

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ  
имени В.М. Матросова  
Сибирского отделения Российской академии наук**

**ЛЯПУНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ**

**6 –10 декабря 2021 года**

**Материалы конференции**



**Иркутск – 2021**

*Научное издание*

Материалы конференции «Ляпуновские чтения» (г. Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2021. – 92 с.

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на конференции «Ляпуновские чтения» (г. Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). Конференция организуется с целью обсуждения актуальных результатов исследований научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов по направлениям:

- Теория и методы исследования эволюционных уравнений и динамических систем с приложениями;
- Качественная теория и методы управления с приложениями;
- Методы математической физики в задачах теории поля, газовой и плазменной динамики;
- Теория, алгоритмы и вычислительные технологии решения задач оптимизации и исследования операций;
- Теоретические основы и технологии организации распределенных и высокопроизводительных вычислительных систем;
- Теоретические основы и технологии организации информационно-телекоммуникационных инфраструктур;
- Методы, технологии и сервисы формирования информационно-аналитических, геоинформационных, вычислительных и программно-аппаратных систем в различных предметных областях (в том числе для поддержки комплексных междисциплинарных научных исследований).

## ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ RESNET50 ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ДЗЗ\*

Ю.В. Авраменко, А.К. Попова, Р.К. Федоров  
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[avramenko@icc.ru](mailto:avramenko@icc.ru), [chudnenko@icc.ru](mailto:chudnenko@icc.ru), [fedorov@icc.ru](mailto:fedorov@icc.ru)

Одной из текущих задач оперативного мониторинга по обработке больших данных является составление карты земельного покрова. При помощи данной карты можно будет оценить состояние сельскохозяйственных и лесных угодий, выявлять места незаконных вырубок и т.д. За основу взят положительный опыт из работы [1], авторы которой при помощи нейронной сети ResNet50 провели классификацию данных ДЗЗ и получили высокую точность около 99 процентов. При попытке применить обученную модель к данным ДЗЗ Иркутской области большая часть территории была классифицирована как вода. Ошибочная классификация является следствием того, что спектральные и текстурные характеристики территории Иркутской области отличаются от набора данных, на которых была обучена нейронная сеть.

Для устранения данного эффекта была составлена обучающая выборка из 12 классов по 800 образцов, что позволило повысить среднюю по классам точность классификации до 45,62%. После увеличения количества образцов до 5000 точность подошла к 70%. Однако по некоторым классам результаты были неудовлетворительными. Увеличение количества эпох обучения с 10 до 80 (при большем увеличении наступает процесс переобучения) точность увеличилась и составила порядка 77%. Далее предложено добавление информации о текстурных признаках — LBP. После этого общая точность классификации составила около 85%. При анализе результатов были выявлены ошибки на границах различных классов. Устранить их удалось после добавления образцов, находящихся на местах ошибок, например, на границе воды и пастбища. Данное решение позволило добиться 94,148% средней по классам точности.

Кроме того, были произведены работы по улучшению программной части метода. Выяснилось, что во время обучения данные постоянно считываются с диска, что существенно влияет на время обучения. А также в библиотеке нет возможности за один вызов получить несколько предсказаний. В результате была создана пользовательская структура данных для хранения обучающей выборки в памяти. Таким образом, удалось добиться использования GPU с 5 до 99%, а время обучения сократить с трех суток до 1,5 часов. Результатом работы стала карта земельного покрова Иркутской области.

1. Helber P., Bischke B., Dengel A., Borth D. Eurosat: A novel dataset and deep learning benchmark for land use and land cover classification. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2019.

---

\* Результаты получены в рамках госзадания Минобрнауки России по проекту «Методы и технологии облачной сервис-ориентированной цифровой платформы сбора, хранения и обработки больших объемов разноформатных междисциплинарных данных и знаний, основанные на применении искусственного интеллекта, модельно-управляемого подхода и машинного обучения» (№ гос. регистрации 121030500071-2).

## МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА LBFGS С ЭКОНОМИЧНЫМ ОДНОМЕРНЫМ ПОИСКОМ

А.С. Аникин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[anikin@icc.ru](mailto:anikin@icc.ru)

На текущий момент времени имеется весьма развитый математический аппарат, применимый для решения задач выпуклой оптимизации. Но для задач других классов, к сожалению, ситуация не столь благоприятна как с точки зрения теории, так и с точки зрения практики. При рассмотрении выпуклых задач мы, как правило, считаем, что обладаем определенной информацией о свойствах оптимизируемой функции, которая и позволяет применять оптимальные с точки зрения оценок методы. При решении реальных прикладных задач подобной информации, к сожалению, практически никогда нет. Например, априори неизвестно значение констант Липшица  $L$ , что приводит к отсутствию «простого» способа вычисления градиентного шага:  $\alpha^k = 1/L$ . Вместо этого приходится запускать процедуру одномерной минимизации, т.е. решать вспомогательную задачу оптимизации на каждой итерации градиентного метода:

$$\alpha^k = \arg \min_{\alpha \geq 0} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)). \quad (1)$$

Очевидно, что в общем случае это достаточно трудоемкая процедура, на эффективность которой радикальным образом влияет быстроедействие оптимизационного метода в целом.

В работе предлагается и исследуется несколько вариантов экономичных алгоритмов одномерной минимизации: на основе параболической аппроксимации (с использованием и без использования значения градиента в текущей точке), «адаптивная» схема (с возможностью увеличения и уменьшения шага), «сжимающая» схема (с возможностью только уменьшения шага). Общей идеей предложенных подходов является максимально возможное уменьшение числа вычислений оптимизируемой функции при, естественно, сохранении свойства монотонности. Фактически предлагается существенное снижение сложности итерации (и, соответственно, времени) ценой более грубого решения задачи одномерного поиска. Низкая стоимость итерации имеет важность как в современных задачах локальной (унимодальной) оптимизации большой и сверхбольшой размерности, так и в задачах глобального поиска, при решении которых, как правило, множество раз запускается процедура локального спуска.

Представлены результаты вычислительных экспериментов для ряда модельных и прикладных задач оптимизации: минимизация потенциалов Морса и Китинга, решение задачи PageRank, а также обучение сверточных нейросетей. Полученные результаты продемонстрировали работоспособность и эффективность предложенных подходов, при этом наилучшие результаты были достигнуты на модифицированном варианте широко известного метода LBFGS. Представленная модификация метода включает в себя «правильное» масштабирование направления одномерного поиска, использование истории шагов одномерного поиска и ряд других изменений, направленных на создание «комфортных условий» для предложенных процедур одномерной минимизации. Это позволило на большинстве рассмотренных задач иметь среднюю сложность приближенного («грубого») решения задачи (1) порядка 2-3 вычислений функции, а в отдельных случаях и вовсе порядка 1, когда предложенная процедура одномерной минимизации почти всегда правильно «угадывает» размер шага, обеспечивающий релаксацию оптимизируемой функции.

Полученные результаты внушают осторожный оптимизм и позволяют надеяться на возможность эффективного применения предложенных подходов как для решения актуальных задач оптимизации, так и для реализации других «экономичных» методов оптимизации.

# ОЦЕНКА ПРЕДЕЛОВ МАСШТАБИРОВАНИЯ СЕТОК ДИСКРЕТИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ\*

А.С. Аникин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[anikin@icc.ru](mailto:anikin@icc.ru)

Возможности доступной вычислительной техники неуклонно растут. Появление оперативной памяти все больших размеров позволяет, не слишком утруждаясь, реализовывать алгоритмы оптимизации, которые еще несколько лет назад требовали применения сложных технологий параллельного программирования и достаточно высокой квалификации математика-вычислителя.

В докладе обсуждается возможность размещения в стандартной оперативной памяти персонального компьютера (16 GB) алгоритмов решения задач оптимального управления, дискретизованных с мелкой сеткой. Основные вопросы – до каких размеров можно мельчить сетку и как это скажется на времени решения задачи. Для тестирования выбран метод, предложенный Б.Т. Поляком еще в 1969 г. [1], и задача успокоения нелинейного маятника (2 фазовых переменных и одно управление), в течение многих лет используемая как модельная задача для оценки производительности алгоритмов (см., напр., [2]). Результаты расчетов приведены в таблице.

$N$	$I(u^*)$	$t$ , сек	з. Коши	$\ g\ _2$	итер аций
101	11.915217	0	135	5.7e-3	15
201	11.909999	0	317	2.4e-4	23
401	11.908419	0	276	8.0e-5	24
801	11.908173	0	182	2.2e-4	21
1601	11.908043	0	241	1.2e-5	21
3201	11.908049	0	167	6.8e-5	17
6401	11.908014	1	109	1.8e-5	16
12801	11.908054	3	206	3.5e-5	19
25601	11.908068	8	237	4.7e-5	21
51201	11.908123	13	203	4.4e-5	19
102401	11.908111	22	167	3.8e-5	17
204801	11.908151	44	166	4.0e-5	17
409601	11.908148	88	166	2.9e-5	17
819201	11.908476	144	131	2.9e-5	15

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений использовался метод Рунге-Кутты второго порядка (метод Эйлера «с пересчетом»). Приведенные в табл. 1 данные показывают, что без всяких особых усилий удается применять сетку дискретизации с числом узлов более, чем восемьсот тысяч. Вычислительные эксперименты подтверждают также гипотезу о не слишком высокой скорости роста вычислительных затрат метода Б.Т. Поляка в задачах такого типа, как по числу итераций и задач Коши, так и по затраченному процессорному времени.

1. Поляк Б.Т. Минимизация негладких функционалов // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 3. С. 509–521.
2. Горнов А. Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 278 с.

\* Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос. регистрации: 121041300060-4).

# О ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ГИРОСТАТА \*

А.В. Банщикова

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[bav@icc.ru](mailto:bav@icc.ru)

С помощью программного обеспечения [1] исследуется динамика вращательного движения спутника-гиростата, движущегося в ньютоновском центральном поле сил по круговой орбите. Рассмотрен общий случай произвольного расположения постоянного вектора гиростатического момента системы с главными центральными моментами инерции, не равными друг другу.

Работа продолжает исследования из [2], где в символьном виде на компьютере построены линеаризованные уравнения возмущенного движения в окрестности относительного положения равновесия системы общего вида и получены необходимые условия его устойчивости.

В докладе вопрос об устойчивости движения по уравнениям первого приближения рассмотрен для положений равновесия, при которых вектор гиростатического момента системы находится в одной из плоскостей, образуемых главными центральными осями инерции.

В соответствии с теоремами Томсона-Тета-Четаева [3] изучение вопросов об устойчивости равновесий начинается с анализа матрицы потенциальных сил. Известно, что если положение равновесия неустойчиво при потенциальных силах, то из теоремы о влиянии гироскопических сил следует, что гироскопическая стабилизация возможна только для систем с четной степенью неустойчивости. Четность степени неустойчивости по Пуанкаре определяется положительностью определителя матрицы потенциальных сил. В результате анализа этой матрицы в пространстве введенных безразмерных параметров выделены области с различными степенями неустойчивости и рассмотрен вопрос о возможности гироскопической стабилизации системы.

Условия гироскопической стабилизации неустойчивых равновесий сводятся к нахождению решения системы неравенств

$$\begin{cases} v_3 > 0, & v_2 > 0, & v_1 > 0, & v_0 > 0, \\ Dis \equiv v_2^2 v_1^2 - 4v_1^3 v_3 - 4v_2^3 v_0 + 18v_3 v_2 v_1 v_0 - 27v_0^2 v_3^2 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

где  $v_i$  ( $i = 0, 3$ ),  $Dis$ , соответственно, коэффициенты и дискриминант характеристического уравнения системы.

С помощью функций *Reduce*, *RegionPlot* пакета компьютерной алгебры «Mathematica», предназначенных для нахождения аналитического и графического решения системы неравенств, проведен параметрический анализ условий (1).

1. Банщикова А.В., Иртегова В.Д., Тигоренко Т.Н. Программный комплекс для моделирования в символьном виде механических систем и электрических цепей // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №~2016618253 от 25.07.2016.
2. Banshchikov A.V. Obtaining and Analysis of the Necessary Conditions of Stability of Orbital Gyrostat by Means of Computer Algebra // Lecture Notes in Computer Science. 2019. Vol.~11661. P. 57-66.
3. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

\* Работа поддержана РФФИ, проект 19-01-00301.

# ПОИСК ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ КВАДРАТИЧНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С НЕВЫПУКЛЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ-НЕРАВЕНСТВАМИ

М.В. Баркова, А.С. Стрекаловский

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
mbarkova@icc.ru, strekal@icc.ru

Рассматривается задача минимизации квадратичной функции с квадратичными ограничениями-неравенствами:

$$\begin{cases} f_0(x) = \langle x, Q^0 x \rangle + \langle b_0, x \rangle + \gamma_0 \downarrow \min_x, x \in S, \\ f_i(x) = \langle x, Q^i x \rangle + \langle b_i, x \rangle + \gamma_i \leq 0, i \in I = \{1, \dots, m\}, \end{cases} \quad (P)$$

где матрицы  $Q^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – знаконеопределенные, вследствие чего,  $f_i(x)$  – квадратичные, невыпуклые функции,  $b_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in I \cup \{0\}$ , множество  $S \in \mathbb{R}^n$  – выпуклое и замкнутое.

В предположении, что невыпуклое допустимое множество задачи (P) не пусто, а ее оптимальное значение конечно, задача (P) сводится к следующей вспомогательной оштрафованной задаче [1,2]:

$$\Theta_\sigma(x) = f_0(x) + \sigma W(x) \downarrow \min_x, x \in S, \quad (P_\sigma)$$

где  $W(x) := \max\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\}$  – штрафная функция, а  $\sigma \geq 0$  – параметр штрафа.

Для решения задачи  $(P_\sigma)$ , которая является задачей d.c. минимизации со следующим представлением целевой функции:  $\Theta_\sigma(x) = G_\sigma(x) - H_\sigma(x)$ , применена теория глобального поиска [1]. Разработанный на ее основе метод состоит из двух основных этапов: метода локального поиска и процедуры выхода из критической точки, основанной на условиях глобальной оптимальности.

На первом этапе для отыскания критических точек использовался специальный метод локального поиска (СМЛП) [2, 3], особенностью которого является процедура выбора и изменения значения штрафного параметра  $\sigma$ . Основанный на частичной линеаризации в точке  $v \in \mathbb{R}^n$  целевой функции оштрафованной задачи, СМЛП заключается в последовательном решении вспомогательных выпуклых задач:

$$\Phi_v(x) := G_\sigma(x) - \langle \nabla H_\sigma(v), x \rangle \downarrow \min_x, x \in S. \quad (P_{\sigma L})$$

На втором этапе была реализована процедура выхода из полученной критической точки. Ее ключевым моментом является построение репрезентативной аппроксимации поверхности уровня функции  $H_\sigma(x)$ , задающей базовую невыпуклость в исследуемой задаче.

Получены первые численные результаты по решению тестовых задач небольшой размерности. Программы реализованы на языке C++ с использованием пакета прикладных программ Gurobi для решения вспомогательных выпуклых задач. Численные результаты продемонстрировали качество и скорость работы СМЛП, который является базовым элементом в алгоритме глобального поиска и используется на каждой его итерации, а также показали эффективность подхода, позволяющего отыскать глобальное решение в невыпуклых задачах квадратичной оптимизации.

1. Стрекаловский А.С. Элементы глобального поиска в общей задаче d.c. оптимизации // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. 2021. Т. 196. С. 114–127.
2. Strekalovsky A.S. Local Search for Nonsmooth DC Optimization with DC Equality and Inequality / A.M. Bagirov et al. (Eds.) Constraints Numerical Nonsmooth Optimization: State of the Art Algorithms. Springer International Publishing. 2020. P. 229–261.
3. Barkova M.V., Strekalovskiy A.S. Computational Study of Local Search Methods for a D.C. Optimization Problem with Inequality Constraints // LNCS. 2021. V. 13078. P. 94–109.

## УРОВНЕВЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ В НЕСКОЛЬКО ПОЛОС

А.А. Белых, М.В. Баркова

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[ab200000@mail.ru](mailto:ab200000@mail.ru), [mbarkova@icc.ru](mailto:mbarkova@icc.ru)

Задача упаковки прямоугольников в полубесконечные полосы (Multiple Strip Packing Problem) – это геометрическая задача, которая для двумерного случая может быть сформулирована следующим образом. Дан набор прямоугольников, для каждого из которых определена ширина и высота, а также конечное число полос с фиксированной шириной и бесконечной высотой. Требуется найти ортогональную упаковку без перекрытий данного набора прямоугольников в полосы так, чтобы высота размещения была минимальной. Любые вращения прямоугольников запрещены. Эта задача возникает в различных сферах, например, области планирования и управления вычислительными ресурсами SPARK-систем. Другим примером является область промышленного производства, где прямоугольные элементы необходимо вырезать из листа материала (например, ткани или бумаги), который имеет фиксированную ширину, но бесконечную длину, таким образом, чтобы минимизировать потери материала.

Рассматриваемая задача упаковки может быть сформулирована как задача целочисленного программирования. Известно, что эта задача является NP-трудной, поэтому использование точных методов решения на практике зачастую затруднено. В данной работе вместо исходной задачи ищется решение ее частного случая, в котором прямоугольники размещаются на так называемых уровнях («полках»). Уровень представляет собой горизонтальную линию, проведенную вдоль верхней грани первого (и как следствие, самого высокого) прямоугольника предыдущего уровня.

Для решения данной задачи были разработаны алгоритмы NFDH (Next Fit Decreasing Height) и FFDH (First Fit Decreasing Height), являющиеся обобщениями известных жадных алгоритмов для задачи упаковки в одну полосу. В предложенных алгоритмах прямоугольники сортируются в порядке невозрастания высот и упаковываются слева направо вдоль основания текущего уровня, пока это возможно. В алгоритме NFDH, когда на текущем уровне становится недостаточно места для размещения следующего прямоугольника, упаковка на этом уровне прекращается. В этот момент определяется полоса с минимальной текущей высотой упаковки. На этой полосе открывается новый уровень, на котором продолжается упаковка. В алгоритме FFDH каждый следующий прямоугольник, который должен быть упакован, размещается на первом в порядке открытия уровне, на котором достаточно места. Новый уровень открывается на полосе с минимальной текущей высотой упаковки только в том случае, если места для размещения нет ни на одном из предыдущих уровней. Предложенные алгоритмы реализованы на языке Python. Проведено сравнение работы двух алгоритмов на реальных тестовых данных.

1. Vasilyev I.L., Ushakov A.V., Barkova M.V., Zhang D., Ren J., Chen J. Fast Heuristic Algorithms for the Multiple Strip Packing Problem // CCIS. 2021. Vol. 1476. P. 284–297.

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ЗАДАЧ СМЕШАННОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А.Ю. Горнов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

Задача смешанного целочисленного программирования уже много лет вызывает большой интерес специалистов. Это связано, по-видимому, не столько со сложностью ее теоретического освоения, сколько с практической ее значимостью. Многочисленные приложения в финансовом анализе, планировании производственных процессов, организации перевозок, распределении ресурсов и во многих других областях все чаще требуют использования оптимизационных техник такого класса.

Рассматривается задача поиска минимума нелинейной функции при наличии как непрерывных, так и целочисленных и (возможно) булевских переменных. Считается, что среди известных технологий для обсуждаемого типа задач «царят» коммерческие пакеты («солверы») Gurobi (<https://www.gurobi.com/products/gurobi-optimizer/>) и CPLEX (<https://www.ibm.com/ru-ru/analytics/cplex-optimizer>). Среди программных технологий «с открытым кодом» часто упоминаются как лучшие пакеты MIPCL (<http://www.mipcl-cpp.appspot.com/index.html>), SDPNAL (<https://yalmip.github.io/solver/sdpnal/>) SCIP (<https://www.scipopt.org/>), IPOPT (<https://projects.coin-or.org/Ipopt>), MOSEK (<https://www.mosek.com/documentation/>), BARON (<https://minlp.com/baron-solver>) и другие. Список «лучших в мире» программных технологий для задач оптимизации, судя по заявлениям в сети интернет, постоянно пополняется.

Однако, как подсказывает практика *реальных* приложений, далеко не все формулируемые проблемы можно решить с использованием «готовых солверов», в том числе и коммерческих. Необходимость новых разработок программных технологий определяется, на наш взгляд, следующими факторами: а) возможностью резкого повышения эффективности алгоритмов за счет учета специфики задачи; б) трудностями исследования задач больших и сверхбольших размерностей; в) новыми возможностями современных высокопроизводительных вычислительных систем; г) требованиями импортозамещения. Во многих случаях эти факторы действуют в комплексе, что еще более затрудняет решение актуальных научно-технических проблем.

В докладе обсуждается развиваемый нами программный комплекс для решения нелинейных задач смешанного целочисленного программирования. Первая версия, находящаяся в периоде разработки, пока включает библиотеку из 10 алгоритмов, являющих собой модификации конкурентоспособных «строго непрерывных» методов: туннельного поиска, методов поиска в случайных подпространствах малой размерности, Лууса-Яаколы, «Q-поиска», нелокального покоординатного спуска и других.

В качестве основного инструмента реализации выбран язык C/C++, позволяющий относительно легко получать версии как для популярных ныне платформ – Linux, Windows, MacOS, так и, надо надеяться, для перспективных российских – Эльбрус, ROSA, ОСь, Альт, Ульяновск.BSD, Альфа ОС, Альфа ОС, GosLinux, RAIDIX, Заря, Аврора, МСВС и других. Для облегчения портбельности принято обязательным требованием минимизации использования нестандартных библиотек. Реализована диалоговая система, которая позволяет информированному пользователю создавать в интерактивном режиме многометодную технологию решения, конструируемую для конкретной задачи. Выполненные вычислительные эксперименты продемонстрировали работоспособность реализованных версий алгоритмов для модельных задач.

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА АРХИМЕДА ДЛЯ ОЦЕНКИ ОБЪЕМА МНОГОМЕРНЫХ ТЕЛ\*

А.Ю. Горнов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

Задача оценки объема многомерных тел с нерегулярной геометрией оказывается полезным инструментом при построении многих вычислительных методик для задач оптимального управления, фазового оценивания, в дифференциальных играх и других. Но при сложном строении множества эта проблема может оказаться весьма нетривиальной. В двумерном случае – на плоскости – могут быть использованы многие алгоритмы из вычислительной геометрии (см., напр., [1, 2]), однако при размерностях 3 и более такого алгоритмического задела, по-видимому, еще не разработано.

В докладе обсуждается предложенный алгоритм, ориентированный на оценку объема многомерных тел с единственным требованием односвязности. Задача была бы достаточно несложной, если бы мы могли использовать четкий критерий принадлежности каждой точки либо множеству, либо его дополнению. Однако на практике такой возможности мы не получаем: есть лишь некоторый «серый ящик», в который можно подать на вход воздействие (например, управление в систему дифференциальных уравнений), а на выходе получить вектор – точку в многомерном (фазовом) пространстве. Основная идея подхода – плотно заполнить множество непересекающимися шарами фиксированного размера, затем оконтурить полученную «облачную» аппроксимацию параллелепипедом («брусом») и далее заполнить такими же шарами «брус». Объем «бруса» вычислить несложно; искомая оценка строится на отношении числа шаров, попадающих в «тело», и числа шаров, покрывших «брус». Заметим, здесь просматривается полная аналогия с методом, который, согласно легенде, Архимед применил для оценки объема воды, вытесненной исследуемой короной («Эврика!»). В качестве меры близости шаров используется евклидово расстояние.

Для примера рассмотрена задача оценки объема множества достижимости в задаче стабилизации нелинейного маятника (см., напр., [3]). Эта задача в течение многих лет служит тестовым примером для многих исследователей и считается хорошо изученной. Полученная при радиусе шара  $R = 0.1$  аппроксимация невыпуклого множества достижимости приведена на рис. 1.

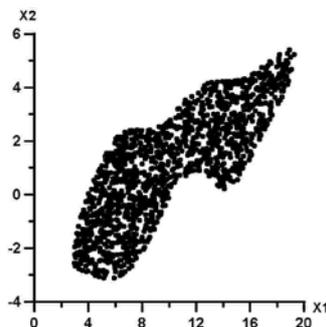


Рис. 1. Аппроксимация множества достижимости в задаче стабилизации нелинейного маятника

\* Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос. регистрации: 121041300060-4).

Результаты расчетов по предложенному алгоритму для различных размеров шаров, составляющих покрытие при  $10^6$  пробных точек, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты расчетов оценки объема для множества достижимости в задаче стабилизации нелинейного маятника

1	2	3	4	5	6	7	8
$N$	Rshar	Nset/Nbrus	Nset	Nbrus	Defect	time	V
1	1	0.4167	45	108	1.03e+00	89	61.3922
2	0.8	0.4431	74	167	1.01e+00	89	62.2662
3	0.6	0.4158	121	291	7.51e-01	89	58.4292
4	0.4	0.4127	260	630	2.63e-01	89	57.9923
5	0.2	0.4026	963	2392	9.01e-02	96	56.5721
6	0.1	0.3947	3679	9320	3.05e-02	125	55.4691
7	0.08	0.3896	5588	14344	6.67e-02	143	54.7472
8	0.06	0.3907	9655	24713	1.67e-02	172	54.8990
9	0.04	0.3881	20489	52806	7.14e-03	260	54.5365
10	0.02	0.3851	68507	177886	4.22e-03	634	54.1173
11	0.01	0.3883	180050	463722	1.30e-03	1560	54.5598

Здесь столбец 1 – номер расчета, 2 – радиус шара, 3 – отношение числа шаров, 4 – число шаров покрытия множества, 5 – число шаров покрытия «бруса», 6 – «дефект» аппроксимации, 7 – время расчета, 8 – оценка объема.

Проведенные множественные эксперименты с предложенным методом показали следующее. I) Метод не слишком «вычислительно устойчив». Небольшие отклонения параметров, особенно размера шара, в ряде случаев заметно меняют оценку. Но для множеств небольших размерностей (до 4) эта проблема существенно ослабевает при увеличении числа пробных шаров. II) Имеющаяся реализация метода не слишком хорошо работает при больших размерностях задачи. В частности, попытка посчитать оценки объемов  $n$ -мерных шаров к успеху не привела: при размерностях 5 и более результаты становятся хаотичными. Это объясняется замеченным ранее Б.Т. Поляком (<https://www.youtube.com/watch?v=EmYyS4AmFtQ>) эффектом «схлопывания» аппроксимаций многомерных шаров. В качестве преодоления этой особенности в этом докладе было предложено использование технологии «hit-and-run», позволяющей заметно смягчить указанный эффект. III) Анализ затрат времени на расчеты (см. столбец 7 табл. 1) показывает, что до определенного размера шара (расчет 1–4) основные расходы в данной задаче идут на интегрирование системы. Далее становятся заметными и даже определяющими вычислительные затраты на размещение шаров в покрытие. Однако достаточно неплохая оценка получена уже при  $R = 0.08$ ; видно, что расчеты 8–11 являются избыточными.

Несмотря на указанные недостатки алгоритма, можно утверждать, что предложенная технология может оказаться полезным исследовательским инструментом при должном учете выявленных ограничений.

1. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: введение. М.: Мир, 1989. 478 с.
2. Берг М., Чеонг О., Кревельд М., Овермарс М. Вычислительная геометрия. Алгоритмы и приложения. М.: ДМК-Пресс, 2016. 438 с.
3. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука. 2009. 278 с.

# ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ\*

А.Ю. Горнов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

Многообразие задач оптимизации неизбежно ставит вопрос об их систематизации и/или классификации. Это связано, на наш взгляд, не только с попытками их «теоретического освоения», но также и с естественным поиском единого подхода к их численному решению (см., напр., [1]). Известно множество классификаций экстремальных задач; в их основу традиционно закладывают некоторые структурные особенности проблемы: одномерная – многомерная, безусловная – условная, статическая – динамическая, однокритериальная – многокритериальная, непрерывная – дискретная – частично-целочисленная, выпуклая – невыпуклая (см., напр., [2]). Последняя дилемма, по факту, предлагает делить экстремальные задачи на невероятно узкий класс выпуклых, но удобных для математического анализа, и на класс невыпуклых – «всех остальных». А задачи оптимизации, возникающие в приложениях, постоянно ставят перед исследователями новые вопросы о свойствах невыпуклых функций и предлагают все новые вызовы.

В докладе обсуждается предлагаемая классификация невыпуклых задач оптимизации, основанная на характерных свойствах минимизируемой функции. В основу положена, таким образом, задача безусловной минимизации, пройти мимо которой в прикладных постановках почти невозможно.

Классификация включает следующий набор типов функций: 1) выпуклые (convex), 2) унимодальные (unimodal), 3) «с острым минимумом» («acute minimum»), 4) «малоэкстремальные» («slightly extreme»), 5) «многоэкстремальные» («multi-extreme»), 6) «равноэкстремальные» («equal extras»), 7) недифференцируемые (undifferentiable), 8) ступенчатые (stepped), 9) зашумленные (noisy), 10) «вырожденные» («degenerate»), 11) «с узким глобальным экстремумом» («jamming extreme»), 12) «с заглушающим экстремумом» («gouged out extreme»), 13) «платообразные» («plateau-like»), 14) «со сгущающимися экстремумами» («condensation of extrema»), 15) «частично вычислимые» («partially computable»), 16) «маловычислимые» («little computable»). Примеры функций указанных типов приведены на рис. 1–5.

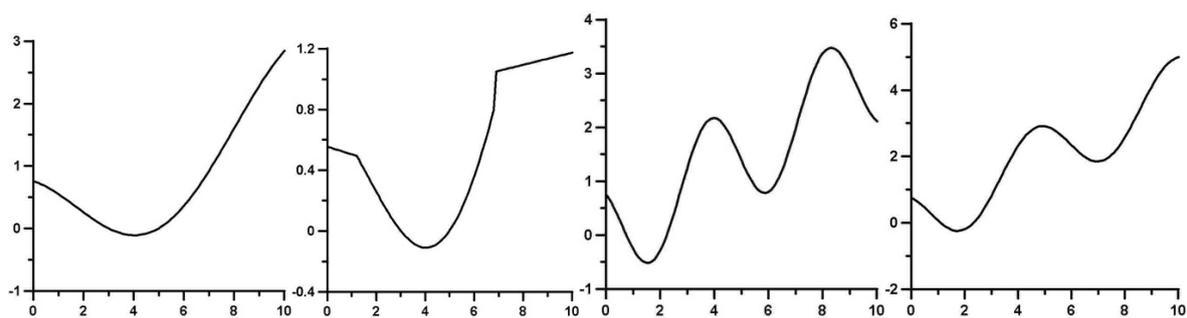


Рис. 1. Примеры функций следующих типов: выпуклой, унимодальной, «с острым минимумом» и «малоэкстремальной»

\* Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос. регистрации: 121041300060-4).

