m+1)+1$ дизъюнктов из S . Соответственно, общее число выполненных дизъюнктов части S не превосходит $m(m+1)-1$, что в силу теоремы 2 означает невыполнимость RHP_m^{m+1} . Тот факт, что любой $\beta \in \{0,1\}^{2m(m+1)}$, выполняющий H , обращает в 0 не менее $m(m+1)+1$ дизъюнктов из S доказывается за время $O(m^3)$ при помощи специального алгоритма MSU3 [15], который выделяет минимальные невыполнимые ядра в невыполнимых КНФ. Данная оценка сложности для MSU3 на DRE-образах RHP_m^{m+1} также устанавливается в [10]. Все сказанное выше дает полиномиальную по сложности схему доказательства формул RHP_m^{m+1} . Несколько позднее авторами [10] в соавторстве с M.L. Bonet и S. Buss было установлено, что описанная в [10] система пропозиционального вывода, основанная на DRE-процедуре, является более мощной, чем общая резолюция (general resolution). Соответствующие результаты были приняты к публикации в трудах конференции AAAI–2018 [16].

Переход от исходной КНФ C к КНФ C^* и составляет суть техники «двухрельсового кодирования» (dual rail encoding, DRE).

В [10] была описана новая система пропозиционального вывода (propositional proof system), в основе которой лежит использование техники т.н. «двухрельсового кодирования» (Dual Rail Encoding, DRE). Было показано, что в рамках построенной системы формулы Дирихле RHP_m^{m+1} имеют полиномиальные по сложности доказательства. Также было установлено, что новая система мощнее, чем система доказательств, основанная на известном методе резолюций.

Новые алгоритмы для задач MAXSAT-типа, оперирующие с хорновскими дизъюнктами,

были использованы для работы с некоторыми видами онтологий в дескриптивных логиках [13]. Новые алгоритмы, использующие SAT для решения некоторых оптимизационных задач на графах [14], позволяют работать с задачами существенно более высоких размерностей (в сравнении с предшествующими результатами).

2.3 Математические модели и методы поиска оптимальных решений в задаче диспетчерского управления воздушным движением

Автор результата – к.ф.-м.н. И.Л. Васильев.

Для решения практических задач диспетчерского управления воздушным движением исследованы математические модели составления расписания работы взлетно-посадочной полосы в виде задач целочисленного программирования (оптимизации), а также разработан точный метод их решения. Авиадиспетчеры, находящиеся в командно-диспетчерском пункте (диспетчерской вышке) аэропорта, осуществляют оперативное управление движением воздушных судов на земле и в воздушном пространстве вблизи аэропорта. Их цель заключается в повышении эффективности и безопасности работы аэропорта при отсутствии конфликтов в использовании наземных и воздушных ресурсов судами, находящимися в зоне их ответственности. Например, использование взлетно-посадочной полосы в каждый момент времени должно быть ограничено только одним судном и, более того, интервалы между взлетами и посадками должны быть не меньше, чем заданные минимальные значения, которые определяются типами судов. В зависимости от текущей и прогнозируемой ситуации авиадиспетчеры могут сдвигать время и последовательность взлетов и/или посадок судов. Очевидно, что даже одно небольшое варьирование времени может привести к целой цепочке взаимосвязанных изменений и оказать большое влияние на расписание в целом. Причины, по которым приходится постоянно корректировать расписание, возникают постоянно: погодные условия, ремонтные работы, технические неполадки и прочее. Диспетчеры должны минимизировать время задержек рейсов относительно официального расписания, так как пунктуальность является основным критерием эффективности работы аэропортов и воздушных линий.

Задачи управления воздушным движением актуальны, и по этой тематике опубликовано достаточно большое количество работ. Как правило, авторы выделяют различные взаимосвязанные задачи, а затем решают их как единое целое или в отдельности. Здесь рассматривается задача составления расписания взлетов и посадок (ЗРВП) воздушных судов.

Проведено исследование сведения ЗРВП к задаче минимизации запаздывания при составлении расписания загрузки станка со временем перенастройки, зависящим от последовательности работ. В этом случае взлетно-посадочная полоса рассматривается как станок, воздушные суда – как работы, а интервалы между маневрами воздушных судов – как время перенастройки. Для описания указанной задачи была построена математическая модель с дискретным временем.

Существует несколько вариантов задачи составления расписания работы взлетно-посадочной полосы. Пусть для некоторого дискретного временного горизонта $T = \{0, K, m\}$ дано множество воздушных судов (рейсов) $F = \{1, K, n\}$, которое включает в себя как рейсы, идущие на посадку, так и рейсы, ожидающие взлета. Для каждого рейса определено допустимое окно для взлета/посадки $T_i = \{l_i, l_i + 1, K, u_i\} \subset T$, в котором l_i определяет время взлета/посадки официального расписания, а $u_i - l_i$ задает максимально возможную задержку рейса. Для каждой упорядоченной пары рейсов задается интервал s_{ij} , определяющий минимальное время между взлетом/посадкой рейсов i и j . Данные интервалы на практике фиксируются в зависимости от типа воздушных судов (легкий, средний, тяжелый) и от типа маневра (взлет, посадка). В связи с этим матрица $S = \{s_{ij}\}$, определенная этими величинами, содержит не слишком большое число различных значений. ЗРВП заключается в определении фактического времени взлета/посадки $t_i \in T_i$ каждого рейса из $i \in F$, минимизирующего сумму взвешенных задержек, т.е.

$$\sum_{i \in F} w_i(t_i - l_i),$$

где w_i – вес соответствующего рейса $i \in F$, определяющий степень его важности.

Дискретное время позволяет смоделировать расписание, используя булевы переменные

$$x_{it} = \begin{cases} 1, & \text{если рейс выполняет взлет/посадку в момент времени } t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определим понятие конфликтных пар. Пусть даны две пары it и $j\tau$, в которых $t \in T_i$ и $\tau \in T_j$. Назовем пары it и $j\tau$ конфликтными, если они не могут стоять в расписании, т.е.

$$x_{it} + x_{j\tau} \leq 1.$$

По постановке задачи конфликтными парами являются все пары, для которых $i = j$ или $-s_{ji} < \tau - t < s_{ij}$. Действительно, в расписании один и тот же рейс не может присутствовать

дважды и для каждой пары рейсов должно выдерживаться время минимальных интервалов. Обозначим через I множество всех конфликтных пар, т.е.

$$I = \{ \{it, j\tau\} : i \in F, t \in T_i, j \in F, \tau \in T_j, (i = j) \vee (-s_{ji} < \tau - t < s_{ij}) \}.$$

С использованием введенных обозначений целочисленная формулировка ЗРВП может быть представлена в следующем виде:

$$\min \sum_{i \in F} \sum_{t \in T_i} w_i(t - l_i) x_{it}, \quad (2.1)$$

$$\sum_{t \in T_i} x_{it} = 1, \quad i \in F, \quad (2.2)$$

$$x_{it} + x_{j\tau} \leq 1, \quad \{it, j\tau\} \in I, \quad (2.3)$$

$$x_{it} \in \{0, 1\}, \quad i \in F, t \in T_i. \quad (2.4)$$

Целевая функция (2.1) определяет суммарные взвешенные задержки рейсов. Ограничения (2.2) задают условие, что каждый рейс будет взлетать/садиться только один раз. Минимальные интервалы между рейсами выдерживаются в соответствии с ограничениями (2.3). Ограничения (2.4) задают условия целочисленности переменных.

