

Федеральное агентство научных организаций

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ  
ИМЕНИ В.М. МАТРОСОВА  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 517.9

№ госрегистрации АААА-А17-117032210080-7

Инв. № 2017-8

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИДСТУ СО РАН  
академик



И.В. Бычков

«23» января 2018 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ,  
ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Приоритетное направление: I.1  
Теоретическая математика

Программа I.1.4

Исследование задач динамики и управления:  
качественный и численный анализ

Руководитель темы

  
подпись, дата

чл.-к. РАН Толстоногов А.А.

Иркутск 2017

## СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы:

Зав. Отделением,  
чл.к. РАН

  
подпись, дата 23.01.2018 А.А. Толстоногов

Исполнители темы:

Г.н.с., д.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 И.А. Финогенко

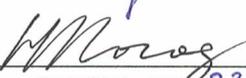
(Блок I)

С.н.с., к.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 С.А. Тимошин

(Блок I)

С.н.с., к.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 Н.И. Погодаев

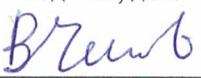
(Блок I)

Зам. директора по  
н.р., д.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 А.А. Щеглова

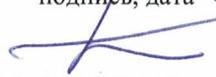
(Блок II)

Г.н.с., д.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 В.Ф. Чистяков

(Блок II)

Г.н.с., д.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 М.В. Булатов

(Блок II)

С.н.с., к.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 С.В. Свинина

(Блок II)

Н.с., к.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 Е.В. Чистякова

(Блок II)

Н.с., к.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 П.С. Петренко

(Блок II)

М.н.с., к.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 Л.В. Соловарова

(Блок II)

Программист

  
подпись, дата 23.01.2018 А.Д. Кононов

(Блок II)

зав. лабораторией  
д.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 В.А. Дыхта

(Блок III)

В.н.с., к.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 Е.В. Гончарова

(Блок III)

С.н.с., к.ф.-м.н.

  
подпись, дата 23.01.2018 О.Н. Самсонюк

(Блок III)

Н.с., к.ф.-м.н.

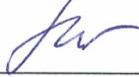
  
подпись, дата 23.01.2018 С.П. Сорокин

(Блок III)

Н.с., к.т.н.  В.А. Воронов (Блок III)  
подпись, дата 23.01.2018

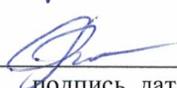
Н.с., к.ф.-м.н.  М.В. Старицын (Блок III)  
подпись, дата 23.01.2018

Г.н.с., д.т.н.  А.Ю. Горнов (Блок IV)  
подпись, дата 23.01.2018

Г.н.с., д.т.н.  А.И. Тятюшкин (Блок IV)  
подпись, дата 23.01.2018

С.н.с., к.т.н.  Т.С. Зароднюк (Блок IV)  
подпись, дата 23.01.2018

М.н.с.  А.С. Аникин (Блок IV)  
подпись, дата 23.01.2018

М.н.с.  Е.А. Финкельштейн (Блок IV)  
подпись, дата 23.01.2018

Нормоконтролер  Е.С. Фереферов  
подпись, дата 23.01.2018

# Реферат

Отчет 30 страниц, 63 источника.

*Ключевые слова:* полиэдральные включения, гистерезис, уравнение неразрывности, дифференциально-алгебраические уравнения, вырожденные гибридные системы, интегро-алгебраические уравнения, разностные схемы, предельные дифференциальные включения, необходимые условия оптимальности вариационного типа, импульсное управление.

В проекте рассматривается широкий спектр вопросов, относящихся к изучению эволюционных уравнений и управляемых систем, которые описываются обыкновенными, интегро-дифференциальными, функционально-дифференциальными уравнениями, а также уравнениями в частных производных и уравнениями с мерами.

За время выполнения проекта изучены качественные свойства множеств решений полиэдральных процессов выметания, систем с гистерезисом, функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и динамических систем в пространстве мер.

Проведены исследования по общей и качественной теории, а также численным методам решения различных классов систем дифференциально-алгебраических и интегральных уравнений. Найдены условия робастной устойчивости для стационарных систем произвольно высокого индекса неразрешенности, получены условия разрешимости линейных ДАУ с непрерывным и дискретным временем. Изучены вопросы разрешимости для линейных дифференциально-алгебраических уравнения высокого порядка с возмущениями, заданными операторами Вольтерра, описана структура решений, а также предложены и обоснованы частные случаи коллокационно-вариационных разностных схем.

Проведено исследование некоторых неклассических и нерегулярных задач оптимального управления, в том числе: задача с минимаксным целевым функционалом, дискретная задача с фазовыми ограничениями, импульсные задачи с гистерезисом и решениями неограниченной вариации, задача управления механической системой с быстрыми вибрациями и блокируемыми степенями свободы. Получены результаты, связанные с обобщениями позиционного принципа минимума, методами построения позиционных управлений спуска по функционалу, аппроксимацией импульсных процессов в разных топологиях и теоремами существования оптимального решения.

Разработаны алгоритмы и вычислительные технологии аппроксимации множества достижимости для нелинейных управляемых систем с линейным вхождением управления и полиэдральным множеством допустимых управлений.

Проект соответствует:

- приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в РФ: Транспортные и космические системы.
- критическим технологиям РФ: Технологии информационных, управляющих, навигационных систем (13).

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Реферат.....</b>	<b>4</b>
<b>Введение.....</b>	<b>6</b>
<b>Основные результаты НИР: теоретические исследования и вычислительные эксперименты</b>	<b>8</b>
Блок I. Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения.....	8
Цели и задачи.....	8
Основные результаты.....	8
Оценка результатов.....	9
Блок II. Исследование качественных свойств и численное решение управляемых систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с приложениями к вырожденным задачам оптимального управления.....	10
Цели и задачи.....	10
Основные результаты.....	11
Оценка результатов.....	12
Блок III. Качественное исследование неклассических и нерегулярных задач теории оптимального управления с приложениями к механике и численным методам улучшения управления.....	13
Цели и задачи.....	13
Основные результаты.....	14
Оценка результатов.....	15
Блок IV. Алгоритмы и вычислительные технологии решения задач оптимального управления и фазового оценивания.....	16
Цели и задачи.....	16
Основные результаты.....	16
Оценка результатов.....	23
<b>Заключение.....</b>	<b>24</b>
<b>Публикации.....</b>	<b>25</b>

## Введение

Эволюционные уравнения субдифференциального типа, включающие процессы выметания и уравнения с гистерезисными операторами, имеют большую историю. Например, с помощью процессов выметания описывается динамика механических систем с неупругими ударами и трением. С помощью уравнений, содержащих гистерезисные операторы, описываются задачи памяти формы для сплавов, задачи фильтрации, задачи динамики популяций и т. д. Процессам выметания и уравнениям с гистерезисными операторами, описываемыми как обыкновенными, так и уравнениями в частных производных, и их приложениям посвящено огромное количество работ, начиная с работ J.J. Moreau и A. Visinith. Основное внимание во всех этих работах уделено вопросам существования, единственности и регулярности решений. Что же касается работ, посвященных оптимальному управлению процессами выметания и системами с гистерезисом, то их единицы. В основном они касаются простейших задач минимизации квадратичных функционалов на решениях системы с выпуклыми постоянными ограничениями на управление. Что же касается широкого спектра вопросов, относящихся к управляемым системам, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями с невыпуклыми, зависящими от фазовой переменной, ограничениями на управление, то они для систем субдифференциального типа не изучались. Ряд таких вопросов, имеющих приложения в различных областях, рассматривается в данном проекте.

Метод предельных уравнений в настоящее время является одним из основных методов исследования неавтономных систем дифференциальных уравнений и включений. Актуальной разрабатываемой темы обусловлена тем, что часто не удается построить функции или функционалы Ляпунова со знакоопределенными производными. Особенно это характерно для механических управляемых систем и систем с трением, в которых, как правило, эти производные зависят лишь от обобщенных скоростей и поэтому обладают свойством знакопостоянности. Все результаты являются новыми и переходят в известные для изученных ранее неавтономных систем.

Теория управления для уравнения неразрывности, которую также иногда называют теорией управления пучками траекторий, имеет многочисленные приложения в физике, технике и математической биологии. Она возникла в начале 80х годов в работах Д.А. Овсянникова, рассматривавшего задачу управления пучками частиц в ускорителе. Существует множество других задач, приводящих к управляемому уравнению неразрывности. Это, например, классическая задача оптимального управления с двумя дополнительными предположениями: 1) управляемая система зависит от набора случайных параметров, вероятностное распределение каждого из которых задано и не зависит от времени, и 2) состояние системы нельзя наблюдать во время движения. Такой управляемой системой разумно описывать перемещение автономного подводного аппарата. Действительно, подводные течения невозможно абсолютно точно определить (отсюда случайные параметры) и аппарат не способен определить свое местоположение (системы навигации типа GPS под водой не работают). Многие модели движения биологических сообществ (например, толпы людей) описываются нелокальными законами сохранения. В предельном случае, когда плотность сообщества (количество индивидуумов на единицу площади) достаточно мала, нелокальный закон сохранения переходит в классический закон сохранения массы, то есть в уравнение неразрывности. Наша цель в прошедшем году состояла в изучении вопросов управляемости для управляемого уравнения неразрывности.