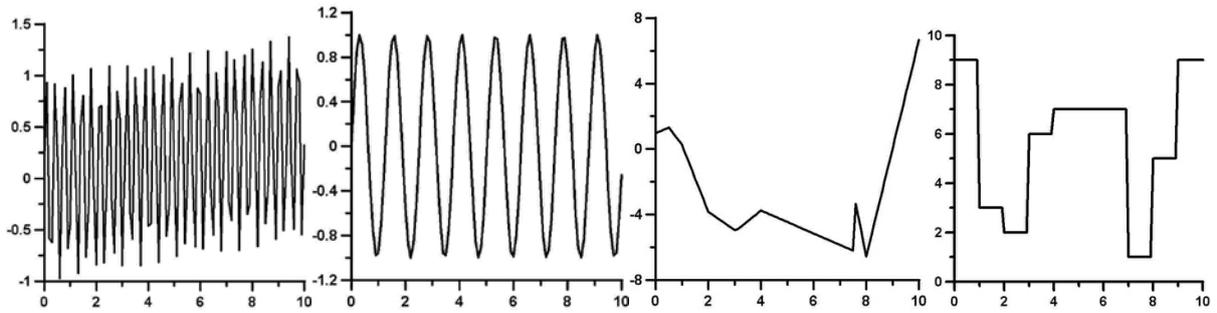


Рис. 2. Примеры «многоэкстремальной», «равноэкстремальной», недифференцируемой и ступенчатой функций

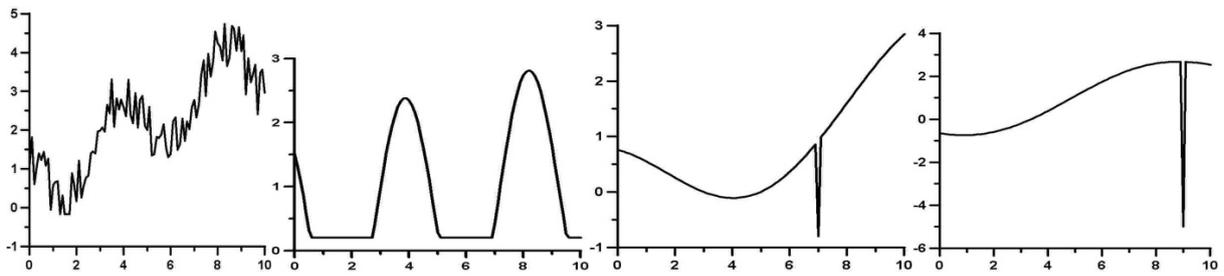


Рис. 3. Примеры функций следующих типов: зашумленной, «вырожденной», «с узким глобальным экстремумом» и «с заглушающим экстремумом»

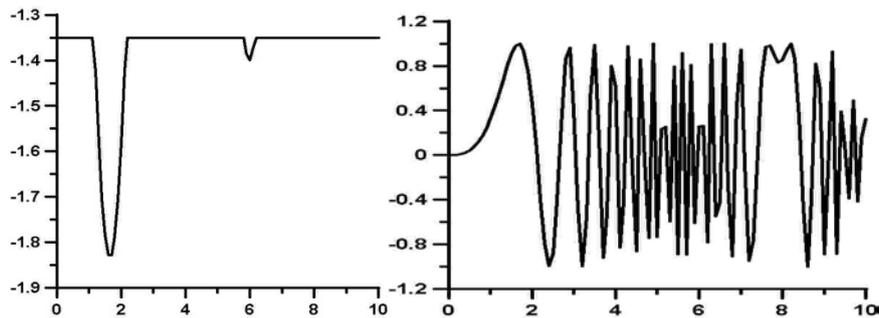


Рис. 4. Примеры «платообразной» функции и функции «со ступающимися экстремумами»

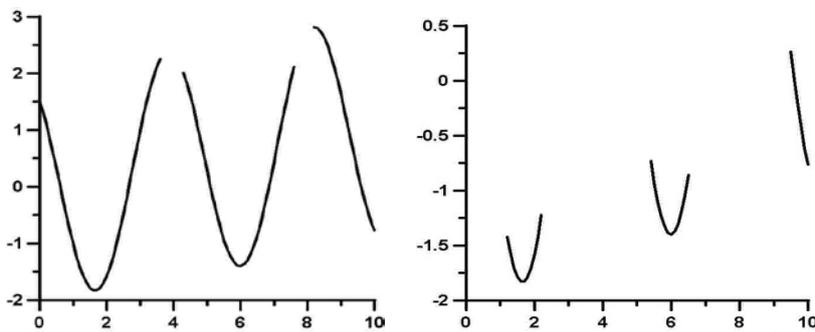


Рис. 5. Примеры «частично вычислимой» и «маловычислимой» функции

Предлагаемая классификация, очевидно, неполна, но, мы надеемся, покрывает значительное количество постановок прикладных оптимизационных проблем. Обсуждаются способы детектирования особенностей задачи, отнесения ее к тому или иному типу, а также подходы к преодолению возникающих трудностей.

1. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход. М.: Мир, 1971. 376 с.
2. Прокопенко Н.Ю. Методы оптимизации. Нижний Новгород, 2018. 118 с.

## ПРО «ОСТРОВНОЙ» ПОДХОД К ЗАДАЧЕ НЕВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А.Ю. Горнов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

Арсенал средств, имеющихся в распоряжении специалистов для решения сложных задач невыпуклой оптимизации при большом числе переменных, трудно назвать достаточным. Более того, наступает осознание того факта, что возможность продвижения значительного количества сверхактуальных прикладных проблем упирается в слабость именно оптимизационного инструментария.

«Переборный» объем, который необходимо исследовать в поиске, например, минимумов атомно-молекулярных потенциальных функций даже небольших, казалось бы, размерностей – всего несколько сотен, уже может быть астрономически большим. Для самой большой задачи поиска минимума потенциала Морса, которую сумели предъявить специалисты из Великобритании (см. [1]) в 147 атомов (441 оптимизируемая переменная), число локальных экстремумов оценивается числом  $10^{60}$ . Для других гомогенных кластеров (состоящих из одинаковых атомов) – Леннарда-Джонса, Гупта, Саттон-Чена, Дзугутова и др. ситуация несколько не лучше. Тем не менее, для существенно больших размерностей – до 300 и более атомов, удается находить достаточно хорошие решения, которые высоко оцениваются специалистами. Используется удачная гипотеза о структуре функции: для каждого глобального экстремума (их много) имеется последовательность приближающихся локальных экстремумов, в которых потенциал монотонно падает. На базе этого свойства построены основные конкурентоспособные методы – MSBH, имитация отжига, «Big Bang», которые и составляют «золотой фонд» вычислительной химии.

К сожалению, этот подход оказался не слишком эффективным в задачах поиска минимумов атомно-молекулярных гетерогенных кластеров, в частности, в задаче восстановления структуры белков (см., напр., [2]). Более того, недавно было объявлено [3], что для принципиального решения этой проблемы удалось успешно использовать совсем другие методы. В докладе обсуждается альтернативный подход к построению оптимизационных алгоритмов, основанный на идее предварительного разбиения области поиска на отдельные небольшие участки («брусы») с «хорошим» значением функции, которые резонно называть «островами». Для поиска «островов» используется многократный локальный спуск со множества случайно сгенерированных точек, который экономно заканчивается при достижении априори заданного уровня. Далее производится кластеризация полученного «облака» приближений, направленная на выявление центров «островов». Новые поисковые задачи формулируются для исходного функционала, но уже на небольших «брусах», построенных путем окаймления найденных ранее «кусочков облака». Таким образом, исходная задача декомпозируется на ряд подобных, но значительно более простых в вычислительном отношении подзадач. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. The Cambridge Energy Landscape Database. URL: <http://www-wales.ch.cam.ac.uk/CCD.html>.
2. Yakovlev P.A., Anikin A.S., Bol'shakova O.A., Gasnikov A.V., Gornov A.Y., Ermak T.V., Makarenko D.V., Morozov V.P., Neterebskii B.O. Local Algorithms for Minimizing the Force Field for 3D Representation of Macromolecules // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59, № 12. P. 1994–2008.
3. Griffin A. Artificial Intellect cracks 50-year-old Protein Folding Problem // Independent. 30.11.2020.

# РЕАЛИЗАЦИЯ СУПЕРВИЗОРОВ В ФОРМАЛЬНОМ ЛОГИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К УПРАВЛЕНИЮ ДИСКРЕТНО-СОБЫТИЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

А.В. Давыдов, А.А. Ларионов, Н.В. Нагул

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[artem@icc.ru](mailto:artem@icc.ru), [bootfrost@zoho.com](mailto:bootfrost@zoho.com), [sapling@icc.ru](mailto:sapling@icc.ru)

Эффективным методом управления дискретно-событийными системами (ДСС) в целях удовлетворения наложенным на них спецификациям является получившее широкое распространение супервизорное управление, предложенное в [1] и развитое многими другими авторами. Разработан подход к супервизорному управлению группой роботов на основе логического вывода позитивно-образованных формул (ПОФ) [2, 3]. Реализация разработанного подхода как части системы управления изображена на схеме на рисунке 1.

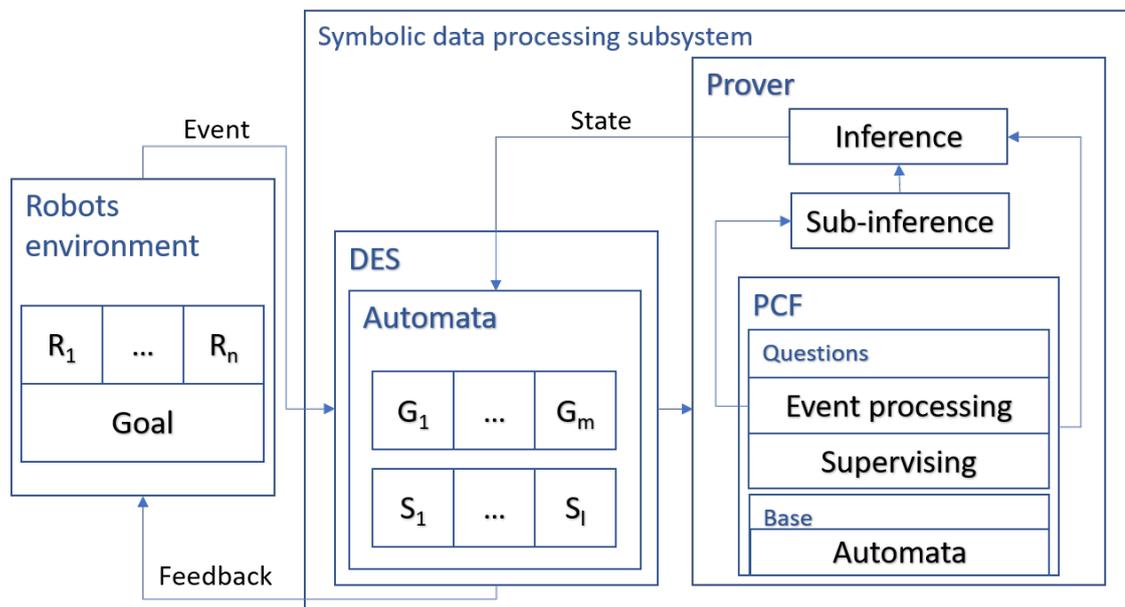


Рис. 1. Схема реализации супервизорного управления с помощью ПОФ как часть системы управления группой роботов

Система управления разрабатывается в лаборатории 5.2 Информационно-управляющих систем ИДСТУ СО РАН на базе стенда, состоящего из роботов Lego Mindstorms EV3, специального поля и камер, считывающих положение объектов на поле. Программное обеспечение распределено через беспроводную сеть между роботами и сервером. На схеме реальная рабочая среда роботов изображена блоком Robots environment. События, происходящие в рабочей среде, распознаются, именуется заранее определенными символами и поступают в подсистему символьной обработки (symbol data processing subsystem). В этой подсистеме реализуется ДСС, представляющая собой формализацию задачи, решаемой роботами, в виде набора автоматов  $G_1, \dots, G_m$ , описывающих систему, и  $S_1, \dots, S_l$ , описывающих ограничения на функционирование системы. Далее, ДСС представляется в виде ПОФ, вывод которой осуществляет специально разработанная программная система для поиска логических выводов ПОФ - прувер. Автоматы, лежащие в основе ДСС, представлены логическими атомами в базе фактов ПОФ. Логические правила, называемые в ПОФ вопросами, осуществляют гене-

рацию следующего состояния на основе событий с учетом ограничений, реализуя таким образом супервизорное управление. Преимуществом такого подхода является возможность дополнительной обработки и контроля событий на основе данных об окружающей среде в реальном времени в ходе вывода. За это отвечают специальные логические правила, представленные в ПОФ в виде вопросов обработки событий, при выводе которых существует возможность запуска подвыводов. В таких подвыводах поступающие из рабочей среды события являются параметрами, на основе которых производятся вычисления или принимаются другие решения.

1. Ramadge P.J., Wonham W.M. Supervisory Control of Class of Discrete Event Processes // SIAM J. Control and Optimisation. 1987. № 25 (1). P. 206-230.
2. Vassilyev S.N. Machine synthesis of mathematical theorems // Logic Programming. 1990. Vol. 9, № 2&3. P. 235-266.
3. Davydov A.V., Larionov A.A., Cherkashin E.A. On the calculus of positively constructed formulas for automated theorem proving // Automatic Control and Computer Sciences (AC&CS). 2011. Vol. 45, № 7. P. 402–407.

## ONTOGEN: СИСТЕМА АВТОМАТИЗИРОВАННОГО СОЗДАНИЯ ОНТОЛОГИЙ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ\*

Д.А. Денисова, Н.О. Дородных

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[daryalich@mail.ru](mailto:daryalich@mail.ru), [tualatin32@mail.ru](mailto:tualatin32@mail.ru)

На сегодняшний день технологии Semantic Web продолжают широко применяться в различных отраслях знаний, позволяя объединять разнородную информацию из различных источников и обеспечивать ее представление с помощью формальных стандартизованных средств моделирования знаний. Одним из центральных элементов Semantic Web является онтология [1], которая состоит из иерархии понятий (классов) предметной области, связей между ними и законов, которые действуют в рамках этой модели. При этом с помощью данной онтологической схемы типизируются конкретные объекты (сущности), их атрибуты (конкретные свойства) и отношения между ними. Автоматизация формирования и наполнения онтологий на основе различных информационных источников (например, баз данных, текстов, концептуальных моделей), является перспективным направлением научных исследований, так как позволяет использовать большие объемы накопленной информации, аккумулированной в различных организациях и представленной в разных форматах. В качестве такого источника могут выступать электронные таблицы, которые являются одним из наиболее доступных и распространенных способов представления и хранения информации. В настоящее время значительное количество мировых данных хранится в электронных таблицах, в частности, только в сети Интернет содержится примерно 154 миллиона HTML-таблиц [2]. Предположительно они содержат сотни миллиардов фактов. Информация, представленная в форматах HTML, Excel, CSV, характеризуется большим разнообразием и разнородностью компоновок, стилей, содержания, формам и форматов представления, а также высокой скоростью роста ее объема. Все это делает электронные таблицы привлекательным источником знаний для различных приложений. Однако в общем случае электронные таблицы не могут быть проинтерпретированы автоматически. Отсутствует явная семантика, необходимая для их интерпретации в соответствии с заложенным в них смыслом. Последнее препятствует их активному использованию на практике. В связи с этим актуальным является разработка нового методологического и программного обеспечения автоматизированного создания онтологий и графов знаний на основе извлечения, преобразования и интерпретации табличных данных.

В данной работе предлагается развить идеи, предложенные в работе [3], и автоматизировать процесс создания онтологий на основе анализа и преобразования данных, извлеченных из электронных таблиц. При этом онтологии предполагается формировать как на уровне онтологической схемы (терминологическом уровне – TBox), так и на уровне конкретных сущностей (аксиоматическом уровне – ABox), а в качестве исходных электронных таблиц предлагается использовать таблицы, представленные в реляционной форме и отражающие совокупность некоторых именованных сущностей.

Для достижения поставленной цели разработан новый подход, состоящий из 6 последовательных этапов:

- преобразование исходных электронных таблиц в формате CSV в JSON;
- очистка данных;

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента России (проект МК-1647.2020.9).

- определение типов столбцов (категориальных и литеральных);
- идентификация сущностного (тематического) столбца, определяющего смысловое наполнение таблицы;
- генерация фрагментов онтологии в формате OWL2 DL;
- агрегация полученных онтологических фрагментов в полную единую онтологию.

Предлагаемый подход реализован в форме программного средства – Ontogen [4] на языке Python. Экспериментальная оценка подхода и разработанного средства осуществлялась на наборе табличных данных – Tough Tables (2T) [5], извлеченных из Веб и подготовленных специально для соревнования в рамках международной научной конференции – International Semantic Web Conference (ISWC). Из данного набора были выбраны только оригинальные таблицы без искусственного зашумления (в таких таблицах отсутствует приставка «NOISE»). Для системы оценки использовались стандартные метрики: точность (Precision), полнота (Recall) и F-мера (F1). При этом отдельно оценивалась генерация онтологической схемы (TBox-часть) и конкретных сущностей (ABox-часть). Общая полученная оценка составила 0,9 для всех трех метрик, что свидетельствует о достаточно высокой эффективности разработанного средства. Полученные экспериментальные оценки в дальнейшем позволят выполнить количественное сравнение полученных результатов с известными академическими решениями в данной области.

1. Villazon-Terrazas B., Garcia-Santa N., Ren Y., Srinivas K., Rodriguez-Muro M., Alexopoulos P., Pan J.Z. Construction of Enterprise Knowledge Graphs (I) // Exploiting Linked Data and Knowledge Graphs in Large Organisations. Springer, Cham, 2017.
2. Lehmborg O., Ritze D., Meusel R., Bizer C. A large public corpus of web tables containing time and context metadata // Proceedings of the 25th International Conference Companion on World Wide Web. 2016. P. 75–76.
3. Дородных Н.О., Видия А.В., Юрин А.Ю. Подход к созданию онтологий на основе электронных таблиц с произвольной структурой // Онтология проектирования. 2021. Т. 11, № 2. С. 212-226.
4. Ontogen. 2021. URL: <https://github.com/Lab42-Team>.
5. Cutrona V., Bianchi F., Jimenez-Ruiz E., Palmonari M. Tough Tables: carefully evaluating entity linking for tabular data // Proceedings of the 19th International Semantic Web Conference (ISWC'20). 2020. P. 1–16.

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ\*

М.Л. Жарков, А.Л. Казаков

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

Железнодорожные транспортные системы обладают следующими свойствами [1]. Во-первых, они состоят из множества элементов или подсистем с различной вместимостью и перерабатывающей способностью. Во-вторых, обладают нелинейной иерархической структурой, в которой может быть несколько маршрутов движения поездов, в том числе кольцевых. В-третьих, на продолжительность технических процессов в подсистемах оказывает воздействие множество случайных факторов.

Эффективным инструментом для моделирования подобных объектов являются сети массового обслуживания (СеМО) – одно из современных направлений теории массового обслуживания [2]. На основе данного математического аппарата авторами была разработана методика моделирования работы грузовых и сортировочных железнодорожных станций [3]. Оказалось, что она применима и для математического описания более крупных систем – железнодорожных узлов (ЖДУ) – участков железнодорожной сети, включающих несколько взаимодействующих между собой станций на относительно небольшой площади [1].

**Математическая модель.** Описание движения поездов в ЖДУ строится в три этапа: 1) описываются входящие поездопотоки, 2) моделируется работа элементов ЖДУ и 3) строится маршрут движения поездов между этими элементами.

1) Поезда поступают с двух и более направлений, каждое из которых включает пассажирские, транзитные и местные грузовые поезда. Для моделирования их поступления с каждого направления используется отдельный ВМАР-поток. 2) ЖДУ включает главную магистраль, которая состоит из участков железной дороги между станциями, а также сами станции. Данные типы элементов выполняют различные операции над поездами: а) пропуск по участкам и б) обработка на станциях. Однако эти операции однотипны и регулярно повторяются. Каждый элемент ЖДУ описывается в виде узла СеМО – отдельной системы массового обслуживания, в которой каналами являются обслуживающие устройства данного элемента, а очередью – его вместимость. 3) Участки и станции образуют нелинейную иерархическую структуру, в которой может быть несколько маршрутов движения поездов. Их математическое описание строится в виде маршрутной матрицы. Ее элементы – вероятности переходов между узлами СеМО – определяются как отношение числа поездов, поступающих в конкретный узел, к общему объему поездопотоков для одного направления.

В докладе будут представлены модели действующей в Свердловской области сортировочной станции и участка железнодорожной сети вблизи г. Иркутска. Будут обсуждены результаты вычислительных экспериментов и выработанные на их основе рекомендации по совершенствованию работы этих систем.

1. Правдин Н.В., Шубко В.Г. Железнодорожные станции и узлы. М.: Маршрут, 2005. 502 с.
2. Вишневецкий В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
3. Bychkov I., Kazakov A., Lempert A., Zharkov M. Modeling of Railway Stations Based on Queuing Networks // Applied Sciences. 2021. Vol. 11 (5). P. 2425.

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-010-00724, РФФИ и Правительства Иркутской области в рамках проекта № 20-47-383002.

# МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИСЧЕЗАЮЩЕ МАЛОЙ ОБЛАСТЬЮ ПРИТЯЖЕНИЯ ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА\*

Т.С. Зароднюк

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[tz@icc.ru](mailto:tz@icc.ru)

Сложность невыпуклых задач оптимизации, возникающих в настоящее время в различных научно-технических областях, постоянно растет. Для современных задач оптимального управления характерна неединственность решения и наличие множеств достижимости сложной структуры. Создание алгоритмов и вычислительных технологий исследования управляемых динамических систем продолжает оставаться актуальной проблемой, как и связанная с ней необходимость разрабатывать новые тестовые задачи, способные моделировать характерные для задач оптимизации вычислительные трудности. Создание методик тестирования программных реализаций алгоритмов [1] и разработка технологий генерации тестов с целью получения специализированных тестовых коллекций [2], позволяющих исследовать свойства алгоритмов, продолжают быть востребованными.

В качестве модельной тестовой задачи оптимального управления с исчезающе малой областью притяжения глобального экстремума приведем следующий пример:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - \sin \sqrt{|x_2|}, \quad \dot{x}_2 = u + \cos \sqrt{|x_1|} \\ x_1(t_0) &= 1, \quad x_2(t_0) = 1, \quad u(t) \in [-0.45, 0.45], \quad t \in [0, 27]. \end{aligned}$$

Функционал целенаправленно выбирается таким образом, чтобы решение попадало в труднодоступную для численных методов область множества достижимости заданной управляемой динамической системы:  $J^*(u) = (x_1(t_1) + 3)^2 + (x_2(t_1) + 0.5)^2 \rightarrow \min$ . Результаты численного решения рассмотренного теста приведены на рисунке 1.

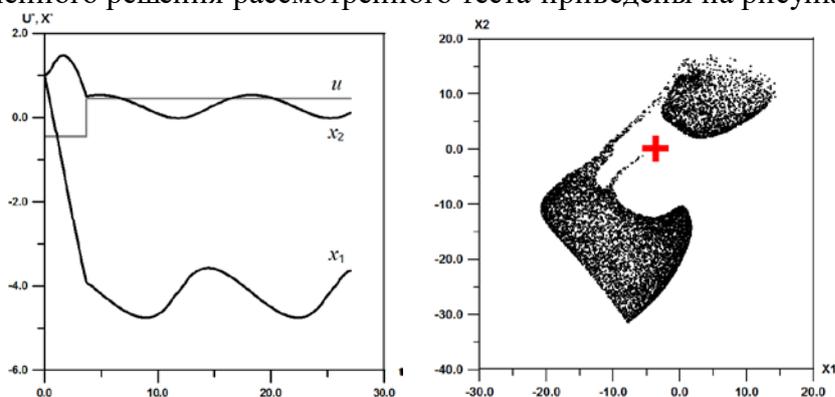


Рис. 1. Оптимальные траектории и управление (слева), множество достижимости и экстремальная точка (справа) для модельной задачи оптимального управления.

Подобные тестовые задачи могут быть использованы при исследовании алгоритмов глобальной оптимизации управляемых динамических систем с целью выявления среди них наиболее эффективных для выбранных классов задач.

1. Zarodnyuk T.S., Gornov A.Yu., Sorokovikov P.S. Testing techniques of optimization algorithms for nonlinear controlled dynamical systems // Int. Conf. Proc. ICECET, 9–10 December 2021.
2. Зароднюк Т.С., Гусева И.С., Финкельштейн Е.А., Горнов А.Ю. Методика генерации двухмерных тестовых задач оптимального управления на основе алгоритмов аппроксимации множества достижимости // Материалы 60-й конф. МФТИ (Долгопрудный, 20-25 ноября 2017 г.). 2017.

\* Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос. регистрации: 121041300060-4).

# ОБ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[irteg@icc.ru](mailto:irteg@icc.ru), [titor@icc.ru](mailto:titor@icc.ru)

В докладе обсуждаются вопросы нахождения полиномиальных инвариантных соотношений и их использования в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием магнитного поля, порожденного эффектом Барнетта-Лондона [1, 2], и потенциальных сил.

Движение тела описывается уравнениями Эйлера-Пуассона вида

$$A \dot{\boldsymbol{\omega}} = A \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + B \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times (C\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – угловая скорость тела,  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  – единичный вектор, характеризующий направление силы тяжести,  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$  – вектор центра масс тела,  $A, B, C$  – симметричные матрицы 3-го порядка:  $A$  – тензор инерции тела,  $B$  – матрица, характеризующая магнитный момент тела,  $C$  – матрица, характеризующая влияние потенциальных сил на тело.

Уравнения (1) допускают два первых интеграла

$$V_1 = A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \kappa, \quad V_2 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 1$$

и в общем случае являются неинтегрируемыми.

Методом неопределенных коэффициентов в сочетании с методами компьютерной алгебры для уравнений (1) получены условия существования линейных инвариантных соотношений и сами соотношения. Указаны частные случаи существования дополнительных квадратичных интегралов. Проведен качественный анализ уравнений (1) в случае, когда эти уравнения обладают дополнительным квадратичным интегралом

$$K = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{A_3}{A_2^2}(2A_2 - A_3)\omega_3^2 - \frac{1}{A_2^2}(2A_2(B_{11} - B_{22})\omega_1\gamma_1 + 2A_2(\omega_1\gamma_2 + \omega_2\gamma_1) + 2A_3B_{11}\omega_3\gamma_3 - (B_{22}^2 - B_{11}^2)\gamma_1^2 + 2B_{12}(B_{11} + B_{22})\gamma_1\gamma_2 + (B_{11}^2 + B_{12}^2)\gamma_3^2).$$

Выделены стационарные инвариантные многообразия коразмерности 3 и 4. Дана механическая интерпретация найденных решений и получены достаточные условия их устойчивости. Показано, что пересечением многообразий являются неподвижные точки фазового пространства системы, соответствующие перманентным вращениям тела. Доказана устойчивость этих движений по части переменных.

1. Barnett S.J. Magnetization by Rotation // Physical Review. 1915. Vol. 6, № 4. P. 239-270.
2. Егармин И.Е. О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела. Астрофизика и геокосмические исследования. М.: МФТИ, 1983. С. 95-96.

# О ПОСТРОЕНИИ КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ\*

А.Л. Казаков, П.А. Кузнецов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
kazakov@icc.ru, kuznetsov@icc.ru

В докладе рассматривается система нелинейных параболических уравнений второго порядка

$$\begin{cases} T_t = [K(T)T_x]_x + \Gamma(T, S), \\ S_t = [L(S)S_x]_x + \Lambda(S, T). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $T(t, x)$ ,  $S(t, x)$  – искомые функции,  $K(T)$ ,  $L(S)$ ,  $\Gamma(T, S)$ ,  $\Lambda(S, T)$  – известные достаточно гладкие функции. Подобные системы используются для описания тепло-массопереноса [1], а также диффузионных и реакционно-диффузионных процессов [2]. Уравнения, составляющие систему, используются при описании механизмов лучистой теплопроводности [3], фильтрации жидкостей и газов [4], миграции биологических популяций [5] и др. Данные уравнения имеют, вообще говоря, параболический тип, который вырождается при  $K(0) = L(0) = 0$ . В связи с этим отметим, что наиболее часто в литературе встречается случай степенных функций

$$K(T) = T^\sigma, L(S) = S^\delta; \quad \sigma, \delta > 0 - \text{const}, \quad (2)$$

который дает хорошее приближение к реальности при сравнительной простоте исследования. Системы вида (1), (2) применяются в химической кинетике для описания процессов «реакция-диффузия» [6]. С помощью стандартной замены  $u = K(T)$ ,  $v = L(S)$  систему (1) можно привести к виду

$$\begin{cases} u_t = uu_{xx} + P(u)u_x^2 + F(u, v), \\ v_t = vv_{xx} + Q(v)v_x^2 + G(v, u), \end{cases} \quad (3)$$

в котором  $P(u)$ ,  $Q(v)$ ,  $F(u, v)$ ,  $G(v, u)$  – известные достаточно гладкие функции. Будем предполагать также, что  $P(0), Q(0) > 0$  и  $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$ . Последнее равенство гарантирует существование у системы (3) тривиального решения  $u, v \equiv 0$ .

Содержательный класс решений подобных систем составляют диффузионные (тепловые, фильтрационные) волны, распространяющиеся с конечной скоростью по нулевому фону. Применительно к системе (3) такая волна представляет собой два решения системы (возмущенное  $u, v \neq 0$  и тривиальное  $u, v \equiv 0$ ), непрерывно состыкованные вдоль некоторой линии – фронта волны. Несмотря на содержательные физическую и геометрическую интерпретации, решения типа диффузионных волн встречаются в литературе относительно редко. В этой связи особо выделим монографию академика А.А. Самарского с соавторами [3], а также работы академика А.Ф. Сидорова и его учеников [7]. В последних, в частности, предложены постановки краевых задач об иницировании волн фильтрации, а также эффективные методы построения решений этих задач в классе аналитических функций. В основе упомянутых методов нередко лежит метод степенных рядов. Он относительно прост в использовании и дает возможность раскрыть имеющиеся особенности. Отметим также, что построение и исследование диффузионных (тепловых) волн проводится в ряде работ авторов в одномерном [8] и существенно неодномерном [9] случаях.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-07-00407 А); РФФИ и Министерства по науке и технологиям Тайваня (проект № 20-51-S52003).

В настоящем докладе рассматривается задача с заданным диффузионным фронтом для системы (3), предполагающая краевое условие

$$u|_{x=a(t)} = v|_{x=a(t)} = 0. \quad (4)$$

Фронт волны задается достаточно гладкой функцией  $a(t)$ , такой, что  $a'(0) \neq 0$ . Задача (3), (4) – основной объект нашего исследования.

Справедлива следующая

**Теорема.** Пусть  $a(t), P(u), Q(v), F(u, v), G(u, v)$  – функции, аналитические в точках  $t = 0, u = 0, v = 0, u = v = 0$  соответственно. Пусть также  $z = x - a(t)$  и выполняется одно из двух условий:

- а)  $u_z|_{z=0}, v_z|_{z=0} \equiv 0,$
- б)  $u_z|_{z=0}, v_z|_{z=0} \not\equiv 0.$

Тогда задача (3), (4) имеет единственное решение типа диффузионной волны с аналитическими составляющими.

При доказательстве теоремы задача (3), (4) преобразуется к специальному виду, для которого строится мажорантная. Полученная мажорантная задача сводится к задаче типа Ковалевской с аналитическими входными данными. Решение строится в виде рядов по степеням переменной  $z$ . Коэффициенты рядов определяются рекуррентно согласно предложенной конструктивной процедуре, дающей тривиальное решение в случае а) и возмущенное нетривиальное в случае б). Соединяясь на линии фронта  $z = 0$ , они образуют кусочно-аналитическое решение типа волны диффузии. Отрезки полученных рядов в дальнейшем могут быть использованы для сравнения с численными расчетами, выполненными, например, на основе метода граничных элементов [8].

Настоящее исследование обобщает результаты, ранее полученные в статье [10] для случая  $P(u), Q(v) \equiv \text{const}$ . Другие работы, посвященные построению и исследованию решений рассмотренного типа для систем «реакция-диффузия», авторам неизвестны.

1. Stepanova I.V. Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity // Applied Mathematics and Computation. 2019. Vol. 343. P. 57-66.
2. Земсков Е.П. Неустойчивость Тьюринга в реакционно-диффузионных системах с нелинейной диффузией // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2013. Т. 144, № 4. С. 878-884.
3. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
4. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Clarendon Press, 2007.
5. Murray J. Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition. Interdisciplinary Applied Mathematics. N.Y.: Springer, 2002. Vol. 17.
6. Gambino G., Lombardo M.C., Sammartino M., Sciacca V. Turing pattern formation in the Brusselator system with nonlinear diffusion // Physical Review E. 2013. Vol. 88. P. 042925.
7. Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
8. Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 119-129.
9. Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т. 21, № 2(74). С. 56-65.
10. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Lempert A.A. Analytical solutions to the singular problem for a system of nonlinear parabolic equations of the reaction-diffusion type // Symmetry. 2020. Vol. 12, № 6. P. 999.

# МОДЕЛИ, МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ, ПРОГРАММНАЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ИНФРАСТРУКТУРА ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИЦИЙ СЕРВИСОВ

М.С. Климонов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

С каждым годом увеличивается количество Web-сервисов, которые используются для выполнения функций обработки и представления информации, так как это упрощает использование программного обеспечения и сокращает время разработки из-за экономии временных затрат на создание собственных модулей, реализующих аналогичную функциональность. В том числе в рамках геопортала ИДСТУ СО РАН были созданы информационно-вычислительные сервисы для обработки пространственных данных, работающих на основе WPS стандарта [1]. Часто для решения сложных задач требуется применение несколько сервисов в нужной последовательности, вводя повторяющиеся параметры и перенося результаты из одного сервиса в другой. Для автоматизации решения этих задач создаются композиции сервисов, которые часто представляют в виде направленного ациклического графа [2], где вершины — это вызовы сервисов, а ребра — это результирующие данные, которые из одного сервиса передаются на вход другого.

В предстоящем исследовании на основе информации о вызовах сервисов, а также их данных предполагается создание алгоритма для поиска связей между различными сервисами: выявления всевозможных композиций, поиск наиболее популярных узлов для создания связей, а также ранжирование существующих композиций с целью последующего внедрения в распределенную информационно-вычислительную среду геопортала [3].

В частности, при создании данного алгоритма планируется решить следующие задачи:

- поиск связей между Web-сервисами;
- создание направленного ациклического графа;
- редукции множества подграфов;
- поиск изоморфных графов;
- построение и запуск композиций сервисов;
- создание платформы для совместного использования сервисов.

На данный момент собрана информация об использовании сервисов, реализован алгоритм построения графов, редукции множества графов, поиск и построение изоморфных графов. Далее планируется создание платформы для построения и запуска композиций сервисов.