Отметим, что задачу (2.1)–(2.4) можно рассматривать как задачу поиска минимального взвешенного независимого множества с дополнительными ограничениями (2.2), определенную на графе, который задан множеством конфликтов I . Задача поиска независимого множества (клики в дополнительном графе) имеет большое количество приложений, и ее полиэдральные свойства хорошо изучены. Известно, что в задачу (2.1)–(2.4) могут быть добавлены правильные неравенства, определенных кликами на графе. В рассматриваемом случае, клики определяются подмножеством пар, которые взаимно не сочетаемы. Известно, что неравенства (2.3) могут быть заменены на следующие:

$$x_{jt} + \sum_{k \in T_i \cap [t - s_{ij} + 1, t]} x_{ik} \leq 1, \quad i, j \in F, i \neq j, t \in T_j, \quad (2.5)$$

и, более того, на неравенства

$$\sum_{l \in T_j \cap [t - s_{ji} + 1, t]} x_{jl} + \sum_{k \in T_i \cap [t - s_{ij} + 1, t]} x_{ik} \leq 1, \quad i, j \in F, i < j, t \in T_j \cup T_i. \quad (2.6)$$

Такая замена снижает количество ограничений и увеличивает качество линейной релаксации задачи, которая играет большую роль при применении точных методов решения, таких как метод ветвей и границ или ветвей и отсечений.

Отметим, что для задачи (2.1)–(2.4) известны различные классы правильных неравенств.

Остановимся более подробно на одном из них, который будет использован в дальнейшем при построении метода поиска решений. Введем обозначение $s_i = \min_{j \in F} s_{ij}$, тогда следующие неравенства являются правильными для задачи (2.1)–(2.4):

$$\sum_{i \in F} \sum_{l \in [t-s_i+1, t] \cap T_i} x_{il} \leq 1, \quad t \in T. \quad (2.7)$$

Неравенства (2.7) в отличие от (2.5) и (2.6) не включают в себя все условия (2.3), и поэтому их использование должно сопровождаться комбинацией с недостающими неравенствами других видов.

На основе метода отсечений использующего правильные неравенства (2.6) был разработан точный метод решения задачи. Кроме того были разработаны дополнительные процедуры построения правильных отсечений и эффективные алгоритмы уменьшения размерности. Предложенный подход позволил найти оптимальные решения практических задач, построенных на основе работы нескольких крупных европейских аэропортов. Вычислительный эксперимент показал, что полученные результаты значительно превосходят известные к настоящему времени как по качеству полученных решений, так и по времени счета.

3 Технологии создания математических, оптимизационных и имитационных моделей и методов для поддержки принятия решений в социо-эколого-экономических и транспортно-логистических системах

3.1 Математические модели для задач инфраструктурной логистики в виде задач оптимальной упаковки кругов равного радиуса

Автор результата – к.ф.-м.н. А.А. Лемперт.

Для задач о размещении обслуживающих логистических центров (ЛЦ) двух типов с пространственными ограничениями предложена математическая модель в виде задачи об упаковке в ограниченное многосвязное множество наборов равных кругов. Поскольку критерием оптимальности является время достижения ЛЦ потребителями, здесь применяется специальная неевклидова метрика, которая базируется на решении уравнения эйконала в случае неоднородной среды. При этом число кругов полагается заданным, также фиксируется отношение радиусов кругов из разных наборов.

Пусть X – метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y)$, $P \subset X$ – замкнутое многосвязное множество, $s_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n + m$ – координаты центров упаковываемых кругов. Без ограничения общности можно считать, что первые n кругов имеют радиус R_1 , а оставшиеся m – радиус $R_2 = \frac{1}{k} R_1$, $k \in \mathbb{N}$. Требуется определить вектор координат центров кругов $s = (s_1, \dots, s_{n+m}) \in \mathbb{R}^{2(n+m)}$, при которых значение радиуса R_1 будет максимальным. Таким образом, получаем следующую задачу:

$$R_1 \uparrow \max \quad (3.1)$$

$$R_2 = \frac{1}{k} R_1, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.2)$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq 2R_1, \quad \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j \quad (3.3)$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq 2R_2, \quad \forall i, j = \overline{n+1, n+m}, i \neq j \quad (3.4)$$

$$\rho(s_i, s_j) \geq R_1 + R_2, \quad \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{n+1, n+m} \quad (3.5)$$

$$\rho(s_i, \partial P) \geq R_1, \quad \forall i = \overline{1, n} \quad (3.6)$$

$$\rho(s_j, \partial P) \geq R_2, \quad \forall j = \overline{n+1, n+m} \quad (3.7)$$

$$s_i \in P, \quad \forall i = \overline{1, n+m} \quad (3.8)$$

Здесь ∂P – граница P , $\rho(s_i, \partial P)$ – расстояние от точки до множества P .

В рамках данного исследования будем использовать следующую метрику:

$$\rho(a, b) = \min_{\Gamma \in G(a, b)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(x, y)}, \quad (3.9)$$

где $G(a, b)$ – множество непрерывных кривых, лежащих в X и соединяющих точки a и b , $0 < \alpha \leq f(x, y) \leq \beta$ – непрерывная функция, задающая мгновенную скорость движения в каждой точке множества P . Отметим, что в случае $f(x, y) \equiv 1$, данная метрика превращается в евклидову.

Введем в рассмотрение множества

$$P_i = \{p \in P : \rho(p, s_i) \leq \alpha \rho(p, s_q), \quad i, q = 1, \dots, n+m\}, \quad (3.10)$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & i, q = 1, \dots, n \text{ или } i, q = n+1, \dots, n+m, \\ k, & i = n+1, \dots, n+m, q = 1, \dots, n, \\ 1/k, & i = 1, \dots, n, q = n+1, \dots, n+m. \end{cases}$$

Отметим, что при $\alpha \equiv 1$ такие множества называют зонами Дирихле для точек s_i на множестве $P = \bigcup_{i=1}^{n+m} P_i$.

Для решения рассматриваемой задачи разработан и программно реализован новый вычислительный алгоритм, основанный на физических принципах Ферма и Гюйгенса. Суть алгоритма заключается в следующем: множество P разбивается на сегменты относительно начального (случайно сгенерированного) набора центров окружностей на основе диаграммы Вороного, затем для каждого сегмента отыскивается центр вписанной окружности максимального радиуса, далее строится разбиение множества P относительно полученного набора центров. Процесс продолжается до тех пор, пока положение центров изменяется.

Алгоритм.

Шаг 1. Генерируется начальный набор центров $s = (s_1, \dots, s_{n+m})$, удовлетворяющий ограничениям (3.3)-(3.9). Радиусы R_1 и R_2 полагаются равными нулю.

Шаг 2. Множество P разбивается на подмножества P_i , $i = 1, \dots, n+m$, согласно правилу (3.10).

Отметим, что из-за наличия «больших» и «маленьких» кругов необходимо использовать «быстрые» и «медленные» волны.

Шаг 3. Для всех P_i , $i = 1, \dots, n$, находим точку $\bar{s}_i \in P_i$ такую, что $\rho(\bar{s}_i, \partial P_i) = \max_{p \in P_i} \rho(p, \partial P_i)$. Для

этого мы выпускаем волну с границы ∂P_i внутрь P_i и, решая уравнение эйконала, строим волновой фронт до тех пор он не выродится в точку.

Шаг 4. Вычисляются $R_1 = \min_{i=1,\dots,n} r_i$ and $R_2 = \min_{i=1,\dots,n} r_i$.

Шаги 2-4 повторяются до тех пока увеличивается значение R_1 (и R_2 соответственно), вектор $\bar{s}$ запоминается как текущее приближение к решению.

Шаг 5. Счетчик генераций начальных положений $Iter$ увеличивается на единицу. Если $Iter$ достиг наперед заданного числа генераций, алгоритм завершается. В противном случае, переходим к первому шагу.

На рисунке 3.1 представлены примеры упаковок в выпуклое и невыпуклое множества наборов кругов с отношением радиусов равным два.