Системы дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) возникают при математическом моделировании различных процессов во многих прикладных областях: теории автоматического регулирования, оптимальном управлении со смешанными ограничениями, теории электронных схем и электрических цепей, механике, химической кинетике, гидродинамике, теплотехнике и др. В настоящее время все исследования ДАУ проводятся в двух направлениях. Первый подход

базируется на сведениях к дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей производной. Другой подход ориентирован на изучение внутренней структуры системы, в частности, с применением методов исследования, разработанных в теории обыкновенных ДАУ. Этот подход развивается участниками проекта. В современной литературе в основном рассматриваются отдельные частные виды дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных, как правило, линейные или полулинейные, которые имеют индекс не выше двух. Если система имеет индекс два, то она заведомо имеет специальную расщепленную форму, удобную для применения известных классических численных методов. Поэтому теория численных методов решения дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных, как с регулярной, так и с сингулярной структурой матричных пучков, нуждается в построении новых алгоритмов и общих подходов численного решения, обеспечивающих хорошую точность. В настоящее время исследование качественной теории дискретно-непрерывных ДАУ находится на начальном этапе. В связи с этим одной из основных задач проекта является построение основ структурной теории ДАУ с непрерывным и дискретным временем, которая в дальнейшем позволит получать результаты в наиболее общих предположениях и в удобной для приложений форме. Методы исследования при этом существенным образом опираются на методику исследования линейных обыкновенных ДАУ. На данном этапе исследования робастной устойчивости ДАУ находятся на начальной стадии. Известны результаты по робастной устойчивости и оценке радиуса устойчивости для стационарных ДАУ, полученные с помощью приведения системы к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса. Критерии, полученные на основе этой структурной формы, зачастую неконструктивны. Участниками получены условия робастной устойчивости с использованием другой структурной формы, которая лишена указанного недостатка. Эта структурная форма эквивалентна исходной системе в смысле решений и сохраняет свойства устойчивости. Вырожденность матриц Якоби, описывающих систему (в линейном случае матричных коэффициентов), является причиной того, что разностные схемы, разработанные для эволюционных систем уравнений в частных производных, либо малоэффективны, либо принципиально непригодны для решения ДАУ. При численном решении ДАУ с частными производными индекса неразрешенности выше единицы, появляются особенности, называемые «пограничными слоями ошибок». Чем выше индекс системы, тем шире соответствующий пограничный слой. Поэтому для систем с высоким индексом разностные схемы малого порядка аппроксимации непригодны. С помощью сплайн-коллекционных методов возможно построение разностных схем произвольного порядка аппроксимации, обладающих устойчивостью при оптимальных порядках сплайнов, зависящих от параметров индекса системы.

Управляемые системы с нелинейными импульсами и соответствующие задачи управления составляют весьма малоизученную область теории динамических систем и динамической оптимизации. Изучение таких задач, особенно, в присутствии нестандартных ограничений, представляет несомненный интерес с точки зрения современной математической теории импульсного управления.

Работы по созданию методов и алгоритмов для задач оптимального управления, конечномерной оптимизации и фазового оценивания активно проводились и в России, и за рубежом. К настоящему времени получены новые фундаментальные результаты в теории управления, и сформированы новые масштабные проблемы, связанные с оптимизацией динамических систем в различных приоритетных областях, в связи с этим разработка новых алгоритмов и вычислительных технологий оптимизации продолжает оставаться актуальной.

# Основные результаты НИР: теоретические исследования и вычислительные эксперименты

## *Блок I. Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения*

### Цели и задачи

Цель данного блока состоит в изучении качественных свойств неклассических управляемых систем, описываемых эволюционными уравнениями. Для ее достижения были поставлены следующие задачи:

1. Доказать теоремы существования решений полиэдральных процессов выметания.
2. Разработать метод предельных дифференциальных включений для функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью с использованием инвариантно-дифференцируемых функционалов Ляпунова.
3. Изучить вопросы управляемости для динамической системы в пространстве мер, задаваемой линейным законом сохранения в конечномерном евклидовом пространстве.
4. Изучить вопросы существования решений и релаксации для динамических систем с невыпуклыми неограниченными возмущениями.
5. Изучить вопросы существования решений и релаксации для динамических систем, описывающих эффект гистерезиса.

### Основные результаты

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассмотрены полиэдральные процессы выметания с многозначными возмущениями, значениями которых являются невыпуклые неограниченные множества. Для таких процессов доказано существование решений. Отметим, что полиэдральные процессы выметания не удовлетворяют традиционным условиям, гарантирующим существование решений для выпуклых процессов выметания. В частности, широко используемое требование липшицевости многозначного возмущения потребовалось заменить на более слабое условие  $(\rho - H)$  липшицевости. (Толстоногов А.А.)

В сепарабельном гильбертовом пространстве рассмотрено эволюционное включение, правая часть которого содержит субдифференциал неавтономной собственной выпуклой полунепрерывной функции и многозначное возмущение с невыпуклыми замкнутыми неограниченными значениями. Наряду с этим включением рассмотрено включение с овыукленным возмущением. Доказаны существование решений и плотность множества решений исходного включения в замыкании множества решений включения с овыукленным возмущением. В отличие от известных результатов такого типа мы не предполагаем, что выпуклая функция обладает свойством компактности и что значения многозначного возмущения являются ограниченными множествами. (Толстоногов А.А.)

Рассмотрена управляемая система двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая эффект гистерезиса. Многозначная функция, задающая ограничение на управление,

может принимать невыпуклые значения. Исследована задача релаксации для данной системы, т.е. аппроксимация решений системы с овыпукленными ограничениями на управление решениями исходной системы. Отличительной особенностью данной задачи является неограниченность значений функции ограничения на управление, и ослабление традиционного для данного типа задач условия Липшица по фазовой переменной для данной функции. (Тимошин С.А.)

Рассмотрена управляемая система, описываемая нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, возникающая при описании фазовых переходов. Ограничение на управление задается зависящим от фазовых переменных многозначным отображением, принимающим невыпуклые значения. Исследована задача минимизации невыпуклого по управлению интегрального функционала на решениях рассматриваемой системы. Изучена сходимість минимизирующей последовательности исходной задачи к решению, которое существует, овыпукленной задачи оптимального управления. (Тимошин С.А.)

В конечномерном евклидовом пространстве рассмотрено дифференциальное включение с невыпуклым неограниченным возмущением. Вместо традиционного предположения липшицевости в метрике Хаусдорфа многозначного возмущения использовано понятие липшицевости, являющееся более естественным для многозначных отображений с неограниченными значениями. Наряду с заданным включением рассмотрено включение с овыпукленным возмущением. Доказано существование решений включений и получена теорема релаксации (плотность множества решений исходного включения в множестве решений овыпукленного включения). (Тимошин С.А.)

Разработан метод предельных дифференциальных включений для функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью с использованием инвариантно-дифференцируемых функционалов Ляпунова. Предложены новые подходы к построению предельных дифференциальных включений и изучены свойства типа инвариантности правых предельных множеств неавтономных функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Изучены свойства предельных дифференциальных включений для систем с последствием и доказаны аналоги принципа инвариантности. (Финогенко И.А.)

Рассмотрена задача управления уравнением неразрывности в конечномерном евклидовом пространстве. Это уравнение описывает процесс переноса массы векторным полем, и потому на него можно смотреть как на динамическую систему в пространстве мер. Предполагается, что векторное поле, вдоль которого переносится масса, является линейной функцией управления или, другими словами, линейной комбинацией конечного семейства векторных полей. При условии, что это семейство является скобочно образующим (bracket generating) доказана аппроксимативная управляемость системы в классе распределенных (зависящих от временной и пространственной координаты) управлений. (Погодаев Н.И.)

## **Оценка результатов**

Уравнениям с гистерезисными операторами, описываемыми как обыкновенными, так и уравнениями в частных производных, и их приложениям посвящено огромное количество работ. Основное внимание в этих работах уделено вопросам существования, единственности и регулярности решений. С другой стороны, несмотря на потенциальную значимость для приложений, работ, посвященных оптимальному управлению системами с гистерезисом, буквально единицы. В основном они касаются простейших задач минимизации квадратичных функционалов на решениях системы с выпуклыми постоянными ограничениями на управление. Что же касается вопросов, рассмотренных в проекте и относящихся к управляемым системам с невыпуклыми, зависящими от фазовой переменной с ограничениями на управление, а также системам с неограниченными управлениями, то они до настоящего времени не изучались. Вместе

с тем, например, задачи с неограниченными управлениями являются важной частью исследований в математической теории управления. Полученные в данном направлении результаты могут быть использованы, кроме прочего, при построении численных алгоритмов для решения невыпуклых задач оптимального управления.

При исследовании задач проекта, кроме классических результатов из теории нелинейных операторов, эволюционных уравнений, уравнений в частных производных и вариационных неравенств принципиальную роль играли результаты по теории непрерывных селекторов многозначных отображений с невыпуклыми значениями, теории непрерывных селекторов неподвижных точек многозначных отображений с невыпуклыми значениями, сходимости по Моско интегральных функционалов и др.

Направление исследований динамики неавтономных систем связано с использованием метода предельных уравнений, которых приобретает в наших исследованиях форму предельных дифференциальных включений. Здесь возникает ключевой и принципиальный вопрос об их построении. Это связано с тем, что известные методы исследования разрывных систем приводят к дифференциальным включениям, для которых нет известных теорем математического и многозначного анализа о сходимости сдвигов многозначных отображений. Метод предельных дифференциальных включений в наших исследованиях сочетается с прямым методом Ляпунова, в котором мы используем инвариантно-дифференцируемые функционалы Ляпунова со знакопостоянными производными. В целом проведенные исследования имеют достаточно полный характер, что позволяет в дальнейшем перейти к приложениям полученных результатов для изучения задач стабилизации неавтономных управляемых систем с разрывными позиционными управлениями. В ряде случаев решение поставленных задач не имеет аналогов и являются новаторскими.

В последнее время интерес к управлению динамическими системами в пространстве мер значительно возрос в связи с развитием теории, описывающей динамику движения больших скоплений людей (crowd dynamics). Выяснилось, что с помощью нелокальных вариантов уравнений неразрывности можно адекватно моделировать соответствующие процессы. Кроме того, недавно появилось большое число работ, посвященных задачам управления параметризованными семействами динамических систем (в литературе такие семейства называют ансамблями). Оказывается, что многие задачи управления бесконечным ансамблем, сводятся к задачам управления уравнением неразрывности. На сколько нам известно, вопросы управляемости для подобных систем ранее не изучались. Результат об аппроксимативной управляемости, полученный в данном проекте, является первым шагом в этом направлении. В дальнейшем, этот результат планируется обобщить на случай уравнения неразрывности на произвольном римановом многообразии, а также на случай смешанных систем ОДУ - уравнение неразрывности.

## ***Блок II. Исследование качественных свойств и численное решение управляемых систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с приложениями к вырожденным задачам оптимального управления***

### **Цели и задачи**

Целью исследований являлось изучение разрешимости и качественных свойств ДАУ (в том числе с непрерывным и дискретным временем) и систем ИАУ, создание новых устойчивых численных методов решения ДАУ (обыкновенных и с частными производными), включая их программную реализацию.

В рамках поставленной цели были рассмотрены следующие задачи:

1. Получить условия робастной устойчивости систем дифференциально-алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами произвольного индекса неразрешенности с неопределенностями, задаваемыми с помощью матричных норм
2. Получить условия разрешимости начальной задачи вырожденной линейной гибридной системы для случая непрерывного, а также кусочно непрерывного решения
3. Получить условия разрешимости для ДАУ, в том числе с возмущениями в виде интегральных операторов. Построить алгоритмы вычисления индекса ДАУ порядка выше первого
4. Доказать теорему о непрерывной зависимости решения дифференциально-алгебраических уравнений порядка выше первого от параметров с приложениями к изучению нестационарных гидравлических цепей
5. Разработать коллокационно-вариационные разностные схемы с одной и двумя точками коллокации для линейных ДАУ индекса не выше двух
6. Разработать разностные схемы произвольного порядка аппроксимации и выполнена их программная реализация для численного решения систем дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными второго порядка.

## Основные результаты

Для линейных стационарных ДАУ показано, что возмущения коэффициентов системы не могут быть произвольными, поскольку введение в систему произвольно высокого индекса неопределенностей может полностью изменить не только ее структуру, но и дифференциальный порядок. При возмущениях различной структуры, подчиняющихся условию малости матричных норм, получены условия, гарантирующие, что введение матричных неопределенностей в коэффициенты не нарушает дифференциальный порядок и внутреннюю структуру рассматриваемой системы. В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получены достаточные условия робастной устойчивости для систем, у которых неопределенность присутствует не только в матрице при искомой функции, но и в матрице при производной. (Щеглова А.А., Кононов А.Д.)

Рассматривались линейные системы ДАУ, содержащие в своей динамике как непрерывные, так и дискретные переменные (вырожденные гибридные системы). Для таких систем построена структурная форма, эквивалентная исходной системе в смысле решений, получены необходимые и достаточные условия разрешимости начальной задачи, а также условия согласования начальных данных как для случая с непрерывным, так и с кусочно-непрерывным решением. (Петренко П.С.)

Для ДАУ высокого порядка изучены возмущения (необязательно малые) операторами Вольтерра. Получены условия разрешимости исходных и возмущенных систем и начальных задач для них. Обоснованы критерии, при выполнении которых у возмущенных систем сохраняется структура решений. Обсуждается влияние малых возмущений свободного члена и начальных данных на решение (получены соответствующие оценки). Предложен способ вычисления особых точек решений, в которых решения имеют разрывы или ветвятся. В рамках теорем существования обоснован численный метод. (Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.)

Исследовались системы интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) Вольтерра и интегральные уравнения Вольтерра, с тождественно вырожденной матрицей в области определения при главном

члене. Такие системы интегральных уравнений принято сейчас называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ). Получены условия разрешимости и указана структура общих решений. В условиях теорем существования рассмотрено возмущение систем ИДУ операторами Фредгольма. Указана структура общих решений таких систем. Основными методами исследования является подход, основанный на анализе продолженных систем и свойств матричных многочленов, определенным образом поставленных в соответствие изучаемым ИДУ и ИАУ. (Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.)

Получены достаточные условия существования единственного решения ИАУ с переменными пределами интегрирования в классе непрерывных функций. Для численного решения интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования предложено семейство многошаговых методов, основанных на явных квадратурных формулах Адамса для интегрального слагаемого и на экстраполяционных формулах для главной части. Проведен анализ модели долгосрочного развития электроэнергетической системы. Данная модель имеет вид интегро-алгебраического уравнения с переменными пределами интегрирования. (Булатов М.В.)

Для ДАУ индекса не выше двух предложены и обоснованы частные случаи коллокационно-вариационных разностных схем, а именно интерполяционный вариант разностных схем с одной точкой коллокации. Данная схема рассматривается как одношаговый метод с ограничением равенством, к которому мы добавляем условие минимума целевой функции и таким образом переходим к специальной задаче математического программирования, которая сводится к решению системы линейных алгебраических уравнения методом множителей Лагранжа. Доказана теорема сходимости, проведены численные расчеты на модельных примерах. (Булатов М.В., Соловарова Л.С.)

Рассмотрены квазилинейные дифференциально-алгебраические уравнения с регулярным матричным пучком, построенным по коэффициентам системы произвольного индекса. Предложен новый алгоритм численного решения, обладающий высокой точностью. Алгоритм основан на идее расщепления матричного пучка, анализе его структурной формы и аппроксимации производных степенными сплайнами различных порядков. (Свинина С.В.)

## **Оценка результатов**

В настоящее время исследование качественных свойств ДАУ далеко от завершения. Достаточно полно изучены линейные системы с постоянными коэффициентами. В линейном и нелинейном случаях результаты получены при довольно жестких ограничениях: низкий индекс неразрешенности, специальная структура, постоянство матриц при производной. Целью проекта является получение результатов по устойчивости, управляемости и наблюдаемости ДАУ, не подчиняющихся указанным ограничениям.

Имеющиеся на сегодняшний день разностные схемы для дифференциально-алгебраических уравнений крайне малоэффективны при численном решении систем высокого индекса, поскольку порождают неустойчивые процессы. В рамках коллокационно-вариационного подхода возможно построение разностных схем различного порядка аппроксимации, свободных от указанного выше недостатка.

Предложенный в работе численный алгоритм решения дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных основан на анализе структурных форм матричных пучков, построенных по коэффициентам системы. Хорошо известно (из работ Г.И. Марчука), что при численном решении сингулярных систем линейных алгебраических уравнений применим метод расщепления сингулярной матрицы. Это приводит к мысли о возможности расщепления матричного пучка системы, поскольку он составляет основу разностной схемы (в линейном случае

системы линейных алгебраических уравнений). Сплайновая аппроксимация производных, как известно из огромного числа современных работ, дает хороший результат и высокую точность. Поэтому разработанный в проекте метод учитывает перечисленные выше особенности. Предложенный в работе алгоритм позволяет эффективно с высокой точностью решать квазилинейные дифференциально-алгебраические системы уравнений в частных производных общего вида с произвольным индексом. Подход к численному решению является общим и дает возможность применять метод для систем с сингулярным матричным пучком.

### ***Блок III. Качественное исследование неклассических и нерегулярных задач теории оптимального управления с приложениями к механике и численным методам улучшения управления***

#### **Цели и задачи**

В рамках НИР по блоку III в 2017 г. были поставлены следующие задачи:

1. Для задач оптимального управления с нерегулярными ограничениями получить необходимые условия оптимальности вариационного типа, усиливающие принцип максимума.
2. Установить связь позиционного принципа минимума с известными необходимыми условиями оптимальности в дискретных системах.
3. Разработать численный метод улучшения управления на основе позиционного условия минимума для задач с дискретным временем, получаемых в результате дискретизации задач с непрерывным временем.
4. Разработать алгоритмы решения задач оптимального управления для систем, линейных по состоянию, основанные на позиционном принципе минимума.
5. Изучить задачи оптимального импульсного управления с гистерезисом, заданным системой вариационных неравенств на пространстве функций ограниченной вариации. Основные вопросы состоят в описании множества решений импульсной управляемой системы с гистерезисом и аппроксимации разрывных решений.
6. Исследовать проблемы релаксационного (импульсно-траекторного) расширения управляемых систем с аффинной по управлению правой частью при отсутствии равномерного ограничения на  $L_1$ -норму управления. Построить описание множества решений соответствующей импульсной управляемой системы с траекториями неограниченной вариации (но ограниченной  $p$ -вариацией,  $p > 1$ ).
7. Изучить модели механических систем с быстрыми вибрациями и блокируемыми степенями свободы: предложить формализацию таких моделей в форме гибридной динамической системы с полиномиальными импульсами, разработать схему аппроксимации импульсной динамической системы обычными управляемыми процессами, построить конструктивную релаксацию системы (компактификацию семейства траекторий), установить существование решения задачи оптимального управления такими системами.

Методика проведения научно-исследовательской работы базируется на современной нелокальной теории управления, группирующейся в рамках уравнений и неравенств Гамильтона-Якоби-Беллмана и методах релаксационного расширения вырожденных задач оптимального управления.

Результаты, связанные с тематикой гибридных систем с нелинейными импульсами и импульсных систем с гистерезисом, преимущественно опираются на оригинальную (разработанную авторами) технику пространственно-временных преобразований, которая сочетает в себе разрывную замену времени и расширение фазового пространства, позволяющее независимо отслеживать эволюцию односторонних пределов траектории в фазе импульсных воздействий.

## Основные результаты

Доказан позиционный принцип минимума для минимаксной задачи оптимального управления с гладкой по состоянию динамикой. Целевая функция задачи есть максимум конечного числа гладких функций, т.е. является квазидифференцируемой. Доказательство основано на новой конструкции опорной мажоранты функционала задачи и соответствующих позиционных управлениях спуска. Помимо самостоятельного значения результат позволяет получать позиционный принцип максимума для задач оптимального управления с терминальными ограничениями типа неравенства путем их редукции к негладким минимаксным задачам. (Дыхта В.А.).

Для нелинейных задач оптимального управления в дискретных системах установлено, что позиционный принцип минимума существенно усиливает дискретный принцип максимума (типа Понтрягина). Во-первых, позиционное условие справедливо без предположений выпуклости управляемой системы и целевой функции (классический результат здесь, вообще говоря, не применим). Во-вторых, на общей области применимости позиционный принцип минимума гарантированно отбраковывает неэкстремальные процессы, в то же время, позволяет улучшать по функционалу не оптимальные стационарные управления. (Сорокин С.П.).

Для задачи оптимального управления дискретной нелинейной динамической системой с нелинейной целевой функцией при поточечных фазовых и общем конечном ограничении на траектории получены внешние оценки множеств достижимости при учете фазовых ограничений. На базе оценок доказано достаточное условие оптимальности в соответствующих задачах управления, не требующее выпуклости входных данных. (Сорокин С.П.).

Предложен алгоритм построения позиционных управлений спуска по функционалу в задаче оптимального управления с терминальным функционалом, основанный на формировании численных решений неравенства Гамильтона-Якоби в некоторой области расширенного фазового пространства. После дискретизации рассматривается задача с дискретным временем. В части численного нахождения решений неравенства Гамильтона-Якоби алгоритм представляет собой упрощенный вариант метода решений уравнения эйконала и стационарных уравнений Гамильтона-Якоби, требующий существенно меньших вычислительных затрат. В ходе работы различные модификации алгоритма тестировались на задачах построения множества достижимости импульсных систем и на задаче восстановления формы тела по изображению (обе эти задачи требуют численного решения некоторого стационарного уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана). (Воронов В.А.)

Для линейных по состоянию задач дискретного оптимального управления реализован итерационный алгоритм позиционного улучшения целевого функционала, который основан на позиционном принципе минимума. Алгоритм протестирован на нескольких примерах с билинейными динамическими системами. Результаты расчетов алгоритмом позиционного улучшения совпали с результатами, полученными модифицированным методом парабол. (Сорокин С.П., Горнов А.Ю.)

Получено описание множества решений импульсной управляемой системы с гистерезисной нелинейностью в правой части. Для случая скалярного гистерезиса типа люфт доказаны теоремы

об аппроксимации решений ограниченной вариации последовательностями абсолютно непрерывных решений. (Самсонюк О.Н., Тимошин С.А.)

Исследован вопрос существования решения в задаче оптимального импульсного управления с траекториями ограниченной  $p$ -вариации,  $1 < p < 2$ . Получено конструктивное представление импульсной управляемой системы через специальное дискретно-непрерывное интегральное уравнение, включающее интеграл Юнга. (Гончарова Е.В., Самсонюк О.Н., Старицын М.В.)

Исследован класс механических систем с быстрыми вибрациями и блокируемыми степенями свободы. Предложена формализация таких систем в форме гибридной динамической системы с нелинейными импульсами, где линейная (аффинная) компонента импульсного воздействия связана с соответствующим решением посредством общего ограничения, задающего множество допустимых достояний до и после любого из аффинных импульсов. Разработана схема аппроксимации импульсной динамической системы обычными управляемыми процессами, которая сводится к поиску близкого в слабой топологии и, в некотором смысле, квазиортогонального управляемого процесса. Дано конструктивное описание замыкания множества аппроксимирующих решений (релаксации системы) в слабой топологии. Получен результат о существовании решения задачи оптимального управления такими системами. (Гончарова Е.В., Старицын М.В.)

## Оценка результатов

Результаты по сравнению позиционного принципа минимума с принципом максимума для дискретных процессов иллюстрированы примерами, в том числе нелинейными по фазовым и управляющим переменным. Следует отметить, что в ходе решения примеров позиционным принципом минимума проявляется конструктивное свойство этого результата: проверка условия оптимальности порождает улучшающий управляемый процесс (в случае нарушения позиционного принципа).

Внешние оценки множеств достижимости и соответствующие достаточные условия оптимальности для дискретных систем используют новый класс позиционно-параметрических сильно монотонных функций, которые зависят от начального, конечного или промежуточного состояния управляемой системы. Применение таких функций добавляет большей гибкости достаточному условию оптимальности по сравнению с условиями, использующими традиционные сильно монотонные функции. Полученные условия допускают естественную модификацию для исследования опорного управляемого процесса на сильный локальный минимум. Ожидается, что результаты будут использованы при дальнейшем усилении дискретного принципа максимума до достаточного условия для рассмотренной задачи, которое не потребует выпуклости вектограммы динамической системы.

Разработанный алгоритм нелокального улучшения численно найденных управлений в задаче оптимального управления со свободным правым концом позволяет улучшать понтрягинские экстремали и может быть более эффективным, чем алгоритмы, основанные на классическом принципе максимума. В текущем варианте алгоритма выбор из нескольких альтернатив (решений неравенства Гамильтона-Якоби) осуществляется при помощи метода ветвей и отсечений. В силу ограниченности вычислительных ресурсов может быть рассмотрено лишь конечное множество альтернатив. При реализации алгоритма трудность практического характера составляет ограничение поиска и выбор наилучшей альтернативы на каждом шаге. Более близкой к теории проблемой является рассмотрение скользящих режимов и построение особых траекторий на многообразии. Эти задачи будут рассматриваться в ходе дальнейшей работы.

Использованные подходы при изучении задач оптимального импульсного управления с гистерезисом допускают обобщение на векторный случай с выпуклым множеством гистерезиса. В этом направлении будут проводиться исследования на следующем этапе.

Исследования импульсных управляемых систем с разрывными решениями ограниченной  $p$ -вариации,  $p > 1$ , относятся к новому направлению теории динамических систем, называемого в иностранной литературе «rough path theory». Почти все известные в литературе результаты получены для непрерывных систем. При этом отметим, что случай  $p = 2$  является в некотором смысле пограничным: при  $p \in (1, 2)$  удается описать решение управляемой системы посредством прямого обобщения интеграла Лебега – Стильтьеса, называемого интегралом Юнга, в то время как при  $p \geq 0$  решения требуют более тонкого, алгебраического представления посредством формальных рядов Чена и так называемых итерированных интегралов. Предложенный в проекте метод, основанный на пространственно-временной репараметризации решений импульсной системы, дает подход к изучению разрывных решений. На текущем этапе изучение разрывных решений с ограниченной  $p$ -вариацией охватывало только случай скалярного управляющего воздействия. Очевидное направление обобщения полученных результатов состоит в их распространении на системы с векторным импульсным управлением. Другая, гораздо более сложная задача — описание релаксационного расширения в случае  $p \geq 0$ . Направления исследования здесь будут связаны с методами теории итерированных интегралов и аппаратом «rough path theory».

Гибридные системы с нелинейными импульсами появляются при моделировании некоторых феноменов, наблюдаемых при решении задач управления механическими системами, например, в присутствии вибрационных воздействий. Поэтому результаты, полученные в данном направлении, могут найти применение при исследовании соответствующих процессов из области классической механики, а также, в биомеханике и робототехнике.

#### ***Блок IV. Алгоритмы и вычислительные технологии решения задач оптимального управления и фазового оценивания***

##### **Цели и задачи**

В рамках НИР по блоку IV в 2017 г. были поставлены следующие задачи:

1. Разработать алгоритмы и вычислительные технологии для задачи аппроксимации множества достижимости нелинейной управляемой системы с полиэдральным множеством допустимых управлений.
2. Провести серии вычислительных экспериментов по исследованию свойств разработанных технологий и поиска наиболее эффективных модификаций.

##### **Основные результаты**

Предложена вычислительная технология аппроксимации множества достижимости (МД) на плоскости для нелинейных управляемых систем с линейным входением управления и полиэдральным множеством допустимых управлений. В основу алгоритмов положен “bang-bang” – принцип, – перебор граничных точек допустимого множества – и метод стохастической аппроксимации (СА), хорошо показавший себя при решении ряда более простых задач фазового оценивания. Работа алгоритмов управляется единственным алгоритмическим параметром, контролирующим число точек переключения пробных управлений. Эффективность реализованной

технологии исследована на ряде тестовых моделей. (Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Финкельштейн Е.А.).

Предложена модификация метода «квазиравномерного заполнения» (КЗ), ориентированная на класс систем с полиэдральным множеством допустимых управлений. Реализованный алгоритм накапливает информацию об аппроксимирующих МД точках в специальной базе проб, при этом на каждой итерации контролируется близость новых точек к точкам, уже заложенным в базу. Близость двух пробных состояний оценивается евклидовой нормой разницы состояний системы в конечный момент времени. Работа алгоритма управляется алгоритмическим параметром - размером отсекающих евклидовых шаров, на основе которых производится селекция новых пробных точек в терминальном фазовом пространстве. (Тятюшкин А.И., Аникин А.С.)

Проведено многовариантное тестирование разработанных алгоритмов и вычислительных технологий. Достоверность полученных результатов расчетов проверена путем сравнения вычислительных экспериментов на популярных модельных примерах, для которых полиэдральное множество совпадает с параллелепипедом, и для которых уже разработано и хорошо исследовано значительное количество надежных методов и алгоритмов (Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Аникин А.С., Финкельштейн Е.А.)

Пример 1. Рассматривается управляемая система  $\dot{x}_1 = u_1 x_2 + x_1$ ,  $\dot{x}_2 = u_2 - x_1 x_2$  с начальным состоянием  $x(0) = (1,1)$  определена на интервале времени  $t \in [0,2]$ . На управления наложены полиэдральные ограничения, отраженные на рисунке 1. Множество достижимости системы после 100000 итераций метода СА изображено на рисунке 2, после 1000000 итераций – на рисунке 3; после 1000000 итераций метода КЗ – на рисунке 4.

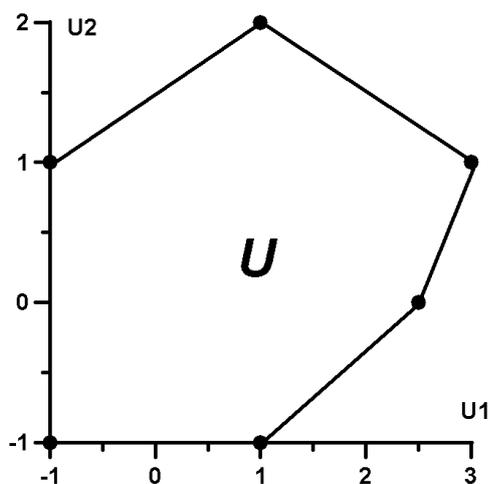


Рисунок 1 – Множество допустимых управлений в примере 1

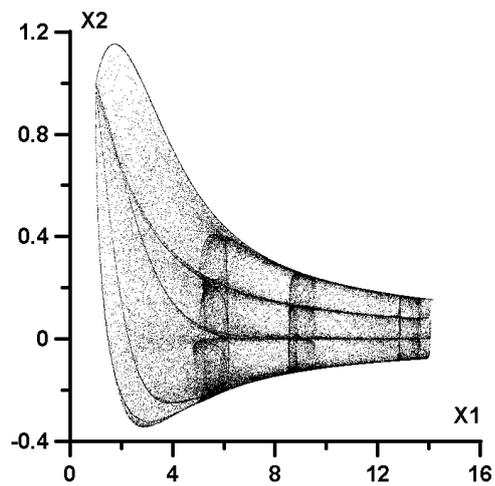


Рисунок 2 – Аппроксимация множества достижимости в примере 1 после 100000 итераций метода СА

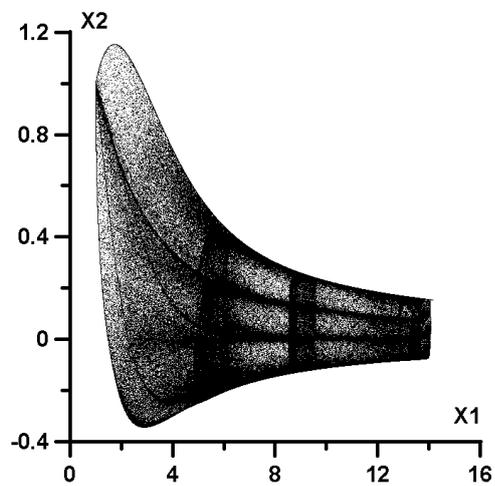


Рисунок 3 – Аппроксимация множества достижимости в примере 1 после 1000000 итераций метода СА

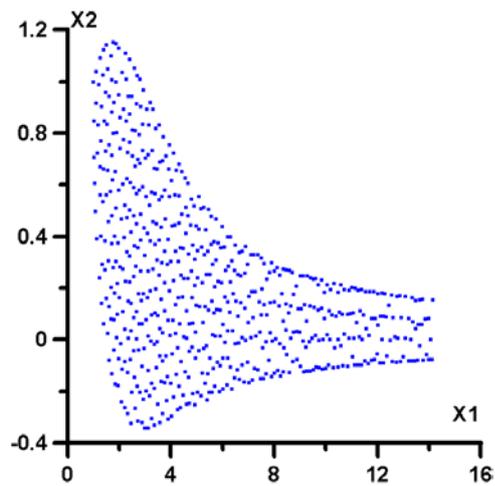


Рисунок 4 – Аппроксимация множества достижимости в примере 1 после 1000000 итераций метода КЗ, размер отсекающего шара 0.1

Пример 2 (обобщенный процесс управления нелинейным маятником). Динамика системы описывается уравнениями  $\dot{x}_1 = u_2 + x_2$ ,  $\dot{x}_2 = u_1 - sx_1$ . Начальные условия и интервал изменения времени заданы:  $x(0) = (5,0)$ ,  $t \in [0,5]$ . Рассматривается последовательность задач с растущим множеством допустимых управлений. Множества допустимых управлений задается полиэдрами, которые все больше отличаются от исходного куба: для 1 варианта задачи имеется параллелепипед, для 2 и далее до 6 – полиэдры увеличивающихся размеров (рисунок 5). Для расчета экспериментальным путем было подобрано число точек переключения пробных управлений, равное 3. Решения вариантов задачи от 1 до 6 представлены на рисунке 6.

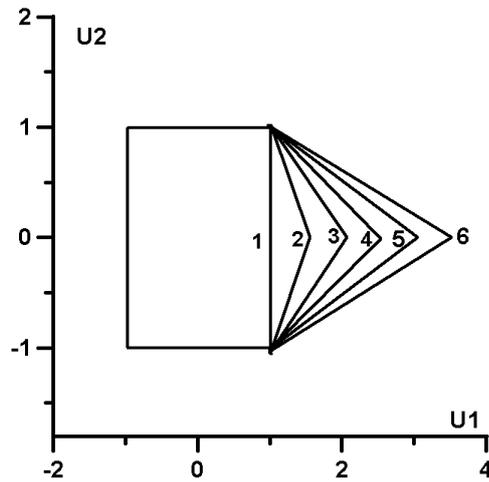


Рисунок 5 – Расширяющиеся множества допустимых управлений в примере 2

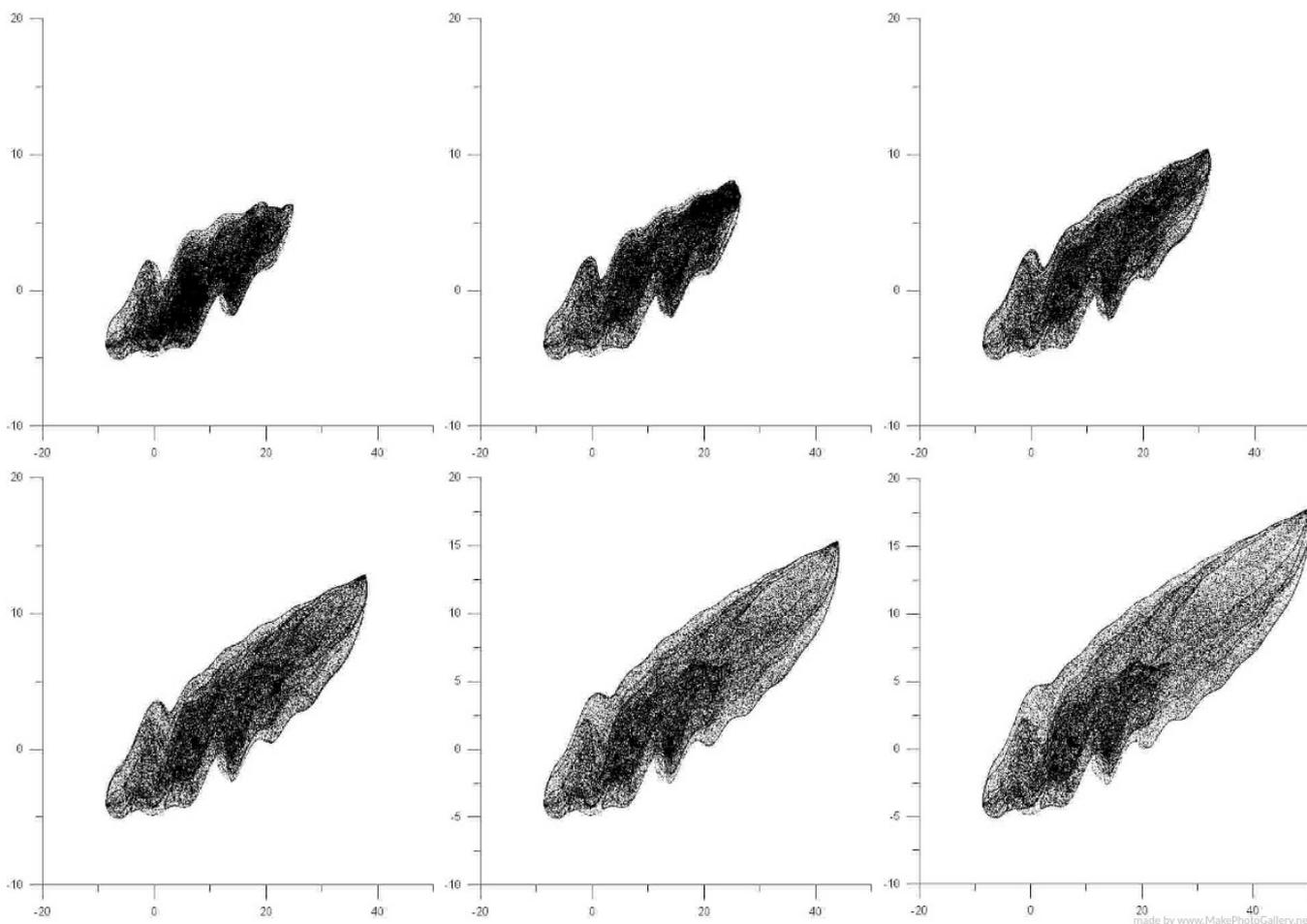


Рисунок 6 – Множества достижимости для вариантов 1 – 6

Размер множеств достижимости с ростом номера варианта существенно увеличивается, что естественно объясняется появлением у системы дополнительных ресурсов управляемости. Для варианта задачи с самым большим размером множества допустимых управлений произведены расчеты методом КЗ, результат отражен на рисунке 7.

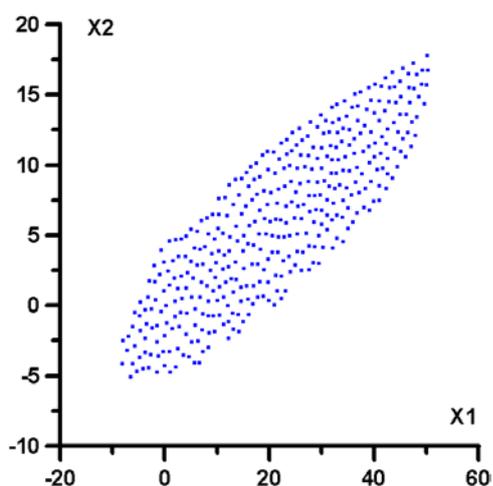


Рисунок 7 – Аппроксимация множества достижимости в примере 2 после 1000000 итераций метода КЗ, размер отсекающего шара 1.0

Исследован вопрос зависимости качества аппроксимации множества достижимости от числа точек переключения (КТР) пробных управлений. Проведены визуальные сравнения расчетов (на

примере 2) для КТР от 1 до 9. При недостаточном числе точек переключения (в нашем случае, одной) аппроксимация получается «неплотной», но это не влечет существенной потери областей МД, поскольку граничные точки оказываются полностью охваченными. С ростом числа КТР аппроксимация сначала становится визуально «полной» (для КТР = 2–4), но затем ее качество падает вследствие не слишком точной аппроксимации границы – при КТР > 5. Результаты расчетов для КТР от 1 до 6 приведены на рисунке 8.

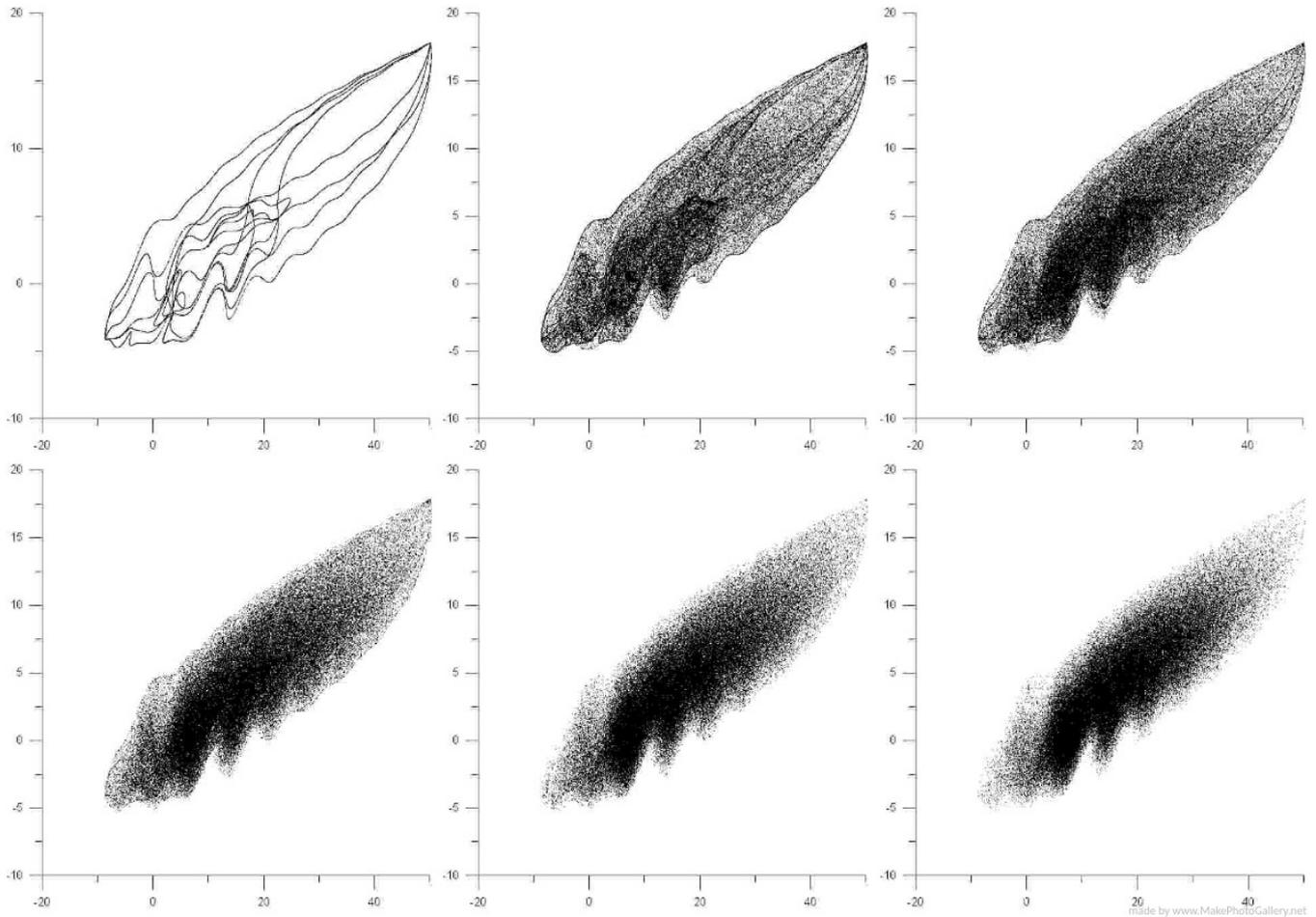


Рисунок 8 – Множества достижимости для КТР = 1, 2, 3, 4, 5, 6

Пример 3 (В.А. Дыхта, С.П. Сорокин). Динамика системы описывается уравнениями  $\dot{x}_1 = u_1 x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -(x_1 + x_2)u_1 + x_2 + (t - \pi/2)u_1$ . Заданы начальные условия  $x(0) = (0,0)$  и интервал времени  $t \in [0, \pi]$ . Рассматривается два варианта постановки задачи: с традиционным параллелепипедным ограничением на управление (рисунок 9, а) и с полиэдральными ограничениями (рисунок 9, б). Множества достижимости системы для вариантов задачи по отдельности – на рисунке 10, для сравнения – на рисунке 11.

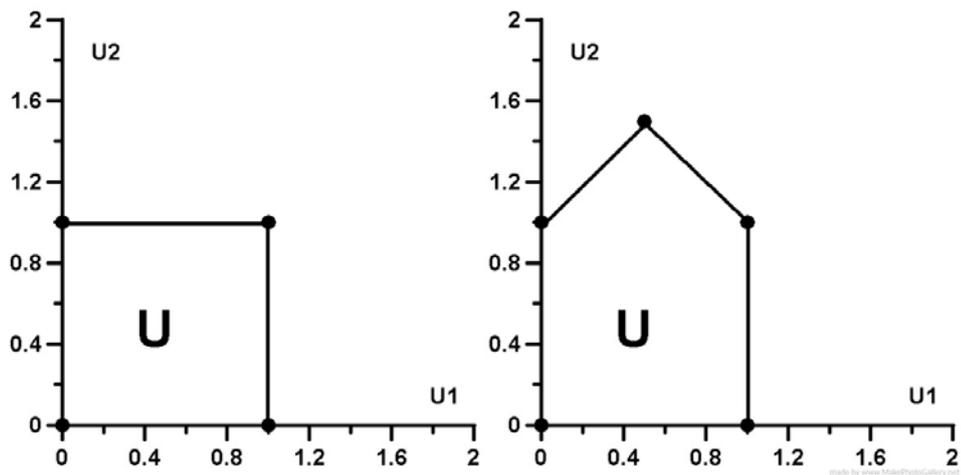


Рисунок 9 – а) 1-й вариант задачи 3; б) 2-й вариант задачи 3

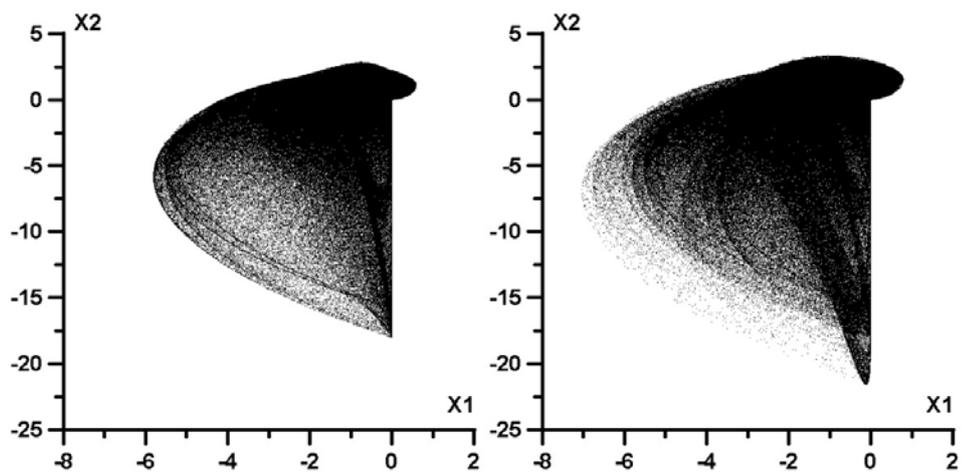


Рисунок 10 – Множество достижимости для а) 1-го варианта и б) 2-го варианта задачи 3

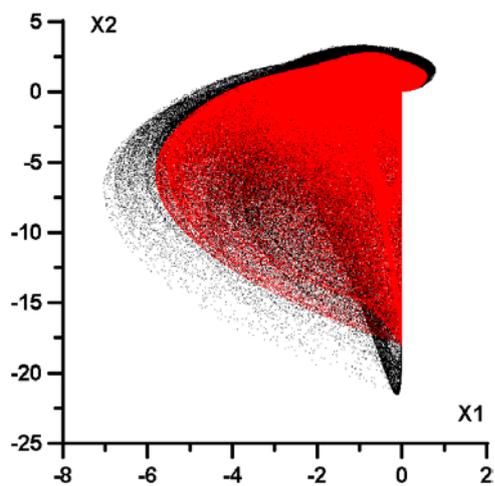


Рисунок 11 – Сравнение множеств достижимости для двух вариантов задачи 3

## **Оценка результатов**

Для разработки вычислительных технологий были использованы методы оптимального управления, интегрирования систем дифференциальных уравнений, аппроксимации множества достижимости, генерации управляющих воздействий, глобальной оптимизации и другие. На следующих этапах работы (2018-2020 гг.) планируется обобщение других методов аппроксимации множества достижимости – метода «квазиравномерного заполнения», метода «глубокой ямы» Лотова-Каменева и других на класс задач с полиэдральным множеством допустимых управлений, разработка алгоритмов для задачи аппроксимации интегральной воронки и формирование коллекции тестовых задач.

## Заключение

Все исследования в рамках НИР выполнены в соответствии с государственным заданием ИДСТУ СО РАН на 2017-2020 гг. по теме № I.1.4.1 «Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения». Содержание НИР раскрыто в Планах научно-исследовательских работ ИДСТУ СО РАН на 2017-2020 годы (Тема I.1.4.1. ПФНИ ГАН I. Математические науки, подраздел 1. Теоретическая математика Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 гг.).

Все задачи, поставленные на этапе НИР 2017 г., решены в полном объеме, опубликована 21 статья в российских и зарубежных изданиях, включенных в международные базы цитирования Web of Science и Scopus [1-5, 11-13, 24-26, 38, 41-43, 51-53, 57, 62, 63]; 13 статей в изданиях, включенных в базу данных РИНЦ [8, 14, 15, 22, 23, 27,32, 37, 40, 45, 46, 54, 58]. Общее количество публикаций по результатам этапа НИР 2017 г. – 63, из них в журналах – 34.

## Публикации

1. Tolstonogov A.A. Existence and relaxation of solutions for a subdifferential inclusion with unbounded perturbation // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2017. Vol. 447. p. 269-288.
2. Tolstonogov A.A. Polyhedral sweeping processes with unbounded nonconvex-valued perturbation // *Journal of Differential Equations*. 2017. 263. pp. 7965-7983.
3. Timoshin S.A., Existence and relaxation for subdifferential inclusions with unbounded perturbation. *Math. Program.* 166, No. 1-2, 65-85 (2017).
4. Aiki T. and Timoshin S.A., Existence and uniqueness for a concrete carbonation process with hysteresis. *J. Math. Anal. Appl.* 449, No. 2, 1502-1519 (2017).
5. Финогенко И.А. Принцип инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // *Доклады АН*. 2017. Т. 477. №5 (в печати)
6. Финогенко И.А. Метод предельных дифференциальных включений в задачи об устойчивости неавтономных систем // *Труды XI Междунар. Четаевской конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление»*. Издательство КНИТУ-КАИ. 2017. Т.2. С. 2010-221.
7. Финогенко И.А. Метод предельных дифференциальных включений для неавтономных разрывных систем с последствием // *Труды ИММ УрО РАН*, 2018. №1 (в печати).
8. Малтугеева Н.С., Погодаев Н.И., О существовании решения задачи оптимального управления гибридной системой // *Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика*, 19 (2017), 129–135.
9. Погодаев Н.И. Об условиях оптимальности в задачах управления ансамблями динамических систем // *Тезисы XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии» памяти профессора В.И. Гурмана*, 13-18 марта 2017 г., Иркутск-Старая Ангасолка., С. 56.
10. Погодаев Н.И. О задаче управления динамической системой в пространстве мер // *Тезисы Международной конференции по математической теории управления и механике*, 7-11 июля 2017 г., Суздаль. С. 41.
11. Щеглова А.А., Кононов А.Д. Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса неразрешенности // *Автоматика и телемеханика*, № 5, 2017, с. 36-55.
12. Shcheglova A.A. Existence of a Solution to a System of Partial Differential Algebraic Equations of Arbitrary Index // *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 224, No. 5, August, 2017, p. 796-814.
13. Petrenko P.S. Differential controllability of linear systems of differential-algebraic equations // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2017. № 10 (3). P. 320-329.

14. Петренко П.С. Наблюдаемость в классе функций Чебышева систем дифференциально-алгебраических уравнений // Известия ИГУ. Математика. 2017. № 4. Т. 20. С. 61-74.
15. Свирина С.В. О построении и исследовании одного разностного операторного уравнения для квазилинейной дифференциально-алгебраической системы индекса  $(k,0)$  на основе сплайновой аппроксимации // XIX Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов, 2018, с. 32-36.
16. Petrenko P.S. To the question of robust controllability of differential-algebraic equations // The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Moscow, Russia, August 13-20, 2017. International Workshop “Differential Equations and Interdisciplinary Investigations”. Moscow, Russia, August 17-19, 2017: abstracts. P.138-139.
17. Петренко П.С. О наблюдаемости в классе функций Чебышева систем дифференциально-алгебраических уравнений // Материалы XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии». 13-18 марта 2017. Иркутск -Ст. Ангасолка. С. 54.
18. Свирина С.В. Об одном итерационном методе численного решения квазилинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных малого индекса // Марчуковские научные чтения – 2017. Институт вычислит. математ. и математ. геофизики СО РАН. Новосибирск, 25 июня - 14 июля. 2017, с. 39.
19. Свирина С.В. Численное решение квазилинейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных сплайн-коллокационным методом // Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017, с. 17.
20. Кононов А.Д. О робастной устойчивости стационарных дифференциально-алгебраических уравнений со структурированной неопределенностью // Сборник тезисов XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии - 2017». Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. С. 34.
21. Кононов А.Д. О робастной устойчивости стационарных дифференциально-алгебраических уравнений со структурированной неопределенностью // Сборник тезисов международной школы-конференции «Соболевские чтения». Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. С. 66 - 67. Булатов М.В., Чистяков В.Ф. О некоторых результатах исследования вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений в школе Ю.Е. Бояринцева//Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т.20. С. 17–31.
22. Булатов М.В., Чистяков В.Ф. О некоторых результатах исследования вырожденных систем интегро-дифференциальных уравнений в школе Ю.Е. Бояринцева//Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т.20. С. 17–31.
23. Ботороева М.Н., Булатов М.В. Приложения и методы численного решения одного класса интегро-алгебраических уравнений с переменными пределами интегрирования//Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. Т.20. С. 3–16.
24. Chistyakov V.F., Chistyakova E.V. On the concept of index for partial differential algebraic equations arising in modelling of processes in power plants // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2017. Т. 10. № 2. С. 5-23.

25. Чистяков В.Ф. Чистякова Е.В. Линейные дифференциально-алгебраические уравнения с возмущениями в виде интегральных операторов Вольтерры // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 10. С. 1309–1320.
26. V. F. Chistyakov and E. V. Chistyakova: Calculation of index and singular points of linear differential-algebraic equations of higher order // Nonlinear Oscillations. 2017, Vol. 20, No. 2, pp. 274-288.
27. Соловарова Л.С. О выборе начальных условий для дифференциально-алгебраических уравнений // Вестник БГУ. Математика, информатика. 2017. Выпуск 1. С. 18-22.
28. Bulatov M.V. Integral algebraic equations: qualitative theory and numerical methods//Abstracts of Seminar on the occasion of the 30th anniversary of Hanoi Mathematical Society, «Algebraic Analysis and their applications», Hai Duong University, Vietnam, November 15-16, 2017, pp. 3-14.
29. Solovarova L.S., Bulatov M.V. Collocation-variation difference schemes for differential-algebraic equations //Abstracts of International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS'17, July 24-28, 2017, Saint Petersburg, Russia. P.168.
30. Diep N.K., Chistyakov V.F. Approaches to determining index of partial differential-algebraic equations//Abstracts of The Second Mongolia-Russia-Vietnam Workshop on Numerical Solution of Integral and Differential Equations (NSIDE 2017), July 1-7, 2017, Olkhon Island, Lake Baikal, Russia. P.24.
31. Чистяков В.Ф. О методе прямых при решении дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных//Тезисы XVIII Всероссийская конференция молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям, г. Иркутск, 21–25 августа 2017 г. С. 60.
32. Дыхта В.А. Научное творчество В.И. Гурмана / В.А. Дыхта // Изв. ИГУ. Сер. Математика. – 2017. – Т. 19, №1. – С. 6–21.
33. Dykhta V.A. Feedback Minimum Principle for Optimal Control Problems with Terminal Constraints / V.A. Dykhta // Abstracts of the 17th Baikal international school-seminar «Methods of Optimization and Their Applications». Irkutsk: ESI SB RAS, 2017. P. 137.
34. Apanovich D.V. Discrete Approximation of a Reachable Set for a Nonlinear Impulsive Control System // Abstracts of the International Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics Dedicated to the Memory of Professor V. F. Demyanov. / D.V. Apanovich, V.A. Voronov May 22 – 27, 2017. – СПб: Изд-во ВВМ. – 2017. – P. 127.
35. Апанович Д.В. Параллельные вычисления в задаче аппроксимации множества достижимости импульсной динамической системы / Д.В. Апанович, В.А. Воронов. // Тезисы докладов XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Иркутск – Старая Ангазолка (оз. Байкал), 13–18 марта 2017 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 6.
36. Апанович Д.В. Восстановление формы тела по двум черно-белым изображениям при неопределенности в расположении камер / Д.В. Апанович, В.А. Воронов // Тезисы докладов XVIII Всероссийской конференции по математическому моделированию и информационным технологиям. Иркутск, 21-25 августа 2017. – С. 23.

37. Сорокин С.П. Оценки множеств достижимости и достаточное условие оптимальности в задачах управления дискретными динамическими системами / С.П. Сорокин // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2017. – Т. 19. – С. 178–183.
38. Sorokin S.P. Necessary Optimality Condition with Feedback Controls for Nonsmooth Optimal Impulsive Control Problems / S.P. Sorokin, M.V. Staritsyn // Proceedings of the VIII International Conference Optimization and Applications (OPTIMA-2017), Petrovac, Montenegro, October 2-7, 2017. – P. 531–538.
39. Сорокин С.П. Исследование задачи оптимального управления в модели террористической деятельности с помощью позиционного принципа минимума / С.П. Сорокин, Е.А. Васильева, П.Г. Сорокина // Материалы XVIII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию. г. Иркутск, Россия, 21 – 25 августа 2017 г. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2017. – С. 55.
40. Самсоныук О.Н. Импульсные управляемые системы с траекториями ограниченной р-вариации / О.Н. Самсоныук, М.В. Старицын // Известия Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2017. – Т. 19. – С. 164–177.
41. Samsonyuk O. Optimal Impulsive Control Problems with Hysteresis / O. Samsonyuk, S. Timoshin // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017 - Proceedings, 2017. – Pp. 276-280. DOI: 10.1109/CNSA.2017.7974010
42. Goncharova E. Dynamical systems with states of bounded p-variation: A new trend in impulsive control / E. Goncharova, O. Samsonyuk, M. Staritsyn // Cybernetics and Physics. – 2017. – № 4. (в печати)
43. Samsonyuk O.N. Optimal control problems with states of bounded variation and hysteresis / O. Samsonyuk, S. Timoshin // J. Global Optimization (JOGO-D-17-00427 – Специальный выпуск МОПТ -2017). (в печати)
44. Goncharova E. Impulsive Control Systems with Trajectories of Bounded p-Variation / E. Goncharova, O. Samsonyuk, M. Staritsyn // IPACS Electronic library. Proc. of the 8th International Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon2017). – 2017. <http://lib.physcon.ru/doc?id=b7698d8a4910>
45. Самсоныук О.Н. Обобщенные решения ограниченной р-вариации нелинейных управляемых систем и негладкие задачи оптимального управления / О.Н. Самсоныук, М.В. Старицын // Тез. докл. межд. конф. «Конструктивный анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова. Часть I. – СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. – С. 162–166. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29940915>
46. Самсоныук О.Н. Задачи оптимального импульсного управления с гистерезисом / О.Н. Самсоныук, С.А. Тимошин // Тез. докл. межд. конф. «Конструктивный анализ и смежные вопросы», посвященной памяти профессора В.Ф. Демьянова. Часть I. – СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. – С. 166–169. <https://elibrary.ru/item.asp?id=29940914>
47. Samsonyuk O. Optimal Control Problems with Trajectories of Bounded Variation and Hysteresis / O. Samsonyuk, S. Timoshin // Abstracts of the 17th Baikal international school-seminar «Methods of Optimization and Their Applications». Irkutsk: ESI SB RAS, 2017. – P. 148.

48. Samsonyuk O. N. Optimality Conditions for Optimal Impulsive Control Problems with Multipoint State Constraints / O.N. Samsonyuk // Book of Abstracts of VIII International Conference on Optimization Methods and Applications, (OPTIMA-2017) Petrovac, Montenegro, October 2-7, 2017. – P. 127.
49. Самсонюк О.Н. Приложения функций, монотонных относительно управляемой системы, к задачам оптимального импульсного управления / О.Н. Самсонюк // Тез. докл. XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Иркутск – Старая Ангарска (оз. Байкал), 13–18 марта 2017 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 58.
50. Самсонюк О.Н. Задачи оптимального импульсного управления с гистерезисом / О.Н. Самсонюк // Материалы конференции «Ляпуновские чтения», г. Иркутск, 5 – 7 декабря 2017 г., 2017, Изд-во ИДСТУ СО РАН. – С. 45.
51. Goncharova E. Approximation and relaxation of mechanical systems with discontinuous velocities / E. Goncharova, M. Staritsyn // Cybernetics and Physics. – Vol. 6, no 4. – 2017. P. 215–221.
52. Tyatyushkin A. I. Numerical Optimization Methods for Controlled Systems with Parameters / A.I. Tyatyushkin // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2017, Vol.57, No.10. – Pp.1592 – 1606.
53. Tyatyushkin A. Numerical Method for Solving Optimal Control Problems with Phase Constraints / A. Tyatyushkin, T. Zarodnyuk // Numerical Algebra, Control and Optimization. Volume 7, Number 4, 2017. – Pp. 483–494. doi:10.3934/naco.2017030
54. Финкельштейн Е.А. Алгоритм квазиравномерного заполнения множества достижимости нелинейной управляемой системы / Е.А. Финкельштейн, А.Ю. Горнов // Известия Иркутского государственного университета. 2017. Т. 19. Серия «Математика». С. 217–223.
55. Gornov A.Yu. Computational technologies for studying set-valued optimization problems / A.Yu.Gornov // Abstracts of the 17th Baikal international school-seminar “Methods of Optimization and Their Applications”. Irkutsk: ESI SB RAS, 2017. P. 140.
56. Finkelstein Evgeniya. On a problem of parametric control of trajectories ensemble / E. Finkelstein // Abstracts of the 17th Baikal international school-seminar “Methods of Optimization and Their Applications”. Irkutsk: ESI SB RAS, 2017. P. 139.
57. Gornov A.Yu. Computational technique for investigating boundary value problems for functional-differential equations of pointwise type / A.Yu. Gornov, T.S. Zarodnyuk, A.S. Anikin, E.A. Finkelstein // Proceedings of the VIII International Conference Optimization and Applications (OPTIMA-2017), Petrovac, Montenegro, October 2-7, 2017. – P. 578–583.
58. Горнов А.Ю. Программные комплексы для численного исследования задач оптимизации / А.Ю. Горнов, Т.С. Зароднюк, А.С. Аникин, Е.А. Финкельштейн // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017), 24-31 мая 2017 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2017. – С.680 – 683.
59. Zarodnyuk Tatiana. The Technique of Rational Convexifying for Nonlinear Controlled Dynamical System / T. Zarodnyuk // Abstracts of the 17th Baikal international school-seminar “Methods of Optimization and Their Applications”. Irkutsk: ESI SB RAS, 2017. P. 153.

60. Финкельштейн Е.А. Нерегулярный алгоритм эйлера типа аппроксимации множества достижимости нелинейной динамической системы / Е.А. Финкельштейн // Тез. докл. XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии» (Иркутск – Старая Ангасолка (оз. Байкал), 13–18 марта 2017 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – С. 66.
61. Финкельштейн Е.А. Нерегулярный алгоритм эйлера типа аппроксимации множества достижимости нелинейной динамической системы // Тезисы докладов XIII Всероссийской конференции молодых ученых "Моделирование, оптимизация и информационные технологии" (Иркутск – Старая Ангасолка (оз. Байкал), 13-18 марта 2017 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. – 66 с.
62. Anikin, A.S., Gasnikov, A.V., Dvurechensky, P.E. et al. Dual approaches to the minimization of strongly convex functionals with a simple structure under affine constraints // *Comput. Math. and Math. Phys.* (2017) 57: 1262. <https://doi.org/10.1134/S0965542517080048>.
63. T. S. Shamirzaev, J. Rautert, D. R. Yakovlev, J. Debus, A. Yu. Gornov, M. M. Glazov, E. L. Ivchenko, and M. Bayer. Spin dynamics and magnetic field induced polarization of excitons in ultrathin GaAs/AlAs quantum wells with indirect band gap and type-II band alignment // *PHYSICAL REVIEW B* 96, 035302 (2017).

#### **Свидетельства о регистрации программ**

1. Свирина С.В. Сплайн-коллокационный метод численного решения квазилинейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных. Свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2017618796 от 9 августа 2017 г.
2. Свирина С.В. Численная реализация нелинейной разностной схемы с расщепленным матричным пучком для решения квазилинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных произвольного индекса. Свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2017619532 от 25 августа 2017 г.