1. Schut P. OpenGIS ® Web Processing Service. Open Geospatial Consortium. 2007. № 6. P. 1-3.
2. Xie G., Li R., Xiao X., Chen Y. A High-Performance DAG Task Scheduling Algorithm for Heterogeneous Networked Embedded Systems // Proc. of IEEE 28th Intern. Conf. Advanced Information Networking and Applications. 2014. P. 1011–1016.
3. Федоров Р.К., Бычков И.В., Шумилов А.С., Ружников Г.М. Система планирования и выполнения композиций веб-сервисов в гетерогенной динамической среде // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 6. С. 18 – 35.

## ПРИМЕНЕНИЕ ДИЗЬЮНКТИВНЫХ ДИАГРАММ В ПРЕПРОЦЕССИНГЕ КОНЬЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ

В.С. Кондратьев

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[vikseko@gmail.com](mailto:vikseko@gmail.com)

Дизьюнктивные диаграммы (DJD) — это диаграммы решений специального вида, впервые представленные в работе [1]. Данный тип диаграмм позволяет эффективно, т.е. за полиномиальное время представлять формулу, заданную дизьюнктивной нормальной формой (ДНФ), в виде графа. Если ДНФ является совершенной, то построенная по ней дизьюнктивная диаграмма будет полностью совпадать с упорядоченной сокращенной двоичной диаграммой решений (ROBDD) [2].

Пусть есть некая КНФ  $C_f(\gamma)$ , которая кодирует задачу поиска прообразов произвольного  $\gamma \in \text{Range } f$  и ДНФ  $D_f(\gamma)$ , полученная отрицанием КНФ  $C_f(\gamma)$ . Пусть  $X$  — множество переменных, которые встречаются в  $D_f(\gamma)$  и в  $C_f(\gamma)$ . Далее, используя алгоритмы из [1], построим по  $D_f(\gamma)$  ее представление в виде дизьюнктивной диаграммы, которую будем обозначать  $R_f(\gamma)$ . Дизьюнктивная диаграмма имеет две терминальные вершины, обозначаемые символами «1» и «?». Мы можем представить в виде набора литералов каждый путь в диаграмме, ведущий из какой-либо корневой вершины в одну из терминальных. Если  $\pi$  — произвольный такой путь, то через  $X_\pi$  обозначим множество переменных, приписанных его вершинам, а через  $\alpha_\pi$  обозначим соответствующий  $\pi$  набор значений переменных из  $X_\pi$ . Пусть  $\Pi_f$  — множество всех путей в  $R_f(\gamma)$ , в вершину ?, а  $\Delta_f$  — множество наборов значений переменных из  $X_{\Pi_f}$ . Рассмотрим произвольный путь  $\pi \in \Pi_f$ . Из свойств дизьюнктивных диаграмм следует, что если  $\alpha$  — набор, выполняющий  $C_f(\gamma)$ , то обязательно найдется такой  $\alpha_\pi$ , что множество значений координат вектора  $\alpha_\pi$  образует подмножество в множестве значений координат вектора  $\alpha$ . При этом опять-таки из свойств DJD следует, что мощность множества  $\Delta_f$  ограничена полиномом от размера формулы  $C_f(\gamma)$ . Таким образом, мы можем попытаться найти набор, выполняющий  $C_f(\gamma)$ , решая SAT-задачу для КНФ вида  $C_f(\gamma, \alpha_\pi)$  по всем  $\pi \in \Pi_f$ . В большинстве случаев, когда КНФ  $C_f(\gamma)$  кодирует трудную задачу, КНФ вида  $C_f(\gamma, \alpha_\pi)$  тоже весьма трудны. Однако, хотя в большинстве случаев решение SAT-задачи в отношении КНФ вида  $C_f(\gamma, \alpha_\pi)$  не даст нам выполняющий набор для  $C_f(\gamma)$ , мы можем решать такие задачи с неким заданным ограничением по времени решения, и в случае, если какой-либо ответ был получен, использовать его для упрощения исходной задачи. Здесь стоит отметить, что в том случае, когда КНФ вида  $C_f(\gamma, \alpha_\pi)$  оказывается невыполнимой, мы можем перестроить диаграмму с учетом этой информации, перенаправив путь  $\pi$  из терминальной вершины ? в терминальную вершину 1. При построении КНФ по DJD с перенаправленными путями мы получим КНФ  $C_f^*(\gamma)$ , эквивалентную исходной  $C_f(\gamma)$ , но содержащую дополнительную информацию, потенциально полезную для решения.

С учетом всего сказанного, сформулируем следующий алгоритм препроцессинга произвольной КНФ.

1. По исходной КНФ  $C_f(\gamma)$  строится дизьюнктивная диаграмма  $R_f(\gamma)$ .
2. Из диаграммы выделяется множество путей  $\Pi_f$  из корневых вершин в терминальную вершину ?. Для каждого пути  $\pi \in \Pi_f$  строится  $\alpha_\pi$  — индуцированный  $\pi$  набор значений переменных из  $X_\pi$ .

3. SAT-решатель, выступающий в роли SAT-оракула, с заданным ограничением по времени отрешивает SAT-задачи в отношении КНФ вида  $C_f(\gamma, \alpha_\pi)$ .

4. Для каждой  $C_f(\gamma, \alpha_\pi)$ , для которой была доказана невыполнимость, соответствующий ей путь  $\pi$  перенаправляется из терминальной вершины  $?$  в терминальную вершину 1 и в диаграмме склеиваются дубликаты вершин (если они есть).

5. По получившейся диаграмме строится новая КНФ  $C^*_f(\gamma)$ .

В ходе экспериментов была написана программа на языке программирования Python, реализующая построение дизъюнктивных диаграмм по произвольным КНФ и обладающая описанным выше функционалом. В роли SAT-оракула выступал программный комплекс PySAT [3]. Для тестирования эффективности DJD-препроцессинга использовались КНФ, кодирующие эквивалентность различных алгоритмов сортировки натуральных чисел. Результаты экспериментов приведены в табл. 1. В последнем столбце таблицы приведена сумма времени препроцессинга и времени решения SAT для КНФ полученной в результате препроцессинга.

Таблица 1. Время решения SAT-задачи в отношении КНФ до и после препроцессинга

Имя задачи	Время решения до препроцессинга (с.)	Время выполнения препроцессинга (с.)	Время решения после препроцессинга (с.)	$\Sigma$
<b>BubbleVsPancakeSort</b>				
7_6	1725,24	94,85	1381,57	<b>1476,42 (85,58%)</b>
8_4	2802,54	68,43	2457,72	<b>2526,15 (90,14%)</b>
8_5	20591,8	105,38	12802	<b>12907,38 (62,68%)</b>
<b>PancakeVsInsertSort</b>				
7_5	<b>493,449</b>	65,75	536,613	602,363 (122,07%)
8_4	2652,48	74,14	2173,97	<b>2248,11 (84,76%)</b>
8_5	26542,4	106,42	12893,8	<b>13000,22 (48,98%)</b>
<b>PancakeVsSelectionSort</b>				
7_4	<b>370,71</b>	46,85	388,782	435,632 (117,51%)
7_5	951,087	76,1	<b>898,212</b>	974,312 (102,44%)
7_6	<b>2178,78</b>	121,01	2270,36	2391,37 (109,76%)

По результатам экспериментов можно сделать вывод, что на рассматриваемом классе задач препроцессинг КНФ при помощи дизъюнктивных диаграмм во многих случаях сокращает время решения SAT. Также заметим, что выигрыш от DJD-препроцессинга растет с ростом сложности рассматриваемых задач.

В экспериментах в качестве вычислительной платформы использовался кластер «Академик В.М. Матросов» ИДСТУ СО РАН [4].

1. Семенов А.А., Отпущенников И.В. Об одном классе решающих диаграмм // Автоматика и телемеханика. 2016. Т. 77, № 4. С. 617-628.
2. Bryant R. Graph-Based Algorithms for Boolean Functions Manipulation // IEEE Trans. on Comp. 1986. Vol. 100 (8). P. 677-691.
3. Ignatiev A., Morgado A., Marques-Silva J. PySAT: A Python Toolkit for Prototyping with SAT Oracles. Theory and Applications of Satisfiability Testing – SAT 2018. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 10929. Springer, Cham.
4. Иркутский суперкомпьютерный центр СО РАН [Электронный ресурс]: сайт. Иркутск: ИДСТУ СО РАН. URL: <http://hpc.icc.ru> (дата обращения 21.11.2021).

# ОБ АНАЛОГАХ СЛУЧАЯ БОБЫЛЕВА-СТЕКЛОВА ДЛЯ ГИРОСТАТА\*

А.А. Косов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[kosov\\_idstu@mail.ru](mailto:kosov_idstu@mail.ru)

Будем рассматривать для гиростата аналоги классического случая интегрируемости уравнений вращательного движения твердого тела Бобылева-Стеклова [1]. Уравнения движения возьмем в виде

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr + \lambda_2 r - b\gamma_3, \\ B\dot{q} &= (C - A)pr - \lambda_1 r - k_1 r\gamma_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} C\dot{r} &= (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + b\gamma_1 + k_1 q\gamma_1 \\ \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $(p, q, r)$  – вектор угловой скорости,  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  – единичный вектор вертикали, заданный проекциями на оси связанной системы координат,  $diag(A, B, C)$  – матрица тензора инерции относительно неподвижной точки,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  – вектор гиростатического момента, параметры  $b$  и  $k_1$  соответственно характеризуют моменты потенциальных и гироскопических сил, действующих на гиростат.

Если гиростатический момент отсутствует ( $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ), момент гироскопических сил не действует ( $k_1 = 0$ ), и моменты инерции удовлетворяют условию  $B = 2A$ , то система (1), (2) соответствует классическому случаю Бобылева–Стеклова [1].

**Утверждение 1.** В случае  $\lambda_2 = k_1 = 0, B = 2A$  система (1), (2) имеет семейство решений, для которых  $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \gamma_1(t), q(t) = q_0 = const, r(t) = 0,$  а  $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$  определяется из системы трех уравнений

$$\dot{\gamma}_1 = -q_0 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = (\alpha_0 + \alpha_1 \gamma_1) \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_3 = q_0 \gamma_1 - (\alpha_0 + \alpha_1 \gamma_1) \gamma_2. \quad (3)$$

Здесь  $q_0 \neq 0$  – произвольное вещественное число,  $\alpha_0 = \frac{\lambda_1}{A}, \alpha_1 = \frac{b}{Aq_0}$ .

**Утверждение 2.** В случае  $\lambda_1 = 0, (A - B)b + k_1 \lambda_2 = 0, \lambda_2 \neq 0, B \neq A$  система (1), (2) имеет семейство решений, для которых  $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \gamma_1(t), q(t) = q_0 = const, r(t) = 0,$  а  $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$  определяются из системы (3), где  $q_0 = \frac{\lambda_2}{A - B}, \alpha_0$  – произвольное вещественное число,  $\alpha_1 = \frac{b(A - B)}{A\lambda_2}$ .

**Утверждение 3.** В случае  $D = b^2(2A - B)^2 + 4Abk_1\lambda_2 \geq 0, k_1 \neq 0, B \neq A$  система (1), (2) имеет семейство решений, для которых  $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \gamma_1(t), q(t) = q_0 = const, r(t) = 0,$  а  $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)$  определяются из системы (3), где в качестве  $q_0$  допускаются те из двух чисел  $q_0^+ = \frac{b(B - 2A) + \sqrt{D}}{2Ak_1}$  и  $q_0^- = \frac{b(B - 2A) - \sqrt{D}}{2Ak_1}$ , которые отличны от нуля и от  $\frac{\lambda_2}{A - B}$ , а числа  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  даются формулами  $\alpha_0 = \frac{\lambda_2 q_0}{(B - A)q_0 + \lambda_2}, \alpha_1 = \frac{b}{Aq_0}$ .

Система (3) имеет первые интегралы  $I_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, I_4 = \alpha_0 \gamma_1 + 0.5\alpha_1 \gamma_1^2 + q_0 \gamma_2 = c_4$  и интегрируется в эллиптических функциях. Используя первые интегралы  $I_3$  и  $I_4$ , выразим  $\gamma_3$  через  $\gamma_1$ ,

$$\gamma_3 = F(\gamma_1) = \sqrt{1 - \gamma_1^2 - \frac{1}{q_0^2}(c_4 - \alpha_0 \gamma_1 - 0.5\alpha_1 \gamma_1^2)^2}$$

\* Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 19-08-00746.

Теперь  $y_1(t)$  находится из первого уравнения системы (3) обращением эллиптического интеграла

$$\int \frac{dy_1}{F(y_1)} = -q_0(t + c_5). \quad (4)$$

Тем самым установлено, что при условиях утверждений 1–3 упоминаемые в них решения системы (1), (2) выражаются эллиптическими функциями времени.

Как известно [1], эллиптический интеграл вида (4) берется в элементарных функциях только в случаях, когда у полинома четвертой степени в подкоренном выражении имеются кратные корни. Иногда это дает возможность получить точное решение системы уравнений гиростата (1), (2), представленное элементарными функциями в явном виде.

**Пример.** Будем рассматривать трехпараметрическое семейство систем вида (1), (2), где свободными параметрами являются  $A, C, \lambda_2$ , удовлетворяющие неравенствам  $0 < A < C < 3A$ ,  $\lambda_2^2 \neq A^2$ , а остальные коэффициенты  $\lambda_1, k_1, b$  выражаются через параметры по формулам

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}(A+\lambda_2)}{9}, \quad k_1 = \frac{8\sqrt{3}\lambda_2}{9}, \quad b = \frac{8\sqrt{3}A}{9}.$$

Тогда каждая система из названного семейства имеет точное решение

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{t^2 - 6}{t^2 + 3} - \frac{\sqrt{3}}{9}, & q(t) &= 1, & r(t) &= 0, \\ y_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2 - 6}{t^2 + 3}, & y_3(t) &= -\frac{t}{t^2 + 3} + \frac{(t^2 - 6)t}{(t^2 + 3)^2} \\ y_2(t) &= \frac{5\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{t^2 - 6}{t^2 + 3} - \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{(t^2 - 6)^2}{(t^2 + 3)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, что для всех компонент решения существуют пределы

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} p(t) &= p_* = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} q(t) = q_* = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) = r_* = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y_1(t) &= y_{1*} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y_2(t) = y_{2*} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y_3(t) = y_{3*} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, данное решение описывает случай такого движения гиростата, когда далекое прошлое и далекое будущее абсолютно симметричны. Система медленно «выходит» из неустойчивого по Ляпунову стационарного состояния  $(p_*, q_*, r_*, y_{1*}, y_{2*}, y_{3*})$ , в котором находилась в бесконечно далеком прошлом (при  $t \rightarrow -\infty$ ), совершает интенсивное движение в настоящем (на сравнительно коротком интервале времени вблизи нуля) и медленно возвращается в то же самое неустойчивое стационарное состояние в бесконечно далеком будущем (при  $t \rightarrow +\infty$ ). При этом постоянно действуют как момент потенциальных сил ( $b \neq 0$ ), так и момент гироскопических сил ( $k_1 \neq 0$ ), присутствует также постоянный гиростатический момент ( $\lambda \neq 0$ ).

Отметим, что при действии момента гироскопических сил (т.е. при  $k_1 \neq 0$ ) в отличие от классического случая уже не удастся получить в утверждениях 2 и 3 семейство решений с произвольным  $q_0 \neq 0$ . Зато в них не требуется выполнения довольно жесткого условия на равенство моментов инерции  $B = 2A$ .

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М. Гостехиздат. 1953. 287 с.

## О КЛАССИФИКАЦИИ ВЕБ-ТАБЛИЦ\*

О.Д. Костылева<sup>1,2</sup>, В.В. Парамонов<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>Институт математики и информационных технологий Иркутского государственного университета

<sup>2</sup>Институт динамики и систем управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[deltaonshape@mail.ru](mailto:deltaonshape@mail.ru)

В среде Интернет представлено огромное количество данных, представленных в формате HTML. Таблицы в таких веб-документах являются ценным источником информации, которая может использоваться для различного рода статистики, аналитики, интеграции и т.п. Учитывая теговую структуру HTML-документа, представляет интерес не столько извлечение таблиц и их данных, сколько их понимание – семантических связей между информацией, содержащейся в элементах таблицы.

Особенность электронных таблиц в целом состоит в том, что они создаются людьми и для использования людьми, а не машинами [1]. Соответственно каждый из авторов применяет удобные для него способы представления данных. Это приводит к значительному затруднению автоматического извлечения и обработки табличных данных. К тому же в зависимости от того, как представлены данные, требуется применять различные подходы к их обработке.

Несмотря на многообразие способов компоновки веб-таблиц в целом можно выделить несколько основных подходов. Однако в настоящее время полностью отсутствуют какие-либо стандарты классификации таких таблиц. Различные исследователи выделяют как разные типы, так и различное их количество. Цель данной работы – выделение основных способов компоновки табличных данных на основе результатов временных исследований.

Одна из первых работ, в которой приводятся наиболее обширные характеристики таблиц в Интернете, принадлежит Cafarella M. [2]. Авторы использовали HTML парсер, написанные вручную определители и статистически обученные классификаторы, чтобы извлечь таблицы и классифицировать их как имеющих или не имеющих реляционную модель представления [3]. Следующая статья, посвященная извлечению таблиц и их классификации, «Web-Scale Table Census and Classification» [4]. Crestan E. и соавторы использовали анализатор для извлечения 2,6 миллиарда таблиц и ввели классификацию, включающую вертикальные и горизонтальные списки, матрицы, календари, таблицы атрибутов/значений, перечисления, а также формы. Данная классификация стала основой для ряда других исследований в этой области. Так, например, Lautert L. [5] расширяет классификацию, разработанную Crestan E., добавляя следующие типы таблиц: краткие, вложенные, разделенные и многозначные, которые, в свою очередь, делятся на простые многозначные и составленные многозначные. В статье представлен классификатор веб-таблиц WTCClassifier, который представляет собой нейронную сеть с нейрофизиологией. В работе [6] описаны два подхода к классификации: одношаговый и двухшаговый. В первом, одношаговом подходе решаются задачи обнаружения таблиц и определения их типов одновременно. При двухшаговом подходе таблицы, используемые для верстки страниц, отбрасываются сразу после этапа классификации. Lehmberg O. и соавторы [7] извлекли и классифицировали таблицы из версии Commoncrawl за июль 2015 года с использованием платформы WebDataCommons. Дополнительно были разработаны методы определения ориентации таблиц, строки заголовка и ключевого столбца. В результате извлекаются вертикальные и горизонтальные списки, таблицы сущностей и матрицы. В 2017 году Nishida K. [8] опубликовал статью,

---

\* Работа поддержана РФФИ, грант 18-71-10001.

в которой была представлена технология классификации таблиц, которая сочетает в себе рекуррентную нейронную сеть (RNN) и сверточную нейронную сеть (CNN). Кроме того, в этой статье вводится классификация таблиц, которая ранее не использовалась, а именно, появляются новые обозначения: реляционные таблицы, таблицы сущностей. В работе Roldan J. [9] задача классификации берет предварительно извлеченную таблицу и возвращает матрицу, каждый компонент которой определяет функцию ячейки. В результате можно получить такие таблицы, как таблица без ячеек метаданных, таблица, в которой метаданные находятся в верхних строках, таблица, в которой метаданные находятся в левых столбцах, или таблица, в которой метаданные находятся в верхнем левом углу. Gasemi-Gol M. и Sekeli P. [10] в своих работах представили TabVec, являющийся неконтролируемым методом встраивания таблиц в векторное пространство с минимальным вмешательством пользователя. Используемая ими таксономия включает таблицы сущностей, реляционные таблицы, матрицы, списки. В работе [11] представлен метод предварительной обработки TUTA, основанный на двумерном дереве для определения координат ячеек и расстояния между ячейками в обычно структурированных таблицах. Касательно классификации, они используют таблицы следующих типов: реляционные, таблицы сущностей, матрицы, списки.

Проведя анализ всех используемых таксономий, можно прийти к выводу, что матричные таблицы, определения которых может различаться в нескольких работах, сводятся к матрице (таблицы, которые имеют значения на стыках строк и столбцов, при этом заголовки находятся слева и вверху). Таблицы атрибутов/значений по сути являются таблицами сущностей. Реляционные таблицы и таблицы сущностей делятся на вертикальные и горизонтальные списки. Таким образом, все множество веб-таблиц, содержащих данные, можно разбить на 3 класса (матрицы, таблицы сущностей и реляционные таблицы) и 2 подкласса (вертикальные и горизонтальные таблицы).

В свою очередь, для каждого из классов (за исключением класса таблиц разметки) целесообразно применять определенные подходы к извлечению данных. Таким образом, определение принадлежности таблицы к тому или иному классу позволит повысить качество итоговых данных.

1. Paramonov V., Shigarov A., Vetrova V., Mikhailov A. Heuristic algorithm for re-covering a physical structure of spreadsheet header. Information Systems Architecture and Technology. 2020. AISC 1050. P. 140-149.
2. Cafarella M., Halevy A., Wang D., Wu E., Zhang Y. (). Webtuples: exploring the power of tables on the web. 2008. Proceedings of the VLDB Endowment. 1 (1). P. 538-549.
3. Relation Data Model. Tutorialspoint. URL: [https://www.tutorialspoint.com/dbms/relational\\_data\\_model.htm](https://www.tutorialspoint.com/dbms/relational_data_model.htm).
4. Crestan E., Pantel P. Web-scale table census and classification. 2011. Proceedings of the fourth ACM International Conference on Web search and data mining. P. 545-554.
5. Lautert L., Scheidt M., Dorneles C. Web table taxonomy and formalization. ACM SIGMOD Record 42.3. 2013. P. 28-33.
6. Lehmborg O., Ritze D., Meusel R., Bizer C. A large public corpus of web tables containing time and context metadata. Proceedings of the 25th International Conference Companion on World Wide Web. 2016. P. 75-76.
7. Eberius J., Braunschweig K., Hentsch M., Thiele M., Ahmadov A., & Lehner W. Building the dresden web table corpus: A classification approach. Proc. 2015 IEEE/ACM 2nd International Symposium on Big Data Computing (BDC). 2015. P. 41-50.
8. Nishida K., Sadamitsu K., Higashinaka R., Matsuo Y. Understanding the semantic structures of tables with a hybrid deep neural network architecture. Thirty-First AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2017.
9. Roldan J.C., Jimenez P., Szekely P., Corchuelo R. TOMATE: A heuristic-based approach to extract data from HTML tables. Information Sciences. 2021. 577. P. 49-68.

10. Ghasemi-Gol M., Szekely P. Tabvec: Table vectors for classification of web tables. 2018. ArXiv preprint arXiv:1802.06290.
11. Wang Z., Dong H., Jia R., Li J., Fu Z., Han S., Zhang D. TUTA: Tree-based Transformers for Generally Structured Table Pre-training. Proceedings of the 27th ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery & Data Mining. 2021. P. 1780-1790.

## О СТРАТЕГИЯХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ МЕЖДУ ФАЗАМИ В СОВРЕМЕННЫХ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ БУЛЕВОЙ ВЫПОЛНИМОСТИ\*

С.Е. Кочемазов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[veinamond@gmail.com](mailto:veinamond@gmail.com)

Современные алгоритмы решения проблемы булевой выполнимости (SAT) [1], как правило, основаны на концепции Conflict-Driven Clause Learning (CDCL) и реализуют поиск в глубину в дереве решений, дополненный работой с памятью, нехронологическими откатами и множеством различных эвристик. Начиная с 2015 года, многие SAT-решатели используют так называемые фазы решения, которые фактически представляют собой разные комбинации настроек эвристик алгоритма. Так, наиболее часто используются две фазы, которые отличаются в использовании разных эвристик выбора переменных ветвления и схем рестартов. При этом фазы сменяют друг друга в соответствии с определенным заранее расписанием.

В докладе на примере одного из современных SAT-решателей и набора тестовых примеров с SAT Competition 2021 будет произведена оценка того, какой потенциальный выигрыш можно получить от *хорошей* нетривиальной схемы переключения между фазами. Для этой цели будут зафиксированы возможные моменты, когда осуществляются переключения, и стратегия переключения будет интерпретирована как принятие решения: в соответствующие моменты переключаться на другую фазу или нет. Путем рассмотрения нескольких вариантов исходного SAT-решателя, в которых такие решения принимаются случайным образом, можно построить так называемый виртуальный лучший решатель (Virtual Best Solver), который будет (виртуально) реализовывать наилучшую комбинированную стратегию.

В завершающей части доклада будет рассмотрен предложенный в одном из SAT-решателей на соревновании SAT Competition 2021 [2] адаптивный вариант для переключения между фазами, другие возможные его реализации и проведено сравнение их эффективности на используемом наборе тестовых примеров.

1. Handbook of Satisfiability. Edited by A. Biere, M. Heule, H. van Maaren, T. Walsh. IOS Press. 2021.
2. Cherif M.S., Habet D., Terrioux C. Kissat MAB: Combining VSIDS and CHB through Multi-Armed Bandit // Proceedings of SAT Competition 2021: Solver and Benchmark Descriptions. 2021. P. 15-16.

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-07-00746.

# ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС АНАЛИЗА ДАННЫХ ХОЛТЕРОВСКОГО МОНИТОРИРОВАНИЯ ДЛЯ ПЕРСОНИФИЦИРОВАННОЙ МЕДИЦИНЫ

С.Г. Куклин<sup>1</sup>, А.Ю. Горнов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Иркутская государственная медицинская академия  
последипломного образования – филиал ФГБОУ ДПО РМАНПО Минздрава России

<sup>2</sup>Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН  
[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

Сердечно-сосудистые заболевания остаются ведущей причиной смертности в Российской Федерации. Исследование variability сердечного ритма методом точного холтеровского мониторинга является информативным и доступным методом, позволяющим выявить персональные особенности функционирования сердечно-сосудистой системы, в том числе связанные с дисфункцией вегетативной нервной системы. Параметры variability сердечного ритма традиционно регистрируются в течение 24 часов для последующего анализа ритмограмм. Практически все информативные параметры при мониторинге представлены в виде временных рядов. К сожалению, значительная часть работы врача автоматизирована слабо, что приводит к необходимости оперативно решать возникающие задачи анализа данных «вручную», теряя при этом драгоценное время квалифицированных специалистов.

В докладе обсуждается первая версия научного прототипа программного комплекса (ПК), предназначенного для интегрирования полезных алгоритмов, методик и вычислительных технологий анализа холтеровских рядов, как предложенных нами, так и заимствованных. Основным режим работы с ПК – интерактивный; для его поддержки реализована диалоговая система, позволяющая оперативно применять все реализованные в библиотеке ПК алгоритмы, контролировать ход вычислений, верифицировать постановки задач, визуализировать результаты. Недиалоговые интерфейсы выполнены с применением средств языка программной постановки задачи для ввода данных и специализированной файловой подсистемы ПК, позволяющей передавать результаты вычислений для дальнейшей обработки и/или визуализации в любое внешнее программное обеспечение.

Алгоритмическое наполнение ПК в настоящее время содержит набор специализированных методов, включающих алгоритмы сглаживания с переменным размером окна, алгоритмы пошагового разложения в параболические базисы второго и третьего порядка, алгоритм кубического сплайн-разложения, алгоритмы оценки наклонов на участках ряда и другие.

Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Шелехова Ю.В., Храмцова Н.А., Онучина Е.В., Куклин С.Г. Динамики variability сердечного ритма у мужчин работоспособного возраста, страдающих язвенной болезнью желудка и двенадцатиперстной кишки, ассоциированной и неассоциированной с инфекцией *Helicobacter Pylori* // ЭНИ Забайкальский медицинский вестник. 2015. № 2. С.13–16.
2. Горнов А.Ю. Технология проектирования программных комплексов для задач оптимального управления // Вестник Иркутского гос. техн. ун-та. 2004. № 1 (17). С. 148–153.
3. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009. 278 с.

## ПРОИЗВЕДЕНИЕ МОЙЛА ДЛЯ ПАРАГРАССМАНОВОЙ АЛГЕБРЫ ПОРЯДКА 2

Ю.А. Марков, М.А. Маркова

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[markov@icc.ru](mailto:markov@icc.ru), [markova@icc.ru](mailto:markova@icc.ru)

Рассмотрена алгебра параграссмановых чисел  $\xi_k$  и  $\bar{\xi}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , имеющая порядок  $p = 2$  и находящаяся в инволюции, т.е. удовлетворяющая следующим соотношениям [1]:

$$\begin{aligned} \xi_i \xi_j \xi_k + \xi_k \xi_j \xi_i &= 0, & \bar{\xi}_i \bar{\xi}_j \bar{\xi}_k + \bar{\xi}_k \bar{\xi}_j \bar{\xi}_i &= 0, \\ \bar{\xi}_i \xi_j \xi_k + \xi_k \xi_j \bar{\xi}_i &= 0, & \xi_i \bar{\xi}_j \bar{\xi}_k + \bar{\xi}_k \bar{\xi}_j \xi_i &= 0, \\ \xi_i \bar{\xi}_j \bar{\xi}_k + \bar{\xi}_k \xi_j \xi_i &= 0, & \bar{\xi}_i \xi_j \xi_k + \xi_k \xi_j \bar{\xi}_i &= 0, \\ \overline{(\bar{\xi}_i)} &= \xi_i, & \overline{(\xi_i \xi_j)} &= \bar{\xi}_j \bar{\xi}_i. \end{aligned} \quad (1)$$

В данной алгебре на основе парафермионных когерентных состояний введено некоммутативное, ассоциативное произведение звездочка  $*$  (произведение Мойла), которое является прямым обобщением аналогичного понятия в алгебре грассмановых чисел, имеющей порядок  $p = 1$  [2]. Произведение такого типа возникает естественным образом при вычислении матричных элементов сложных операторных выражений в базисе парафермионных когерентных состояний [3]. Произведение Мойла для двух функций  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ , принимающих значения в параграссмановой алгебре, определяется с помощью следующего выражения:

$$\mathcal{A}(\bar{\xi}, \xi) * \mathcal{B}(\bar{\xi}, \xi) = \mathcal{A}(\bar{\xi}, \xi) \left[ \iint e^{-\frac{1}{2}[\mu, \bar{\xi}]} e^{-\frac{1}{2}[\bar{\mu}, \mu]} e^{\frac{1}{2}[\mu, \bar{\xi}]} \right] (d\mu)_2 (d\bar{\mu})_2 \mathcal{B}(\bar{\xi}, \xi),$$

где меры интегрирования определяются как  $(d\mu)_2 \equiv d^2\mu_2 d^2\mu_1$ ,  $(d\bar{\mu})_2 \equiv d^2\bar{\mu}_1 d^2\bar{\mu}_2$ .

Далее рассмотрена алгебра операторов рождения  $\hat{a}_k^\pm$  и уничтожения  $\hat{a}_k^\mp$ , подчиняющихся параферми-статистике того же порядка  $p = 2$ . Эти операторы удовлетворяют системе тринейных соотношений параферми алгебры [4]:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i^\pm \hat{a}_j^\mp \hat{a}_k^\pm + \hat{a}_k^\pm \hat{a}_j^\mp \hat{a}_i^\pm &= 2\delta_{ij} \hat{a}_k^\pm + 2\delta_{kj} \hat{a}_i^\pm, \\ \hat{a}_i^\pm \hat{a}_j^\mp \hat{a}_k^\mp + \hat{a}_k^\mp \hat{a}_j^\mp \hat{a}_i^\pm &= 2\delta_{ij} \hat{a}_k^\mp, \\ \hat{a}_i^\pm \hat{a}_j^\pm \hat{a}_k^\pm + \hat{a}_k^\pm \hat{a}_j^\pm \hat{a}_i^\pm &= 0, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

В частном случае, когда  $N = 2$  доказано следующее

**Утверждение.** Алгебра операторов рождения и уничтожения  $\hat{a}_k^\pm$ , подчиняющихся параферми-статистике порядка  $p = 2$ , уравнение (2), и алгебра параграссмановых чисел  $\xi_k$  и  $\bar{\xi}_k$  того же порядка (1), снабженная произведением Мойла, являются изоморфными [5]. Другими словами, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_i * \xi_j * \bar{\xi}_k + \bar{\xi}_k * \xi_j * \bar{\xi}_i &= 2\delta_{ij} \bar{\xi}_k + 2\delta_{kj} \bar{\xi}_i, \\ \xi_i * \bar{\xi}_j * \xi_k + \xi_k * \bar{\xi}_j * \xi_i &= 2\delta_{ij} \xi_k + 2\delta_{kj} \xi_i, \\ \bar{\xi}_i * \xi_j * \xi_k + \xi_k * \xi_j * \bar{\xi}_i &= 2\delta_{ij} \xi_k, & \xi_i * \bar{\xi}_j * \bar{\xi}_k + \bar{\xi}_k * \bar{\xi}_j * \xi_i &= 2\delta_{ij} \bar{\xi}_k, \\ \xi_i * \xi_j * \xi_k + \xi_k * \xi_j * \xi_i &= 0, & \bar{\xi}_i * \bar{\xi}_j * \bar{\xi}_k + \bar{\xi}_k * \bar{\xi}_j * \bar{\xi}_i &= 0. \end{aligned}$$

В работе также обсуждалась возможность обобщения полученного результата на случай, когда  $N = 3$  и/или когда параграссманова и параферми алгебры имеют порядок

$p = 3$ . Показано, что в силу громоздкости вычислений прямой подход при доказательстве изоморфизма двух алгебр, использованный в работе, становится неэффективным при  $N \geq 3$  и/или  $p \geq 3$ , что требует развития качественно иного подхода.