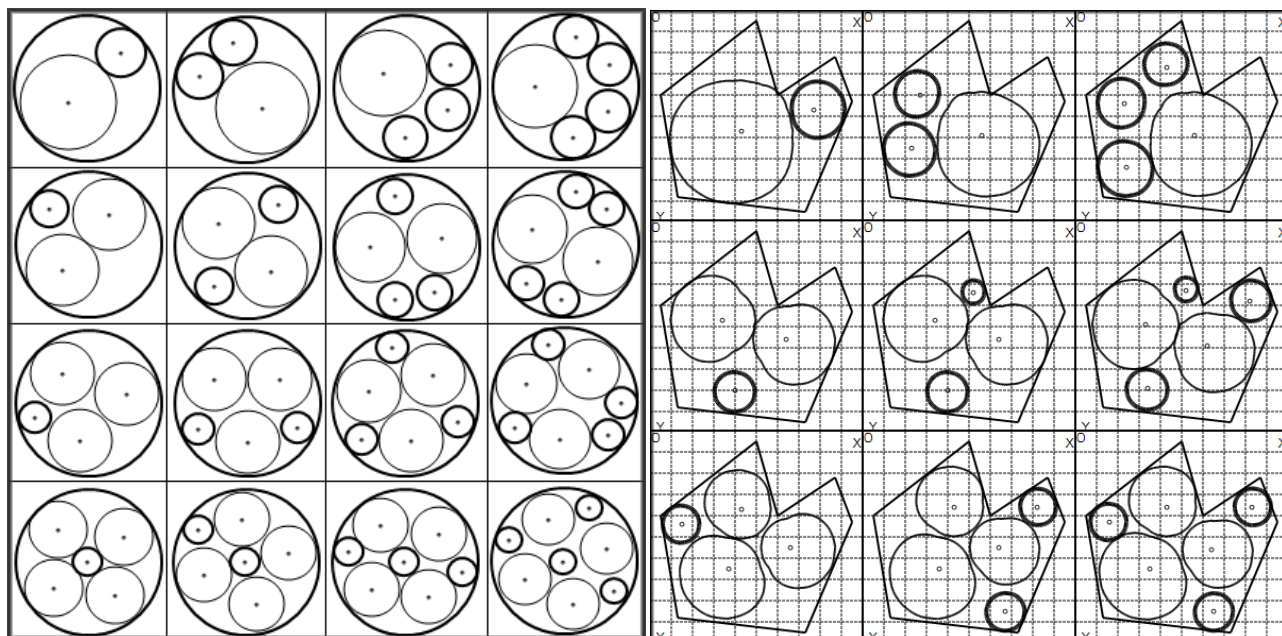


Рисунок 3.1 – Пример упаковки в случае евклидовой (слева) и неевклидовой (справа) метрик.

3.2 Критические показатели работы транспортно-пересадочного узла на основе многофазной системы массового обслуживания

Авторы результата – к.ф.-м.н. А.А. Лемперт, М.Л. Жарков.

На основе созданной авторами обобщенной имитационной модели логистического терминала определены критические показатели работы транспортно-пересадочного узла (ТПУ). В качестве примеров рассматриваются ТПУ «Владыкино» и «Кутузово» (Москва), для которых в ходе вычислительного эксперимента рассчитаны основные показатели эффективности

функционирования и выработаны рекомендации по улучшению технико-технологических параметров работы.

Описание входящих в систему транспортных потоков строится с помощью модели ВМАР-потока, преимуществом которого является возможность объединения отдельных потоков заявок при сохранении их структуры, и групповое прибытие, где размер группы является случайной величиной.

Пусть имеется цепь Маркова (ЦМ) v_t (управляющий процесс) с непрерывным временем и конечным пространством состояний $\{0, 1, \dots, W\}$. Время пребывания ЦМ в состоянии v задано экспоненциальным распределением с параметром $\lambda_v, v = \overline{0, W}$. После завершения времени пребывания в состоянии v , ЦМ с вероятностью $p_{v,r}^{(k)}$ перейдет в состояние $r, r = \overline{0, W}$ и прибудет группа размера $k \geq 0$. Вероятности $p_{v,r}^{(k)}$ удовлетворяют условию нормировки $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=0}^W p_{v,r}^{(k)} + \sum_{r=0, r \neq v}^W p_{v,r}^{(0)} = 1, v = \overline{0, W}$.

В терминах теории массового обслуживания имеем СМО типа $ВМАР / M / n_1 / m_1 \rightarrow * / M / n_2 / m_2 \rightarrow * / G^X / n_3 / m_3$, где X – размер обслуживаемой группы; m_1, m_2, m_3 – длина очереди; n_1, n_2, n_3 – количество каналов обслуживания на соответствующей фазе. Отличительной особенностью модели от является наличие трех независимых одноканальных СМО на третьей фазе и различных типов заявок, с помощью которых определяется маршрут движения пассажира через систему.

На основе статистических данных, натурных наблюдений и с помощью экспертных оценок проведена идентификация модели для ТПУ «Владыкино», расположенного в г. Москва (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Характеристики входящих пассажиропотоков

	Пассажиропоток	Метро	МЦК	Автобус	Личный транспорт	Пешеход
Владыкино	Интенсивность	$\lambda_1 = 0,80$	$\lambda_2 = 0,34$	$\lambda_3 = 0,78$	$\lambda_5 = 1,05$	$\lambda_6 = 2,31$
	Вероятность поступления p_i	0,152	0,064	0,148	0,199	0,437

В таблице 3.2 представлены результаты моделирования работы ТПУ «Владыкино»,

результаты расчетов хорошо соотносятся со статистическими данными по перевозке пассажиров за 2016-2017 гг.

Здесь T_{sist} – среднее время пребывания заявки в системе (с), P_{loss} – вероятность отказа в обслуживании, $\bar{k}$ – среднее число занятых каналов, l – средняя длина очереди, w – среднее время в очереди, t_{ph} – среднее время в фазе, t_{lock} – среднее время блокировки каналов на соответствующей фазе.

Таблица 3.2 – Результаты моделирования

	Поступило	Принято	T_{sist} (с)	P_{loss}	
Групп	352	352	262,77	0	
Заявок	11945	11945			
	$\bar{k}$	l	w (с)	t_{ph} (с)	t_{lock} (с)
Фаза 1	5,01	47,60	32,51	35,52	0
Фаза 2	4,60	4,74	5,63	8,40	0
Фаза 3	2,61	193,11	115,03	205,91	-
Ср. длина очереди перед в отдельной СМО на фазе 3, l_i			СМО № I	СМО № I	СМО № III
			30,90	156,61	5,46

В результате проведения серии тестов для определения максимально допустимой загрузки ТПУ «Владыкино» установлено, что при увеличении интенсивности в 1,33 раза средняя длина очереди в СМО II (фаза 3) возрастает в 4 раза, а среднее время пребывания в системе – на 19%. При увеличении интенсивности в 1,5 раза средняя длина очереди на фазе 2 возрастает в 12 раз, в СМО II – в 6 раз, а среднее время пересадки превышает 15 минут.

Таблица 3.3 – Результаты прогнозного моделирования

	Поступило	Принято	T_{sist} (с)	P_{loss}	
Групп	721,00	716,00	1069,53	0,01	
Заявок	23848,67	22729,67			
	$\bar{k}$	l	w (с)	t_{ph} (с)	t_{lock} (с)
Фаза 1	8,96	585,70	193,20	196,30	0
Фаза 2	8,59	549,10	207,06	210,39	241,73
Фаза 3	2,87	1471,71	569,03	662,85	-
Ср. длина очереди перед в отдельной СМО на фазе 3, l_i			СМО № I	СМО № II	СМО № III

При двукратном увеличении интенсивности поступления пассажиров по отношению к текущему, среднее время пребывания в ТПУ начинает превышать 23 минуты, средняя длина очередей на фазах 1 и 2 составляет более 500 человек – недостаточно турникетов (5 шт.) при входе и выходе на платформу МЦК. Соответственно, на ней же возникают самые длинные очереди (СМО III). Результаты представлены в таблице 3.3.

