Федеральное агентство научных организаций

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
ИМЕНИ В.М. МАТРОСОВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 517.9
№ АААА-А17-117032210084-5
Инв. № 2017-2

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДСТУ СО РАН
академик
_____________ И.В. Бычков
«30» ноября 2017 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

то теме:

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

КОМПЛЕКСНОЙ ПРОГРАММЫ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН
№ II.2П ИНТЕГРАЦИЯ И РАЗВИТИЕ

Руководитель темы _________________ академик РАН И.В. Бычков
подпись, дата 28.11.2017

Иркутск 2017

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы		
директор, академик РАН, д-р.тех. наук	28.11.2017	Бычков И.В.
Исполнители темы:		
зам. директора, д-р.физ.-мат. наук	28.11.2017	Щеглова А.А.
ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	28.11.2017	Свинина С.В.
науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	28.11.2017	Петренко П.С.
программист, аспирант	28.11.2017	Кононов А.Д.

РЕФЕРАТ

Отчет 13 с., 1 ч., 14 источников.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, обобщенное решение, импульсная управляемость, дифференциальная управляемость, наблюдаемость, частные производные, разностные схемы

Объектом исследования являются взаимосвязанные системы алгебраических и дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), которые можно записать в виде системы дифференциальных уравнений с необратимыми в области определения матричными коэффициентами. Такие системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Характеристикой сложности внутренней структуры ДАУ является целочисленная величина, называемая индексом неразрешенности. Начальные и краевые задачи для ДАУ встречаются при описании механических динамических систем со связями, моделировании электрических и гидравлических цепей, задачах внутренней баллистики и других прикладных областях.

Свойства ДАУ существенно отличаются от свойств систем дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старшей производной искомой вектор-функции. Решение ДАУ зависит от производных входных данных вплоть до порядка, совпадающего с размерностью системы. В общем случае, отсутствует непрерывная зависимость решений от входных данных, а пространство решений может оказаться бесконечномерным. Неоднородная система может быть несовместна на интервале своего задания. Структура пучка матриц Якоби, описывающих систему, не инвариантна относительно преобразований, использующих замену переменных. Все перечисленные особенности делают невозможным исследование и численное решение ДАУ методами, ориентированными на системы, разрешенные относительно старшей производной, что обуславливает необходимость разработки принципиально новых теоретических подходов.

Целью проекта является исследование качественных свойств и построение численных методов решения систем ДАУ обыкновенных и с частными производными. Проектом предусматривается: получение условий управляемости в различных смыслах и наблюдаемости линейных нестационарных обыкновенных ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности и создание новых устойчивых численных методов решения ДАУ с частными производными.

Методы исследования базируются на аналитических методах соответствующих разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории уравнений в частных производных, теории обобщенных функций, матричной алгебры и теории разностных схем. Исследования проводились на основе построенной авторами проекта структурной теории ДАУ, ориентированной на системы произвольной структуры и произвольно высокого индекса неразрешенности с матричными коэффициентами переменного ранга.

Проект соответствует:

- приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в РФ: Транспортные и космические системы.
- критическим технологиям РФ: Технологии информационных, управляющих, навигационных систем (13).

.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 6
ЗАДАЧИ ПРОЕКТА 9
ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ 10
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 11
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 12

ВВЕДЕНИЕ

Системы дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) возникают при математическом моделировании различных процессов во многих прикладных областях: теории автоматического регулирования, оптимальном управлении со смешанными ограничениями, теории электронных схем и электрических цепей, механике, химической кинетике, гидродинамике, теплотехнике и др.

В настоящее время исследования ДАУ проводятся в двух направлениях. Первый подход базируется на сведении к дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах с необратимым оператором при старшей производной (Дезин А.А., Крейн С.Г., Мельникова И.В., Сидоров Н.А., Руткас А.Г., Свиридюк Г.А., A. Favini, A. Lamour, Showalter R.E. и др.). В этом направлении получен ряд важных результатов (Г.В. Демиденко, С.В. Успенский, В.П. Паламодов и др.). Другой подход ориентирован на изучение внутренней структуры системы (Campbell S.L., W. Morzalek, Eichler-Liebenov, R. Maerz, M. Hanke, K. Debrabant, W. Lucht, K. Strehmel и др.). Участники проекта придерживались именно этого направления.

Необходимость построения обобщенных решений ДАУ обусловлена тем, что вследствие особенностей ДАУ может оказаться, что для существования классического решения необходима непрерывная дифференцируемость входных данных вплоть до порядка, совпадающего с размерностью системы. В то же время в ряде важных приложений (задачи оптимального управления, для которых условие Клебша-Лежандра нарушается на всей экстремали, задачи управления с импульсными режимами и др.) это условие не выполняется. Одним из выходов в такой ситуации является поиск решений в пространстве обобщенных функций типа Соболева-Шварца.