1. Omote M., Kamefuchi S. Paragrassmann algebras and para-Fermi systems // Lett. Nuovo Cimento. 1979. Vol. 24. P. 345-350.
2. Daoud M. Covariance of the Grassmann star product // Rep. Math. Phys. 2003. Vol. 52. P. 281–294.
3. Markov Yu.A., Markova M.A., Bondarenko A.I. Path integral representation for inverse third order wave operator within the Duffin-Kemmer-Petiau formalism. I // Journal of High Energy Physics. 2020. Vol. 7. P. 094 (33).
4. Green H.S. A generalized method of field quantization // Physical Review. 1953. Vol. 90. P. 270–273.
5. Markov Yu.A., Markova M.A. Star product for para-Grassmann algebra of order two // Advances in Applied Clifford Algebras. 2021. Vol. 31. P. 27 (18).

# ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ ФЕРМИОННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В КВАРК-ГЛЮОННОЙ ПЛАЗМЕ\*

Ю.А. Марков<sup>1</sup>, М.А. Маркова,<sup>1</sup> Н.Ю. Марков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

<sup>2</sup>Иркутский государственный университет

[markov@icc.ru](mailto:markov@icc.ru), [markova@icc.ru](mailto:markova@icc.ru), [karvedys1398@mail.ru](mailto:karvedys1398@mail.ru)

Рассмотрена задача построения гамильтоновой теории для коллективных продольно-поляризованных бесцветных глюонных возбуждений (плазмонов) и коллективных бесцветных кварк-антикварковых возбуждений (плазминов и антиплазминов) в высокотемпературной кварк-глюонной плазме. Для решения этой задачи применяется общий формализм построения теории волн в нелинейных средах с дисперсией, развитый в работах В.Е. Захарова [1, 2]. В рамках данного подхода в [3, 4] получены специальные канонические преобразования в виде функционального разложения вплоть до третьего порядка по квазичастичным операторам рождения и уничтожения плазмонов  $\hat{c}_k^{\dagger\alpha}$  и  $\hat{c}_k^\alpha$  и плазминов  $\hat{f}_q^{\dagger i}$  и  $\hat{f}_q^i$ :

$$\begin{aligned} \hat{a}_k^\alpha &= \hat{c}_k^\alpha + \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^6} \left[ V^{(1)\alpha\alpha_1\alpha_2}_{k,k_1k_2} \hat{c}_{k_1}^{\alpha_1} \hat{c}_{k_2}^{\alpha_2} + V^{(2)\alpha\alpha_1\alpha_2}_{k,k_1k_2} \hat{c}_{k_2}^{\dagger\alpha_2} \hat{c}_{k_1}^{\alpha_1} + V^{(3)\alpha\alpha_1\alpha_2}_{k,k_1k_2} \hat{c}_{k_1}^{\dagger\alpha_1} \hat{c}_{k_2}^{\dagger\alpha_2} \right] + \\ &+ \int \frac{dq_1 dq_2}{(2\pi)^6} \left[ F^{(1)\alpha i_1 i_2}_{k,q_1q_2} \hat{f}_{q_1}^{i_1} \hat{f}_{q_2}^{i_2} + F^{(2)\alpha i_1 i_2}_{k,q_1q_2} \hat{f}_{q_1}^{\dagger i_1} \hat{f}_{q_2}^{i_2} + F^{(3)\alpha i_1 i_2}_{k,q_1q_2} \hat{f}_{q_1}^{\dagger i_1} \hat{f}_{q_2}^{\dagger i_2} \right] + \dots, \\ \hat{b}_q^i &= \hat{f}_q^i + \int \frac{dk_1 dq_1}{(2\pi)^6} \left[ Q^{(1)i\alpha_1 i_1}_{q,k_1q_1} \hat{c}_{k_1}^{\alpha_1} \hat{f}_{q_1}^{i_1} + Q^{(2)i\alpha_1 i_1}_{q,k_1q_1} \hat{c}_{k_1}^{\alpha_1} \hat{f}_{q_1}^{\dagger i_1} + Q^{(3)i\alpha_1 i_1}_{q,k_1q_1} \hat{c}_{k_1}^{\dagger\alpha_1} \hat{f}_{q_1}^{i_1} + \right. \\ &\left. + Q^{(4)i\alpha_1 i_1}_{q,k_1q_1} \hat{c}_{k_1}^{\dagger\alpha_1} \hat{f}_{q_1}^{\dagger i_1} \right] + \dots, \end{aligned}$$

позволяющие упростить исходный гамильтониан взаимодействия мягких кварк-антикварковых и глюонных возбуждений, исключив из него вклад третьего порядка по взаимодействию  $\bar{H}_3$  и тем самым определить новый эффективный гамильтониан четвертого порядка  $\bar{H}_4$ , описывающий процессы упругого рассеяния плазминов друг на друге и упругого рассеяния плазмина на плазмоне:

$$\begin{aligned} \bar{H}_4 &= \frac{1}{2} \int \frac{dq dq_1 dq_2 dq_3}{(2\pi)^{12}} \tilde{T}_{q,q_1,q_2,q_3}^{(2)i i_1 i_2 i_3} \hat{f}_q^{\dagger i} \hat{f}_{q_1}^{\dagger i_1} \hat{f}_{q_2}^{i_2} \hat{f}_{q_3}^{i_3} (2\pi)^3 \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) + \\ &+ \int \frac{dq dq_1 dk_1 dk_2}{(2\pi)^{12}} \tilde{T}_{q,q_1,k_1,k_2}^{(2)i i_1 \alpha_1 \alpha_2} \hat{f}_q^{\dagger i} \hat{f}_{q_1}^{i_1} \hat{c}_{k_1}^{\dagger\alpha_1} \hat{c}_{k_2}^{\alpha_2} (2\pi)^3 \delta(q + k_1 - q_1 - k_2), \end{aligned}$$

где эффективные амплитуды упругого рассеяния плазмина на плазмине  $\tilde{T}_{q,q_1,q_2,q_3}^{(2)i i_1 i_2 i_3}$  и плазмина на плазмоне  $\tilde{T}_{q,q_1,k_1,k_2}^{(2)i i_1 \alpha_1 \alpha_2}$  имеют, соответственно, следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{q,q_1,q_2,q_3}^{(2)i i_1 i_2 i_3} &= T_{q,q_1,q_2,q_3}^{(2)i i_1 i_2 i_3} + 2 \frac{G_{q+q_1,q,q_1}^{\alpha i i_1} G_{q_2+q_3,q_2,q_3}^{*\alpha i_2 i_3}}{\omega_{q_2+q_3}^i - \omega_{q_2}^- - \omega_{q_3}^-} + 2 \frac{K_{-q_2-q_3,q_2,q_3}^{\alpha i_2 i_3} K_{-q-q_1,q,q_1}^{*\alpha i_1 i_1}}{\omega_{q_2+q_3}^i - \omega_{q_2}^- - \omega_{q_3}^-} + \dots, \\ \tilde{T}_{q,q_1,k_1,k_2}^{(2)i i_1 \alpha_1 \alpha_2} &= T_{q,q_1,k_1,k_2}^{(2)i i_1 \alpha_1 \alpha_2} - 4 \frac{G_{k_2,q,k_2-q}^{\alpha_2 i i'} G_{k_1,q_1,k_1-q_1}^{*\alpha_1 i_1 i'}}{\omega_{k_2}^i - \omega_{q_1}^- - \omega_{k_2-q_1}^-} + \frac{P_{k_2,k_2+q_1,q_1}^{\alpha_2 i' i_1} P_{k_1,k_1+q,q}^{*\alpha_1 i' i}}{\omega_{k_2}^i - \omega_{k_2+q_1}^- - \omega_{q_1}^-} - \dots, \end{aligned}$$

а функции  $G_{k,q,q_1}^{\alpha i i_1}$ ,  $K_{k,q,q_1}^{\alpha i i_1}$  и  $P_{k,q,q_1}^{\alpha i i_1}$  представляют собой эффективные вершины взаимодействия между плазмоном и двумя плазминами. Эффективные амплитуды

\* Работа Н.Ю. Маркова поддержана грантом для аспирантов и молодых сотрудников ИГУ № 091-21-306.

$\tilde{T}_{q,q_1,q_2,q_3}^{(2)ii_1i_2i_3}$  и  $\tilde{T}_{q,q_1,k_1,k_2}^{(2)ii_1\alpha_1\alpha_2}$  имеют простую диаграммную интерпретацию, которая представлена на рис. 1 и 2.

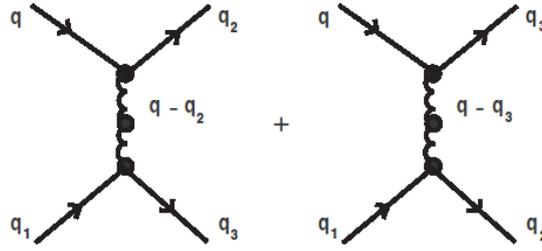


Рис. 1. Процессы упругого рассеяния (типа Меллера) плазмона на плазмине. Прямые и волнистые линии обозначают коллективные фермионные и бозонные возбуждения, соответственно

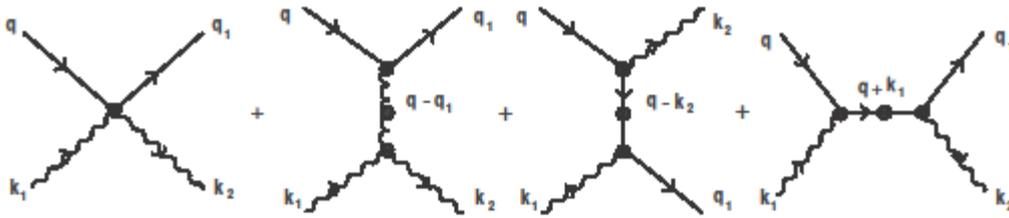


Рис. 2. Матричный элемент для процесса упругого рассеяния плазмона на плазмоне

В рамках предположения, что ансамбль взаимодействующих мягких ферми- и бозе возбуждений в условиях малой нелинейности имеет случайные фазы, введены в рассмотрение корреляционные функции следующего вида:

$$\langle f_q^{*i} f_q^j \rangle = \delta^{ij} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') n_q^-, \quad \langle \tilde{c}_k^{\dagger\alpha} \tilde{c}_k^{\beta} \rangle = \delta^{\alpha\beta} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') N_k^i$$

где  $n_q^-$  – функция распределения плотности числа плазминов и  $N_k^i$  – функция распределения плотности числа плазмонов.

Развитый подход использован далее для построения системы кинетических уравнений бальцмановского типа, описывающей процессы упругого рассеяния плазмона на плазмине или плазмоне в кварк-глюонной плазме и эффект так называемого нелинейного затухания Ландау. Данные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_q^-}{\partial t} + \mathbf{v}_q^- \cdot \frac{\partial n_q^-}{\partial \mathbf{x}} &= -\hat{\gamma}_F[n_q^-] n_q^- - n_q^- \Gamma_d[n_q^-] + (1 - n_q^-) \Gamma_i[n_q^-], \\ \frac{\partial N_k^i}{\partial t} + \mathbf{v}_k^i \cdot \frac{\partial N_k^i}{\partial \mathbf{x}} &= -\hat{\gamma}_B[n_q^-] N_k^i - N_k^i \Gamma_d[n_q^-, N_k^i] + (1 + N_k^i) \Gamma_i[n_q^-, N_k^i], \end{aligned}$$

где  $\mathbf{v}_q^- = \frac{\partial \omega_q^-}{\partial \mathbf{q}}$  и  $\mathbf{v}_k^i = \frac{\partial \omega_k^i}{\partial \mathbf{k}}$  – групповые скорости аномальной фермионной моды колебаний и бозонной моды продольных колебаний, соответственно, а

$$\hat{\gamma}_F[n_q^-] = \frac{4}{N_c} \int \frac{dq_1}{(2\pi)^3} n_{q_1}^- \text{Im} \left[ \tilde{T}_{q,q_1,q,q_1}^{(2)ii_1i_2i_3} \right], \quad \hat{\gamma}_B[n_q^-] = \frac{2}{N_c^2 - 1} \int \frac{dq}{(2\pi)^3} n_q^- \text{Im} \left[ \tilde{T}_{q,q,k,k}^{(2)ii_1\alpha_1\alpha_2} \right]$$

– декременты нелинейного затухания Ландау данных мод. Обобщенная скорость распада  $\Gamma_d$  и обратная скорость регенерации  $\Gamma_i$  для первого кинетического уравнения представляют собой нелинейные функционалы плотности числа плазминов:

$$\begin{aligned}\Gamma_d[n_q^-] &= \int dT_{qq \rightarrow qq} w_{qq \rightarrow qq}(q, q_1; q_2, q_3) n_{q_1}^- (1 - n_{q_2}^-) (1 - n_{q_3}^-), \\ \Gamma_i[n_q^-] &= \int dT_{qq \rightarrow qq} w_{qq \rightarrow qq}(q, q_1; q_2, q_3) n_{q_1}^- (1 - n_{q_1}^-) n_{q_2}^- n_{q_3}^-, \end{aligned}$$

в то время как для второго уравнения они представляют собой нелинейные функционалы плотности числа плазмонов и плазминов:

$$\begin{aligned}\Gamma_d[n_q^-, N_k^i] &= \int dT_{gq \rightarrow gq} w_{gq \rightarrow gq}(k, q_1; k_1, q_2) (1 + N_{k_1}^i) n_{q_1}^- (1 - n_{q_2}^-), \\ \Gamma_i[n_q^-, N_k^i] &= \int dT_{gq \rightarrow gq} w_{gq \rightarrow gq}(k, q_1; k_1, q_2) N_{k_1}^i (1 - n_{q_1}^-) n_{q_2}^-. \end{aligned}$$

Здесь меры интегрирования определены как

$$\begin{aligned}dT_{qq \rightarrow qq} &= (2\pi)^4 \delta(\omega_q^- + \omega_{q_1}^- - \omega_{q_2}^- - \omega_{q_3}^-) \delta(q + q_1 - q_2 - q_3) \frac{dq_1 dq_2 dq_3}{(2\pi)^9}, \\ dT_{gq \rightarrow gq} &= (2\pi)^4 \delta(\omega_k^i + \omega_{q_1}^- - \omega_{k_1}^i - \omega_{q_2}^-) \delta(k + q_1 - k_1 - q_2) \frac{dq_1 dq_2 dk_1}{(2\pi)^9}, \end{aligned}$$

а функции

$$\begin{aligned}w_{qq \rightarrow qq}(q, q_1; q_2, q_3) &= \frac{2}{N_c} \sum_{\lambda, \lambda_1, \dots = \pm} \tilde{T}_{q, q_1, q_2, q_3}^{(2)i_1 i_2 i_3} \tilde{T}_{q, q_1, q_2, q_3}^{*(2)i_1 i_2 i_3}, \\ w_{gq \rightarrow gq}(k, q_1; k_1, q_2) &= \frac{1}{N_c^2 - 1} \sum_{\lambda_1, \lambda_2 = \pm} \tilde{T}_{q_1, q_2, k, k_1}^{(2)i_1 i_2 \alpha_1} \tilde{T}_{q_1, q_2, k, k_1}^{*(2)i_1 i_2 \alpha_1} \end{aligned}$$

представляют собой вероятности упругого рассеяния двух плазминов друг на друге и плазмона на плазмине, соответственно. Суммирование проводится по состояниям спиральности плазминов  $\lambda, \lambda_1, \dots$ .

Выполнено детальное сравнение между найденными эффективными амплитудами в рамках псевдоклассической гамильтоновой теории и матричными элементами рассматриваемых процессов рассеяния, вычисленными ранее на основе высокотемпературной квантовой хромодинамики в приближении так называемых жестких температурных петель [5]. Это позволило, в частности, получить явный вид трехточечных и четырехточечных вершинных и коэффициентных функций, входящих в эффективные амплитуды и в канонические преобразования, соответственно, а также определить границы справедливости чисто классического подхода в описании динамики кварк-глюонной плазмы.

1. Захаров В. Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // Известия вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. С. 431-453.
2. Захаров В. Е., Кузнецов Е.А. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // Успехи физических наук. 1997. Т. 167, № 11. С. 1137-1167.
3. Марков Ю.А., Маркова М.А., Марков Н.Ю., Гитман Д.М. Гамильтонов формализм для бозе-возбуждений в плазме с неабелевым типом взаимодействия // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2020. Т. 157, вып. 2. С. 327-341.
4. Markov Yu.A., Markova M.A., Markov N.Yu. Hamiltonian formalism for Fermi excitations in a plasma with a non-Abelian interaction // E-print ArXiv of Cornell University Library: hep-th / 2108.07563. 68 p.
5. Markov Yu.A., Markova M.A. Nonlinear dynamics of soft fermion excitations in hot QCD plasma I: Soft-quark – soft-gluon scattering // Nuclear Physics A. 2006. Vol. 770. P. 162–209.

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УСЛОВНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

М.А. Новиков

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
nma@icc.ru

Изучается нелинейная механическая автономная консервативная система, в которой рассматривается вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки [1, 2]. При этом величина мгновенной угловой скорости  $q$  остается постоянной. Такая система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= -mz_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2, & \dot{\gamma}_2 &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ C\dot{r} &= mx_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 &= -p\gamma_2, \end{aligned} \quad (1)$$

при выполнении условий

$$\begin{aligned} F(p, r, \gamma_1, \gamma_3) &= (A - C)pr - m(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3) = 0, \\ F_0(p, r) &= A(A - 2C)x_0p - C(2A - C)z_0r = 0, \end{aligned}$$

где  $x_0 \neq 0 \neq z_0$ ;  $A, C$  ( $A \neq C$ ) – моменты инерции твердого тела относительно главных осей  $Ox, Oz$ ;  $p, q, r$  – проекции мгновенной угловой скорости на подвижные оси;  $x_0, z_0$  – координаты центра масс в подвижных осях;  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  – проекции ортов подвижных осей на неподвижную ось  $OZ$ , направленную вертикально вниз (углы Пуассона);  $m = Mg$  – приведенная величина;  $M$  – масса тела;  $g$  – ускорение свободного падения. При  $q \equiv 0$  для системы (1) известны общие интегралы: энергии, кинетического момента, Пуассона, условный интеграл Гесса.

Методом Рауса-Ляпунова [3-5] для рассматриваемой системы составлены стационарные движения. В докладе вторым методом Ляпунова [6] проведено исследование устойчивости по Ляпунову некоторых перманентных вращений. Функции Ляпунова для нахождения достаточных условий устойчивости строятся способом Четаева [7] связками из первых интегралов возмущенного движения.

1. Апфель П. Теоретическая механика. М.: ГИФМЛ, 1960. Т. 2.
2. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2002.
3. Ляпунов А.М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 276 – 319. Т. 1.
4. Routh E.J. A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steady motion. L.: McMillan. 1877.
5. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. L.: McMillan. 1884.
6. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7-263.
7. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962.

К РЕШЕНИЮ КВАДРАТИЧНЫХ ДВУХУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧ  
С БИМАТРИЧНОЙ ИГРОЙ НА НИЖНЕМ УРОВНЕ

А.В. Орлов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[anor@icc.ru](mailto:anor@icc.ru)

В работе исследуется один класс двухуровневых задач [1,2] с равновесием на нижнем уровне (см. [2], глава 3):

$$\left. \begin{aligned} & \langle x, Cx \rangle + \langle c, x \rangle + \langle y, D_1 y \rangle + \langle d_1, y \rangle + \langle z, D_2 z \rangle + \langle d_2, z \rangle \uparrow \max_{x,y,z}, \\ & x \in X, (y, z) \in NE(\Gamma B(x)), \end{aligned} \right\} (BP_{\Gamma B})$$

где  $X = \{x \in R^m \mid Ax \leq a, x \geq 0, \langle b_1, x \rangle + \langle b_2, x \rangle = 1\}$ ,  $NE(\Gamma B(x))$  – множество ситуаций равновесия по Нэшу в следующей ненормализованной биматричной игре:

$$\left. \begin{aligned} & \langle y, B_1 z \rangle \uparrow \max_y, \quad y \in Y(x) = \{y \mid y \geq 0, \langle e_{n_1}, y \rangle = \langle b_1, x \rangle\}, \\ & \langle y, B_2 z \rangle \uparrow \max_z, \quad z \in Z(x) = \{z \mid z \geq 0, \langle e_{n_2}, z \rangle = \langle b_2, x \rangle\}; \end{aligned} \right\} (\Gamma B(x))$$

$c, b_1, b_2 \in R^m$ ;  $y, d_1 \in R^{n_1}$ ;  $z, d_2 \in R^{n_2}$ ;  $a \in R^m$ ;  $b_1 \geq 0, b_1 \neq 0, b_2 \geq 0, b_2 \neq 0$ ;  
 $A, B_1, B_2, C, D_1, D_2$  – матрицы соответствующего размера. При этом  $C = C^T, D_1 = D_1^T, D_2 = D_2^T$  неотрицательно определены, так что целевая функция верхнего уровня является выпуклой.

Путем замены здесь задачи нижнего уровня ее условиями оптимальности, доказанными в [3], может быть сформулирована следующая одноуровневая невыпуклая задача оптимизации, эквивалентная задаче  $(BP_{\Gamma B})$  с точки зрения отыскания глобального решения:

$$\left. \begin{aligned} & - f_0(x, y, z) = \langle x, Cx \rangle + \langle c, x \rangle + \langle y, D_1 y \rangle + \langle d_1, y \rangle + \\ & \quad + \langle z, D_2 z \rangle + \langle d_2, z \rangle \uparrow \max_{x,y,z,\alpha,\beta}, \\ & (x, y, z) \in S = \{x, y, z \mid Ax \leq a, x \geq 0, \langle b_1, x \rangle + \langle b_2, x \rangle = 1, \\ & \quad y \geq 0, \langle e_{n_1}, y \rangle = \langle b_1, x \rangle, z \geq 0, \langle e_{n_2}, z \rangle = \langle b_2, x \rangle\}, \\ & \quad \langle b_1, x \rangle (B_1 z) \leq \alpha e_{n_1}, \langle b_2, x \rangle (y B_2) \leq \beta e_{n_2}, \\ & \quad \langle y, (B_1 + B_2) z \rangle = \alpha + \beta. \end{aligned} \right\} (PB)$$

Нетрудно видеть, что невыпуклость в этой задаче порождается набором из  $(n_1 + n_2)$  билинейных ограничений-неравенств и одним билинейным ограничением-равенством. Задача  $(PB)$  исследуется с помощью новых условий глобальной оптимальности (УГО), доказанных в [4] А.С. Стрекаловским для общих задач d.c. оптимизации с ограничениями типа неравенств и равенств. УГО являются ядром теории глобального поиска (ТГП), которая позволяет строить эффективные численные методы для решения задач невыпуклой оптимизации и исследования операций, в том числе задач с двухуровневой структурой [5, 6].

Для того, чтобы можно было применить ТГП к задаче  $(PB)$ , необходимо построить явные разложения всех невыпуклых ограничений задачи в виде разности двух выпуклых функций. Например, для  $i$ -го ограничения из первой группы  $n_1$  ограничений-неравенств это может быть сделано следующим образом. Запишем эти ограничения в скалярной форме:

$$f_i(x, z, \alpha) = \langle b_1, x \rangle \langle (B_1)_i, z \rangle - \alpha \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_1, \quad (1)$$

где  $(B_1)_i$  –  $i$ -я строка матрицы  $B_1$ . Пусть  $Q_i^T = (b_1^{(1)}(B_1)_i; b_1^{(2)}(B_1)_i; \dots; b_1^{(m)}(B_1)_i)$ , где  $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, \dots, b_1^{(m)}$  – компоненты вектора  $b_1$ ,  $Q$  –  $(m \times n_2)$ -матрица. Тогда можно преобразовать ограничения (1) в форму, стандартную для билинейных функций (см., например, [5]):  $f_i(x, z, \alpha) = \langle xQ_i, z \rangle - \alpha \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_1$ . В этом случае функции  $f_i$  могут быть легко декомпозированы на разность двух выпуклых с помощью известного свойства скалярного произведения:

$$f_i(x, z, \alpha) = g_i(x, z, \alpha) - h_i(x, z), \quad (2)$$

где  $g_i(x, z, \alpha) = \frac{1}{4} \|xQ_i + z\|^2 - \alpha$ ,  $h_i(x, z) = \frac{1}{4} \|xQ_i - z\|^2$ . Остальные невыпуклые ограничения разлагаются на разность двух выпуклых функций аналогичным образом (см. [3]). В результате имеем общую задачу д.с. минимизации с  $(n_1 + n_2 + 1)$  невыпуклым ограничением

$$\left. \begin{aligned} & f_0(x, y, z) \downarrow \min_{x, y, z, v}, \quad (x, y, z) \in S, \\ & f_i(x, z, \alpha) := g_i(x, z, \alpha) - h_i(x, z) \leq 0, \quad i \in \{1, \dots, n_1\} =: I, \\ & f_j(x, y, \beta) := g_j(x, y, \beta) - h_j(x, y) \leq 0, \quad j \in \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\} =: J, \\ & f_{n_1+n_2+1}(y, z, \alpha, \beta) := g_{n_1+n_2+1}(y, z, \alpha, \beta) - h_{n_1+n_2+1}(y, z) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (DCC)$$

где функции  $f_0; g_i, h_i \forall i \in I = \{1, \dots, n_1\}; g_j, h_j \forall j \in J = \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}; g_{n_1+n_2+1}$  и  $h_{n_1+n_2+1}$ , являются выпуклыми по совокупности всех своих переменных, как и множество

$$S = \{x, y, z \geq 0 \mid Ax \leq a, \langle b_1, x \rangle + \langle b_2, x \rangle = 1, \langle e_{n_1}, y \rangle = \langle b_1, x \rangle, \langle e_{n_2}, z \rangle = \langle b_2, x \rangle\}$$

Далее, используя точный штраф [4], можно представить задачу (DCC) в виде

$$\Phi_\sigma(x, y, z, \alpha, \beta) := F(x, y) + \sigma W(x, y, z, \alpha, \beta) \downarrow \min_{(x, y, v)}, \quad (x, y, z) \in S, \quad (DC(\sigma))$$

где  $\sigma > 0$  – штрафной параметр, а штрафная функция  $W(\cdot)$  определена следующим образом:

$$W(x, y, z, \alpha, \beta) := \max\{0, f_1(x, z, \alpha), \dots, f_{n_1}(x, z, \alpha), f_{n_1+1}(x, y, \beta), \dots, f_{n_1+n_2}(x, y, \beta)\} + |f_N(y, z, \alpha, \beta)|.$$

Исследовать данную задачу с точки зрения построения в ней методов решения предлагается с помощью соответствующих условий глобальной оптимальности [4].

1. Dempe S. Foundations of bilevel programming. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
2. Dempe S., Zemkoho A. (Eds.): Bilevel Optimization: Advances and Next Challenges. Springer International Publishing, Springer Nature Switzerland AG, 2020.
3. Orlov A.V. On Solving Bilevel Optimization Problems with a Nonconvex Lower Level: the Case of a Bimatrix Game / P. Pardalos et al / MOTOR 2021. Lecture Notes in Computer Science. 2021. Vol. 12755. P. 235–252.
4. Strekalovsky A.S. On a Global Search in D.C. Optimization Problems / M. Jacimovic et al / Optimization and Applications. OPTIMA 2019. Communications in Computer and Information Science. 2020. Vol. 1145. P. 222–236.
5. Стрекаловский А.С., Орлов А.В. Линейные и квадратично-линейные задачи двухуровневой оптимизации. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019.
6. Strekalovsky A.S., Orlov A.V. Global Search for Bilevel Optimization with Quadratic Data / S. Dempe, A. Zemkoho / Bilevel optimization: advances and next challenges. Springer International Publishing, Springer Nature Switzerland AG. 2020. P. 313–334.

## «СОЛНЕЧНЫЙ» МЕТОД: ДВУХУРОВНЕВЫЙ АЛГОРИТМ В ОДНОУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ\*

Д.А. Пасечнюк<sup>1</sup>, А.Ю. Горнов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт

<sup>2</sup>Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[pasechniuk.da@phystech.edu](mailto:pasechniuk.da@phystech.edu), [gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

Поиск резервов эффективности для решения одной из самых популярных и в то же время актуальных экстремальных задач, задач унимодальной оптимизации, заставляет пробовать все новые конструкции вычислительных алгоритмов в попытке экспериментальным путем найти дополнительные возможности ускорения. Представляется, что при наличии достаточно большого объема вычислительных фактов, демонстрирующих конкурентоспособность алгоритма, становится разумным тратить усилия на его строгое обоснование и получение оценок вычислительной сложности. При этом подходе становится целесообразным выносить на обсуждение сообщества специалистов также и первые наблюдения за работой алгоритма. В качестве курьезного нарушения этого правила можно упомянуть, например, изобретенный Ю.Е. Нестеровым более тридцати лет назад метод двумерного градиентного поиска («private communication»), развитие которого началась совсем недавно (см., напр., [1]).

Двухуровневые методы традиционно применяются в двухуровневых же задачах исследования операций. В докладе обсуждается исследуемая нами в последнее время конструкция подобного алгоритма для одноуровневой экстремальной задачи – задачи безусловной оптимизации, получившая условное название: «солнечный» метод. Основная идея подхода заключается в пошаговой недетерминированной декомпозиции множества оптимизируемых переменных на «зависимые» и «независимые»; зависимые переменные, которых больше, чем независимых, располагаются на случайных лучах, идущих из точки рекорда и управляемых независимыми переменными – откуда и название метода. Особенность идеи заключается, таким образом, в построении двухуровневой схемы алгоритма, верхний уровень которого полностью определяется переменными нижнего уровня; на каждой итерации исходная задача заменяется вспомогательной задачей малой размерности. Исследуются различные подходы к решению задачи оптимизации по независимым переменным, включающие как локальные, так и нелокальные поисковые алгоритмы. В частности, мы использовали общеизвестный симплексный метод Нелдера–Мида и развиваемый нами метод Q-поиска.

Результаты тестирования на задачах минимизации функции Розенброка–Скокова различных размерностей продемонстрировали достаточно регулярную, но скачкообразную сходимую алгоритма. Рассмотренные нами варианты алгоритма, к сожалению, несколько проигрывали методам сопряженного градиента, но практически всегда обгоняли методы наискорейшего спуска.

Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Пасечнюк Д.А., Стонякин Ф.С. Об одном методе минимизации выпуклой липшицевой функции двух переменных на квадрате // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. № 11 (3). С. 378–395.

---

\* Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос. регистрации: 121041300060-4).

## ПРОГРАММНОЕ СРЕДСТВО АНАЛИЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СФЕРЫ ОБЩЕСТВЕННОГО ПИТАНИЯ

Ю.В. Пестова

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[yupest@gmail.com](mailto:yupest@gmail.com)

Методология исследований сферы услуг находится на этапе становления, однако органы государственной власти, бизнес, потребители, заинтересованные в развитии данной сферы, нуждаются уже сегодня в своевременной, полной и достоверной информации, позволяющей оценивать эффективность проводимых решений. Объекты общественного питания часто характеризуются нестабильностью, что связано с недостаточным владением информацией и отсутствием опыта ведения бизнеса со стороны собственников. Для поддержки бизнеса общественного питания необходимо создание программных сервисов анализа, мониторинга, поддержки принятия решений, обеспечивающих информационную и аналитическую поддержку при открытии нового заведения, эффективность анализа текущей деятельности и минимизации возможных рисков [1].

Для создания систем мониторинга на основе полной и актуальной информации необходима разработка новых методов сбора данных из открытых источников и неструктурированной информации. В работе на основе результатов опросов экспертов определены основные понятия информационной модели: адрес, наличие доставки, средний чек, тип заведения, кухни, позиция меню, загрузка зала и др. В соответствии с данной моделью программными средствами web-scraping (извлечение информации с веб-ресурса и преобразование его в структурируемый вид) был осуществлен сбор данных с сайтов-агрегаторов и социальных сетей [2].

На основе полученных данных разработана модель прогнозирования вероятности закрытия заведений общественного питания с использованием метода машинного обучения случайного леса. Кроме того, для определения наиболее приемлемого местоположения нового заведения при открытии создана оригинальная математическая модель ранжирования районов города, основанная на нормированных показателях спроса и предложения, вероятности закрытия заведения и опционально средней стоимости квадратного метра арендного помещения за месяц. Методы мониторинга и модели прогнозирования реализованы в веб-ориентированном программном средстве, где создан оригинальный подход к формированию интерактивных панелей мониторинга и анализа, отражающих различные аспекты: описательную статистику по посещаемости и другим характеристикам заведений, подсчет потенциального числа посетителей и выручки, а также передвижения потребителей услуг за счет определения их геолокации.