Таким образом, при увеличении числа пассажиров до 18 тыс. чел. в час-пик (увеличение интенсивности в 1,5 раза) пересадка перестает быть комфортной (более 15 минут). Выявлены два «узких места»: первое – малое число турникетов при входе (выходе) на платформу Московского центрального кольца; второе – низкая пропускная способность поездов МЦК. В первом случае следует увеличить число турникетов до 6 или временно инвертировать движение пассажиров в некоторых из них. Во втором – увеличить число вагонов или уменьшить интервал между прибытием составов.

3.3 Аналитический обзор программного обеспечения, используемого для поддержки исследований социо-эколого-экономических систем на основе комплекса моделей «Регион»

Автор результата – к.т.н. А.Б. Столбов.

В 2017 году в рамках направления по разработке технологии поддержки исследований динамических многокомпонентных систем на основе математического и имитационного моделирования был проведен аналитический обзор программного обеспечения, используемого для поддержки исследований социо-эколого-экономических систем на основе комплекса моделей «Регион». Обзор охватывает разработки в период с середины 1970-х годов по настоящее время. На основе анализа публикаций, отчетов и, где это было возможно, документаций проведен анализ архитектур программных систем, их основных функций и способов реализации. Созданы модели программ в форме UML диаграммы прецедентов и компонентов. К основным задачам, решаемым рассматриваемыми в обзоре программными комплексами, относятся следующие: вычислительный эксперимент и сценарные расчеты, решение задач оптимизации и нормирования, анализ свойств модели и идентификация параметров, обработка знаний. В зависимости от набора решаемых задач и моделируемых компонент социо-эколого-экономических систем выполнена классификация множества программ (таблица 3.4), сделаны выводы о вкладе отдельных разработок в общий фонд программного обеспечения моделей «Регион», проведена оценка дальнейших перспектив исследований

в данном направлении.

Таблица 3.4 – Классификация программного обеспечения моделей «Регион»

Название программы	Компонент системы					Задача					Применение
	Экономика	Природа (экология)	Заболелеваемость	Социум	Инновации	Сценарные расчеты	Оптимизация	Идентификация параметров	Анализ свойств модели	Обработка знаний	
СЭЭР САРМА [17] (1975-1988)	+	+	–	–	–	+	+	–	+	–	Байкальский регион
ППП «Регион» [17] (1987-1990)	+	+	–	–	–	+	+	–	–	–	Байкальский регион
NESSI [18] (1989-2000)	+	+	–	–	–	+	–	–	–	–	
DSEEmodel [19] (2010-...)	+	+	+	+	+	+	+	–	+	–	Переславский и Байкальский регион
ИС динамики лесных ресурсов [20] (2008-2010)	+	+	–	–	–	+	+	+	–	+	Иркутская область
МЭЭМ [21,22] (2010-...)	+	+	+	–	–	+	–	+	–	+	Байкальский регион, г. Улан-Батор, регионы Сибири

3.4 Оценки изменчивости теплового потока на границе вода-лед на основании экспериментальных данных и разработанной модели нарастания льда в озере Байкал

Автор результата – В.В. Козлов.

В многочисленных публикациях, посвященных исследованию и моделированию процессов образования ледового покрова пресноводных озер, основное внимание уделяется многолетней изменчивости ледового режима, связанной с изменениями климата. Использование

современных инструментальных методов позволило впервые получить комплексную подробную информацию о мелкомасштабных гидродинамических процессах вертикального перемешивания озерных вод подо льдом, а также исследовать механизмы генерации подледных течений и причины раннего разрушения ледового покрова на озере Байкал.

Выполнено подробное моделирование процесса формирования профиля температуры в многослойной системе с фазовым переходом на границе «вода-лед» (задача Стефана) и сформулирована обратная задача. Прямое решение задачи Стефана с заданными коэффициентами применялось для оценки влияния температуры воздуха, солнечной радиации и теплообмена в толще льда и подледной воде на изменчивость температуры в системе «вода-лед». Решение обратной задачи Стефана на основе измеренных толщины льда, поступающей солнечной радиации и температуры толщи льда и подледного слоя воды в системе «вода-лед» использовалось для расчета коэффициента эффективной температуропроводности и оценки вертикального распределения потоков тепла.

Характеристики эффективного вертикального теплообмена подо льдом определялись и верифицировались с использованием экспериментальных данных. Получены гидрологические оценки физических свойств подледного слоя воды, пограничного слоя и подледной турбулентности. На основе решения обратной задачи восстановлены параметры вертикального обмена и получены количественные оценки тепловых потоков в толще ледового покрова и в воде. Проведены исследования светового режима оз. Байкал, изучено влияние толщины снежного покрова на интенсивность солнечной радиации в ледовом покрове и толще воды и их влияние на вертикальный обмен.

Установлено, что основной причиной раннего разрушения ледового покрова на озере Байкал является увеличение тепловых потоков при усилении течений и вертикального обмена в подледном слое воды. Именно этим объясняется появление кольцевых структур на поверхности ледового покрова, которые наблюдаются в апреле, перед разрушением ледового покрова.

Анализ экспедиционных наблюдений о всплытии отдельных фрагментов газовых гидратов метана на поверхность озера Байкал и зимних гидроакустических (эхолотные) данных регистрации всплывающих газовых гидратов, позволил выполнить моделирование процесса всплытия к поверхности газогидратного фрагмента. Разработана математическая модель разложения газогидратного фрагмента в процессе всплытия со дна к поверхности озера. Определяющие факторы, которые учитывались в модели, это конвективный теплообмен с окружающей жидкостью и тепловое сопротивление «промежуточного слоя», образующегося на поверхности газового гидрата при нарушении фазового равновесия. На подвижных границах

фазового превращения газовый гидрат – «промежуточный слой» и «промежуточный слой» - окружающая жидкость соблюдается баланс тепла.

Сформулирована и решена обратная задача. Это позволило получить оценки величины эффективной теплопроводности промежуточного слоя и рассчитать неизвестные начальные радиусы всплывающих фрагментов газовых гидратов зафиксированных эхолотом. Полученные при численном моделировании траектории всплытия, хорошо согласуются с натурными данными, полученными при помощи акустической съемки (рисунок 3.2) в условиях реального вертикального распределения температуры в озере Байкал.