Тот факт, что решение ДАУ может обладать импульсным поведением в стационарном случае был установлен в работах D.Cobb, G.C.Verghese и T.Geerts в 80-х годах прошлого века. Исследование импульсной управляемости стационарных ДАУ проводилось, в частности, D.Cobb, G.C.Verghese, B.Levy и L.Dai на основе преобразования системы к канонической форме Кронекера-Вейерштрасса (КФКВ). Для ДАУ с вещественно-аналитическими коэффициентами аналогом этой структурной формы является сильная стандартная каноническая форма (ССКФ), введенная S.Campbell и L.Petzold. На основе последней исследовалась импульсная управляемость линейных нестационарных ДАУ, например, в работах D.Cobb и Wang C.-J. Общим недостатком подходов, связанных с КФКВ и ССКФ является неконструктивность построения этих структурных форм.

В рамках проекта получены конструктивные критерии импульсной управляемости для линейных ДАУ с бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами, для которых КФКВ и ССКФ не определены.

В рамках проекта исследовалась дифференциальная управляемость и наблюдаемость линейных систем ДАУ с переменными коэффициентами. Задача наблюдаемости состоит в нахождении вектора состояния на основании неполных данных о его компонентах, которые определяются выходной функцией. Анализ показывает, что класс кусочно-непрерывных функций чрезмерно широк и что решение задачи наблюдаемости может быть достигнуто в существенно более узком множестве непрерывных функций, зависящих от некоторого конечномерного параметра. К числу таких множеств относятся системы функций Чебышева. Участниками проекта в качестве класса функций разрешающих операций, т.е. решающих задачу наблюдаемости, помимо кусочно-непрерывных функций рассматривался класс обобщенных функций Чебышева.

В теории ДАУ используются различные понятия управляемости и наблюдаемости. Задача о полной управляемости и полной наблюдаемости впервые рассматривались для стационарных ДАУ в работе Yip E.L. и Sincovec R.F.. В книге Dai L. для линейных ДАУ с постоянными коэффициентами и регулярным матричным пучком вводятся важнейшие понятия R-управляемости, R-наблюдаемости, импульсной управляемости и наблюдаемости. Полученные алгебраические критерии используются при анализе задачи минимизации квадратичного функционала на решениях линейных ДАУ. В работах Campbell S.L., Nichols N.K. получены условия R-управляемости для линейных ДАУ с бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами. В работах участников проекта ранее были получены условия R-управляемости и R-наблюдаемости для линейных нестационарных ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности, а также условия локальной управляемости и наблюдаемости нелинейных ДАУ. Различные типы управляемости и наблюдаемости линейных ДАУ рассматривались, в частности, в работах Mehrmann V., Brenan K.E., Stykel T. Во всех упомянутых выше работах исследуется наблюдаемость в классе кусочно-непрерывных функций.

Численное решение квазилинейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных высокого индекса пучка матричных коэффициентов до сих пор составляло нерешенную проблему. Под индексом матричного пучка понимается максимальная в области определения степень элементарных делителей, соответствующих нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена матричного пучка, построенного по коэффициентам дифференциально-алгебраической системы. Известно, что при численном решении линейных ДАУ в частных производных частного вида классическими методами возникают «пограничные слои ошибок», а при решении линейных систем общего вида или, более того, квазилинейных систем ДАУ в частных производных, применение классических методов вовсе невозможно. С целью решения этих проблем в более ранних работах участников проекта для численного решения линейных систем высокого индекса был предложен итерационный алгоритм. Он состоит в следующем. Коэффициенты системы специальным образом расщеплялись, а затем к расщепленной системе применялся метод последовательных приближений. Возникающая на каждом итерационном шаге начально-краевая задача аппроксимировалась устойчивой неявной сплайн-коллокационной разностной схемой. Построенная таким образом неявная итерационная сплайн-коллокационная разностная схема являлась эффективной при определенных условиях и успешно применялась для численного решения линейных систем. При её реализации «пограничные слои ошибок» отсутствовали. Использовать этот подход для численного решения квазилинейных дифференциально-алгебраических систем высокого индекса не представляется возможным, поскольку подстановка числового ряда вместо искомой функции в коэффициенты квазилинейной системы неэффективна. Поэтому в рамках выполнения проекта предложен новый алгоритм, который также основан на расщеплении матричного пучка системы и полностью решает проблему численного решения квазилинейных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных индекса (k,0). Такой алгоритм состоит в следующем. Выполняется расщепление матричного пучка, построенного по коэффициентам диффренциально-алгебраической системы, на два пучка: один из них имеет только простые элементарные делители, соответствующие нулевым и бесконечным корням характеристического многочлена, а другой не имеет регулярного ядра. В соответствующей расщепленной системе производные, относящиеся к регулярному пучку, аппроксимируются сплайном произвольного порядка, а производные, относящиеся к сингулярному пучку, аппроксимируются сплайном меньшего порядка по каждой переменной. В результате строится нелинейная разностная схема, для решения которой применяется итерационный метод. Такая разностная схема названа сплайн-коллокационной разностной схемой с расщепленным пучком. Она является достаточно эффективной и дает высокую точность во всей области решения. Сплайн-коллокационная разностная схема с расщепленным пучком записана в нормальной форме операторно-разностного уравнения. Порядок аппроксимации такого уравнения для систем малого индекса совпадает со степенью сплайна по каждой независимой переменной. Для систем высокого индекса этот порядок на единицу меньше степени сплайна. Доказано, что при определенных условиях операторно-разностная схема имеет равномерно-ограниченное решение в сеточном пространстве.

Решение задач по исследованию качественных свойств и численному решению ДАУ проводилось на основе развитой участниками проекта теории, которая включает в себя результаты по разрешимости, нахождению и описанию многообразия решений, построению различных структурных форм для линейных и нелинейных ДАУ, имеющих конечномерное многообразие решений. Ранее авторами проекта были получены признаки полной управляемости и наблюдаемости, устойчивости в смысле Ляпунова, стабилизируемости и управляемости показателями Ляпунова для линейных нестационарных систем. Разработанный авторами проекта метод преобразования ДАУ к различным структурным формам носит конструктивный характер, делает доступным для анализа широкий класс систем, семейства решений которых не имеют особых точек, дает удобный способ нахождения многообразия решений и автоматически решает задачу о согласовании начальных данных. Он позволяет получать конструктивные результаты в терминах входных данных и существенно общих предположениях по сравнению с отечественными и зарубежными аналогами.

ЗАДАЧИ ПРОЕКТА

1. Получить условия импульсной управляемости (управляемости скачком регулярной составляющей решения и импульсной составляющей решения) для линейных нестационарных ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности в случаях, когда управляющее воздействие представимо в виде суммы кусочно-гладкой вектор-функции и линейной комбинации дельта-функции и ее производных.

2. Получить необходимые и достаточные условия дифференциальной управляемости для линейных обыкновенных ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности как с постоянными, так и с переменными коэффициентами.

3. Получить условия наблюдаемости линейных нестационарных ДАУ в классе функций Чебышева.

4. Построить и исследовать неявную разностную схему на основе аппроксимации искомой функции сплайном произвольного порядка для стационарных ДАУ с частными производными. Проанализировать спектральные свойства разностного уравнения. Для выполнения численных расчетов создать программу на языке C++.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Для решения поставленных в проекте задач были получены следующие результаты.

Для линейной системы ДАУ с бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами доказана теорема о существовании решения в классе распределений типа Соболева-Шварца в случае, когда правая часть представляет собой сумму регулярной обобщенной функции, дельта-функции Дирака и ее производных до порядка, совпадающего с индексом неразрешенности системы. Обобщенное решение представлено в виде суммы регулярной и сингулярной обобщенных функций. Получены необходимые и достаточные условия управляемости скачком регулярной составляющей решения и управляемости сингулярной составляющей решения. Показана связь с некоторыми другими определениями и критериями импульсной управляемости систем дифференциальных уравнений. (Щеглова А.А.)

Для линейных нестационарных ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности получены достаточные условия R-наблюдаемости (наблюдаемости в пределах множества достижимости). При этом в качестве класса функций разрешающих операций кроме кусочно-непрерывных функций рассматривается класс обобщенных функций Чебышева. Построен пример, иллюстрирующий преимущества полученных результатов. (Петренко П.С.)

Для линейных систем ДАУ как в стационарном, так и в нестационарном случаях получены необходимые и достаточные условия дифференциальной управляемости. Исследования проводились в предположениях, обеспечивающих существование структурной формы с разделенными «дифференциальной» и «алгебраической» подсистемами. Доказано, что для систем с регулярным пучком матричных коэффициентов, эта структурная форма существует. В стационарном случае показано, что свойства дифференциальной и полной управляемости совпадают. (Петренко П.С.)

Рассматривались квазилинейные системы ДАУ в частных производных произвольного индекса с регулярным в области определения пучком матриц-функций, построенным по коэффициентам уравнения. Для таких систем на основе сплайновой аппроксимации построены и исследованы операторно-разностные уравнения. Порядок их аппроксимации для систем малого индекса совпадает со степенью сплайна по каждой независимой переменной. Для систем высокого индекса этот порядок на единицу меньше степени сплайна. Доказано, что при определенных условиях операторно-разностные схемы имеют равномерно-ограниченное решение в сеточном пространстве. Для выполнения численных расчетов подготовлены программы, которые зарегистрированы в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (РОСПАТЕНТ). Все вычисления тестовых задач выполнены на базе Иркутского суперкомпьютерного центра СО РАН. (Свинина С.В.)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При выполнении проекта были достигнуты все поставленные задачи и получены новые теоретические результаты, направленные на исследование качественных свойств и разработку численных методов решения ДАУ.

Основными областями применения полученных результатов являются математическая теория управления с управляющими воздействиями различной структуры и природы, теория дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании математических моделей из различных областей науки и техники и послужат основой для дальнейших исследований, направленных на решение и качественный анализ неклассических задач теории динамических систем и управления с различного типа особенностями, проявляющимися в математическом описании и формализации конкретных процессов и явлений.

Результаты проекта являются существенным продвижением в построении законченной теории разрешимости и качественной теории систем дифференциально-алгебраических уравнений. Получены новые результаты по разрешимости, управляемости и наблюдаемости обыкновенных ДАУ. Построены эффективные устойчивые разностные схемы для приближенного решения ДАУ с частными производными произвольно высокого индекса. Все результаты получены в наиболее общих предположениях, близких к необходимым для регулярного поведения решений.

Таким образом, задачи, поставленные на 2017 год, полностью решены. Полученные результаты соответствуют мировому уровню исследований, как по постановкам задач, так и по значимости результатов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Щеглова А.А., Кононов А.Д. Робастная устойчивость дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса неразрешенности // Автоматика и телемеханика, № 5, 2017, с. 36-55. (WoS)

2. Shcheglova A.A. Existence of a Solution to a System of Partial Differential Algebraic Equations of Arbitrary Index // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 224, No. 5, August, 2017, p. 796-814. (Scopus)

3. Petrenko P.S. Differential controllability of linear systems of differential-algebraic equations // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2017. № 10 (3). P. 320-329. (Scopus)

4. Петренко П.С. Наблюдаемость в классе функций Чебышева систем дифференциально-алгебраических уравнений // Известия ИГУ. Математика. 2017. № 4. Т. 20. С. 61-74. (РИНЦ)

5. Свинина С.В. О построении и исследовании одного разностного операторного уравнения для квазилинейной дифференциально-алгебраической системы индекса (k,0) на основе сплайновой аппроксимации // XIX Международная Саратовская зимняя школа «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов, 2018, с. 32-36. (РИНЦ)

6. Petrenko P.S. To the question of robust controllability of differential-algebraic equations // The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Moscow, Russia, August 13-20, 2017. International Workshop “Differential Equations and Interdisciplinary Investigations” . Moscow, Russia, August 17-19, 2017: abstracts. P.138-139.

7. Петренко П.С. О наблюдаемости в классе функций Чебышева систем дифференциально-алгебраических уравнений // Материалы XIII Всероссийской конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии». 13-18 марта 2017. Иркутск -Ст. Ангасолка. С. 54.

8. Свинина С.В. Об одном итерационном методе численного решения квазилинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных малого индекса // Марчуковские научные чтения – 2017. Институт вычислит. математ. и математ. геофизики СО РАН. Новосибирск, 25 июня - 14 июля. 2017, с. 39.

9. Свинина С.В. Численное решение квазилинейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных сплайн-коллокационным методом // Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017, с. 17.

10. Кононов А.Д. О робастной устойчивости стационарных дифференциально-алгебраических уравнений со структурированной неопределенностью // Сборник тезисов XIII Всероссийской

конференции молодых ученых «Моделирование, оптимизация и информационные технологии - 2017». Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2017. С. 34.

11. Кононов А.Д. О робастной устойчивости стационарных дифференциально-алгебраических уравнений со структурированной неопределенностью // Сборник тезисов международной школы-конференции «Соболевские чтения». Новосибирск: Изд-во Института математики, 2017. С. 66 - 67.

12. Свинина С.В. Сплайн-коллокационный метод численного решения квазилинейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных. Свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2017618796 от 9 августа 2017 г.

13. Свинина С.В. Численная реализация нелинейной разностной схемы с расщепленным матричным пучком для решения квазилинейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных произвольного индекса. Свидетельство о гос. регистрации программ для ЭВМ № 2017619532 от 25 августа 2017 г.

14. Щеглова А.А. К вопросу об управляемости дифференциально-алгебраических уравнении в классе импульсных воздействий // Сибирский математический журнал (принята к печати, выйдет в 2018 г.) (WoS)