В целом в исследовании предложен новый подход, позволяющий значительно сократить сроки и стоимость исследования рынка, а также предоставить предпринимателям без специализированных навыков возможность проводить исследование рынка самостоятельно за счет применения средства интерактивного отображения результатов мониторинга, анализа и прогнозирования социально-экономических показателей их деятельности.

1. Шилле Д. В. Оценка основных рисков в индустрии общественного питания / Д. В. Шилле, М. В. Бакуневичус, С. В. Пупенцова // Высокие технологии и инновации в науке: Сб. избранных статей Междунар. конф., Санкт-Петербург, 27 ноября 2020 года. С. 329-332.
2. Пестова Ю.В. Инструменты изучения потребностей и проблем территории по данным, публикуемым пользователями социальных сетей // Молодежь и современные информационные технологии: Сб. трудов. 2019. С. 413.

# ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМЫ

П.С. Петренко

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[petrenko\\_p@mail.ru](mailto:petrenko_p@mail.ru)

Рассматривается нестационарная система уравнений, содержащая в своей динамике подсистемы с непрерывным и дискретным временем,

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + C_k y_k + U(t)u_k(t), \quad t \in T_k = [t_k, t_{k+1}), \quad k = \overline{0, m}; \quad (1)$$

$$y_k = D_{k-1}x(t_{k-1}) + \sum_{i=0}^{k-1} G_{k-1,i}y_i + V_{k-1}v_{k-1} + V_{k-1}v_{k-1}, \quad k = \overline{1, m+1}, \quad (2)$$

где  $A(t), B(t), U(t), C_k, D_k, G_k, V_k$  – заданные вещественные матрицы соответствующих размеров, при этом  $\det A(t) \equiv 0$ ;  $x(t) \in C^1(T_k)$  –  $n$ -мерная непрерывная, а  $y_k$  –  $s$ -мерная дискретная компонента, описывающие состояние системы;  $u_k(t) \in R^l$  и  $v_k \in R^\lambda$  – непрерывное и дискретное управляющее воздействие, соответственно, ( $k = \overline{0, m}$ ). Систему (1), (2) будем называть вырожденной гибридной.

**Определение 1.** Решением системы (1), (2) будем называть набор векторов  $y_1, \dots, y_{m+1}$  и вектор-функцию  $x(t) \in C^1(T_k)$  ( $k = \overline{0, m}$ ), которые обращают уравнения (1), (2) в тождества при подстановке на  $T = [t_0, t_{m+1}]$ .

Пусть для системы (1), (2) определены начальные данные вида

$$x(t_k + 0) = a_k \quad (k = \overline{0, m}), \quad y_0 = b. \quad (3)$$

Из уравнений (1), (2) определим векторы  $y_1, \dots, y_{m+1}$ :

$$y_k = S_k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} P_{k,i} x(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} L_{k,i} v_i, \quad k = \overline{1, m+1}, \quad (4)$$

где коэффициенты  $S_k, P_{k,i}, L_{k,i}$  определяются из соответствующих рекуррентных соотношений. Пусть  $x_k = x(t)$ ,  $t \in T_k$  ( $k = \overline{0, m}$ ). Тогда, подставляя выражение для  $y_k$  из (4) в уравнение (1), получим семейство дифференциально-алгебраических уравнений [1]:

$$A(t)x_k'(t) = B(t)x_k(t) + C_k (S_k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} P_{k,i} x_i(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} L_{k,i} v_i) + U(t)u_k(t), \quad t \in T_k, \quad k = \overline{0, m}. \quad (5)$$

Данная работа посвящена исследованию управляемости гибридной системы (1), (2) и является продолжением результатов, полученных в [2, 3]. При этом анализ работы существенным образом опирается на методику исследования вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Получены достаточные условия полной и  $R$ -управляемости системы (1), (2).

1. Щеглова А.А., Петренко П.С.  $R$ -наблюдаемость и  $R$ -управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем // Известия вузов. Математика. 2012. Т. 3. С. 74-91.
2. Petrenko P.S. Controllability of a singular hybrid system // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2020. Vol. 34. P. 35-50.
3. Щеглова А.А. Двойственность понятий управляемости и наблюдаемости для вырожденных линейных гибридных систем // Автоматика и телемеханика. 2006. № 9. С. 99-119.

# МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОЦЕНИВАНИЯ РЕГИОНАЛЬНОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ БАЙКАЛЬСКОЙ ПРИРОДНОЙ ТЕРРИТОРИИ\*

В.Ф. Рапуга

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН  
[raputa@sscc.ru](mailto:raputa@sscc.ru)

Пусть  $G$  – плоскостной источник, представляющий собой, например, территорию города. Тогда поле длительного загрязнения на достаточном удалении от источника  $G$  можно описать следующим выражением [1]:

$$Q(x, y) = \frac{1}{2\pi u h} \iint_G \frac{m(\sigma, \mu) \cdot b(\varphi)}{D} d\sigma d\mu \quad (1)$$

Здесь  $m(\sigma, \mu)$  – эмиссия примеси из точки  $(\sigma, \mu) \in G$  и  $h$  – средняя скорость ветра и высота слоя перемешивания,  $b(\varphi) = g(\varphi + 180^\circ)$ ,  $g(\varphi)$  – роза ветров за рассматриваемый промежуток времени,

$$\varphi(x, y, \sigma, \mu) = \operatorname{arctg} \frac{y - \mu}{x - \sigma}, \quad D(x, y, \sigma, \mu) = \sqrt{(x - \sigma)^2 + (y - \mu)^2}.$$

Предполагается, что точка  $(x, y)$  удалена от площадного источника на расстояние не менее 5 – 7 км. В этом случае соотношение (1) достаточно надежно описывает процессы длительного загрязнения местности на таких расстояниях. На практике функция  $m(\sigma, \mu)$ , как правило, неизвестна. В этом случае интерпретация данных наблюдений с помощью (1) становится весьма затруднительной и необходимо использование различных приближений, основанных на свойствах подынтегральных функций, входящих в (1).

*а) Построение приближений методами теории потенциала.*

Для функции  $D(x, y, \sigma, \mu)$  имеет место представление

$$D(x, y, \sigma, \mu) = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta} = r \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \gamma},$$

где  $r = |\overrightarrow{OM}|$ ,  $r_1 = |\overrightarrow{OM_1}|$ ,  $\alpha = \frac{r_1}{r}$ ,  $\gamma = \cos \theta$ ,  $\theta$  – угол между векторами  $\overrightarrow{OM}$  и  $\overrightarrow{OM_1}$ ,  $O$  – начало координат,  $M$ ,  $M_1$  – внешняя и внутренняя точки области  $G$ .

Функция  $\frac{1}{D}$  является производящей функцией для полиномов Лежандра [2]

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\gamma) \quad (2)$$

где  $P_n(\gamma)$  – полином Лежандра  $n$ -го порядка.

Подставляя выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что  $\frac{1}{r}$  не зависит от переменных интегрирования, получим

$$Q(x, y) = \frac{c}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \iint_G \alpha^n P_n(\gamma) m(\sigma, \mu) b(x, y, \sigma, \mu) d\sigma d\mu = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots \quad (3)$$

где  $c = \frac{1}{2\pi u h}$ ,  $Q_1 = \frac{c}{r} \iint_G m(\sigma, \mu) b(x, y, \sigma, \mu) d\sigma d\mu$ ,

$$Q_2 = \frac{c}{r^2} \iint_G m \cdot b \cdot r_1 \cdot P_1(\gamma) d\sigma d\mu, \quad Q_3 = \frac{c}{r^3} \iint_G m \cdot b \cdot r_1^2 \cdot P_2(\gamma) d\sigma d\mu.$$

\* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования, грант 075-15-2020-787.

б) Использование обобщенной теоремы о среднем значении функции [3].

Применяя к соотношению (1) теорему о среднем из интегрального исчисления, получим

$$Q(x, y) = \frac{A(x, y)}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}} \quad (4)$$

где  $A(x, y) = \iint_G m(\sigma, \mu) \cdot g\left(\arctg \frac{y - \mu}{x - \sigma} + 180^\circ\right) d\sigma d\mu$ .

Если ограничиться рассмотрением областей  $G$  со сравнительно малыми угловыми размерами относительно точки  $(x, y)$ , то с учетом свойств розы ветров соотношение (4) можно представить в виде

$$Q(x, y) = \frac{\theta \cdot g\left(\arctg \frac{y}{x} + 180^\circ\right)}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}} \quad (5)$$

где  $\theta = \iint_G m(\sigma, \mu) d\sigma d\mu$  – суммарное поступление примеси с территории города.

Анализ зависимости (5) показывает, что для определения функции  $Q(x, y)$  достаточно оценить неизвестные параметры  $\theta, \alpha, \beta$ , используя, например, данные маршрутных наблюдений в определенных секторах выноса примесей.

в) Реконструкция полей выпадений тяжелых металлов в окрестностях Иркутска.

Апробация предложенных подходов проведена на данных маршрутных наблюдений загрязнения снежного покрова в окрестностях Иркутска [4]. На рис. 1 представлены результаты численного восстановления выпадений бериллия на маршрутах пробоотбора в зимнем сезоне 1995/96 гг.

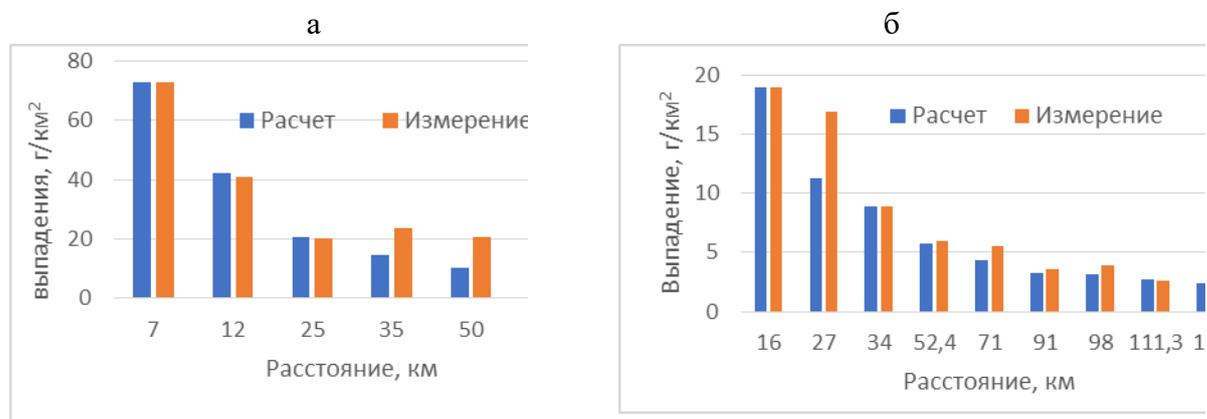


Рис. 1. Измеренные и восстановленные выпадения бериллия (г/км<sup>2</sup>) на маршрутах: Иркутск – Листвянка (а), Иркутск – Баяндай (б)

Анализ рис. 1 показывает вполне удовлетворительное согласие расчетов наблюдениям. На маршруте Иркутск – Баяндай (рис. 1а) в точках 7 км, 12 км и 25 км рассчитанные и измеренные значения практически совпали. В точках же 35 км, 50 км, 65 км наблюдается систематическое превышение измеренных значений бериллия над рассчитанными. Это обстоятельство указывает на наличие дополнительных источников его поступления. В первую очередь к ним, по-видимому, следует отнести выбросы бериллия алюминиевым заводом г. Шелехова. Определенную роль в этих выпадениях играет также достаточно контрастная зимняя повторяемость направлений ветра на рассматриваемых территориях.

1. Рапута В.Ф., Олькин С.Е., Резникова И.К. Методы численного анализа данных наблюдений регионального загрязнения территорий площадным источником // Оптика атмосферы и океана. 2008. Т. 21, № 6. С. 558-562.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. Камынин Л.И. Курс математического анализа. М.: Изд-во МГУ, 1995. Т. 2. 624 с.
4. Королева Г.П., Горшков А.Г., Виноградова Т.П., Бутаков Е.В., Маринайте И.И., Ходжер Т.В. Исследование загрязнения снегового покрова как депонирующей среды (Южное Прибайкалье) // Химия в интересах устойчивого развития. 1998. Т. 6. С. 327-337.

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ BV-РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОГО ПРОЦЕССА ВЫМЕТАНИЯ

О.Н. Самсонок

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[olga.samsonyuk@icc.ru](mailto:olga.samsonyuk@icc.ru)

В докладе рассматривается управляемый процесс выметания с решениями ограниченной вариации, заданный соотношениями

$$dx(t) = f(t, x(t), y(t))dt + G(t, x(t))dw(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$-dy(t) \in N_{C(t, x(t))}(y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \in C(t_0, x_0), \quad (2)$$

$$dw(E) \in K \text{ для всех } E \in B_T. \quad (3)$$

Здесь  $T = [t_0, t_1]$  – заданный отрезок времени,  $K$  – выпуклый замкнутый конус в  $R^m$ ,  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$ ,  $w(\cdot)$  – вектор-функции ограниченной вариации, непрерывные справа на  $(t_0, t_1]$ ,  $x(t) \in R^n$ ,  $y(t) \in R^r$ ,  $w(t) \in R^m$ ,  $B_T$  – множество всех борелевских подмножеств отрезка  $T$ .

Предполагается, что функции  $f(t, x, y)$ ,  $G(t, x)$  непрерывны по всем аргументам и локально липшицевы по  $x, y$ , а также удовлетворяют условию не более чем линейного роста по  $x, y$ . Многозначное отображение  $C: T \times R^n \rightarrow \text{comp}(R^r)$ , где  $\text{comp}(R^r)$  – множество всех компактных подмножеств пространства  $R^r$ , удовлетворяет условиям:

- множество  $C(t, x)$  выпукло для всех  $(t, x) \in T \times R^n$ ;
- для некоторого  $L > 0$  и всех  $(s_1, x_1), (s_2, x_2) \in T \times R^n$  выполняется неравенство

$$d_H(C(s_1, x_1), C(s_2, x_2)) \leq L(|s_1 - s_2| + |x_1 - x_2|),$$

где  $d_H(A, B)$  – расстояние Хаусдорфа между компактными множествами  $A, B$ . Символ  $N_C(y)$  обозначает нормальный конус (в смысле выпуклого анализа) к множеству  $C$  в точке  $y$ .

В докладе обсуждается описание и свойства решений процесса выметания (1)–(3). Один из мотивов изучения данного процесса связан с вырожденными задачами оптимального управления системами с гистерезисными нелинейностями, релаксационное расширение которых нельзя описать через классические BV-решения соответствующих процессов выметания.

В системе (1)–(3) импульсное управление, заданное мерой  $dw \in C^*(T, K)$ , определяет поведение «движущегося» множества  $C(t, x)$  и приводит к появлению дифференциального включения с мерой (2). В докладе будет сформулировано понятие решения (2), отличающееся от определений BV-решений в работах [1–4] и опирающееся на понятие пополнения графика функции ограниченной вариации. Представленные результаты продолжают исследования, начатые в [5].

1. Marques M.D.R.M. Regularization and graph approximation of a discontinuous evolution problem // J. Differential Equations. 1987. Vol. 67. P. 145–164.
2. Moreau J.-J. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space // J. Differential Eq. 1977. Vol. 26. P. 347–374.
3. Kopfova J., Recupero V. BV-norm continuity of sweeping processes driven by a set with constant shape // J. Differential Equations. 2016. Vol. 261, № 10. P. 5875–5899.
4. Krejci P., Recupero V. Comparing BV solutions of rate independent processes // J. Convex. Anal. 2014. Vol. 21. P. 121–146.
5. Samsonyuk O.N., Timoshin S.A. Optimal control problems with states of bounded variation and hysteresis // J. Global Optim. 2019. Vol. 74, № 3. P. 565–596.

# О РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ\*

А.К. Свинин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[svinin@icc.ru](mailto:svinin@icc.ru)

В докладе рассматривается счетное множество дискретных уравнений [1, 2]

$$y_{n+1} \left( \sum_{j=0}^{s-1} y_{n+j} - H^{(s)} \right) = y_{n+s} \left( \sum_{j=0}^{s-1} y_{n+j+2} - H^{(s)} \right), \quad s \geq 2. \quad (1)$$

В работе [3] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $\{f_n\}$  удовлетворяет билинейному уравнению

$$f_n f_{n+s+2} = \alpha_n^{(s)} f_{n+1} f_{n+s+1} + G^{(s)} f_{n+2} f_{n+s}, \quad \alpha_{n+2}^{(s)} = \alpha_n^{(s)} \quad (2)$$

с некоторыми постоянными  $G^{(s)}$ ,  $\alpha_0^{(s)}$ ,  $\alpha_1^{(s)}$ . Тогда  $y_n = f_n f_{n+3} / (f_{n+1} f_{n+2})$  удовлетворяет уравнению (1).

Заметим, что уравнение вида (2) для любого  $s \geq 2$  представляет собой частный случай так называемого уравнения Хироты-Мивы.

ТЕОРЕМА 2. Любое решение уравнения (2) с  $s = 2$  является частным решением для уравнения (2) с  $s \geq 3$ .

Как следствие этих теорем получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Любое решение уравнения (1) с  $s = 2$  является частным решением для уравнения (2) с  $s \geq 3$ .

Тем самым показана совместность этого класса уравнений. Кроме того, в докладе представлен класс решений, связанных с целочисленными последовательностями, определяемыми линейными рекуррентными соотношениями

$$T_n = P_n T_{n-1} + Q T_{n-2}, \quad P_{n+2} = P_n.$$

ТЕОРЕМА 4. Последовательность  $\{y_n = T_n T_{n+3} / (T_{n+1} T_{n+2}); n \geq 0\}$  представляет решение уравнения (1) с подходящим параметром  $H^{(s)}$  для любого  $s \geq 2$ .

1. Svinin A.K. On some classes of discrete polynomials and ordinary difference equations // J. Phys. A: Math. Theor. 2014. Vol. 47. Art. No. 155201.
2. Svinin A.K. On integrals for some class of ordinary difference equations admitting a Lax representation // J. Phys. A: Math. Theor. 2016. Vol. 49. Art. No. 095201.
3. Hone A.N.W., Kouloukas T. E., Quispel G. R. W. Some integrable maps and their Hirota bilinear forms // J. Phys. A: Math. Theor. Vol. 51. Art. No. 044004.

---

\* Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (номер гос. регистрации 121041300058-1).

О ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ДЛЯ  
НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА\*

С.В. Свинина

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[svinina@icc.ru](mailto:svinina@icc.ru)

В докладе рассматривается дифференциально-алгебраическая система

$$A(x, t)\partial u/\partial t + Lu = f(x, t), \quad (1)$$

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_{\alpha}u, \quad L_{\alpha}u = B_{\alpha}(x, t)\partial u/\partial x_{\alpha} + C_{\alpha}(x, t)u,$$

заданная в цилиндре  $Q_T = G \times \{t: t_0 \ll t \ll T\}$ , основанием которого является  $p$ -мерный прямоугольный параллелепипед  $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p): x_{0,\alpha} \ll x_{\alpha} \ll l_{\alpha}, \alpha = \overline{1, p}\}$  с границей  $\Gamma$ ,  $(x, t) \in Q_T$ . Предполагается, что

$$\det A(x, t) = 0, \quad \det B_{\alpha}(x, t) = 0 \quad \forall \alpha = \overline{1, p} \text{ и } (x, t) \in Q_T. \quad (2)$$

Для системы (1) задаются следующие начально-краевые условия:

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u(x_1, \dots, x_{\alpha,0}, \dots, x_p, t) = \varphi_{\alpha}(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p, t), \quad (3)$$

которые считаются согласованными вместе со своими производными. Задачи (1)-(3) возникают, например, при описании движения тяжелого волчка с симметричной относительно оси волчка полостью, наполненной жидкостью; возмущения скорости и давления, возникающих на границе раздела двух сред. Для численного решения задач (1)-(3) применяется четырехточечная локально-одномерная разностная схема [1]. Вводится равномерная пространственно-временная сетка

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^p \overline{\omega}_{h_{\alpha}}, \quad \overline{\omega}_{h_{\alpha}} = \{x_{\alpha i_{\alpha}} = x_{\alpha,0} + i_{\alpha} h_{\alpha}; i_{\alpha} = \overline{0, N_{\alpha}}, \alpha = \overline{1, p}\}$$

$$\overline{\omega}_{\tau} = \{t_j = t_0 + j\tau; j = \overline{0, N_0}\},$$

где каждый отрезок  $[t_j, t_{j+1}]$  разбивается на  $p$  частей узлами  $t_{j+\alpha/p} = t_j + \alpha/p\tau$ ,  $\alpha = \overline{1, p-1}$ . Уравнению (1) ставится в соответствие цепочка  $\Pi = \{\Pi_{\alpha}; \alpha = \overline{1, p}\}$  разностных схем второго порядка аппроксимации по пространственным переменным и первого порядка по временной переменной:

$$\frac{1}{p} Ay_{\bar{t}} + W_{\alpha}y = f_{\alpha},$$

$$W_{\alpha}y = B_{\alpha}y_{\bar{x}_{\alpha}}^{i_0+\alpha/p} + C_{\alpha}y_{+2}^{i_0+\alpha/p}, \quad C = \sum_{\alpha=1}^p C_{\alpha}, \quad f = \sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha},$$

$$y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau} (y_{+2}^{i_0+\alpha/p} - y_{+2}^{i_0+(\alpha-1)/p})$$

$$y_{\bar{x}_{\alpha}}^{i_0+\alpha/p} = \frac{1}{h_{\alpha}} \left( \frac{1}{2} y_0^{i_0+\alpha/p} - 2y_1^{i_0+\alpha/p} + \frac{3}{2} y_{+2}^{i_0+\alpha/p} \right)$$

$$y_{+m}^{i_0+\alpha/p} = y(t_{i_0+\alpha/p}, x_{1, i_1+1}, \dots, x_{\alpha, i_{\alpha}+m}, \dots, x_{p, i_p+1}).$$

На языке Си написана программа, которая выполняет расчеты, связанные с реализацией цепочки разностных схем  $\Pi$ . Прделаны необходимые исследования.

1. Самарский А.А. Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1962. Т. 2, № 5. С. 787–811.

\* Работа выполнена в рамках базового проекта «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями», № 121041300060-4.

## НИЗКОПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ АТОМНЫЕ КЛАСТЕРЫ САТТОНА-ЧЕНА РАЗМЕРНОСТЕЙ ОТ 121 ДО 150 АТОМОВ

П.С. Сороковиков, А.Ю. Горнов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[sorokovikov.p.s@gmail.com](mailto:sorokovikov.p.s@gmail.com), [gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

Проблема оптимизации конформации атомных кластеров представляет собой одну из классических задач вычислительной химии и сводится к поиску глобального экстремума потенциальных функций – специальных моделей [1]. Потенциал Саттона-Чена [2] является одним из представителей указанного класса задач и применяется при исследовании свойств нанокластеров таких металлов, как золото, серебро, платина, медь, никель, родий. Целевая функция является невыпуклой, имеет очень большое и быстро растущее в зависимости от размерности задачи количество локальных оптимумов.

В открытых источниках [1–2] опубликованы результаты вычислительных экспериментов по оптимизации потенциала Саттона-Чена с числом атомов от 3 до 80. В статье авторов [3] исследованы задачи сверхбольших размерностей – от 81 до 120 атомов. Данная работа посвящена поиску вероятных оптимальных конфигураций для кластеров Саттона-Чена еще больших размерностей – от 121 до 150 атомов. Потенциальная функция имеет следующий вид:

$$f(x) = \varepsilon \sum_i \left[ \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \left( \frac{a}{r_{ij}} \right)^n - c \sqrt{\sum_{j \neq i} \left( \frac{a}{r_{ij}} \right)^m} \right] \rightarrow \min, \quad r_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^3 \left( x_{3(i-1)+k} - x_{3(j-1)+k} \right)^2}.$$

Здесь  $a = 1.0$ ,  $\varepsilon = 1.0$ ,  $m = 6.0$ ,  $n = 12.0$ ,  $c = 144.41$  – специальные параметры.

С применением специализированных алгоритмов и вычислительных технологий, описание которых опубликовано в [3], были выполнены системные численные расчеты для кластеров Саттона-Чена из 121–150 атомов с шагом 1 (см. табл. 1).

Таблица 1. Наилучшие найденные значения

N	Значение	N	Значение	N	Значение
121	-121197.8264	131	-131657.5239	141	-142357.5062
122	-122239.0746	132	-132408.3691	142	-143658.4131
123	-123161.0703	133	-133826.5881	143	-144933.3915
124	-124338.9616	134	-134447.5873	144	-145805.6373
125	-125544.1312	135	-135797.2059	145	-147004.2698
126	-126394.8683	136	-136779.1187	146	-147875.0114
127	-127376.7934	137	-137889.2534	147	-148892.0976
128	-128348.7348	138	-139220.3742	148	-149753.7148
129	-129626.4128	139	-140605.8325	149	-151053.4418
130	-130585.2199	140	-141271.7881	150	-151808.6282

Авторам неизвестно о других попытках проведения системных вычислительных экспериментов по оптимизации потенциала Саттона-Чена указанных размерностей.

1. The Cambridge Energy Landscape Database. URL: <http://www-wales.ch.cam.ac.uk/CCD.html>.
2. Doye J.P.K., Wales D.J. Global minima for transition metal clusters described by Sutton–Chen potentials // *New journal of chemistry*. 1998. Vol. 22, № 7. P. 733–744.
3. Сороковиков П.С., Горнов А.Ю., Аникин А.С. Вычислительная технология исследования атомно-молекулярных кластеров Саттона-Чена сверхбольших размерностей // *Труды VIII Междунар. конф. «Системный анализ и информационные технологии» (САИТ–2019)*. М.: ФИЦ ИУ РАН, 2019. С. 86–94.

# КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ НЕВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ГЕНЕТИЧЕСКОГО ПОИСКА И РОЯ ЧАСТИЦ\*

П.С. Сороковиков<sup>1</sup>, Ф.В. Хандаров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

<sup>2</sup>Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова

[sorokovikov.p.s@gmail.com](mailto:sorokovikov.p.s@gmail.com), [fedor.khandarov@gmail.com](mailto:fedor.khandarov@gmail.com)

В работе предложен комбинированный алгоритм нелокальной оптимизации на основе методов генетического поиска и роя частиц, построенный с применением методик обучения с подкреплением. Разработанный метод представляет собой модификацию генетического алгоритма (Genetic Algorithm, GA [1–2]) с добавлением в него нового оператора, идея которого позаимствована у метода роя частиц (Particle Swarm Optimization, PSO [2–3]). В указанном алгоритме (GA-PSO), как и в методе роя частиц, каждый агент хранит координаты лучшего из найденных им приближений и наилучшее из решений, полученных всеми агентами, имеет свой вектор скорости перемещения.

Рассматривается следующая задача математического программирования:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in X, X = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Предложенный алгоритм GA-PSO реализован на языке C++ (GCC \ MinGW) и протестирован на коллекции тестовых задач при  $n = 100$ . Тестирование комбинированного алгоритма выполнялось в сравнении с алгоритмами GA, PSO и с методом дифференциальной эволюции (Differential Evolution, DE [4]). В силу стохастичности алгоритмов GA-PSO, GA, PSO, DE они запускались 100 раз из равномерно распределенных стартовых точек. Размер популяции равен 10. Критерием останова алгоритмов является превышение 10000 вызовов целевой функции. В табл. 1 приведено описание тестовых функций и обобщенные результаты тестирования алгоритмов в виде статистик по запускам (минимальное, максимальное, среднее значения, стандартное отклонение). На рис. 1 в виде графиков сходимости представлены усредненные результаты запусков алгоритмов. По горизонтальной оси отложено число вызовов целевой функции, по вертикальной – значение функции, соответствующее средней приспособленности популяции.

Таблица 1. Обобщенные результаты численного сравнения алгоритмов

Тестовая задача ( $n = 100$ )	Метод	Мин.	Макс.	Ср.	Откл.
1. Функция Розенброка (Rosenbrock) $f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (100 \cdot (x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2)$ , $X = [-2.048, 2.048]^n$ , $x_i^* = 1.0$ , $f^* = 0.0$	<b>GA-PSO</b>	<b>254.8842</b>	<b>705.5444</b>	<b>453.4915</b>	<b>90.69995</b>
	GA	511.555	1024.33	731.9892	96.86319
	PSO	2539.426	7275.745	4334.306	978.9711
	DE	320.519	885.369	575.2177	102.3638
2. Функция Растригина (Rastrigin) $f(x) = 10 \cdot n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 \cdot \cos(2\pi x_i))$ , $X = [-5.12, 5.12]^n$ , $x_i^* = 0.0$ , $f^* = 0.0$	<b>GA-PSO</b>	<b>127.352</b>	<b>205.7386</b>	<b>162.8864</b>	<b>16.11248</b>
	GA	157.962	234.456	198.2812	16.7402
	PSO	827.0293	1147.472	965.9948	62.71931
	DE	205.869	355.641	290.9179	28.55039

\* Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос. регистрации 121041300060-4).

Тестовая задача ( $n = 100$ )	Метод	Мин.	Макс.	Ср.	Откл.
3. Функция Гриванка (Griewank) $f(x) = 1 + \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^2}{4000} \right) - \prod_{i=1}^n \cos\left( \frac{x_i}{\sqrt{i}} \right),$ $X = [-600, 600]^n, x_i^* = 0.0, f^* = 0.0$	<b>GA-PSO</b>	<b>5.334219</b>	<b>17.47176</b>	<b>8.82176</b>	<b>1.884436</b>
	GA	24.0112	54.3471	39.2072	6.010382
	PSO	356.0443	795.485	523.8285	75.13192
	DE	8.29377	85.9536	25.27138	12.65583
4. Функция Саломона (Salomon) $f(x) = 1 - \cos\left( 2\pi \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) + 0.1 \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$ $X = [-100, 100]^n, x_i^* = 0.0, f^* = 0.0$	<b>GA-PSO</b>	<b>9.822386</b>	<b>15.0883</b>	<b>11.9566</b>	<b>1.049965</b>
	GA	14.29995	20.70039	17.34569	1.292973
	PSO	21.20047	29.92195	25.23108	1.821383
	DE	11.01763	16.84062	12.92484	1.08163

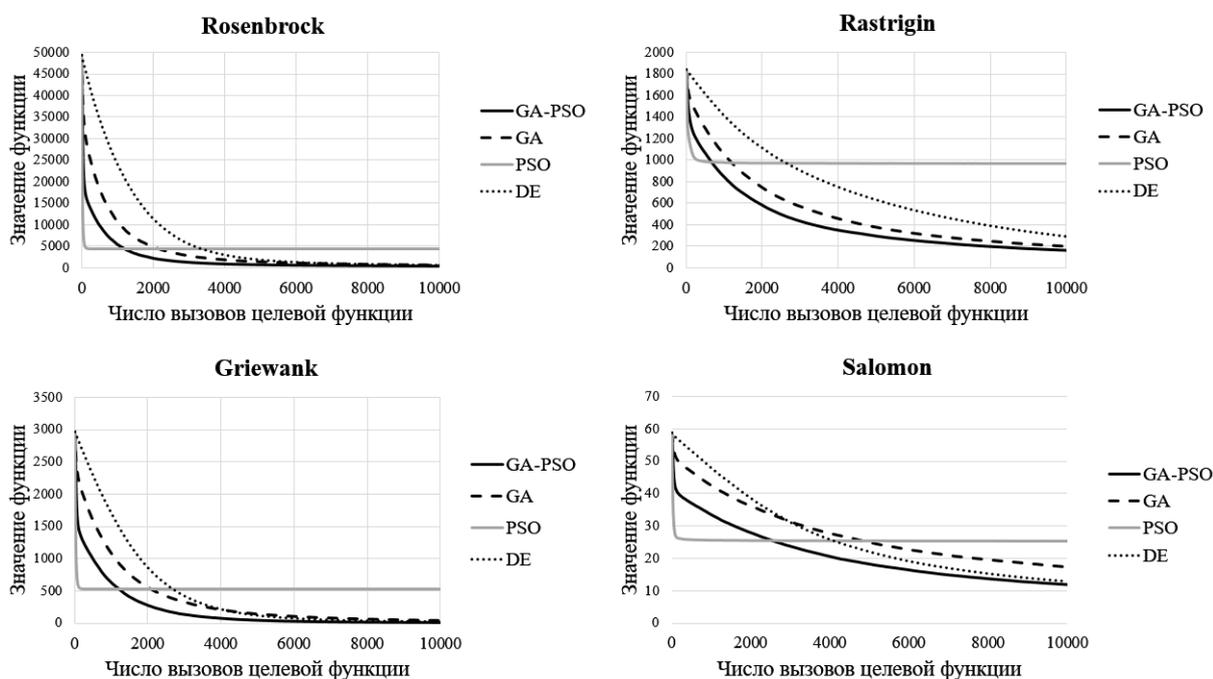


Рис. 1. Усредненные результаты запусков алгоритмов

В ходе тестирования алгоритм GA-PSO продемонстрировал более высокую эффективность в сравнении как с базовыми методами генетического поиска и роя частиц, так и с алгоритмом дифференциальной эволюции. Проведенные экспериментальные исследования свидетельствуют о перспективности реализованного алгоритма для решения задач невыпуклой оптимизации.