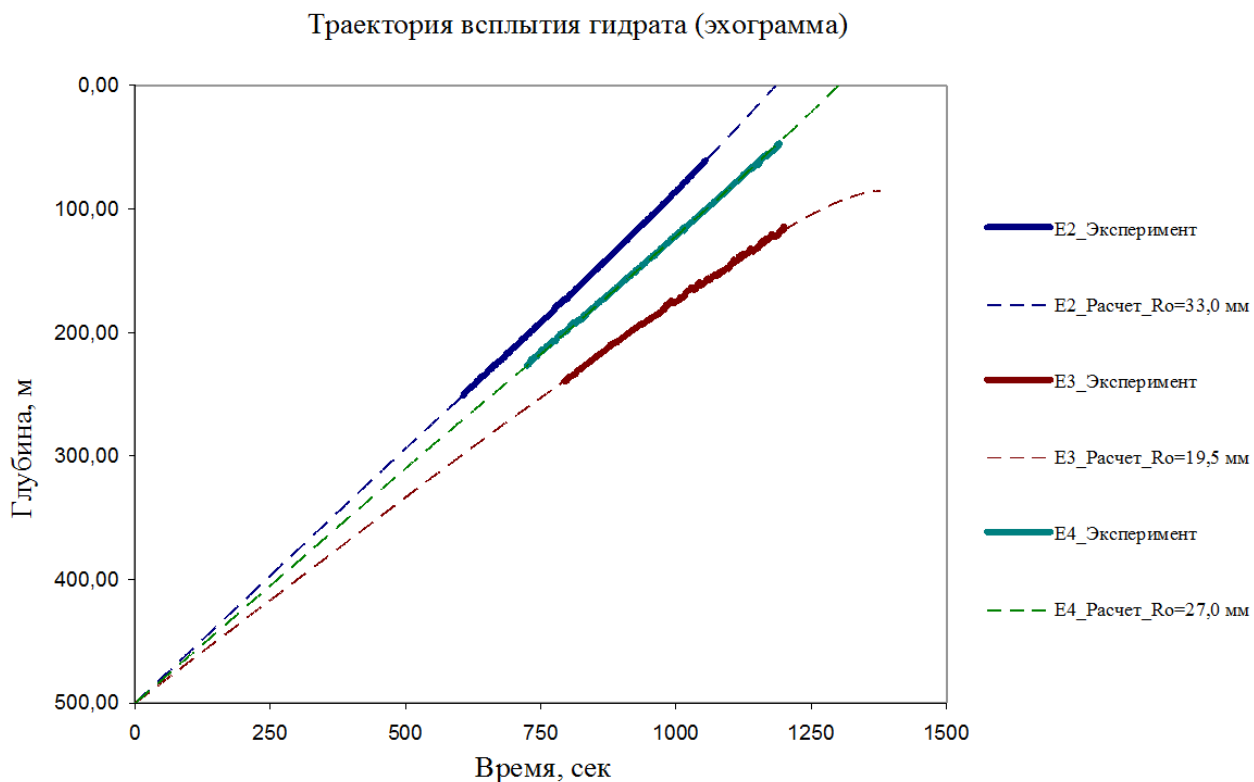


Рисунок 3.2 – Расчетные и экспериментальные траектории, для трех зафиксированных эхолотом событий (обозначены E3, E4, E2), на которых отмечено всплытие фрагментов газового гидрата. Начальные радиусы R_0 (мм) соответственно равны 19,5; 27,0; 33,0 и определены из решения обратной задачи.

Проведены систематические вычислительные эксперименты с вариацией начальных условий в рамках разработанной математической модели. Расчеты показали, что начиная с радиуса 0,025 м и более, кусок газового гидрата может достигнуть поверхности озера, в условиях реального вертикального распределения температуры в разные сезоны года на озере Байкал.

3.5 Метод и алгоритмы последовательных улучшений, основанные на разложении уравнения Беллмана до второго порядка для специальной задачи оптимального управления, содержащей дополнительные параметры регулирования

Автор результата – д.ф.-м.н. В.А. Батулин.

Рассматривается дискретная по времени управляемая система

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}, \quad (3.11)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad u(t) \in U(t), \quad t \in T, \quad (3.12)$$

где $x(t)$ принимает значения в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $U(t) \subseteq \mathbb{R}^r$. Функция $x(t)$ называется *траекторией*, а функция $u(t)$ – *управлением*. Известно, что динамическая система (3.11)–(3.12) может быть равносильно записана как:

$$x(t+1) \in f(t, x(t), U(t)), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0,$$

где $f(t, x(t), U(t))$ – множество допустимых переходов системы на шаге t .

Определение 13 Совокупность пар функций $(x(t), u(t))$, удовлетворяющих условиям (3.11)–(3.12) назовем множеством D допустимых управляемых процессов.

Требуется минимизировать терминальный функционал $I(x, u) = F(x(t_1))$ на множестве D .

Пусть задан некоторый элемент $(x^I(t), u^I(t)) \in D$. Под задачей улучшения будем понимать задачу нахождения такого процесса $(x^{II}(t), u^{II}(t)) \in D$, что $I(x^{II}, u^{II}) < I(x^I, u^I)$.

Теорема 3 Пусть $f(t, x(t), U(t)) \neq \emptyset$ при всех $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, и существуют функции $\varphi: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и неотрицательная $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

а) $\psi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = x_0$;

б) при всех $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$:

$$W_\phi(t, x) = \left\{ w \in f(t, x(t), U(t)) : \phi(t+1, w) = \sup_{v \in f(t, x(t), U(t))} \phi(t+1, v) \right\} \neq \emptyset$$

в) при всех $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$: $\sup_{u \in U(t)} \phi(t+1, f(t, x, u)) = \phi(t, x)$, $\phi(t_0, x) = \psi(x)$.

Тогда $\aleph_{\mathbb{R}}(t_0, x_0; \tau) = \{x \in \check{Y}^n : \phi(\tau, x) = 0\}$ при всех $\tau \in T$.

Алгоритм 1. Базовый алгоритм улучшения.

Шаг 1. Фиксируя $\varepsilon > 0$ и $g \in (0, 1]$, решаем матричное уравнение

$$A'(t)\{\sigma(t+1) - \sigma(t+1)B(t)[B'(t)\sigma(t+1)B(t) - gE^{(r)}]^{-1}B'(t)\sigma(t+1)\}A(t) = \sigma(t) + (1-g)E^{(n)},$$
$$\sigma(t_0) = \varepsilon^{-1}E^{(n)}.$$

Здесь $A(t) = f_x(t, x^I(t), u^I(t))$, $B(t) = f_u(t, x^I(t), u^I(t))$, $t \in T$.

Шаг 2. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и найдем $x^*(\alpha)$ как точку минимума функции

$$F_\alpha(x) = \alpha F(x) + \frac{1-\alpha}{2}(x - x^I(t_1))'\sigma(t_1)(x - x^I(t_1)).$$

Шаг 3. Определим $\hat{x}_\alpha(t)$, решая систему

$$x(t) = x^I(t) + (A(t) - B(t)[B'(t)\sigma(t+1)B(t) - gE^{(r)}]^{-1}B'(t)\sigma(t+1)A(t))^{-1} \times \\ \times (x(t+1) - x^I(t+1)), \quad x(t_1) = x^*(\alpha).$$

Шаг 4. Найдем решение $x_\alpha^{II}(t)$ системы $x(t+1) = f(t, x(t), u_\alpha^{II}(t))$, $x(t_0) = x_0$, где

$$u_\alpha^{II}(t) = u^I(t) - [B'(t)\sigma(t+1)B(t) - gE^{(r)}]^{-1}B'(t)\sigma(t+1)A(t)(\hat{x}_\alpha(t) - x^I(t)), t \in T.$$

Шаг 5. Решаем задачу одномерной минимизации $F(x_\alpha^{II}(t_1)) \rightarrow \min_\alpha$. Принимаем управляемый процесс (x^{II}, u^{II}) за новое приближение в задаче улучшения.

Рассмотрим функцию Понтрягина для этой системы:

$$H(t, x, p(t+1), u) = (p(t+1))' f(t, x, u), \quad p \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4 Пусть управляемый процесс $(x^I(t), u^I(t)) \in D$ таков, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)) H_u(t, x^I(t), p^I(t+1), u^I(t)) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} p^{I'}(t+1) B(t) B'(t) p^I(t+1) > 0,$$

где $p^I(t)$ удовлетворяет сопряженной системе

$$p^I(t) = A'(t) p^I(t+1), \quad p^I(t_1) = -F_x(x^I(t_1)).$$

Тогда элемент (x^I, u^I) улучшается алгоритмом.

Алгоритм 2. Модифицированный алгоритм улучшения, основанный на разложении по параметру конструкций базового метода.

Модифицированный алгоритм основан на разложении базового алгоритма по параметру g . Сформулируем этапы нового алгоритма.