1. Mitchell M. An introduction to genetic algorithms. Cambridge: MIT Press, 1999. 158 p.
2. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. М.: Изд-во МГГУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 446 с.
3. Liu Y., Ling X., Shi Z., Lv M., Fang J., Zhang L. A survey on particle swarm optimization algorithms for multimodal function optimization // J. Software. 2011. Vol. 6, № 12. P. 2449–2455.
4. Storn R., Price K. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // Journal of global optimization. 1997. Vol. 11, № 4. P. 341–359.

# МУЛЬТИАГЕНТНЫЙ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫЙ ПОДХОД К ОБСЛЕДОВАНИЮ ПОЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ, ИНСПИРИРОВАННЫЙ ПОВЕДЕНИЕМ ОМАРОВ\*

А.А. Толстихин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[madstaylor93@gmail.com](mailto:madstaylor93@gmail.com)

В данной работе предлагается децентрализованный подход к управлению группой автономных роботов при решении задачи обследования некоего нестационарного поля концентрации. Под полем концентрации будем понимать объект, описываемый математическим скалярным двух- или трехмерным полем, изменяющимся во времени по заранее неизвестному закону. В зависимости от природы происхождения рассматриваемого поля концентрации постановки практических задач могут различаться. В данной работе рассматривается поле, образованное особями некоего биологического вида в заданной изолированной области. Движение особей в предложенной модели задается законами стайного поведения, предложенными Рейнольдсом [1]. Задача агентов поисковой группы сводится к обнаружению точки с максимальной концентрацией особей исследуемого вида в ее заданной окрестности и последующему отслеживанию перемещения данной точки в течение заданного промежутка времени.

В основе предлагаемого подхода лежат два закона: движение по приближенному градиенту, вдохновленное поведением омаров [2], и удержание агентов поисковой группы в заданной формации. Программно это реализуется через расчет двух сил, действующих на агентов на каждом шаге управления:

$$F_{i1} = \sum_{j \in N_i} \frac{(q_i - q_j)}{\|q_j - q_i\|^2 - L^2} \ln \left( \frac{d^2 - L^2}{\|q_j - q_i\|^2 - L^2} \right), \quad (1)$$

$$F_{i2} = \sum_{j \in N_i} \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|} (s_j - s_i), \quad (2)$$

где  $N_i$  — множество роботов, не включающее текущего  $i$ -го робота;  $d$  — желаемое расстояние между роботами;  $L < d$  — линейный размер роботов;  $q$  — вектор координат робота;  $s$  — измеренная величина физического поля роботом.

Кооперирующая сила (1) заставляет роботов выдерживать заданную формацию правильного  $n$ -угольника и обеспечивает отсутствие столкновений между ними, тогда как поисковая сила (2) направляет роботов в сторону предполагаемого экстремума поля.

Для оценки работоспособности предложенного подхода при решении поставленной задачи было проведено две серии экспериментов: программный эксперимент, реализованный в специализированной тестирующей среде, и физический эксперимент, выполненный в рамках программно-аппаратного комплекса TEMAR [3] на неголономных колесных роботах на базе LEGO EV3.

1. Reynolds C.W. Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model // SIGGRAPH Computer Graphics. 1987. Vol. 21, № 4. P. 25-34.
2. Grasso F.W., Basil J.A. and Atema J. Toward the convergence: robot and lobster perspectives of tracking odors to their source in the turbulent marine environment // Proc. of the 1998 IEEE Intern. Symposium on Intelligent Control (ISIC) held jointly with IEEE Intern. Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation (CIRA) Intell. 1998. P. 259-264.
3. Kostylev D.A., Tolstikhin A.A., Ul'yanov S.A. Development of the complex modelling system for intelligent control algorithms testing // Proc. Intern. Conf. 42nd International Convention MIPRO 2019. Opatija: MIPRO, 2019. Vol. 1, № 1. P. 1091-1096.

\* Работа поддержана РФФИ, проекты 20-07-00397 и 19-08-00746.

# МНОГОМЕТОДНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕВОДА НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА

А.И. Тятюшкин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[tjat@icc.ru](mailto:tjat@icc.ru)

Для поиска численного решения краевой задачи, возникающей после применения принципа максимума, предлагается многометодная схема, которая состоит из итераций градиентного метода, приводящего решение в окрестность сходимости метода квазилинеаризации [1], и непосредственно итераций метода квазилинеаризации, обеспечивающего вычисление оптимального управления с заданной точностью.

Одной из наиболее распространенных задач оптимального управления является задача перевода нелинейного объекта из одного состояния в другое по некоторому заданному критерию качества:

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt \rightarrow \min, \dot{x} = f(x, u, t) \quad (1)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1, \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^r, \quad t \in [t_0, t_1].$$

В виде (1) формулируются, например, задачи управления маневром и стабилизацией космического аппарата [2].

Для частного класса задач, допускающего явное выражение управления из условия  $H_u = 0$ , построим эффективный алгоритм метода квазилинеаризации [3], в котором хорошее начальное приближение отыскивается специальным градиентным методом. После применения принципа максимума будем иметь следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x, \psi, t), \quad \dot{\psi} = \Psi(x, \psi, t) \\ x(t_0) &= x^0, \quad x(t_1) = x^1. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть известно достаточно хорошее начальное приближение, построенное, например, из физических или содержательных соображений. Тогда краевую задачу (2) можно решить методом квазилинеаризации, обеспечивающим высокую точность выполнения краевых условий. На итерациях этого метода рассматривается линеаризованная система

$$\dot{x}^{k+1} = X_x(x^k, \psi^k, t)x^{k+1} + X_\psi(x^k, \psi^k, t)\psi^{k+1} + \rho^k(t), \quad (3)$$

$$\dot{\psi}^{k+1} = \Psi_x(x^k, \psi^k, t)x^{k+1} + \Psi_\psi(x^k, \psi^k, t)\psi^{k+1} + \eta^k(t), \quad (4)$$

где  $k$  — номер итерации;

$$\rho^k = X(x^k, \psi^k, t) - X_x(x^k, \psi^k, t)x^k(t) - X_\psi(x^k, \psi^k, t)\psi^k(t),$$

$$\eta^k = \Psi(x^k, \psi^k, t) - \Psi_x(x^k, \psi^k, t)x^k(t) - \Psi_\psi(x^k, \psi^k, t)\psi^k(t).$$

С помощью фундаментальной матрицы

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix},$$

удовлетворяющей  $2n$ - мерному уравнению

$$\Phi = \begin{bmatrix} X_x(x^k, \psi^k, t) & X_\psi(x^k, \psi^k, t) \\ \Psi_x(x^k, \psi^k, t) & \Psi_\psi(x^k, \psi^k, t) \end{bmatrix} \Phi, \quad \Phi(t_0) = E, \quad (5)$$

решение системы (3), (4), исходящее из начальной точки  $(x^{k+1}(t_0), \psi^{k+1}(t_0))$ , записывается по формулам

$$x^{k+1}(t) = \Phi_{11}(t)x^{k+1}(t_0) + \Phi_{12}(t)\psi^{k+1} + \bar{x}^{k+1}(t), \quad (6)$$

$$\psi^{k+1}(t) = \Phi_{22}(t)x^{k+1}(t_0) + \Phi_{22}(t)\psi^{k+1} + \bar{\psi}^{k+1}(t),$$

где  $(\bar{x}^{k+1}(t_0)', \bar{\psi}^{k+1}(t_0)')$  — частное решение системы (3), (4), соответствующее начальным условиям  $\bar{x}^{k+1}(t_0) = 0, \bar{\psi}^{k+1}(t_0) = 0$ .

Пусть решение (6) удовлетворяет краевому условию

$$\Phi_{11}(t_1)x^0 + \Phi_{12}(t_1)\psi^{k+1}(t_0) + \bar{x}^{k+1}(t_1) = x^1.$$

Тогда новое приближение для вектора начальных условий сопряженной системы  $\psi(t_0)$  найдем по формуле

$$\psi^{k+1}(t_0) = \Phi_{12}^{-1}(t_1)[x^1 - \Phi_{11}(t_1)x^0 - \bar{x}^{k+1}(t_1)]. \quad (7)$$

Интегрируя систему (2) при начальных условиях  $x(t_0) = x^0, \psi(t_0) = \psi^{k+1}(t_0)$ , получим точку  $x^{k+1}(t_1)$ , которая удовлетворяет неравенству

$$\|x^{k+1}(t_1) - x^1\| < \|x^k(t_1) - x^1\|.$$

Для получения первого приближения  $\psi(t_0) = v^k$ , достаточно близкого к искомому вектору  $\psi^*(t_0)$ , построим градиентную процедуру, не требующую хорошего начального приближения для сходимости итерационного процесса.

Введем функционал  $I_1(v) = \frac{1}{2} \|x(t_1, v) - x^1\|^2$ , который является мерой отклонения решения системы (2) с начальными условиями  $x(t_0) = x^0, \psi(t_0) = v$  от заданной точки  $x^1$ , и поставим задачу поиска  $v^* = \arg \min_{v \in R^n} I_1(v)$ . Поскольку теперь будет решаться задача со свободным правым концом, решение сопряженной системы  $\psi(t)$  должно удовлетворять условию трансверсальности

$$\psi(t_1) = x^1 - x(t_1, v). \quad (8)$$

Построим функционал невязок

$$I(v) = I_1(v) + \frac{1}{2} \|\psi(t_1) + x(t_1, v) - x^1\|^2 \quad (9)$$

и будем рассматривать задачу минимизации функционала (9) на решениях системы (2) с начальными условиями  $x(t_0) = x^0, \psi(t_0) = v$ .

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -X'_x(x, \psi, t)\xi - \Psi'_x(x, \psi, t)\zeta \\ \dot{\zeta} &= -X'_\psi(x, \psi, t)\xi - \Psi'_\psi(x, \psi, t)\zeta \end{aligned} \quad (10)$$

$$\xi(t_1) = 2(x^1 - x(t_1, v) - \psi(t_1))$$

$$\zeta(t_1) = x^1 - x(t_1, v) - \psi(t_1).$$

Градиент функционала (9) по параметрам  $(v_1, K, v_n)$ , определяющим начальные условия системы (2), вычисляется через решение системы (10), сопряженной к (2), и равен  $\nabla I(v) = -\zeta(t_0)$ .

Таким образом, для улучшения вектора  $v_k$  начальных условий сопряженной системы можно применить градиентную процедуру, состоящую из следующих операций:

1. система (2) при  $x(t_0) = x^0$ ,  $\psi(t_0) = v^k$ , в узлах интегрирования запоминается решение  $x^k(t)$ ,  $\psi^k(t)$ ,  $t \in T$ .

2. В обратном времени интегрируется система линейных дифференциальных уравнений (10), матрица коэффициентов которой вычисляется на решениях  $x^k(t)$  и  $\psi^k(t)$ ; при  $t = t_0$  найдется градиент  $\nabla I(v) = -\zeta(t_0)$ .

3. С помощью процедуры одномерного поиска отыскивается параметр

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \geq 0} I(v^k + \alpha \zeta(t_0)).$$

При этом с каждым значением  $\alpha$  решается система (2) при  $x(t_0) = x^0$ ,  $\psi(t_0) = v^k + \alpha \zeta(t_0)$ .

4. Строится новое приближение  $v^{k+1} = v^k + \alpha_k \zeta(t_0)$ . Если  $I(v^k) - I(v^{k+1}) > \varepsilon$ , то при  $k = k + 1$  повторяются операции п. 1–3. В противном случае с п. 5 выполняются операции метода квазилинеаризации.

5. Решается матричное уравнение (5), и запоминается  $\Phi(t_1)$ .

6. По формуле (7) находится вектор  $\psi^{k+1}(t_0)$ .

7. Выполняются операции п. 1 при  $\psi(t_0) = v^k = \psi^{k+1}(t_0)$ , в результате находится  $x^{k+1}(t_1)$ .

8. Если выполняются неравенства  $\|x^{k+1}(t_1) - x^1\| < \|x^k(t_1) - x^1\|$  и  $\|x^{k+1}(t_1) - x^1\| > \varepsilon$ , то повторяются операции п. 5–7.

9. Если  $\|x^{k+1}(t_1) - x^1\| > \|x^k(t_1) - x^1\|$ , то уменьшается шаг интегрирования, повышается точность одномерного поиска и вновь повторяются операции градиентной процедуры 1–4, а затем операции метода квазилинеаризации 5–7.

10. Если  $\|x^{k+1}(t_1) - x^1\| \leq \varepsilon$ , т.е. точность выполнения краевых условий достигнута, то итерационный процесс прекращается.

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968.
2. Junkins J.I., Turner J.D. Optimal continuous torque attitude maneuvers // AIAA / AAS Astrodynamics conference. Palo Alto, Calif., 1978.
3. Тятюшкин А.И. Многометодная технология оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука, 2006.
4. Тятюшкин А.И. Многометодные алгоритмы для решения сложных задач оптимального управления. ЖВМ и МФ. 2021. Т. 61, № 2. С. 189–205.

# МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ\*

А.И. Тятюшкин, Т.С. Зароднюк

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[tjat@icc.ru](mailto:tjat@icc.ru), [tz@icc.ru](mailto:tz@icc.ru)

Дифференциальные уравнения с постоянным запаздыванием относятся к классу функционально-дифференциальных уравнений (см., напр., [1]). Однако относительно простое устройство управляемых систем, построенных на основе таких уравнений, позволяет конструировать эффективные методики их численного решения.

В докладе обсуждается технология редукции управляемой системы с запаздыванием к системе в нормальной форме Коши. В основу редукции, как и для неуправляемых дифференциальных уравнений (см., напр., [2]), положен «метод шагов». Однако для управляемых систем, к сожалению, невозможно его прямое применение. Предложенная методика предполагает «вертикальную разверстку» системы: для каждого временного этапа (шага) формулируется свой экземпляр системы (без отклонения аргумента), число которых соответствует числу шагов в исходной системе с запаздыванием. При этом траектории предыдущего экземпляра системы действуют в правых частях последующего. Возникает необходимость координации систем, поскольку конечный фазовый вектор предыдущей системы должен соответствовать начальному фазовому вектору последующей. Для решения этой проблемы формируются дополнительные точечные ограничения, реализация которых возможна либо а) путем их переноса в конец временного интервала (введением дополнительных фазовых переменных), либо б) введением дополнительных управляющих параметров, не зависящих от времени.

В качестве примера рассмотрим модификацию управляемой системы для задачи стабилизации нелинейного маятника

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = -\sin(x_1(t-\tau)) \cdot 0, \\ \tau = 3, t \in [0, 9].$$

Управление системой выполняется путем вариации начального условия для  $x_1$ :

$$x_1(t) = u(t), t \in [-3, 0]. x_1(0) = 5, x_2(0) = 0.$$

Целью управления, как и в исходной модельной задаче, является стабилизация системы  $\min(x_1^2(9) + x_2^2(9))$ . Для реализации методики в данном примере был использован прием введения четырех дополнительных управления-констант:

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t), \dot{y}_2(t) = -\sin u(t), \\ \dot{y}_3(t) = y_4(t), \dot{y}_4(t) = -\sin y_1(t) \\ \dot{y}_5(t) = y_6(t), \dot{y}_6(t) = -\sin y_3(t), t \in [0, 3], \\ y_1(0) = 5, y_2(0) = 0, y_3(0) = a_1, y_4(0) = a_2, y_5(0) = a_3, y_6(0) = a_4, \\ I(y(t_1)) = y_5^2(3) + y_6^2(3) \rightarrow \min$$

Заданы точечные ограничения терминального типа  $y_1(3) = a_1, y_2(3) = a_2, y_3(3) = a_3, y_4(3) = a_4$ . Достигнутое в результате оптимизации значение целевого функционала – 12.3678. Траектории найденного решения приведены на рисунках 1–6, полученное управляющее воздействие представлено на рисунке 7.

\* Работа выполнена за счет субсидии Минобрнауки России в рамках проекта «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями» (№ гос. регистрации: 121041300060-4).

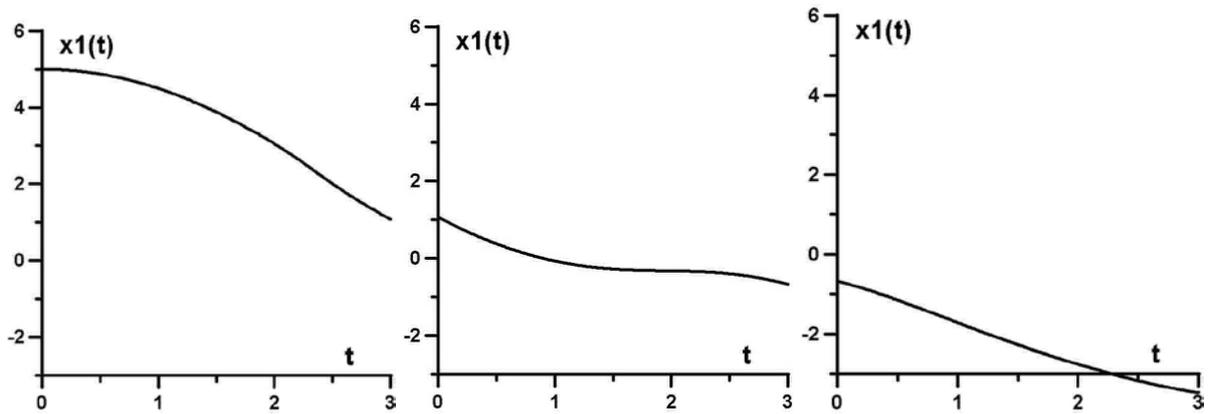


Рис. 1.  $x_1(t), t \in [0,3]$

Рис. 2.  $x_1(t), t \in [3,6]$

Рис. 3.  $x_1(t), t \in [6,9]$

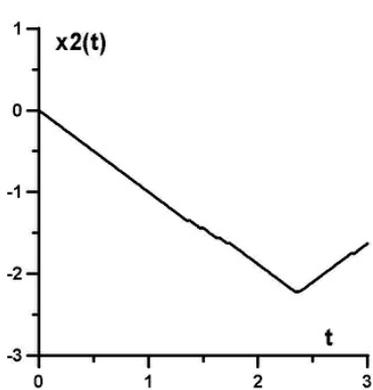


Рис. 4.  $x_2(t), t \in [0,3]$

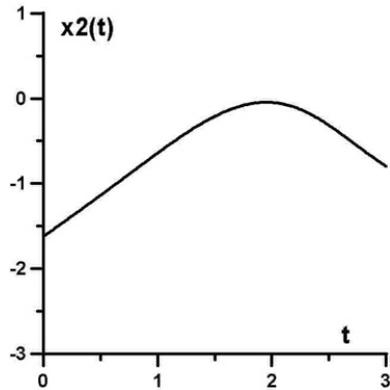


Рис. 5.  $x_2(t), t \in [3,6]$

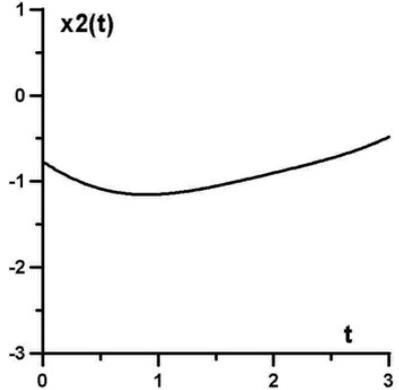


Рис. 6.  $x_2(t), t \in [6,9]$

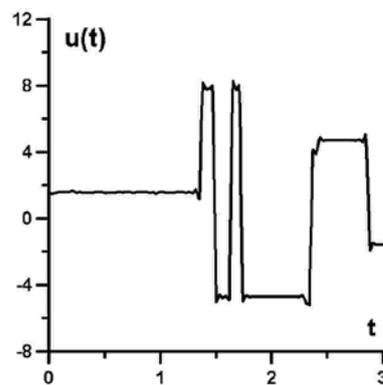


Рис. 7. Управление  $u(t), t \in [-3,0]$

На графиках 1–3 представлены наилучшие первые компоненты траектории, полученные для трех экземпляров системы, соответствующих трем временным этапам («шагам»). Хорошо просматривается факт непрерывности траектории: конечная точка предыдущей равна начальной точке последующей. Аналогичное свойство имеет место и для вторых компонент траектории, что отражено на рис. 4–6.

Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили принципиальную работоспособность предложенной методики.

1. Долгий Ю.Ф., Сурков П.Г. Математические модели динамических систем с запаздыванием. Екатеринбург, 2012. 124 с.
2. Bellen A., Zennaro M. Numerical Methods for Delay Differential Equations. Oxford, 2003.

## ТЕХНОЛОГИЯ ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ СОСТОЯНИЯ ИОНОСФЕРЫ ЗЕМЛИ

Я.А. Угорская

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[z\\_942011@mail.ru](mailto:z_942011@mail.ru)

Продукты с использованием технологий дополненной реальности (Augmented Reality) представляют из себя сложные информационные системы, которые получают информацию об объектах реального мира через датчики, дополняют полученными данными математические и физические модели объектов, создают четырехмерные компьютерные визуализации – цифровые двойники объектов, с которыми можно взаимодействовать с использованием естественно интуитивного интерфейса, отображая все реакции объекта на манипуляции пользователя [1].

Целью настоящего исследования является создание информационной системы с технологией интерактивной визуализации динамических данных, описывающих пространственно-временное состояние объекта исследования средствами дополненной реальности в реальном времени, на примере визуализации состояния ионосферы Земли.

В работе используются данные о полном содержании электронов ионосферы, анализ которых обеспечивает регулирование радиоволн для усиления принимаемого радиосигнала на Земле от спутников, а также поиск закономерностей пространственно-временного распределения параметров ионосферы и возможных причин проявления этих закономерностей [2]. Основная проблема, возникающая при анализе этих данных – это сложность их визуализации. Данные заданы 4х-мерным пространством (широта, долгота, высота, значение показателя), а также они имеют временное распределение. Соответственно для качественного анализа данных нужно строить несколько графиков, отражающих профили слоев ионосферы, одновременно, что значительно снижает когнитивный уровень их восприятия исследователем.

Для решения описанной проблемы предложено использовать для визуализации данных технологию дополненной реальности, которая за счет неограниченного пространства визуализации, позволит рассмотреть ионосферу и любую из ее точек более четко, а также позволит комплексно отразить данные о состоянии объекта.

В работе решены следующие задачи: создана трехмерная AR-модель, описывающая ионосферу вокруг Земли на основе данных; обеспечено отображение состояния ионосферы в реальном времени с привязкой к геокоординатам земной поверхности; разработан интерфейс дополнительных настроек по регулировке сегментации отображения профилей ионосферы и просмотра данных за определенный интервал времени; обеспечено отображение положения спутников вокруг Земли. Задача была реализована с помощью кроссплатформенного движка Unity на языке C# и библиотеки дополненной реальности Vuforia.

Преимущества подхода обусловлены отсутствием ограничений, связанных с размером экрана монитора, наличием интуитивно понятного интерфейса, обеспечением просмотра значений сразу нескольких срезов данных, а также возможностью визуализации данных в полевых условиях при отсутствии компьютера.

1. Кравцов А.А. Исследование и разработка информационной системы с технологией интерактивной визуализации средствами дополненной реальности: дис. ... канд. тех. наук: 05.13.01. Краснодар, 2016. 167 с.
2. Деминов М.Г. Ионосфера Земли: Закономерности и механизмы // Электромагнитные и плазменные процессы от недр Солнца до недр Земли. М: ИЗМИРАН, 2015. С. 295-346.

## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ КЛАСТЕРИЗАЦИИ ДАННЫХ

Ф.В. Хандаров

ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет им. Д. Банзарова»

[fedor.khandarov@gmail.com](mailto:fedor.khandarov@gmail.com)

Представление данных в виде графа позволяет производить кластеризацию специализированными графовыми методами [1]. При этом может возникать проблема полноценного использования атрибутивной информации вершин. В настоящей работе предлагается новый способ учета подобной информации для одного класса задач.

Имеется множество  $A$  и система множеств  $B_1, \dots, B_N$ , каждое из которых является подмножеством  $A$  ( $A$  – множество товаров в магазине / множество учебных задач в онлайн-архиве;  $B_1 \dots B_{12}$  – товарные категории / разделы математики; каждый товар может относиться к одной или нескольким товарным категориям / каждая задача может относиться к одному или нескольким математическим разделам).

Имеется множество  $X$  (покупатели, ученики), которые осуществляют выборы элементов из  $A$  (покупатели выбирают и приобретают товары / ученики выбирают и сдают задачи). Имеется информация о множестве  $C$  сделанных выборов, где  $c \in C$  – это пара  $\langle x, q \rangle$ ,  $x \in X$ ,  $q$  – некоторое подмножество  $A$  (товарный чек / история сдачи задач).

В предметной области ставится задача кластеризации множества  $X$  (типизация покупателей / учеников – с маркетинговыми / педагогическими целями), основываясь на данных по множеству  $C$ .

В настоящей работе данная задача формализуется в два этапа.

1. Строится гиперграф  $H$ , вершины которого  $b_1, \dots, b_N$  соответствуют множествам  $B_1, \dots, B_N$ . В каждой паре  $c = \langle x, q \rangle$  в  $q$  все элементы заменяются соответствующими  $b_1, \dots, b_N$ , и получается новое множество  $q'$ , которое в свою очередь определяет гиперребро  $e$ .

2. Каждому гиперребру  $e$  полученного гиперграфа  $H$  приписывается некоторое  $D$  – подмножество  $X$  из элементов, для которых найдутся одинаковые  $q'$  среди всех  $c \in C$ .

3. Строится неориентированный граф  $G$ , множество вершин которого совпадает с  $X$ , а вес ребра между вершинами  $x_i$  и  $x_j$  определяется количеством случаев попадания  $x_i$  и  $x_j$  в одно гиперребро гиперграфа  $H$ .

4. Полученный граф  $G$  кластеризуется любыми способами, например, оптимизацией функционала модулярности. При больших размерностях можно использовать приближенные способы [2].

В работе более подробно описывается процедура кластеризации множества  $X$ , а также демонстрируется разработанное программное обеспечение и примеры из области ритейла (кластеризация покупателей по товарным чекам) и образования (кластеризация учеников по решенным задачам в онлайн-архиве).

1. Schaeffer S.E. Graph clustering // Computer science review. 2007. Vol. 1, № 1. P. 27–64.
2. Мартынов Н.Н., Хандарова О.В., Хандаров Ф.В. Кластеризация графов на основе оценок изменения модулярности // Известия Иркутского гос. университета. Сер. Математика. 2018. Т. 25. С. 63–78.

## РЕАЛИЗАЦИЯ СЕРВИСА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ФРАГМЕНТОВ ВЕКТОРНОЙ ТОПООСНОВЫ

А.Е. Хмельнов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[hmelnov@icc.ru](mailto:hmelnov@icc.ru)

В ходе выполнения проекта «Фундаментальные основы, методы и технологии цифрового мониторинга и прогнозирования экологической обстановки Сибири» была получена официальная топооснова масштабов 1:1 000 000, 1:100 000, 1:50 000 на Иркутскую область, Республику Бурятию и Забайкальский край – субъекты федерации, в состав которых входит Байкальская природная территория, исследованию и мониторингу которой посвящен проект. Карты топоосновы разбиты на достаточно большое число фрагментов (трапеций) в формате SXF ГИС Панорама. Так, полученная топооснова масштаба 1:50 000 содержит более 5 000 файлов SXF.

При этом надо учитывать, что большинство участвующих в проекте исследователей не имеют опыта работы с ГИС Панорама. Заметим также, что если заранее перевести все данные в более популярный формат, например, ESRI Shape, то каждый файл SXF придется разбить на несколько десятков слоев по видам объектов (реки, дороги, растительность, населенные пункты и т.д.) и видам их локализации (точечные, линейные, площадные, надписи). Далее для работы даже с не очень большой территорией придется открыть в приложении ГИС несколько десятков таких трапеций, получив в итоге сотни открытых слоев, а с таким количеством будет чрезвычайно неудобно работать. С другой стороны, если объединить все трапеции в одну карту, то с ней также будет невозможно работать из-за слишком большого объема. Еще одна проблема – разграничение доступа к публикуемым данным, так как не хотелось бы получить претензии за неограниченное распространение всех полученных карт в неизменном виде.

Для решения всех этих проблем и удобной работы участников проекта с данными топоосновы разработан Web-сервис, позволяющий получать фрагменты карт желаемого масштаба на задаваемый пользователем фрагмент территории. Для реализации сервиса был использован код ранее разработанного конвертера из формата SXF в формат Shape, который в ходе работы объединяет данные обрабатываемых исходных трапеций, получая таким образом только несколько десятков результирующих слоев. Для использования в Web-сервисе дополнительно в конвертере были поддержаны: обрезка фрагмента по полигональному контуру и генерация стилевых файлов QGIS (файлов qml) по информации из классификатора ГИС Панорама. После формирования всех слоев с результатами запроса содержимое временной папки сжимается в ZIP-архив, а сама эта временная папка удаляется. Ссылка на ZIP-архив для скачивания возвращается в качестве результатов запроса. Архивы с результатами запроса сохраняются долговременно до тех пор, пока не будет исчерпано выделенное для таких файлов место.

Для выбора запрашиваемого фрагмента карты использован сервис публикации векторных карт, основанный на применении разработанного в ИДСТУ СО РАН формата SMD. В качестве подложки в SMD в данном случае переведена топооснова масштаба 1:000 000, что позволяет пользователю судить о наличии карт на интересующую территорию. Кроме того, дополнительно можно отобразить и подложку из различных сервисов Web-картографии (Yandex Maps, 2GIS и т.д.). На фоне подложки пользователь может выделить интересующий его фрагмент, используя при этом один из поддерживаемых способов выделения: прямоугольник, круг, произвольный многоугольник.

Для разграничения доступа к данным используется протокол oauth2, при этом доступ предоставляется всем пользователям облака ИДСТУ СО РАН (cloud.icc.ru), включенным в группу GIS. Все запросы, сделанные пользователем, сохраняются в БД и могут быть использованы повторно: можно еще раз загрузить уже сгенерированные карты или дополнительно запросить карты других масштабов на ранее заданный фрагмент.

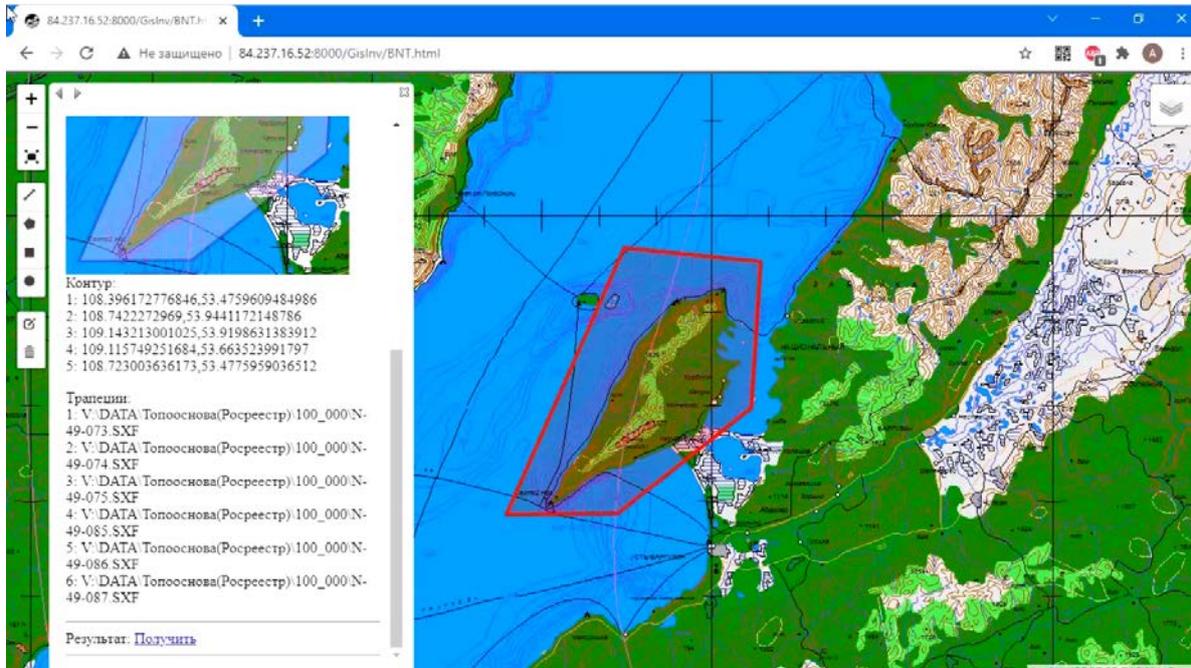


Рис. 1. Запрос и получение фрагмента карты

Для удобного добавления сгенерированных слоев в проект QGIS дополнительно формируется и включается в архив скрипт на языке Python. Каждый такой скрипт создает отдельную группу слоев, при необходимости можно включить в проект несколько таких групп для нескольких фрагментов карт. Генерация файлов qml позволяет получить близкое к оригиналу в ГИС Панорама представление карты.