Шаг 1. Фиксируя $\varepsilon > 0$ и $g^* \in (0, 1]$, решаем матричное уравнение

$$A'(t)\{\sigma(t+1, g^*) - \sigma(t+1, g^*)B(t)[B'(t)\sigma(t+1, g^*)B(t) - g^*E^{(r)}]^{-1}B'(t)\sigma(t+1, g^*)\}A(t) = \\ = \sigma(t, g^*) + (1 - g^*)E^{(n)}, \quad \sigma(t_0, g^*) = \varepsilon^{-1}E^{(n)}.$$

Здесь $A(t) = f_x(t, x^I(t), u^I(t))$, $B(t) = f_u(t, x^I(t), u^I(t))$, $t \in T$. И находим $\sigma(t, g^*)$.

Шаг 2. Решаем уравнение

$$A'(t)\left\{\frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg} - \frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg}C_1(t, \sigma(t+1, g^*))\sigma(t+1, g^*) - \right. \\ \left. - \sigma(t+1, g^*)C_1(t, \sigma(t+1, g^*))\frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg} + \sigma(t+1, g^*)C_1(t, \sigma(t+1, g^*)) \times \right. \\ \left. \times \frac{d\sigma(t+1, g^*)}{dg}C_1(t, \sigma(t+1, g^*))\sigma(t+1, g^*)\right\}A(t) - \\ - A'(t)\sigma(t+1, g^*)B(t)[B'(t)\sigma(t+1, g^*)B(t) - g^*E^{(r)}]^{-2} \times \\ \times B'(t)\sigma(t+1, g^*)A(t) = \frac{d\sigma(t, g^*)}{dg} - E^{(n)}, \quad \frac{d\sigma(t_0, g^*)}{dg} = 0,$$

где $C_1(t, \sigma(t+1, g^*)) = B(t)[B'(t)\sigma(t+1, g^*)B(t) - g^*E^{(r)}]^{-1}B'(t)$.

Таким образом, найдем $\sigma(t, g) = \sigma(t, g^*) + \frac{d\sigma(t, g^*)}{dg}(g - g^*)$, где $g^* \in (0, 1]$ фиксированное.

Шаг 3. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и найдем $x^*(\alpha, g)$ как точку минимума функции

$$F_\alpha(x, g) = \alpha F(x) + \frac{1-\alpha}{2}(x - x^I(t_1))'\sigma(t_1, g)(x - x^I(t_1)).$$

Шаг 4. Определим $\hat{x}_\alpha(t, g) = x(t, g)$, при условии $x(t_1, g) = x^*(\alpha, g)$, решая систему

$$x(t, g) = x^I(t) + \{A(t) - B(t)[B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}]^{-1}B'(t) \times \\ \times \sigma(t+1, g)A(t)\}^{-1}(x(t+1, g) - x^I(t+1)). \quad (3.13)$$

Шаг 5. Полагая

$$u_\alpha''(t, g) = u^I(t) - [B'(t)\sigma(t+1, g)B(t) - gE^{(r)}]^{-1}B'(t)\sigma(t+1, g)A(t)(\hat{x}_\alpha(t, g) - x^I(t)), \quad t \in T,$$

найдем решение $x_\alpha''(t, g)$ системы

$$x(t+1, g) = f(t, x(t, g), u_\alpha''(t, g)), \quad x(t_0, g) = x_0.$$

Шаг 6. Решаем задачу двумерной минимизации: $F(x_\alpha''(t_1, g)) \downarrow \min_{\alpha, g}$, $\alpha \in [0, 1]$, $g \in (0, 1]$.

Принимаем управляемый процесс (x'', u'') за новое приближение в задаче улучшения.

Таким образом, предложены два метода последовательных улучшений, основанные на разложении уравнения Беллмана для специальной задачи оптимального управления: требуется минимизировать функционал отклонения нормы от начальных условий в исходной задаче. Если конечная точка лежит во множестве достижимости, то значение функционала равняется нулю, а значит функционал Беллмана равен нулю. Аппроксимация уравнения Беллмана осуществляется вдоль специально выбранной траектории с начальными условиями, не удовлетворяющими начальным условиям исходной задачи. Первый метод основан на аппроксимации (до второго порядка) уравнения Беллмана и содержит дополнительные параметры регулирования. Второй получается как результат линейной аппроксимации базовых конструкций по параметру, что позволяет применять процедуры одномерной минимизации.

4 Перечень научных публикаций в российских и международных журналах, индексируемых в Web of Science, Scopus, РИНЦ

4.1 Статьи в журналах, индексируемых в Web of Science

- Avella P., Boccia M., Mannino C., Vasilyev I. Time-Indexed Formulations for the Runway Scheduling Problem // *Transportation Science*. – 2017. – V. 51, No. 4. – P. 1196–1209. – DOI: 10.1287/trsc.2017.0750.
- Zaikin O., Petrov P., Posypkin M., Bulavintsev V., Kurochkin I. A volunteer computing project for solving geoacoustic inversion problems // *Open Engineering*. – 2017. – V.7, No. 1. – 2017. – P. 363-370.
- Afanasiev A.P., Bychkov I.V., Zaikin O.S. et al. Concept of a multitask grid system with a flexible allocation of idle computational resources of supercomputers // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. – 2017. – Vol. 56, No. 4. – P. 701-707.
- Ignatiev A., Morgado A., Marques-Silva J. On Tackling the limits of resolution in SAT solving // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2017. – V. 10491. – P. 164-183.
- Marques-Silva J., Ignatiev A., Morgado A. Horn maximum satisfiability: Reductions, algorithms & applications // *Lecture Notes in Computer Science*. – 2017. – Vol. 10423. – P. 681-694.
- Kazakov A.L., Lempert A.A., Nguyen H.L. The problem of the optimal packing of the equal circles for special non-Euclidean metric // *Communications in Computer and Information Science*. – 2017. – V. 661. – P. 58-68.
- Aslamov I.A., Kozlov V.V., Kirillin G.B., Mizandrontsev I.B., Kucher K.M., Makarov M.M., Granin N.G. A study of heat transport at the ice base and structure of the under-ice water layer in Southern Baikal // *Water Resources*. – 2017. – V. 44, No. 3. – P. 428–441.
- Zhdanov A.A., Gnatovskii R.Yu., Granin N.G., Blinov V.V., Aslamov I.A., Kozlov V.V. Variations of under-ice currents in Southern Baikal by data of 2012–2016 // *Water Resources*. – 2017. – V. 44, No. 3. – P. 442–452.

4.2 Статьи в изданиях, индексируемых в Scopus

- Zaikin O., Petrov P. Application of iterative hill climbing to the sound speed profile inversion in underwater acoustics // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2017. – V. 173, No. 012022. – P. 1–8.
- Zaikin O. A parallel SAT solving algorithm based on improved handling of conflict clauses //

Procedia computer science. – 2017. – V. 119. – P. 103-111.

– Bulavintsev V., Petrov P., Posypkin M., Zaikin O. A GPU-enabled Black-box Optimization in Application to Dispersion-based Geoacoustic Inversion // In Proc. of the VIII International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA-2017). Petrovac, Montenegro, October 2-7, 2017. CEUR-WS. – 2017. – V. 1987. – P. 95–100.

– Ignatiev A., Morgado A., Marques-Silva J. Cardinality encodings for graph optimization problems // Proc. of 26th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2017). – 2017. – P. 652-658.

– Vatutin E., Kochemazov S., Zaikin O., Valyaev S. Enumerating the transversals for diagonal Latin squares of small order // Proceedings of the Third International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development (BOINC:FAST 2017). CEUR-WS. – 2017. – V. 1973. – P. 6-14.

– Vatutin E., Kochemazov S., Zaikin O. On some features of symmetric diagonal Latin squares // Proceedings of the XIII International Scientific Conference on Optoelectronic Equipment and Devices in Systems of Pattern Recognition, Image and Symbol Information Processing. CEUR-WS. – 2017. – V. 1940. – P. 74-79.

– Kazakov A., Lempert A., Lebedev P. Congruent circles packing and covering problems for multi-connected domains with non-Euclidean metric, and their applications to logistics // CEUR-WS. – 2017. – V. 1839. – P. 334–343.

– Лебедев П.Д., Лемперт А.А. Итерационные алгоритмы построения оптимальных упаковок в неоднородной метрике (Iterative algorithms for optimal packing construction in inhomogeneous metrics) // CEUR-WS. – 2017. – V. 1894. – P. 98–108.

– Kazakov A.L., Lempert A.A., Le Q.M. An algorithm for packing circles of two types in a fixed size container with non-Euclidean metric // CEUR-WS. – 2017. – V. 1975. – P. 286–297.

4.3 Статьи в журналах и сборниках трудов, индексируемых в РИНЦ

– Батулин В.А. Приближенный метод решения задач оптимального управления для дискретных систем, основанный на локальной аппроксимации множества достижимости // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2017. – Т. 19. – С. 75–88.

– Жарков М.Л., Казаков А.Л., Лемперт А.А. Об определении критических показателей работы транспортно-пересадочного узла на основе многофазной системы массового

обслуживания // Вестник УрГУПС. – 2017. – 3(35). – С. 40–52.

– Малтугуева Н.С., Погодаев Н.И. О существовании решения задачи оптимального управления гибридной системой // Известия ИГУ. Серия «Математика». – 2017. – Т. 19. – С. 128–134.

– Столбов А.Б. Программное обеспечение комплексных исследований социо-эколого-экономических систем на основе моделей «Регион»: аналитический обзор // Программные системы: теория и приложения. – 2017. – № 4(35). – С. 47-83.

– Казаков А.Л., Лемперт А.А., Ле К.М. Оптимизация некоторых пространственно-распределенных логистических систем: математические модели и вычислительные алгоритмы // В сб.: Инновационный транспорт – 2016: специализация железных дорог. – 2017. – С. 834-847.

– Николайчук О.А., Павлов А.И., Столбов А.Б. Особенности разработки агентных имитационных моделей на основе модельно управляемого подхода // Труды восьмой Всероссийской научно-практической конференции по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2017), 18-20 октября 2017 г., Санкт-Петербург. – С. 288-293.

4.4 Прочие публикации

– Жарков М.Л. О модели входящего пассажиропотока в транспортно-пересадочные узлы // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 18.

– Жарков М.Л. Определение показателей эффективности транспортно-пересадочного узла с применением систем массового обслуживания // Тезисы докладов XVIII Всеросс. Конф. молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2017. – С. 76–77.

– Козлов В.В., Макаров М.М., Аникин А.С. Моделирование процесса всплывания газовых гидратов в озере Байкал. // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 24.

– Лемперт А.А. О задаче упаковки кругов двух типов в ограниченное множество с неевклидовой метрикой // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 31.

– Лемперт А.А., Казаков А.Л. Задачи об упаковке и покрытии в неевклидовой метрике и уравнение эйконала. // Материалы Международной конференции «Математика в современном

мире». – Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2017. – С. 404.

– Николайчук О.А., Павлов А.И., Столбов А.Б. Об одном подходе к разработке агентных имитационных моделей на основе модельно-управляемого подхода // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 39.

– Николайчук О.А., Павлов А.И., Столбов А.Б. Шаблоны информационных процессов интеллектуальных мультиагентных систем // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 38.

– Столбов А.Б. Исторический обзор программных разработок для поддержки исследований на основе моделей «Регион» // Тезисы XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 61.

– Столбов А.Б. Особенности разработки агентных имитационных моделей на основе MDD подхода // Тезисы докладов XVIII Всеросс. Конф. молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2017. – С. 92.

4.5 Свидетельства о регистрации программ

– Столбов А.Б., Батурин В.А. Программный комплекс для поддержки проектирования математических моделей медико-эколого-экономических систем «МЭЭМ 1.0» // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ 2017619810 от 07.09.2017.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследования по проекту в 2017 году проходили в соответствии с планом. При этом все запланированные результаты были получены, опубликованы или подготовлены для публикации. В ходе выполнения НИР доказаны новые условия глобальной оптимальности (УГО) для минимизирующих последовательностей в задаче оптимального управления с (d.c.) функциями А.Д. Александрова, представимыми в виде разности двух выпуклых функций. Разработана методология поиска глобальных решений в иерархических и равновесных задачах исследовании операций с билинейными структурами, использующей базовые свойства билинейных функций.

Разработана новая концепция организации грид-сред, объединяющих ресурсы проектов добровольных вычислений и свободные ресурсы кластеров. Кроме того, разработаны и реализованы новые вычислительные алгоритмы решения задачи восстановления параметров акустического волновода на основе данных от точечного гидрофона. Разработаны новые алгоритмы решения задачи MAXSAT, использующие оракулов, оценивающих выполнимость хорновских КНФ. Также доказаны новые оценки сложности таких алгоритмов. Исследованы математические модели целочисленного программирования составления расписания работы взлетно-посадочной полосы и разработаны методы поиска оптимальных решений в практической задаче диспетчерского управления воздушным движением.

Для задач инфраструктурной логистики построены математические модели в виде задач оптимальной упаковки кругов равного радиуса. На основе многофазной системы массового обслуживания определены критические показатели работы транспортно-пересадочного узла. Исследована изменчивость теплового потока на границе «вода-лед» на основании экспериментальных данных и разработанной модели нарастания льда в озере Байкал.

Первый год исполнения, согласно плану, был посвящен развитию теории невыпуклой оптимизации и разработке новых численных методов непрерывной и дискретной оптимизации для поддержки междисциплинарных научных исследований. Представляется, что все результаты и проработки готовы для использования в эколого-экономических, технических, военных и других областях приложений после соответствующего уточнения математических моделей, особенно это касается целочисленных моделей в задачах защиты информации, экономический эффект которых может быть достаточно серьезным.

Полученные в рамках проекта результаты конкурентоспособны на мировом уровне и отражены в публикациях [5-8,10-14,17-43], в том числе в 23 публикациях в изданиях, индексируемых в Web of Science, Scopus или РИНЦ. Кроме того, получено свидетельство

о регистрации программы для ЭВМ [44].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Факториал Пресс, 2002.
2. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003. – С. 356.
3. Katsnelson B.G., Petnikov V.G., Lynch J.. Fundamentals of Shallow Water Acoustics. New York: Springer US, 2012.
4. Petrov P. S. A method for single-hydrophone geoacoustic inversion based on the modal group velocities estimation: Application to a waveguide with inhomogeneous bottom relief // Proceedings of the International Conference Days on Diraction, 26-30 May 2014. – St. Petersburg, 2014. – P. 186-191.
5. Zaikin O., Petrov P. Application of iterative hill climbing to the sound speed profile inversion in underwater acoustics // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol. 173. – P. 1-8.
6. A GPU-enabled black-box optimization in application to dispersion-based geoacoustic inversion / V. Bulavintsev, P. Petrov, M. Posypkin, O. Zaikin // Proc. of the VIII International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA-2017). Petrovac, Montenegro, October 2-7, 2017. CEUR-WS. – Vol. 1987. – 2017. – P. 95-100.
7. Concept of a multitask grid system with a flexible allocation of idle computational resources of supercomputers / A.P. Afanasiev, I.V. Bychkov, O.S. Zaikin et al. // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2017. – Vol. 56, No. 4. – P. 701-707.
8. A volunteer computing project for solving geoacoustic inversion problems / O. Zaikin, P. Petrov, M. Posypkin et al. // Open Engineering. – 2017. – V.7, No. 1. – 2017. – P. 363-370.
9. COSMOS: A compiled simulator for MOS circuits / R.E. Bryant, D.L. Beatty, K.S. Brace et al. // Proceedings of the 24th ACM/IEEE Design Automation Conference. – 1987. – P. 9-16.
10. Ignatiev A., Morgado A., Marques-Silva J. On tackling the limits of resolution in SAT solving // Lecture Notes in Computer Science. – 2017. – Vol. 10491. – P. 164-183.
11. Marques-Silva J., Ignatiev A., Morgado A. Horn maximum satisfiability: Reductions, algorithms & applications // Lecture Notes in Computer Science. – 2017. – Vol. 10423. – P. 681-694.
12. On computing generalized backbones / A. Previti, A. Ignatiev, M. Jarvisalo, J. Marques-Silva // IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI). – 2017.
13. Debugging EL+ Ontologies through Horn MUS enumeration / A. Ignatiev, J. Marques-Silva, C. Mencia, R. Penaloza // Ceur-WS. Proceedings of International Workshop on Description Logic. – Vol. 1879. – 2017. – P. 1-13.

14. Ignatiev A., Morgado A., Marques-Silva J. Cardinality encodings for graph optimization problems // Proc. of 26th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2017). – 2017. – P. 652-658.
15. Iterative and core-guided MaxSAT solving: A survey and assessment / A. Morgado, F. Heras, M.H. Liffiton et al. // Constraints. – 2013. – Vol. 18, No. 4. – P. 478-534.
16. MaxSAT resolution with the dual rail encoding. / M.L. Bonet, S. Buss, A. Ignatiev et al. // AAAI 2018. – 2018. – (In Press).
17. Изменчивость подледных течений в южном Байкале по данным 2012-2016 гг. / А.А. Жданов, Р.Ю. Гнатовский, Н.Г. Гранин и др. // Водные ресурсы. – 2017. – Т. 44, № 3. – С. 311–321.
18. Kazakov A., Lempert A., Lebedev P. Congruent circles packing and covering problems for multi-connected domains with non-Euclidean metric, and their applications to logistics // CEUR-WS. – 2017. – Vol. 1839. – P. 334-343.
19. Lebedev P.D., Lempert A.A. Iterative algorithms for optimal packing construction in inhomogeneous metrics // CEUR-WS. – 2017. – Vol. 1894. – P. 98-108.
20. Kazakov A.L., Lempert A.A., Le Q.M. An algorithm for packing circles of two types in a fixed size container with non-Euclidean metric // CEUR-WS. – 2017. – Vol. 1975. – P. 286-297.
21. Батурин В.А. Приближенный метод решения задач оптимального управления для дискретных систем, основанный на локальной аппроксимации множества достижимости // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2017. – Т. 19. – С. 75–88.
22. Жарков М.Л., Казаков А.Л., Лемперт А.А. Об определении критических показателей работы транспортно-пересадочного узла на основе многофазной системы массового обслуживания // Вестник УрГУПС. – 2017. – № 3(35). – С. 40-52.
23. Time-indexed formulations for the runway scheduling problem / P. Avella, M. Boccia, C. Mannino, I. Vasilyev // Transportation Science. – 2017. – Vol. 51, No. 4. – P. 1196-1209. – DOI: 10.1287/trsc.2017.0750.
24. Kazakov A.L., Lempert A.A., Nguyen H.L. The problem of the optimal packing of the equal circles for special non-euclidean metric // Communications in Computer and Information Science. – 2017. – Vol. 661. – P. 58-68.
25. Исследование теплового потока и структуры подледного слоя воды на границе со льдом в южном Байкале / И.А. Асламов, В.В. Козлов, Г.Б. Кириллин и др. // Водные ресурсы. – 2017. – Т. 44, № 3. – С. 296–310.

26. A study of heat transport at the ice base and structure of the under-ice water layer in Southern Baikal / I.A. Aslamov, V.V. Kozlov, G.B. Kirillin et al. // Water Resources. – 2017. – Vol. 44, No. 3. – P. 428-441.
27. Variations of under-ice currents in Southern Baikal by data of 2012-2016 / A.A. Zhdanov, R.Yu. Gnatovskii, N.G. Granin et al. // Water Resources. – 2017. – Vol. 44, No. 3. – P. 442-452.
28. Малтугуева Н.С., Погодаев Н.И. О существовании решения задачи оптимального управления гибридной системой // Известия ИГУ. Серия «Математика». – 2017. – Т. 19. – С. 128-134.
29. Столбов А.Б. Программное обеспечение комплексных исследований социо-эколого-экономических систем на основе моделей «регион»: аналитический обзор // Программные системы: теория и приложения. – 2017. – Т. 35, № 4. – С. 47–83.
30. Казаков А.Л., Лемперт А.А., Ле К.М. Оптимизация некоторых пространственно-распределенных логистических систем: математические модели и вычислительные алгоритмы // Инновационный транспорт–2016: специализация железных дорог. – 2017. – С. 834–847.
31. Николайчук О.А., Павлов А.И., Столбов А.Б. Особенности разработки агентных имитационных моделей на основе модельно управляемого подхода // Труды восьмой всероссийской научно-практической конференции по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2017), 18-20 октября 2017 г., Санкт-Петербург. – Санкт-Петербург, 2017. – С. 288–293.
32. Жарков М.Л. О модели входящего пассажиропотока в транспортно-пересадочные узлы // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 18.
33. Жарков М.Л. Определение показателей эффективности транспортно-пересадочного узла с применением систем массового обслуживания // Тезисы докладов XVIII Всеросс. конф. молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям / ИВТ СО РАН. – Новосибирск, 2017. – С. 76–77.
34. Козлов В.В., Макаров М.М., Аникин А.С. Моделирование процесса всплытия газовых гидратов в озере Байкал // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 24.
35. Лемперт А.А. О задаче упаковки кругов двух типов в ограниченное множество с неевклидовой метрикой // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 31.
36. Лемперт А.А. Казаков А.Л. Задачи об упаковке и покрытии в неевклидовой метрике и уравнение эйконала // Материалы Международной конференции «Математика в современном

мире». – Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2017. – С. 404.

37. Николайчук О.А., Павлов А.И., Столбов А.Б. Об одном подходе к разработке агентных имитационных моделей на основе модельно-управляемого подхода // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 39.

38. Николайчук О.А., Павлов А.И., Столбов А.Б. Шаблоны информационных процессов интеллектуальных мультиагентных систем // Материалы конф. «Ляпуновские чтения». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 38.

39. Столбов А.Б. Исторический обзор программных разработок для поддержки исследований на основе моделей «Регион» // Тезисы XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии». – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 61.

40. Столбов А.Б. Особенности разработки агентных имитационных моделей на основе MDD подхода // Тезисы докладов XVIII Всеросс. конф. молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2017. – С. 92.

41. Zaikin O. A parallel SAT solving algorithm based on improved handling of conflict clauses // Procedia computer science. – 2017. – V. 119. – P. 103-111.

42. Vatutin E., Kochemazov S., Zaikin O., Valyaev S. Enumerating the transversals for diagonal Latin squares of small order // Proceedings of the Third International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development (BOINC:FAST 2017). CEUR-WS. – 2017. – V. 1973. – P. 6-14.

43. Vatutin E., Kochemazov S., Zaikin O. On some features of symmetric diagonal Latin squares // Proceedings of the XIII International Scientific Conference on Optoelectronic Equipment and Devices in Systems of Pattern Recognition, Image and Symbol Information Processing. CEUR-WS. – 2017. – V. 1940. – P. 74-79.

44. Столбов А.Б., Батурин В.А. Программный комплекс для поддержки проектирования математических моделей медико-эколого-экономических систем «МЭЭМ 1.0». – Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2017619810 от 07.09.2017. – 2017.