## РАСПРЕДЕЛЕННАЯ СРЕДА ПРОВЕДЕНИЯ АУКЦИОНОВ НА ВИРТУАЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ

М.А. Чекан

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[chekoopa@mail.ru](mailto:chekoopa@mail.ru)

В докладе рассматриваются вопросы, связанные с разработкой Стенда-тренажера «Интеллектуальные энергетические системы» (СТИЭС) [1], создаваемого в ООО «Полюс-НТ» [2]. СТИЭС предназначен для организации программной среды имитации работы управляемой энергосистемы в условиях интеллектуальной энергетики. Данный стенд обеспечивает возможность демонстрации процессов планирования и управления реальной сетью энергоснабжения в режиме виртуальной игры. В рамках игровой сессии осуществляется регулирование спроса и предложения энергоресурсов между игроками (потребителями и сбытовыми компаниями) путем сборки виртуальных электрических сетей, проведения аукциона энергоресурсов и моделирования работы энергосистемы в целом. Моделирование энергосистемы выполняется с использованием прикладных моделей автоматического программного управления.

С целью повышения надежности и сокращения времени моделирования прежний процесс проведения аукциона был автоматизирован и внедрен в СТИЭС в виде специализированного модуля [3]. По мере роста популярности виртуальных форматов образовательных и соревновательных мероприятий возникла необходимость в реализации новой версии модуля поддержки распределенной среды проведения виртуальных аукционов, когда участники работают на стендах, располагающихся в разных географически удаленных точках. Результат проектирования и реализации такой среды представлен в докладе.

Анализ опыта проведения аукционов на СТИЭС, в том числе с использованием реализованного ранее модуля, определил следующие требования к архитектуре разрабатываемой системы:

- минимизация рисков внешнего вмешательства при сохранении простоты подключения и авторизации модулей (с учетом заранее известной их конфигурации);
- нивелирование сетевых задержек с сохранением относительной синхронности игровой сессии и равенства длительности тактов;
- сохранение устойчивости системы при отказе одного из дочерних модулей, а также быстрое восстановление модуля при отказе.

В качестве игровой модели используется закрытый аукцион первой цены. Использование закрытого формата обусловлено его устойчивостью к небольшим временным задержкам, в отличие от открытого динамического формата, используемого в английском и голландском аукционе, где важна очередность отправки ставок. Это обеспечивает максимально возможное равенство условий среди участников аукциона в распределенных сценариях. Для разрешения спорных ситуаций применяются механики догоняющих ставок и аукцион all-rou.

В результате анализа существующих разработок в области сетей и распределенных систем [4-6] разработана архитектура, состоящая из транспортного, системного и программного слоев. Транспортный слой системной архитектуры среды проведения аукциона представлен протоколами TCP и WebSocket, обеспечивающими стабильную и целостную передачу данных, а также возможность дальнейших модификаций (прямое взаимодействие с веб-браузером, TLS-шифрование). Сообщения кодируются с помощью формата CBOR, который сочетает высокую скорость кодирования при малых объемах данных. Системный слой обеспечивает

инфраструктуру для подключения серверов между собой путем создания TCP-тоннелей через SSH-канал для проброса портов (англ., port forwarding) между серверами [7]. Так как протокол SSH поддерживает авторизацию по ключам, данный метод позволяет настроить безопасный устойчивый канал связи между узлами сети и явным образом определить топологию подключений. Предполагается, что это решение обеспечит достаточную надежность при соблюдении минимальной гарантированной скорости передачи. Такая реализация также упрощает реализацию серверных программ (так как требуется реализовать лишь подключение к локальному порту) и обеспечивает возможность отладки всей системы на одном компьютере.

В программной части реализованы три приложения на языке программирования Haskell, формирующих трехуровневую клиент-серверную архитектуру. Логическое ядро («облако») отвечает за контроль игровой сессии и игровую логику. «Реле» координирует передачу данных между облаком, терминалами и физическими объектами на стенде. Интерфейс-«медиатор» реализует взаимодействие с пользователем и передачу его действий как игрока на верхние уровни. Эти приложения, как и тоннели, реализованы в виде Systemd-сервисов, развертываемых через GNU/Linux-дистрибутив NixOS [8]. Система конфигурируется с помощью описаний на языке Nix, что обеспечивает гибкость и простоту настройки. Она также позволяет объединить описание и настройку сетевой архитектуры с развертыванием узлов этой архитектуры, образующих в совокупности полноценную распределенную среду проведения аукционов.

Представленные программные разработки успешно внедрены в третьей версии СТИЭС и прошли апробацию на двух всероссийских инженерных соревнованиях, где продемонстрировали свою полезность и надежность, а также практическую состоятельность архитектуры среды. Они также успешно применяются в других модулях СТИЭС.

1. Интеллектуальные энергетические системы. Стенд-тренажер для программирования и управления городскими энергосетями. [Электронный ресурс]. URL: <http://polyus-nt.ru/powerstand.html> (дата обращения: 22.11.2021).
2. Полнос-НТ. [Электронный ресурс]. URL: <http://polyus-nt.ru/> (дата обращения: 22.11.2021).
3. Чекан М.А. Разработка модуля проведения виртуальных аукционов для тренировочного стенда СТИЭС ООО «Полнос-НТ» // Винеровские чтения, 2019: Материалы Всерос. молодежной науч.-практической конф. Иркутск: Изд-во ИРНИТУ, 2019. С. 100–105.
4. Jia W., Zhou W. Distributed Network Systems: From Concepts to Implementations. Springer, 2005. 513 с.
5. Burns B. Designing Distributed Systems: Patterns and Paradigms for Scalable, Reliable Services. O'Reilly Media, Inc., 2018.
6. Sunshine C.A. Computer Network Architectures and Protocols. Springer, 2013.
7. Чекан М.А., Широков В.В. Реализация сетевой архитектуры для распределенной системы проведения аукционов на виртуальные ресурсы // The Scientific Heritage. 2021. № 67. С. 63–68.
8. Галатенко В.А., Дзобраев М.Д., Костюхин К.А. Выбор пакетного менеджера для многоверсионных приложений // Программные продукты и системы. 2018. Т. 31, № 3. С. 469–474.

# О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С ВЫРОЖДЕННЫМИ ЯДРАМИ

В.Ф. Чистяков

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
chist@icc.ru

Рассмотрим линейную систему интегральных уравнений

$$(A_0 + \lambda \Phi)\xi := A(t)\xi + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)\xi(s)ds = f, \quad t \in T = [\alpha, \beta], \quad (1)$$

где  $A(t), B(t), K(t,s)$  –  $(m \times n)$ -матрицы, определенные в областях  $T$  и  $T \times T$  соответственно,  $\lambda$  – скалярный комплексный параметр,  $\xi \equiv \xi(t)$  и  $f \equiv f(t)$  – искомая и заданная вектор-функции.

В частности, в таком виде можно записать системы, включающие в себя взаимосвязанные алгебраические и интегральные уравнения первого, второго и третьего рода типа Фредгольма и удовлетворяющие условию

$$\text{rank } A(t) < \min(m, n) \quad \forall t \in T. \quad (2)$$

Системы вида (1) называются *замкнутыми*, если число уравнений равно числу компонент искомой вектор-функции ( $m=n$ ), *переопределенными*, если  $m>n$ , и *недоопределенными*, если  $m<n$ . Если системы интегральных уравнений (1) удовлетворяют условию (2), то их называют *интегро-алгебраическими уравнениями* (ИАУ) Фредгольма. В обратном случае, когда  $\text{rank } A(t) = \min(m, n) \quad \forall t \in T$ , системы назовем *невырожденными* системами интегральных уравнений Фредгольма.

**Определение 1.** Ядро  $K(t,s) = \|k_{ij}(t,s)\|_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$  интегральных уравнений (1) называется вырожденным, если все его элементы можно представить в виде конечной суммы произведений вида  $k_{ij} = \sum_{v=1}^{m_{ij}} a_{v,ij}(t)b_{v,ij}(s)$ , где  $a_{v,ij}(t), b_{v,ij}(s)$  – скалярные функции,  $s, t \in T$ .

**Лемма 1** [1]. Любое матричное вырожденное ядро  $K(t,s)$  разложимо на произведение матриц  $M(t)$  и  $L(s)$  размерности  $m \times m$  и  $m \times n$  соответственно, где  $m \leq nm \max n_{ij}$ .

Для частного случая системы (1), когда  $A(t) = 0 \quad \forall t \in T$ , называемого системой интегральных уравнений Фредгольма первого рода,

$$\Phi \xi := \int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)\xi(s)ds = f, \quad t \in T,$$

при предположении о вырожденном ядре  $K(t,s)$  получены необходимые и достаточные условия разрешимости, при выполнении которых общее решение представимо в виде суммы

$$\xi(t) = \bar{\xi}(t) + (I - \Phi_0)w, \quad \Phi_0 w = \int_{\alpha}^{\beta} K_0(t,s)w(s)ds = f,$$

где  $I$  – единичный оператор,  $\Phi_0$  – оператор Фредгольма с ядром  $K_0(t,s)$ ,  $w \equiv w(t)$  – произвольная вектор-функция. Условия разрешимости, вид вектор-функции  $\bar{\xi}(t)$  и ядра  $K_0(t,s)$  выписаны в терминах входных данных.

С использованием этих результатов сформулированы достаточные условия разрешимости ИАУ (1). Для численного решения в докладе рассматриваются модификации метода наименьших квадратов [2].

1. Chistyakov V.F., Chistyakova E.V. On some properties of the Fredholm-type integral algebraic equations // *Mathematical Methods in the Applied Sciences. Special Issue on Integral Equations and Their Applications*. 2020. P. 1-10.
2. Chistyakova E.V., Chistyakov V.F. Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // *Applied Numerical Mathematics*. 2020. Vol. 149. P. 43-51.

## АДАПТАЦИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА НА ОСНОВЕ ПРОДУКЦИЙ

А.С. Шабалин, О.А. Николайчук

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
nikoly@icc.ru

Адаптивные образовательные системы — это образовательные информационно-коммуникационные технологии, которые в режиме реального времени реагируют на действия студента и в соответствии с полученной информацией предоставляют ему индивидуальную поддержку [1, 2]. Основой адаптивного обучения является персонализированный подход к студенту: ему предлагается изучать материал дисциплин в соответствии с его способностями и потребностями [3].

В работе разработаны информационные модели электронной образовательной среды, которая описывается моделями курса, студента и образовательного процесса.

Модель курса имеет статическую и динамическую составляющие. Статическая часть включает модели, отражающие структуру лекционного, практического и контрольного материалов, а также характеристики этих материалов, описывающие его сложность, виды компетенций, иерархию ключевых понятий (содержательная онтология курса) и др. Динамическая часть модели курса CS содержит описание этапов изучения курса в виде графа разделов курса и подграфов, отражающих последовательности: изучение микротем, включая изучение материала, выполнение тестов микротем, выполнение практических заданий и тестов. Данная модель описывается разработчиком курса.

Модель студента также имеет статическую и динамическую компоненты. Первый компонент связан с отражением поведенческих характеристик студента и его результатами изучения курса. Второй – это последовательность индивидуальных для каждого студента этапов изучения курса, определяемая целями студента и результатами его обучения. Данная модель, в отличие от динамической модели курса, дополняется новыми этапами изучения материалов курса, обусловленных необходимостью дополнительного изучения материалов в связи с неудовлетворительными результатами прохождения контрольных заданий, тестов и практических заданий, или желанием студента улучшить результаты обучения, или получить дополнительные знания для удовлетворения личных целей.

Для адаптации образовательного процесса в работе предложено использовать продукционный подход, в его рамках разработана база знаний и алгоритм адаптации в электронной образовательной среде Forlabs (<https://forklabs.ru>), внедренной на факультете бизнес-коммуникаций и информатики ИГУ (<http://sr.isu.ru>).

На основе предложенных моделей реализован курс «Веб-программирование на стороне клиента». На примере теста на тему «Управление DOM-структурой документа» выполнен эксперимент по адаптации процесса изучения курса.

В дальнейшем планируется развитие механизма адаптации на основе методов машинного обучения.

1. FitzGerald E. et al. Dimensions of personalisation in technology-enhanced learning: A framework and implications for design // *British Journal of Educational Technology*. 2018. Vol. 49, № 1. P. 165–181.
2. Hsu C.K., Hwang G.J., Chang C.K. Development of a reading material recommendation system based on a knowledge engineering approach // *Computers & Education*. 2010. Vol. 55, № 1. P. 76–83.
3. Царев Р.Ю., Тынченко С.В., Гриценко С.Н. Адаптивное обучение с использованием ресурсов информационно-образовательной среды // *Современные проблемы науки и образования*. 2016. № 5. С. 219–219.

## О РЕАЛИЗАЦИИ ВЕРИФИКАЦИИ И ВАЛИДАЦИИ СИНТЕЗИРУЕМЫХ КОДОВ ОНТОЛОГИЧЕСКИХ И ПРОДУКЦИОННЫХ БАЗ ЗНАНИЙ\*

А.Ю. Юрин, Н.О. Дородных

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[iskander@icc.ru](mailto:iskander@icc.ru)

В рамках проекта по разработке методов и инструментальных средств создания баз знаний (БЗ) на основе модельных трансформаций [1] решалась задача исследования методов верификации и валидации синтезируемых кодов онтологических и продукционных БЗ.

При этом под верификацией [2] понимается проверка на соответствие формальным требованиям и правилам (формальный аспект решаемой задачи). Таким образом, в контексте разработки продукционных экспертных систем (ЭС) – это обнаружение логических ошибок в представлении знаний и структурах вывода. Основным результатом верификации – выявленные отклонения, которые делятся на три основных типа: ошибки (bug, crash, exception, fault, defect, error) как некие нарушения нормальной работы ЭС; мутации как резкие изменения поведения программы при наличии мелких ошибок, либо незначительное изменение в программе или единичная ошибка, допущенная в процессе проектирования ЭС; аномалии как наблюдаемые проявления ошибок или мутаций.

Под валидацией [2] понимается проверка на соответствие результата требованиям объективной реальности (семантический аспект решаемой задачи).

Путем расширения программной системы Personal Knowledge Base Designer (PKBD) [1] реализовано обнаружение двух групп аномалий [2]: нарушений согласованности (consistency) БЗ ЭС, в частности, противоречивых, циклических, избыточных и пересекающихся правил; нарушений целостности (completeness) БЗ ЭС, в частности, отсутствия правил, приводящих к значениям целевых атрибутов; неиспользованных входных значений; наличия атрибутов, на которые нет ссылок.

Проверка корректности сгенерированных продукционных БЗ в формате CLIPS производилась с использованием интегрированной в PKBD машины вывода в форме динамической библиотеки.

Проверка корректности сгенерированных онтологических БЗ в формате OWL производилась в системе онтологического моделирования Protégé с использованием машин вывода (reasoners), обеспечивших выявление неопределенных классов и связей (на основе механизма «доски объявлений»), конфликтов и несогласованностей (на основе анализа таксономии). Проверка сгенерированных онтологий на полноту осуществлялась путем установления факта, что все термины, на которые есть ссылки, определены, а экземпляры классов имеют значения для всех своих атрибутов. Если классы объявлены несовместимыми, то экземпляры этих классов должны принадлежать только подклассу одного из несовместимых классов. Кроме того, проверяется реализация всех иерархических связей, неявно введенных в определения классов.

1. Дородных Н.О., Юрин А.Ю. Технология создания продукционных экспертных систем на основе модельных трансформаций. Новосибирск: СО РАН, 2019. 144 с.
2. Рыбина Г.В., Смирнов В.В. Методы и алгоритмы верификации баз знаний в интегрированных экспертных системах // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2007. № 4. С. 91–102.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект № 19-07-00927.

FEW-SHOT CLASSIFICATION  
VIA OPTIMAL ENSEMBLE CONTROL  
OF «INFINITELY DEEP AND LARGE» NEURAL NETWORKS

M. Staritsyn<sup>1</sup>, N. Pogodaev<sup>1</sup>, R. Chertovskih<sup>2</sup> and F.L. Pereira<sup>2</sup>  
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, Russia  
Faculty of Engineering, University of Porto, Porto, Portugal

[starmaxmath@gmail.com](mailto:starmaxmath@gmail.com), [nickpogo@gmail.com](mailto:nickpogo@gmail.com), [roman@fe.up.pt](mailto:roman@fe.up.pt), [flp@fe.up.pt](mailto:flp@fe.up.pt)

Deep artificial neural networks (NNs) typically require big training datasets and long learning times. For instance, in the supervised image classification problem, hundreds/thousands of images per class are required to obtain a satisfactory result. At the same time, despite impressive advances in various applications, such as computer vision and natural language processing, the standard supervised deep learning paradigm does not even approach the human brain in the speed of learning new concepts from *little* data.

In the few-shot learning (FSL) approach, a model is trained given only a small number of samples while maintaining nearly the same accuracy. One-shot learning is an extreme form of the FSL, where one has only a single example as a "right answer". Recently, FSL has become a subject of intensive research, with evidence of its successful exploitation in practice, see, e.g. [1].

Meanwhile, the existing FSL approaches remain extremely fragmentary. Mathematical foundations of FSL, answering how (and why) FSL does work, are in their very beginning. Here, one of the promising approaches, emerged recently in [2-4], is based on considering continuous, "infinitely deep and large" NNs modeled by distributed dynamical systems. This standpoint makes it possible to reduce a very high-dimensional stationary optimization problem (training a usual deep NN) to a low-dimensional dynamic optimization problem of the known analytic structure. FSL of such a continuous network reduces to an optimal control problem for a *system* of PDEs in the space of probability measures.

In the talk, we present an approach to FSL for classification of two-dimensional geometric patterns based on the optimal control of a system of (few) local continuity equations

$$\partial_t \mu^j + \nabla \cdot (V_u(t) \mu^j) = 0,$$

driven by a *common* signal  $V_u = \sum f^k u_k$  of the control-linear structure, where  $f^k$  are known bracket-generating vector fields. For this optimal ensemble control problem, we derive an indirect deterministic numeric algorithm based on an exact formula for the increment of the linear cost functional. We prove that, for a suitable modification of the cost functional, the algorithm converges to a dynamic process satisfying the Pontryagin's Maximum Principle. For the original linear functional, we show that the algorithm can, in some cases, "improve" non-optimal local extrema.

- 1 Wang Y., Yao Q., Kwok J.T., and Ni L.M. Generalizing from a Few Examples: A Survey on Few-shot Learning // ACM Comput. Surv. 2020. Vol. 53, № 3. 34 p.
- 2 Cuchiero C., Larsson M., Teichmann J. Deep neural networks, generic universal interpolation, and controlled ODEs // SIAM J. Math. Data Sci. 2020. Vol. 2. P. 901-919.
- 3 Bonnet B., Cipriani C., Fornasier M., Huang H. A measure theoretical approach to the mean-field Maximum Principle for training NeurODEs. 2021. Preprint arXiv:2107.08707.
- 4 Ruiz-Balet D., Zuazua E. Neural ODE control for classification, approximation and transport. 2021.

## Секция «Юные исследователи»

### ФИЗИКА В МИРЕ ПЛАВАНИЯ

В.И. Алексеев  
МБОУ г. Иркутска лицей № 3  
mizerhit@gmail.com

**Актуальность.** Занятия спортом благотворно влияют на формирование личности. Спорт развивает такие черты личности, как целеустремленность, настойчивость, решительность, самообладание, смелость, дисциплинированность, прививаются гигиенические навыки. Плавание является одним из эффективных средств укрепления здоровья и физического развития человека. Систематические занятия плаванием ведут к совершенствованию органов кровообращения и дыхания, крепче становится сон, улучшается аппетит. Развиваются основные двигательные качества: сила, быстрота, гибкость, ловкость, выносливость. С 2018 года количество пловцов по всей России увеличилось на 15%, что показывает популярность плавания как вида спорта, а в любом спорте есть соревнования, и 90% из опрошенных мной пловцов от 8 до 16 лет хотят узнать, как физика влияет на технику и результаты плавания.

**Цель работы.** Узнать как на технику и результаты плавания влияет физика.

**Задачи работы.**

- 1) Поиск информации о взаимосвязи физики и плавания в интернете, а также из личного опыта тренеров и меня.
- 2) Провести эксперимент с пловцами в бассейне.
- 3) Вывести все результаты и сравнить их с результатами на соревнованиях 27 декабря 2021 года.

1. Чертов Н.В. Плавание: Электронный учебник.
2. Жукова У.М. Физика быстрого плавания.
3. Елькин В. Физика в плавании.
4. Опрос профессиональных тренеров Дворца спорта «Юность» города Иркутска.

## МЕТОДИКА БЫСТРОГО СЧЕТА

П.А. Антипина  
МБОУ г. Иркутска лицей № 3  
[polanti@mail.ru](mailto:polanti@mail.ru)

По данным ФГБНУ «ФИПИ» средний процент выполнения правильных математических вычислений на ЕГЭ по математике (*профильный уровень*) 2021 года составляет 68,8. **Актуальность** данной работы заключается в том, что снижение вычислительной культуры учеников приводит к негативным последствиям, поскольку использование методов быстрого счета активизирует мыслительную деятельность, развивает внимание и быстроту реакции, повышает эффективность выполнения заданий и т.д.

**Гипотеза** состоит в том, что овладение методами быстрого счета позволит повысить качество и скорость математических вычислений.

**Цель** данной работы – создание тренажера, с помощью которого можно развить и улучшить навыки быстрого счета без использования дополнительных устройств. Для достижения данной цели был поставлен ряд **задач**, основной из которых является анализ системы Якова Трахтенберга.

**Быстрый счет** – это математические вычисления, осуществляемые человеком без помощи дополнительных устройств за короткий промежуток времени посредством использования определенных методов и способов.

31,2% участников ЕГЭ по математике (*профильный уровень*) допускают различные ошибки в математических вычислениях из-за различных **причин**, таких как низкий уровень мыслительной деятельности; стресс и тревога; отсутствие системы в работе над вычислительными навыками и в контроле над овладением данными навыками; неразвитое внимание и память учащихся; недостаточная подготовка учащихся по математике за курс начальной школы и т.д.

**Технология быстрого счета** – это совокупность навыков и знаний о числах и действий с ними, позволяющая человеку считать без дополнительных устройств за короткий промежуток времени. Выделяют 3 вида технологии быстрого счета: *дактилономия* (математические вычисления, осуществляемые с помощью сгибания, разгибания и указывания пальцев); *аудиомоторная технология счета* (сопровождение каждого действия и числа определенной словесной фразы); *визуальная технология счета* (использование зрительной памяти и визуальных способностей).

Процесс быстрого счета можно рассматривать как технологию счета, объединяющую представления и навыки человека о числах, математических алгоритмов арифметики. Выделяют 3 основных **составляющих** данного навыка:

1. *Способности*. Обладание способностью концентрировать внимание и умением удерживать в краткосрочной памяти несколько вещей одновременно, а также предрасположенность к математике и логическому мышлению способствуют развить способность быстрого счета;
2. *Алгоритмы*. Знание специальных алгоритмов и умение оперативно подобрать нужный, максимально эффективный алгоритм в каждой конкретной ситуации помогает развитию навыка быстрого счета;
3. *Тренировки и опыт*. Постоянные тренировки и постепенное усложнение решаемых задач и упражнений позволяют улучшить скорость и качество быстрого счета;

**Система быстрого счета Трахтенберга**, разработанная Яковом Трахтенбергом во время заключения в нацистском концлагере, состоит из нескольких частей – методов умножения на числа от 2 до 12, метода умножения произвольных натуральных чисел и др.

### Общее умножение

Даны числа  $a$  и  $b$ , выглядящие в десятичной записи как  $\dots a_2 a_1$  и  $\dots b_2 b_1$ , соответственно. По системе Трахтенберга можно производить математические вычисления в уме и сразу записывать ответ. Например,  $65145 \cdot 21$ .

перенос	вычисления	результат вычислений	цифра
0	$5 \cdot 1$	5	5
0	$5 \cdot 2 + 4 \cdot 1$	14	4
1	$4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1$	10	0
1	$1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 1$	8	8
0	$5 \cdot 2 + 6 \cdot 1$	16	6
1	$6 \cdot 2 + 1$	13	3
1	0	1	1

Таким образом,  $65145 \cdot 21 = 1368045$ .

### Умножение на одиннадцать

Основные правила умножения на 11 заключаются в следующем: последняя цифра множимого записывается как самая правая цифра результата; каждая следующая цифра множимого складывается со своим правым соседом и записывается в результат; первая цифра множимого становится левой цифрой результата. Например,  $642 \cdot 11 = 6(6+4)(4+2)2 = 7062$ .

### Умножение на двенадцать

Чтобы умножить любое число на 12, необходимо удваивать поочередно каждую цифру и прибавлять к ней поочередно ее «соседа». Например,  $63247 \cdot 12 = (0 \cdot 2 + 6)(6 \cdot 2 + 3)(3 \cdot 2 + 2)(2 \cdot 2 + 4)(4 \cdot 2 + 7)7 \cdot 2 = 758964$ .

### Умножение на число 111, 1111 и т.д.

Если сумма цифр первого множителя меньше 10, надо мысленно раздвинуть цифры этого числа на 2, 3 и т.д. шага, сложить цифры и записать соответствующее количество раз их сумму между раздвинутыми цифрами. Количество шагов всегда меньше количества единиц на 1.

Пример.

$$24 \times 111 = 2(2+4)(2+4)4 = 2664 \text{ (количество шагов - 2),}$$

$$24 \times 1111 = 2(2+4)(2+4)(2+4)4 = 26664 \text{ (количество шагов - 3).}$$

Сложнее выполнить устное умножение, если сумма цифр первого множителя равна 10 или более 10.

Примеры.

$$48 \times 111 = 4(4+8)(4+8)8 = 4(12)(12)8 = (4+1)(2+1)28 = 5328.$$

### Умножение на 6

К каждой цифре прибавьте половину соседа. Если текущая цифра нечетная, добавьте 5. Пример:  $357 \times 6 = (3+5/2+5)(5+7/2+5)(7+0/2+5) = 2142$ .

### Возведение в степень

По системе Трахтенберга число можно возвести в степень с помощью общего умножения чисел. Например,  $35^2 = 35 \cdot 35 = 3 \cdot 3(5 \cdot 3 + 3 \cdot 5)5 \cdot 5 = 1225$ .

Для возведения двухзначного числа в степень 2 необходимо возвести в квадрат последнюю цифру этого числа и записать ее последней, найти перекрестное произведе-

ние числа и удвоить его, а также возвести в квадрат первую цифру. Например,  $84^2 = 8^2 (8*4)*2 4^2 = 7056$ .

1. Сорокин А.С. Техника счета (Методы рациональных вычислений). М.: Знание, 1976. 121~с.
2. Мак-Шейн Р., Катлер Э. Система быстрого счета по Трахтенбергу. М.: Просвещение, 1967. 134 с.
3. Перельман Я. Быстрый счет. Тридцать простых приемов устного счета. М.: Просвещение, 1941. 56 с.
4. Система быстрого счета // URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sistema-bystrogo-scheta-po-metodu-yakova-trahtenberga/viewer>.
5. Способы быстрого счета по методу Якова Трахтенберга // URL: <https://iq-you.ru/blog/sistema-bystrogo-scheta-po-metodu-yakova-trahtenberga/>.
6. Система Трахтенберга // URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Система\\_Трахтенберга](https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_Трахтенберга).

## ТЕПЛОВОЙ ДВИГАТЕЛЬ – ДВИГАТЕЛЬ СТИРЛИНГА

В.Г. Верхушин  
МБОУ г. Иркутска Лицей № 3  
[georgiverkhushin@mail.ru](mailto:georgiverkhushin@mail.ru)

В течение многих веков люди придумывали разные способы получения электричества. Одним из них являются тепловые двигатели. Эти двигатели широко используются в жизни человека. Один из таких двигателей, работающих на практически любых перепадах температур, двигатель Стирлинга.

**Актуальность работы.** Техническое творчество является одним из важных способов формирования профессиональной ориентации, способствует развитию устойчивого интереса к технике и науке, а также стимулирует рационализаторские и изобретательские способности. Модели, созданные своими руками, – это макеты из подручного материала. Это увлечение, которое объединяет многих людей по всему миру. Кто-то создает декор, вяжет вещи, делает гипсовые скульптуры. Я решил создать действующую модель двигателя Стирлинга. Считаю, что модели, созданные руками учеников, радуют не только своей новизной, но и будут полезными для изучения физики, для демонстрации обучающимися, например, при изучении темы «Тепловые двигатели».

В наше время большое значение придается вопросу экологии. Знакомство с двигателями, которые в меньшей степени загрязняют атмосферу, очень полезно для учащихся. Возможно в будущем они отдадут предпочтение при выборе автомобиля автомобилю с двигателем Стирлинга. Сам по себе двигатель Стирлинга не загрязняет окружающую среду, т.е. экологичность двигателя обусловлена прежде всего экологичностью источника тепла.

**Цель работы.** Сделать действующую модель двигателя Стирлинга для демонстрации физических явлений.

### **Задачи работы.**

1. Проанализировать методическую литературу и интернет-ресурсы по изготовлению модели двигателя Стирлинга в домашних условиях.
2. Определить наименования физических приборов, которые возможно сделать своими руками в процессе работы.
3. Исследовать принцип работы модели двигателя Стирлинга.
4. Определить преимущества и недостатки модели двигателя Стирлинга.
5. Разработать модель двигателя Стирлинга с наименьшими затратами и хорошим эстетическим видом.
6. Сконструировать модель двигателя Стирлинга.
7. Продемонстрировать модель перед обучающимися с объяснением принципа действия.

1. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Двигатель\\_Стирлинга](https://ru.wikipedia.org/wiki/Двигатель_Стирлинга) [Электронный ресурс] дата обращения 25.03.20.
2. <https://24techno-guide.ru/princip-raboti-dvigatelya-stirlinga.php> [Электронный ресурс] дата обращения 22.03.21.
3. <https://usamodelkina.ru/21167-izgotovit-dvigatel-stirlinga-dlja-generacii-jelektrojenergii-legko.html> [Электронный ресурс] дата обращения 23.03.21.
4. <https://buk-journal.ru/drugoe/dvigatel-stirlinga.html> [Электронный ресурс] дата обращения 20.10.21.
5. <https://infourok.ru/issledovatel'skaya-rabota-sozdanie-modeli-dvigatelya-stirlinga-3840865.html> [Электронный ресурс] дата обращения 20.10.21.
6. <https://buk-journal.ru/wp-content/uploads/2019/01/939896295521936f52b60a2e5f56bc33.jpg> [Электронный ресурс] дата обращения 22.09.21.

7. <https://www.youtube.com/watch?v=zR89kf6YTJw> [Электронный ресурс] дата обращения 22.09.21.
8. <https://24techno-guide.ru/princip-raboti-dvigatelya-stirlinga.php> [Электронный ресурс] дата обращения 25.03.20.
9. <https://infourok.ru/issledovatelskaya-rabota-sozdanie-modeli-dvigatelya-stirlinga-3840865.html> [Электронный ресурс] дата обращения 25.03.20.

## РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Ю.В. Гурская  
МБОУ «Лицей № 2», г. Братск  
[gurskaa25@gmail.com](mailto:gurskaa25@gmail.com)

Для сдачи Единого государственного экзамена на хороший балл и общей эрудиции в математике необходимо уметь решать задания с параметрами. В этом и состоит актуальность выбранной темы работы.

При решении задач с параметрами приходится производить последовательные рассуждения, составлять для себя логическую схему решаемой задачи. Поэтому такие задания – незаменимое средство для тренировки логического мышления. В решении недостаточно использования формул, необходимо понимание закономерностей и системность, а также умение объединять единичные случаи в единый результат, этим и обуславливается значимость данного проекта.

Безусловно, пособия для решения заданий с параметрами существуют, однако многие из них имеют узкую специализацию. Кроме того, в нашем городе достаточно трудно найти подобные книги.

Несмотря на то, что первые представления о параметре мы получаем еще в средней школе при изучении линейной или квадратичной функций, ведь от значения параметров (в данных случаях коэффициентов) в таких заданиях зависит ответ или их количество. Однако в наших учебниках по алгебре заданий с параметрами недостаточно. Стоит отметить недостаток учебных часов на отработку подобных заданий и разную подготовку учащихся.

В этом и состоит проблема, на решение которой направлен данный проект.

**Цель работы:** изучение методов решений уравнений с параметрами, выбор оптимального варианта для определенных типов уравнений с параметрами из ЕГЭ. Данная цель определила следующие задачи:

1. Ознакомиться с понятиями «параметр» и «уравнение с параметром».
2. Изучить разновидности (типы) уравнений с параметрами.
3. Изучить возможные методы решения уравнений с параметрами и выявить наиболее успешные для решения уравнений определенного типа с параметрами из ЕГЭ,
4. Создать пособие с найденной систематизированной информацией.

При выполнении поставленных задач были использованы различные методы: изучение, сравнение, анализ и систематизирование полученных данных.

Основной целевой аудиторией являются школьники 8-11 классов, так как задания с параметром встречаются как в ОГЭ, так и в ЕГЭ, а также в различного рода олимпиадах.

Итоговым продуктом проектной деятельности является пособие с найденной систематизированной информацией. Данное пособие состоит из разделов по соответствующим темам. Начинается знакомство с тетрадью с мотивирующей цитатой: если это не весело, значит, вы делаете это неправильно!

Заглянув на второй разворот пособия, следует обратить свое внимание на оглавление, помогающее ускорить поиск определенного раздела. Первая глава пособия – «Основные понятия и определения». Благодаря данной главе мы можем узнать, что параметром в математике является независимая переменная, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом, или числом, принадлежащим заранее оговоренному множеству.

Каждый последующий раздел пособия содержит теоретический материал, в котором изложены специфика и свойства данного типа уравнений, помогающие в выполнении, или же особенности этого метода решения. Кроме того, включены два разобраных примера по соответствующей теме, а также присутствуют задания для самостоятельной работы, ответы на которые для проверки можно отыскать в конце данной тетради.

Хочется отметить, что одним из преимуществ данного пособия является наличие заданий для самостоятельного выполнения, суммарное количество которых равно 40.

Работая над проектом, я расширила свои знания основных определений и понятий по теме «Уравнения с параметром». Мною было изучено и применено множество методов решения подобных заданий. Кроме того, очевидно, что приемы решения уравнений с параметром помогут лучше понимать обычные, без параметров, задачи. А привычка к математическим рассуждениям будет полезна при изучении высшей математики в высших учебных заведениях и при использовании полученных знаний впоследствии. Также не стоит забывать, что решение данного типа задач открывает перед учениками немалое количество эвристических приемов, которые могут быть применимы как и в исследованиях, так и в любом математическом материале.

Итоговый продукт проектной деятельности, по нашему мнению, будет полезен ученикам 10-11 классов, ведь задание № 17 ЕГЭ по профильной математике содержит задание с параметром. Кроме того, данный продукт проектной деятельности будет актуален для учеников 8-9 классов, так как для них предусмотрен раздел «Готовимся к ОГЭ», способный помочь в выполнении задания № 22 ОГЭ, в котором следует применять графический прием решения уравнений с параметром.

1. Графики в задачах с параметрами. Ч. 3 / С.И. Колесникова [и др.] // Журнал для старшеклассников и учителей «Потенциал». 2015. № 2. С. 20-31.
2. Квадратный трехчлен в задачах ЕГЭ / Ю.А. Пукас [и др.] // Журнал для старшеклассников и учителей «Потенциал». 2016. № 2. С. 26-32.
3. Козко А. И., Чирский В. Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. М.: МЦНМО, 2007. 296 с.
4. Мерзляк А. Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа: Учебное пособие / А.Г. Мерзляк Д.А. Номировский, В.М. Поляков. М.: Вентана-Граф, 2017. 480 с.
5. Метод оценок для решения уравнений и неравенств / В.Ф. Корнеев [и др.] // Журнал для старшеклассников и учителей «Потенциал». 2015. № 7. С. 23-28.
6. Пак Г. К. Задачи с параметрами. Серия: математика для абитуриента: Учебное пособие. Владивосток. Изд-во Дальневосточного университета, 2000. 16 с.
7. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. М.: МИЭТ, 2004. 258 с.
8. Путь к успеху на ЕГЭ по математике/ Ю.А. Пукас [и др.] // Журнал для старшеклассников и учителей «Потенциал». 2017. № 4. С. 18-27.
9. Субханкулова С.А. Задачи с параметрами. М.: ИЛЕКСА, 2010. 208 с.
10. Сычева С.В. Монотонность при решении задач: автореф. ВКР / С.В. Сычева. Саратов, 2017. 14 с.
11. Юрченко Е.В., Юрченко Е.В. Уравнения с параметром и нестандартные задачи. Живая методика математики. М.: МЦНМО, 2017. 84 с.

## ВОЗМОЖНОСТИ ГАЛЬВАНОПЛАСТИКИ В ДОМАШНИХ УСЛОВИЯХ

Ф.С. Дашков  
МБОУ г. Иркутска Лицей № 3  
daskovfedor@gmail.com

Гальванопластика – формообразование из цветного металла при помощи осаждения его из раствора. В наши дни большая часть защитных покрытий на металлах наносится именно этим способом. Это важное направление в современной промышленности, но также оно открывает многие возможности для использования в быту: с помощью гальванопластики можно защищать металлические предметы от коррозии, создавать металлические копии предметов и украшения. Получающиеся в результате изделия имеют небольшую массу, повышенную прочность и долговечность.

Целью работы является освоить технологию гальванопластики, что включает в себя:

- Анализ методической литературы и Интернет-ресурсов по гальванопластике в домашних условиях.
- Определение преимущества и недостатков гальванопластики.
- Изучение техники безопасности для работы с гальванопластикой.
- Подбор и приобретение оборудования, необходимого для гальванопластики.
- Изготовление электролитов для осаждения меди.
- Покрытие предмета медью.
- Придание блеска посредством электрохимической полировки.

Гальванопластическая установка часто представляет собой ванну, размер которой определяется размером формы, на который будет производиться осаждение металла. Катод состоит из меди, а к аноду прикрепляется форма и опускается в электролит. На установку подается ток, зависящий от площади формы.

Если поверхность формы не является проводником, то ее необходимо покрыть токопроводящим слоем, например, с помощью графитового спрея или специального лака.

В качестве электролита используется раствор соли цветного металла. К нему добавляется серная кислота и, опционально, блескообразователь. Традиционно в качестве блескообразователя используется тиомочевина, но в этом исследовании предпринята попытка повысить качество покрытия посредством добавления в электролит вещества под названием унитиол.

Есть некоторые ограничения: в домашних условиях нельзя применять гальванопластику к предметам из некоторых металлов, так как для этого необходимы токсичные комплексообразователи, такие как цианиды.

1. Казначей Б.Я. Гальванопластика в промышленности. М.: ГИМП РСФСР, 1955.
2. Одноралов Н. В. Занимательная гальванопластика М.: Просвещение, 1979.
3. Вансовская К.М., Волянюк Г.А. Промышленная гальванопластика. Л.: Машиностроение, 1986.
4. Антропов Л.И., Ледовских В.М., Горина Д.О., Бабич А.А., Молодцова В.А., Семик Т.М. Сернокислый электролит меднения. Киевский политехнический институт им. 50-летия Великой Октябрьской Социалистической революции.

## ЛИВНЕВЫЕ КАНАЛИЗАЦИИ ГОРОДА БРАТСКА

М.С. Мавлюкеева  
МБОУ «Лицей № 2», г. Братск  
[milanochka.irk77@yandex.ru](mailto:milanochka.irk77@yandex.ru)

Ливневые канализации – это сложные инженерные системы, которые служат для сбора и отведения с осушаемой территории влаги, которая выпадает в виде осадков.

Они играют важную роль в обеспечении необходимых условий проживания в городе. Нарушения и сбои в их работе могут ухудшить санитарно-эпидемиологическую ситуацию. Для более точного определения ситуации в городе на данный момент и выявления практической значимости ливневых канализаций было проведено интервью с председателем градостроительного комитета города Братска Андреем Сергеевичем Бакшеевым.

Было сказано, что с ливневой канализацией в Братске сегодня сложная ситуация. Город строился быстро, подземная ливневая канализация во дворах существует только в старых микрорайонах, но и там она не работает, и любой проливной дождь оборачивается потоком в низинах.

Ремонтировать их быстрым способом не получается, потому что это происходит лишь на одном мероприятии «Безопасные и качественные автомобильные дороги». Город пытается обеспечить некоторые необходимые меры по устранению этой проблемы, но они оказываются достаточно малы. Снеготаяние и ливневые воды разрушают дорогу – циклическое замерзание. По этой причине с 15 апреля по 15 мая на автомобильные дороги нельзя заезжать грузовым автомобилям с массой более 3.5 тонн, тем самым сохраняя дороги на больший срок.

Кроме того, можно отметить, что при весенних паводках коммунальные службы стараются вывезти максимум снега из зоны предполагаемого подтопления, тем самым сократив нагрузку наждеприемники и сеть в целом.

Решить эту проблему другим способом также не получается в силу некоторых сложностей:

1. Недостаточное количество средств в городе на содержание градостроительства (300 миллионов рублей в год на обустройство всего города).
2. Сложный рельеф города. Вся система ливневой канализации состоит из безнапорных коллекторов и с напорными коллекторами. Без напорных коллекторов не обойтись в проектировании, но они очень дорогие в установке и обслуживании.
3. Водозаборное сооружение. Для того чтобы вывести воду до водного объекта (в Братске – это Братское водохранилище и бассейн реки Вихоревка), необходимо большое расстояние, его можно было бы сократить, но это невозможно, так как нет определенных систем очистки, чтобы можно было сбрасывать поверхностную воду в водозаборное сооружение.
4. Отсутствие областной программы, благодаря которой можно было бы организовать тендер между городами Иркутской области на обустройство города ливневыми канализациями.

**Предложение.** Создание областной программы по строительству и реконструкции ливневых канализаций в крупных муниципальных образованиях Иркутской области.

1. Тугай А.М., Прокопчук И.Т. Водоснабжение из подземных источников. К.: Урожай, 1990. 264 с.

2. Жуков А.И., Карелин Я.А., Колобанов С.К., Яковлев С.В. Канализация: Учебник для вузов. М.: Стройиздат, 1975. 632 с.
3. Корина-офсет М. Государственные сметные нормативы. Федеральные единичные расценки на строительные и специальные строительные работы. Ч. 23. Канализация – наружные сети, 2009. 942 с.
4. Ратников А. А. Автономные системы канализации. Теория и практика. М.: АВОК-ПРЕСС, 2008. 108 с.

## ОЦЕНКА ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ ЖИВОТНЫХ В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ И ПРОМЫСЛА

Е.К. Обухов  
МБОУ «Лицей №2», г. Братск  
[obukhovegor@inbox.ru](mailto:obukhovegor@inbox.ru)

Актуальность данного исследования заключается в том, что вопрос об оценке численности популяции животных является одним из главных, так как человек не может существовать без животного мира. Одним из способов описания динамики популяций сегодня является математическое моделирование.

**Цель работы.** Ознакомиться с классическими и некоторыми новыми динамическими моделями развития популяций.

Проблемный вопрос: можно ли с помощью математических моделей рассчитать численность популяции?

Гипотеза исследования: если я ознакомлюсь с классическими и некоторыми динамическими моделями развития популяции, то в будущем это поможет мне правильно использовать знания о них в реальном мире.

Объект и предмет исследования: математические модели динамики популяций.

### **Задачи работы.**

1. Рассмотреть классическую модель Мальтуса, провести ее аналитический разбор, провести имитационное моделирование при некоторых параметрах модели.
2. Провести имитационное моделирование для логистической модели роста популяции.
3. Предложить и проанализировать модификации указанных моделей с учетом фактора добычи популяции.
4. Рассмотреть некоторые модели конкурирующих популяций.

Томас Роберт Мальтус родился 13 февраля 1766 года в имении Рукери, после обучения получил место второго священника в приходе деревне Окевуд. Роберт Мальтус был не только ревностным христианином, он столь же преданно и талантливо служил идеалам Просвещения. Он блистательно показал, как вера в Разум может самым органичным образом сочетаться с верой в Бога. На протяжении всей своей жизни Мальтус жил очень скромно, но последовательно и принципиально отказывался как от высоких государственных должностей, которые ему предлагало правительство, так и от церковной карьеры, считая главным делом своей жизни научную работу.

Его модель выглядит таким образом:  $N(t) = N_0 e^{at}$ . А ее имитационное моделирование вот так:  $N(t+1) = N(t) + AN(t)$ .

Как правило, численность популяции зависит не только от соотношения рождаемости и смертности, но и от ограниченности пищевых и других ресурсов, поэтому далее рассмотрим логистическую модель.

Изначально данная модель не имеет коэффициентов  $K$  и  $u(t)$ , они были аналогично добавлены при имитационном моделировании. Далее были проведены сценарные расчеты модели Мальтуса. Несмотря на то, что начальное количество популяции во втором случае больше, чем в первом, конечное количество больше в первом сценарии. Третий сценарий подтверждает эту теорию. Таким образом, можно сделать вывод, что параметр  $A$  является ключевым в данной модели.

В работе представлены сценарные расчеты логистической модели. Данные графики зависят от четырех параметров и несмотря на то, что параметр  $A$  в первом сценарии почти в 2 раза меньше, чем во втором, конечная численность популяции все равно оди-

наковая. А все потому, что во втором сценарии мы также использовали параметр  $u(t)$ , который сильно замедляет развитие численности популяции.

Сценарий 3 также подтверждает нашу теорию о параметре  $u(t)$ . Таким образом, мы можем сделать вывод, что именно фактор добычи влияет на численность популяции сильнее всего.

В будущем я хочу продолжить изучение динамики популяций и подробно ознакомиться с моделью «хищник – жертва». В основе этой модели лежат гипотезы о том, что динамика участвующих во взаимодействии видов при их отстраненном рассмотрении происходит по линейным законам.

В заключение хочу сказать, что классические и некоторые динамические модели очень интересны и важны для изучения. Уже сейчас такими моделями пользуются для сохранения численности популяции. Например, сейчас запрещена коммерческая ловля байкальского омуля. Значительное послабление наблюдается для заводчиков подсадных уток, так как для них срок весенней охоты увеличился с 10 до 30 дней.

Я считаю, что в будущем классические и динамические модели будут использоваться во многих сферах жизни человека и это укрепит наше положение на Земле.

1. Разжевайкин В. Н. Модели динамики популяций. М., 2006. 11 с.
2. Соколов С.В. Модели динамики популяций: Учебное пособие. СПб: Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2018. С. 18-22.
3. Система «Хищник – Жертва» // URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Система\\_«хищник\\_—\\_жертва»](https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_«хищник_—_жертва»).
4. Логистическая модель роста популяции // URL: <https://megalektsii.ru/s42975t3.html>.
5. Модели роста популяций // URL: [https://studopedia.ru/17\\_19639\\_modeli-rosta-populyatsiy.html](https://studopedia.ru/17_19639_modeli-rosta-populyatsiy.html).

## ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА

М.А. Федосов  
МБОУ г. Иркутска, Лицей № 3  
[Mafrk2018@gmail.com](mailto:Mafrk2018@gmail.com)

Числа окружают человека на протяжении всей его жизни. Числа бывают разные: натуральные, дробные, рациональные и многие другие.

О числах первый начал рассуждать грек Пифагор в VI веке до нашей эры. Ему удалось установить связь между длиной струны музыкального инструмента и издаваемым им звуком. И тогда Пифагор решил, что не только законы музыки, но и вообще все на свете можно выразить с помощью чисел. «Миром правят числа, все в мире есть число!» – провозгласил он.

Числа древними греками, а вместе с ними Пифагором мыслились зримо, в виде камешков, разложенных на песке или на счетной доске – абаке. По этой причине греки не знали нуля, так как его невозможно было «увидеть».

Но и единица еще не была полноправным числом, а представлялась как самое маленькое число, из которого образовывались все числа. Пифагор придумал изображать числа точками. Он стал раскладывать камешки в виде правильных геометрических фигур. Поэтому арифметика Пифагора тесно связана с геометрией: он выделял классы чисел, имеющих одну и ту же форму. Так возникли числа, сегодня именуемые фигурными. *Фигурные числа* – общее название чисел, связанных с той или иной геометрической фигурой. Были получены классы многоугольных чисел: линейные, плоские и пространственные или телесные числа.

*Линейные числа.* Рассмотрим ряды чисел, в которых разность между каждым последующим и предыдущим членами равна одному и тому же натуральному числу  $d$  ( $d$  – разность ряда). Данная последовательность называется арифметической прогрессией.

У каждого элемента ряда есть свое место. Чтобы получить  $n$ -й элемент ряда ( $a_n$ ), надо к первому элементу ряда прибавить произведение разности ряда на число, которое

на 1 меньше номера места, занимаемого этим элементом  $a_n$ : 
$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Элементы каждого из таких рядов называются *линейными фигурными числами* или *фигурными числами первого порядка*.

Геометрические имена, которые получили плоские числа, объясняются своим наглядным истолкованием: построим равносторонний треугольник, квадрат, правильные пятиугольник, шестиугольник и т.д. со стороной  $l$ . Затем, отправляясь в каждой фигуре от одной из вершин, удлиним все стороны в 2, 3, 4,.. раза. Во всех вершинах получившихся фигур и на их сторонах на расстояниях, равных  $l$ , поместим кружочки.

Все эти многоугольные числа называются плоскими фигурными числами или фигурными числами второго порядка или треугольными, квадратными, пятиугольными и шестиугольными числами, соответственно.

Плоские числа рассмотрим на примере пятиугольных чисел.

Из ряда линейных фигурных чисел  $d = 3$ : 1,4,7,10,13,... образуем последовательные суммы этих чисел  $P_n$ :

$P_1 = 1$  – первый элемент ряда;

$P_2 = 1 + 4 = 5$  – сумма первых двух элементов ряда;

$P_3 = 1 + 4 + 7 = 12$  – сумма первых трех элементов ряда;

$P_4 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$  – сумма первых четырех элементов ряда;

$P_5 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$  – сумма первых пяти элементов ряда.

...

Данный ряд совпал с рядом чисел пятиугольника. Назвали эти цифры пятиугольными.

Так, из ряда линейных чисел ( $d = 3$ ) получается ряд плоских пятиугольных чисел. Аналогично из ряда линейных чисел ( $d = 1$ ) получается ряд плоских треугольных чисел. А из ряда линейных чисел ( $d = 2$ ) получается ряд плоских квадратных чисел. И т.д.

Пифагор не ограничился плоскими фигурами. Он стал складывать из них пирамиды, кубы и другие тела и *получил пространственные или телесные числа, или фигурные числа третьего порядка.*

Пирамидальные числа возникают при складывании шаров горкой так, чтобы они не раскатывались. Если каждый слой шаров в такой пирамиде – плоское треугольное число, то данное число *треугольное пирамидальное*. Если каждый слой шаров в такой пирамиде – плоское квадратное число, то данное число *четырёхугольное пирамидальное*. И т.д.

Пирамидальные числа рассмотрим на примере треугольных пирамидальных. Из ряда плоских треугольных чисел  $P_n^3 = 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$  образуем последовательные суммы этих чисел:

$T_1 = 1$  – первый элемент ряда;

$T_2 = 1 + 4 = 5$  - сумма первых двух элементов ряда;

$T_3 = 1 + 4 + 9 = 14$  - сумма первых трех элементов ряда;

$T_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$  - сумма первых четырех элементов ряда;

...

Так, ряд плоских треугольных плоских чисел производит ряд треугольных пирамидальных чисел. Аналогично ряд плоских квадратных плоских чисел производит ряд квадратных пирамидальных чисел. Из плоских пятиугольных плоских чисел получаются пятиугольные пирамидальные числа. И т.д.

Очень интересны кубические числа, возникающие при складывании кубиков:  $1, 2*2*2=8$  (два этажа из квадратов  $2*2$ ),  $3*3*3=27$  (три этажа из квадратов  $3*3$ ) и т. д.

Теперь понятно, почему про такие числа говорят «два в кубе», «три в кубе», «десять в кубе». Следовательно, общий вид кубических чисел равен  $T_n^4 = n^3$ .

Фигурное представление чисел помогало пифагорейцам открывать законы арифметических операций. Так, представляя число 10 в двух формах  $5*2=2*5$ , легко увидеть переместительный закон умножения:  $a*b=b*a$ .

Докажем тождество, используя фигурные числа,  $3(5+4) = 3*5 + 3*4$ .

Выполним действия в левой, а затем в правой части. Сравнив их результаты, заключаем, что они равны. Здесь и виден распределительный закон сложения относительно умножения  $a(b + c) = a * b + a * c$ .

Пифагором и пифагорейцами числа мыслились зримо, в виде камешков. Если камешки, образующие фигурные числа, заменить на равные по площади квадратики, то, укладывая их в прямоугольное число  $a*b$ , автоматически получаем формулу для вычисления площади прямоугольника  $S=a*b$ .

*Теорема Коши.* Между натуральными числами и плоскими фигурными числами существует много интересных закономерностей. Так, французский математик Пьер Ферма обнаружил, что всякое натуральное число есть треугольное или сумма двух или трех треугольных чисел.

$3 = 1 + 1 + 1$ : 3 – треугольное число и состоит из суммы трех треугольных чисел – 1, 1, 1.

$31 = 21 + 6 + 3$ : 31 – не треугольное число, состоит из суммы трех треугольных чисел 21, 6, 3.

$310 = 276 + 24 + 10$ : 310 – не треугольное число, состоит из суммы трех треугольных чисел 276, 24, 10.

Всякое натуральное число есть квадрат или сумма двух, трех или четырех квадратных чисел.

$3 = 1 + 1 + 1$ : 3 – не квадратное число, состоит из суммы трех квадратных чисел 1, 1, 1.

$31 = 25 + 4 + 1 + 1$ : 31 – не квадратное число, состоит из суммы четырех квадратных чисел 25, 4, 1, 1.

$310 = 289 + 16 + 4 + 1$ : 310 – не квадратное число, состоит из суммы четырех квадратных чисел 289, 16, 4, 1.

Всякое натуральное число есть или пятиугольное, или сумма двух, трех, четырех или пяти пятиугольных чисел.

$3 = 1 + 1 + 1$ : 3 – не пятиугольное число, состоит из суммы трех пятиугольных чисел 1, 1, 1.

$31 = 21 + 6 + 3$ : 31 – не пятиугольное число, состоит из суммы трех пятиугольных чисел 21, 6, 3.

$310 = 276 + 24 + 10$ : 310 – не пятиугольное число, состоит из суммы трех пятиугольных чисел 276, 24, 10.

Вообще, всякое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более, чем  $k$   $k$ -угольных чисел.

Для отдельных частных случаев эту теорему доказал математик Эйлер, а общее доказательство дал в 1815 году французский математик Коши.

Так, на примере чисел 3, 31 и 310 можно увидеть справедливость этой теоремы.

Числа используются человеком всюду: на работе, в быту, в искусстве, в досуге. Человек ценит числа, прежде всего, за их практическую пользу. Они помогают людям править миром. Я считаю, что жизнь современного человека невозможна без чисел.

1. Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия. М.: Просвещение, 1996. 320 с.
2. Глейзер Г.И. История математики в школе. М.: Просвещение, 1981. 186 с.
3. Деца Е., Деца М. Фигурные числа. М.: МЦНМО, 2016. 349 с.
4. Карпеченко Е. Тайны чисел // Математика: Приложение к газете «Первое сентября». 2007. № 13.
5. Стиллвелл Д. Греческая теория чисел // Математика и ее история. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
6. Я познаю мир. Детская энциклопедия: Математика. М.: Изд-во «АСТ», 2001. 475~с.

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИАЦИОННОГО ФОНА В ПОМЕЩЕНИЯХ

К.О. Чумутина  
МАОУ «Ангарский лицей №1»  
[kchumutina@mail.ru](mailto:kchumutina@mail.ru)

Ученые утверждают, что задолго до того, как появилась на земле жизнь, на нашей планете шел распад урана, продукты которого постоянно выделялись из земли. Поэтому с самого рождения на нас влияет естественный радиационный фон. С появлением искусственных источников радиационного излучения проблема радиационного загрязнения стала одной из самых важных во всем мире, потому что это несет огромный вред окружающей среде и людям. В процессе изучения физики я задалась вопросом, а какой радиационный фон в моем доме, учебном заведении? И больше всего я захотела узнать, меняется ли радиационный фон на разных этажах? Таким образом, целью работы стало исследование зависимости радиационного фона в помещениях на разных высотах.

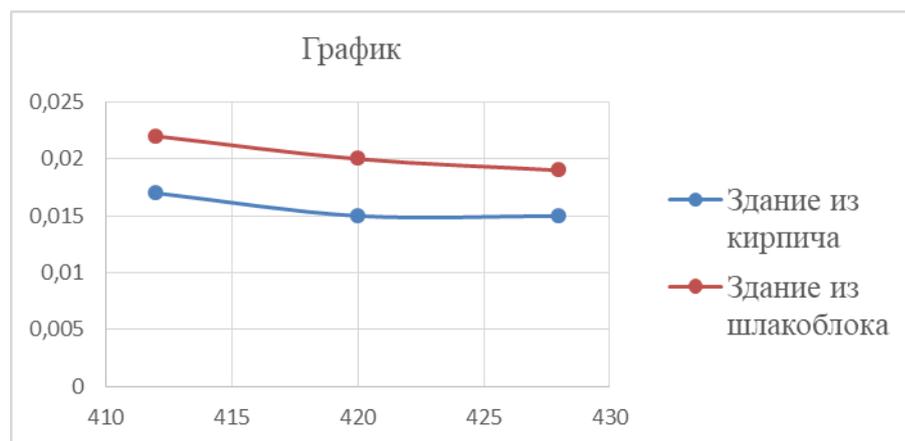
Для проведения измерений радиации использовали прибор АНРИ-01-02 - Сосна - Дозиметр-радиометр бытовой. С его помощью замерили уровень радиации в лицее и жилом доме на разных этажах и в подвале. Полученные измерения представлены в таблице.

Здание из шлакоблоков (Лицей №1)

Высота h над уровнем моря, м	Радиационный фон, мР/час
412	0,022
420	0,02
428	0,019

Здание из кирпича (жилой дом)

Высота h над уровнем моря, м	Радиационный фон, мР/час
412	0,017
420	0,015
428	0,015



По результатам, приведенным в таблице и на графике, можно сделать вывод.

- 1) В подвальных помещениях радиационный фон выше, чем на верхних этажах зданий.

2) На уровень радиации влияет строительный материал зданий. У здания из шлакоблока радиационный фон выше, чем у кирпичного здания.

1. Василенко О.И., Ишханов Б.С., Капитонов И.М., Селиверстова Ж.М., Шумаков А.В. Радиация: Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1996.
2. <https://fireman.club/inseklodepia/dozimetr/>.
3. <http://www.techportal.ru/material/?id=3326>.
4. Мякишев Г.Я., Буховцев Б.Б., Чаругин В.М. Физика: Учебное пособие. М.: Просвещение, 2021.
5. [http://fizmat.by/kursy/atomnoe\\_jadro/zakon\\_raspada](http://fizmat.by/kursy/atomnoe_jadro/zakon_raspada).

## СОДЕРЖАНИЕ

Авраменко Ю.В., Попова А.К., Федоров Р.К. Опыт применения RESNET50 для классификации ДЗЗ	3
Аникин А.С. Модификация метода LBFGS с экономичным одномерным поиском	4
Аникин А.С. Оценка пределов масштабирования сеток дискретизации для задач оптимального управления	5
Банщикова А.В. О гироскопической стабилизации положений равновесия орбитального гиростата	6
Баркова М.В., Стрекаловский А.С. Поиск глобальных решений в задачах квадратичной оптимизации с невыпуклыми ограничениями-неравенствами	7
Белых А.А., Баркова М.В. Уровневые алгоритмы для задачи упаковки прямоугольников в несколько полос	8
Горнов А.Ю. Программный комплекс для задач смешанной целочисленной оптимизации	9
Горнов А.Ю. Численное исследование алгоритма Архимеда для оценки объема многомерных тел	10
Горнов А.Ю. Об одной классификации невыпуклых задач оптимизации	12
Горнов А.Ю. Про «островной» подход к задаче невыпуклой оптимизации	14
Давыдов А.В., Ларионов А.А., Нагул Н.В. Реализация супервизоров в формальном логическом подходе к управлению дискретно-событийными системами	15
Денисова Д.А., Дородных Н.О. ONTOGEN: Система автоматизированного создания онтологий на основе преобразования электронных таблиц	17
Жарков М.Л., Казаков А.Л. О моделировании железнодорожных транспортных систем на основе сетей массового обслуживания	19
Зароднюк Т.С. Модельная задача оптимального управления с исчезающе малой областью притяжения глобального экстремума	20
Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Об инвариантных соотношениях в задаче о движении твердого тела в магнитном поле	21
Казаков А.Л., Кузнецов П.А. О построении кусочно-аналитических решений краевой задачи с вырождением для нелинейной параболической системы	22
Климонов М.С. Модели, методы, алгоритмы, программная и вычислительная инфраструктура для формирования композиций сервисов	24
Кондратьев В.С. Применение дизъюнктивных диаграмм в препроцессинге конъюнктивных нормальных форм	25
Косов А.А. Об аналогах случая Бобылева-Стеклова для гиростата	27
Костылева О.Д., Парамонов В.В. О классификации веб-таблиц	29

Кочемазов С.Е. О стратегиях переключения между фазами в современных алгоритмах решения проблемы булевой выполнимости	32
Куклин С.Г., Горнов А.Ю. Программный комплекс анализа данных холтеровского мониторинга для персонифицированной медицины	33
Марков Ю.А., Маркова М.А. Производство Мойла для параграсмановой алгебры порядка 2	34
Марков Ю.А., Маркова М.А., Марков Н.Ю. Гамильтонов формализм для фермионных возбуждений в кварк-глюонной плазме	36
Новиков М.А. Об устойчивости некоторых стационарных движений механической системы с условным интегралом	39
Орлов А.В. К решению квадратичных двухуровневых задач с биматричной игрой на нижнем уровне	40
Пасечнюк Д.А., Горнов А.Ю. «Солнечный» метод: двухуровневый алгоритм в одноуровневой задаче оптимизации	42
Пестова Ю.В. Программное средство анализа и прогнозирования сферы общественного питания	43
Петренко П.С. Об управляемости одной вырожденной гибридной системы	44
Рапуга В.Ф. Модели и методы оценивания регионального загрязнения Байкальской природной территории	45
Самсонюк О.Н. Представление BV-решений управляемого процесса выметания	48
Свинин А.К. О решениях некоторых дискретных уравнений	49
Свинина С.В. О четырехточечной локально-одномерной разностной схеме для некоторых линейных многомерных дифференциально-алгебраических систем первого порядка	50
Сороковиков П.С., Горнов А.Ю. Низкопотенциальные атомные кластеры Саттона-Чена размерностей от 121 до 150 атомов	51
Сороковиков П.С., Хандаров Ф.В. Комбинированный алгоритм невыпуклой оптимизации на основе методов генетического поиска и роя частиц	52
Толстихин А.А. Мультиагентный децентрализованный подход к обследованию полей концентрации, инспирированный поведением омаров	54
Тятюшкин А.И. Многометодный алгоритм для решения задачи перевода нелинейного объекта	55
Тятюшкин А.И., Зароднюк Т.С. Методика численного решения задачи оптимального управления в системе с постоянным запаздыванием	58
Угорская Я.А. Технология дополненной реальности для анализа данных состояния ионосферы Земли	60
Хандаров Ф.В. Об одной модели кластеризации данных	61
Хмельнов А.Е. Реализация сервиса для получения фрагментов векторной топологии	62

Чекан М.А. Распределенная среда проведения аукционов на виртуальные ресурсы энергосистемы	64
Чистяков В.Ф. О численном решении линейных интегро-алгебраических уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами	66
Шабалин А.С., Николайчук О.А. Адаптация образовательного процесса на основе продукций	68
Юрин А.Ю., Дородных Н.О. О реализации верификации и валидации синтезируемых кодов онтологических и продукционных баз знаний	69
Staritsyn M., Pogodaev N., Chertovskih R. and Pereira F.L. Few-shot classification via optimal ensemble control of «infinitely deep and large» neural networks	70

### **Секция «Юные исследователи»**

Алексеев В.И. Физика в мире плавания	67
Антипина П.А. Методика быстрого счета	68
Верхушин В.Г. Тепловой двигатель – двигатель Стирлинга	71
Гурская Ю.В. Решение уравнений с параметром	73
Дашков Ф.С. Возможности гальванопластики в домашних условиях	75
Мавлюкеева М.С. Ливневые канализации города Братска	76
Обухов Е.К. Оценка численности популяции животных в условиях конкуренции и промысла	78
Федосов М.А. Фигурные числа	80
Чумутина К.О. Исследование радиационного фона в помещениях	83

Научно-организационный отдел  
Федерального государственного бюджетного учреждения науки  
Института динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова  
Сибирского отделения Российской академии наук  
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134  
E-mail: [rio@icc.ru](mailto:rio@icc.ru)

Подписано к печати 29.11.2021 г.  
Формат бумаги 60×84 1/16, объем 4,25 п.л.  
Заказ 8. Тираж 100 экз.

---

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН