

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
ИМЕНИ В.М. МАТРОСОВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 517.9

Рег. № НИОКТР АААА-А17-117032210080-7

Рег. № ИКРБС

Инв. №



УТВЕРЖДАЮ

Директор ИДСТУ СО РАН
академик

И.В. Бычков

2019 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ,
ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ И ПРИЛОЖЕНИЯ
(промежуточный, этап 3)

Приоритетное направление: I.1 Теоретическая математика

Программа I.1.4 Исследование задач динамики и управления: качественный и
численный анализ

Руководитель НИР
зав. отделением
чл.-кор.

А.А. Толстоногов

подпись, дата 24.12.2019

Иркутск 2019

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы:

Зав. Отделением,
чл.-кор. РАН


_____ А.А. Толстоногов
подпись, дата 24.12.2019

Исполнители темы:

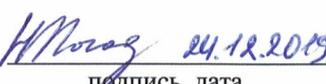
Гл. науч. сотр.,
д-р физ.-мат. наук


_____ И.А. Финогенко (Блок I)
подпись, дата 24.12.2019

Ст. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ С.А. Тимошин (Блок I)
подпись, дата 24.12.2019

Вед. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ Н.И. Погодаев (Блок I)
подпись, дата 24.12.2019

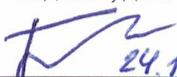
Зам. директора по
научной работе,
д-р физ.-мат. наук


_____ А.А. Щеглова (Блок II)
подпись, дата 24.12.2019

Гл. науч. сотр.,
д-р физ.-мат. наук


_____ В.Ф. Чистяков (Блок II)
подпись, дата 24.12.2019

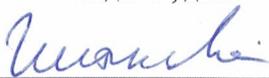
Гл. науч. сотр.,
д-р физ.-мат. наук


_____ М.В. Булатов (Блок II)
подпись, дата 24.12.2019

Ст. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ С.В. Свинина (Блок II)
подпись, дата 24.12.2019

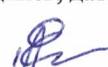
Науч. сотр., канд.
физ.-мат. наук


_____ Е.В. Чистякова (Блок II)
подпись, дата 24.12.2019

Науч. сотр., канд.
физ.-мат. наук


_____ П.С. Петренко (Блок II)
подпись, дата 24.12.2019

Ст. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ Л.В. Соловарова (Блок II)
подпись, дата 24.12.2019

зав. лабораторией
д-р физ.-мат. наук


_____ В.А. Дыхта (Блок III)
подпись, дата 24.12.2019

Вед. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ Е.В. Гончарова (Блок III)
подпись, дата 24.12.2019

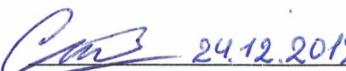
Ст. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ О.Н. Самсонык (Блок III)
подпись, дата 24.12.2019

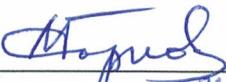
Науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ С.П. Сорокин (Блок III)
подпись, дата 24.12.2019

Вед. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ М.В. Старицын (Блок III)
подпись, дата 24.12.2019

Гл. науч. сотр.,
д-р техн. наук


_____ А.Ю. Горнов
подпись, дата 24.12.2019

(Блок IV)

Гл. науч. сотр.,
д-р техн. наук


_____ А.И. Гятюшкин
подпись, дата 24.12.2019

(Блок IV)

Ст. науч. сотр.,
канд. техн. наук


_____ Т.С. Зароднюк
подпись, дата 24.12.2019

(Блок IV)

Мл. науч. сотр.


_____ А.С. Аникин
подпись, дата 24.12.2019

(Блок IV)

Программист


_____ П.С. Сороковиков
подпись, дата 24.12.2019

(Блок IV)

Нормоконтролер
канд. техн. наук


_____ Е.С. Фереферов
подпись, дата 25.12.2019

Реферат

Отчет 39 стр., 10 рис., 1 табл., 85 источников, 1 прил.

ПРОЦЕССЫ ВЫМЕТАНИЯ, ГИСТЕРЕЗИС, УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИБРИДНЫЕ СИСТЕМЫ, ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВАРИАЦИОННОГО ТИПА, ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ.

Проект посвящен исследованию ряда актуальных задач теории эволюционных уравнений и управляемых систем. Помимо классических динамических систем рассматриваются системы, описываемые процессами выметания, системы с гистерезисом и дифференциально-алгебраические уравнения. В 2019 г. в рамках проекта доказан аналог релаксационной теоремы Н.Н. Боголюбова для задачи оптимального управления системой, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением в сепарабельном банаховом пространстве и вариационным неравенством. Установлено существование периодического решения для системы уравнений в частных производных, описывающая модель фазовых переходов с ограничением на фракцию фазы, зависящим от относительной температуры. Разработан и обоснован новый метод исследования асимптотического поведения решений неавтономных разрывных систем с измеримой по совокупности аргументов правой частью. Получены условия робастной устойчивости для нестационарных систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с интервальными возмущениями высокого индекса неразрешенности. Доказаны теоремы о взаимосвязи управляемости и наблюдаемости вырожденных линейных гибридных систем для случая непрерывного, а также кусочно-непрерывного решения. Разработаны устойчивые разностные схемы для численного решения систем ДАУ с частными производными второго порядка и для обыкновенных ДАУ высокого индекса, содержащих жесткие компоненты. Разработаны многошаговые многостадийные методы решения интегро-алгебраических уравнений и алгоритмы построения левых регуляризирующих операторов для некоторых классов ДАУ в частных производных. На основе позиционного принципа минимума разработана схема улучшения управления для негладкой задачи оптимального управления с терминальным функционалом, который задается произвольной липшицевой функцией. Доказано необходимое условие оптимальности с позиционными управлениями спуска по функционалу для нелинейной задачи управления дифференциальной системой с мерами, при этом используемые позиционные управления порождаются новым классом слабо инвариантных функций. На базе этого условия разработан алгоритм численного исследования задачи оптимального импульсного управления с линейно-квадратичным функционалом. Изучены вопросы существования решения и получения условия оптимальности для разрывных управляемых процессов с гистерезисной нелинейностью. Разработаны и численно реализованы новые нелокальные методы приближенного решения задач оптимального управления, проведено их тестирование на ряде задач, в том числе прикладных.

Проект соответствует:

- приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в РФ: Транспортные и космические системы.
- критическим технологиям РФ: Технологии информационных, управляющих, навигационных систем (13).

СОДЕРЖАНИЕ

Реферат	4
СОДЕРЖАНИЕ.....	5
Введение	6
Блок I. Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения	9
Блок II. Исследование качественных свойств и численное решение управляемых систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с приложениями к вырожденным задачам оптимального управления	12
Блок III. Качественное исследование неклассических и нерегулярных задач теории оптимального управления с приложениями к механике и численным методам улучшения управления	16
Блок IV. Алгоритмы и вычислительные технологии решения задач оптимального управления и фазового оценивания	20
Заключение.....	25
Приложение А – Список публикаций по проекту.....	26

Введение

Процессы выметания и уравнения с гистерезисными операторами, имеют большую историю. Например, с помощью процессов выметания описывается динамика механических систем с неупругими ударами и трением. С помощью уравнений, содержащих гистерезисные операторы, описываются задачи памяти формы для сплавов, задачи фильтрации, задачи динамики популяций и т. д. Процессам выметания и уравнениям с гистерезисными операторами, описываемыми как обыкновенными, так и уравнениями в частных производных, и их приложениям посвящено огромное количество работ, начиная с работ J.J. Moreau и A. Visinith. Основное внимание во всех этих работах уделено вопросам существования, единственности и регулярности решений. Что же касается работ, посвященных оптимальному управлению процессами выметания с гистерезисом, то их единицы. В основном они касаются простейших задач минимизации квадратичных функционалов на решениях системы с выпуклыми постоянными ограничениями на управление. В то же время многие вопросы, относящиеся к процессам выметания с гистерезисом и невыпуклыми, зависящими от фазовой переменной, ограничениями на управление ранее не изучались. Ряд таких вопросов, имеющих приложения в различных областях, рассматривается в данном проекте.

Метод предельных уравнений в настоящее время является одним из основных методов исследования асимптотического поведения решений неавтономных систем дифференциальных уравнений. Но при исследовании разрывных систем в общем виде возникают трудности, которые до сих пор не были преодолены, так как не удавалось построить предельные дифференциальные уравнения. В наших исследованиях предельные дифференциальные соотношения представлены в форме дифференциальных включений, что вполне согласуется с общей теорией дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и позволяет изучать более широкие классы неавтономных дифференциальных уравнений, в том числе - системы с сухим трением и разрывными позиционными управлениями релейного типа.

Смешанные системы (coupled systems), состоящие из взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, возникают в механике, математической биологии, при моделировании транспортных

потоков и т.д. В текущем отчетном периоде нами рассматривались смешанные системы, в которых уравнение в частных производных является уравнением неразрывности. Отметим, что уравнения неразрывности в настоящее время активно изучаются целым рядом ученых в связи с их практической и теоретической значимостью. С одной стороны, (нелокальные) уравнения неразрывности можно трактовать как пределы в среднем поле (meanfield limits) классических мультиагентных систем, а потому они естественным образом появляются в макроскопических моделях математической биологии. С другой стороны, уравнение неразрывности, описывая эволюцию распределения во времени, является важным инструментом исследования геометрической структуры пространства вероятностных мер. В рамках проекта для задачи оптимального управления системой, состоящей из линейного уравнения неразрывности и обыкновенного дифференциального уравнения, рассматривался вопрос построения необходимых условий оптимального управления.

Задачи качественного анализа и численного решения систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) привлекают внимание исследователей во всем мире, поскольку такие системы используются при моделировании процессов в многочисленных приложениях, в частности, при описании механических динамических систем со связями, моделировании электрических и гидравлических цепей, задачах внутренней баллистики и других прикладных областях. Дифференциально-алгебраические уравнения в частных производных второго порядка возникают, например, при описании тепловых процессов в газожидкостных системах.

Основные трудности, возникающие при исследовании робастных свойств ДАУ, связаны с тем, что даже в простейших случаях при сколь угодно малом возмущении коэффициентов может измениться внутренняя структура системы и, следовательно, вид общего решения, в результате чего структура и свойства невозмущенной системы могут потерять для анализа всякое значение. Участниками проекта разработан новый подход к исследованию робастных свойств ДАУ, основанный на том, что возмущения должны подчиняться некоторым конечным соотношениям для того, чтобы размерность пространства решений и структура общего решения возмущенных ДАУ оставались такими же, как у номинальной системы.

Сложные математические модели могут включать в себя не только ДАУ, но и уравнения Фредгольма. Такие модели возникают, если исследуемый процесс обладает последствием. Соответствующие интегральные операторы можно рассматривать как возмущения исходных систем. В результате возмущения оператором Фредгольма ДАУ приобретают свойства, аналогичные уравнениям Фредгольма второго рода, вследствие чего требуются доказательства альтернативных теорем Фредгольма и возможны нарушения единственности решений начальных задач.

Классическим примером ДАУ в частных производных второго порядка является система уравнений Навье-Стокса. Построение прямых сплайн-коллокационных методов для таких уравнений по аналогии с дифференциально-алгебраическими уравнениями первого порядка связано с определенными трудностями, которые обусловлены вырождением матрицы при главном члене в разностной схеме. Известные численные методы их решения основаны либо на переносе алгоритмов, разработанных для других классов задач, либо на изменении исходной задачи. Оба подхода применимы только для частных случаев ДАУ, и к тому же, не учитывают возмущения входных данных. В проекте предлагаются численные методы, предназначенные для более широкого класса задач, чем ранее полученные.

Для классических, дискретных и импульсных задач оптимального управления развиваются нелокальные условия оптимальности вариационного типа. Эти условия используют позиционные вариации управления, которые генерируются конструктивно определяемыми решениями неравенства Гамильтона-Якоби для слабо монотонных функций. Эта особенность позволяет существенно повысить эффективность необходимых

условий и основанных на них предлагаемых алгоритмов улучшения управления (последние, как известно, в основном локальные). В отчетном периоде получены результаты, связанные с распространением позиционного принципа минимума на задачи импульсного управления, а также с разработкой основанной на нем принципиальной схемы улучшения управления для негладких задач динамической оптимизации.

В части разработки вычислительных методов и технологий для задач оптимального управления предложены новые алгоритмы приближенного решения задач оптимального управления и оценивания интегральных воронок динамических систем при полиэдральных ограничениях на управление. Проведено многовариантное тестирование разработанных алгоритмов и вычислительных технологий с помощью сформированной коллекции, позволившее продемонстрировать их эффективность для изучаемых классов задач.

Основные задачи проекта представлены четырьмя блоками и охватывают следующие проблемы теории эволюционных уравнений и управляемых систем:

Блок I. Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения.

Блок II. Исследование качественных свойств и численное решение управляемых систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с приложениями к вырожденным задачам оптимального управления.

Блок III. Качественное исследование неклассических и нерегулярных задач теории оптимального управления с приложениями к механике и численным методам улучшения управления.

Блок IV. Алгоритмы и вычислительные технологии решения задач оптимального управления и фазового оценивания.

Все запланированные на 2019 год задачи проекта были выполнены. Результаты по блоку I опубликованы в работах [1-15], по блоку II - [16-39], по блоку III - [40-52], по блоку IV - [53-85].

Блок I. Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения

Цели и задачи

Цель данного блока состоит в изучении качественных свойств неклассических управляемых систем, описываемых эволюционными уравнениями. Для ее достижения были поставлены следующие задачи:

1. Доказать аналог теоремы А.Ф. Филлипова для полиэдральных процессов выметания.
2. Получить необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального управления, состоящей из линейного закона сохранения и ОДУ.
3. Доказать аналоги принципа инвариантности для неавтономных разрывных систем с измеримыми правыми частями и исследовать асимптотическую динамику систем функционально-дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями и изучить вопрос об асимптотическом поведении неавтономных систем представленных в форме разрывных уравнений Лагранжа второго рода.

Основные результаты

В сепарабельном банаховом пространстве рассмотрено дифференциальное включение, правая часть которого является суммой двух многозначных отображений. Первое из отображений имеет своими значениями замкнутые, ограниченные, не обязательно выпуклые множества. Оно измеримо по временной переменной, является липшицевым по фазовой переменной и удовлетворяет традиционному условию роста. Второе многозначное отображение в качестве своих значений имеет замкнутые, выпуклые, не обязательно ограниченные множества. Предполагается, что это отображение имеет по фазовой переменной замкнутый график. Остальные предположения относятся к пересечению второго отображения и многозначного отображения, определенного условиями роста. Считается, что пересечение многозначных отображений имеет измеримый селектор и обладает определенными свойствами компактности. Доказана теорема существования решений таких включений. (Толстоногов А.А.)

Рассмотрена задача минимизации интегрального функционала на решениях управляемой системы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением в сепарабельном банаховом пространстве и вариационным неравенством. Это вариационное неравенство определяет гистерезисный оператор, входом которого является траектория управляемой системы, а выход содержится в правой части дифференциального уравнения, в ограничении на управление и в минимизируемом функционале. Ограничением на управление является многозначное отображение с замкнутыми, невыпуклыми значениями, а интегрант является функцией, невыпуклой по управлению. Наряду с исходной рассматривается задача минимизации интегрального функционала с овыпукленным по управлению интегрантом на решениях управляемой системы с овыпукленным ограничением на управление (релаксационная задача). Под решением управляемой системы понимается тройка: выход гистерезисного оператора, траектория и управление. Установлена связь между исходной задачей минимизации и релаксационной задачей. Эта связь является аналогом классической теоремы Н.Н. Боголюбова в вариационном исчислении. Изучена также связь между решениями исходной управляемой системы и системы с овыпукленным ограничением на управление. Эту связь обычно называют релаксацией. Для конечномерного пространства доказано существование оптимального решения в релаксационной задаче оптимизации. (Толстоногов А.А.)

Рассмотрена система уравнений в частных производных, описывающая модель фазовых переходов с ограничением на фракцию фазы, которое зависит от относительной

температуры. Система состоит из уравнения баланса энергии с нелинейным источником тепла и уравнения фазовой динамики, учитывающего гистерезисный характер процесса. Доказано существование периодического решения для данной системы при минимально возможных требованиях на кривые, определяющие область гистерезиса. (Тимошин С.А.)

Изучены неавтономные функционально-дифференциальные включения и неавтономные разрывные системы с запаздыванием с решениями в смысле Филиппова, дифференциальные включения с запаздывающим аргументом и разрывные системы с запаздыванием. Для этих классов систем исследована асимптотическая динамика и доказаны теоремы о локализации правых предельных множеств ограниченных решений в форме обобщений принципа инвариантности. Здесь следует отметить также, что разрывные системы с запаздыванием практически не изучались даже на уровне вопросов общей теории. Изучен вопрос асимптотического поведения неавтономных систем, представленных в форме разрывных уравнений Лагранжа второго рода. Это могут быть системы управления с разрывными нелинейностями или системы с сухим кулоновым трением. При описании предельных уравнений существенным образом учитывалась структура исходных систем (Финогенко И.А.)

Рассмотрена динамическая система, состоящая из линейного закона сохранения и обыкновенного дифференциального уравнения, в который входит управляющий параметр. Подобные системы, как правило, используются для описания движения материальной точки, взаимодействующей с некоторым распределенным объектом. Для задачи оптимального управления такой системой найдено необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. (Погодаев Н.И.)

Оценка результатов

Доказательство теоремы о существовании решения дифференциального включения с составной правой частью базируется на принадлежащей руководителю проекта теореме о непрерывных селекторах, проходящих через неподвижные точки многозначных отображений, зависящих от параметра, с замкнутыми, невыпуклыми, разложимыми значениями и классической теореме Ки Фана о неподвижной точке. Сам результат является новым.

Управляемые системы, связанные с вариационным неравенством, при определенных предположениях могут быть переформулированы как процессы выметания с гистерезисными операторами. Такой процесс выметания представляет собой дифференциальное включение с разрывной правой частью. Задача минимизации интегрального функционала с невыпуклым по управлению интегрантом на решениях управляемой системы, связанной с вариационным неравенством, и с невыпуклозначными ограничениями на управления рассматриваются впервые. Полученный результат о существовании решений и теоремы релаксации для задач оптимального управления являются новыми. В частности, из этой теоремы вытекает классическая теорема А.Ф. Филиппова о связи между решениями исходной системы и системы с овыпукленными ограничениями. Для данного класса управляемых систем эта теорема также является новой.

Направление наших исследований асимптотической динамики неавтономных систем связано с построением предельных дифференциальных включений. Мы использовали также прямой метод Ляпунова с функциями Ляпунова со знакопостоянными производными. Такие функция, как правило, и возникают при исследовании механических систем в форме уравнений Лагранжа, производная функции Ляпунова в форме полной энергии системы зависит лишь от обобщенных скоростей.

Для доказательства необходимого условия оптимальности в задаче оптимального управления системой, состоящей из уравнения неразрывности и обыкновенного дифференциального уравнения, было отмечено, что уравнение неразрывности является пределом в среднем поле (mean-field limit) для ансамбля систем обыкновенных дифференциальных уравнений при стремлении числа уравнений к бесконечности. Это

позволило аппроксимировать исходную вариационную задачу классической задачей оптимального управления, для которой необходимым условием оптимальности является стандартный принцип максимума Понтрягина. Затем для вывода необходимого условия оптимальности в исходной задаче использовался предельный переход на основе принципа Экланда.

Блок II. Исследование качественных свойств и численное решение управляемых систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с приложениями к вырожденным задачам оптимального управления

Цели и задачи

Целью исследований являлось изучение внутренней структуры и качественных свойств ДАУ, в том числе с непрерывным и дискретным временем (гибридных), а также построение алгоритмов нормализации и создание устойчивых численных методов решения систем интегро-алгебраических и дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными.

В рамках поставленной цели были рассмотрены следующие задачи:

1. Получить условия асимптотической устойчивости нестационарной системы дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) высокого индекса с интервальными возмущениями.
2. Доказать теоремы о взаимосвязи R -управляемости и R -наблюдаемости (управляемости и наблюдаемости в пределах множества достижимости) для исходной и двойственной вырожденной линейной гибридной системы.
3. Разработать устойчивые разностные схемы для численного решения систем дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными второго порядка.
4. Разработать коллокационно-вариационные методы численного решения начальной задачи для системы ДАУ высокого индекса, содержащей жесткие компоненты. Построить для таких задач регуляризирующие алгоритмы.
5. Разработать многошаговые многостадийные методы решения интегро-алгебраических уравнений.
6. Получить критерии существования и указать алгоритмы построения левых регуляризирующих операторов для некоторых классов ДАУ в частных производных.

Основные результаты

Исследовалась асимптотическая устойчивость линейной нестационарной системы ДАУ с интервальными коэффициентами. Предполагалось, что система не разрешима относительно производной искомой вектор-функции при любых матричных коэффициентах из заданных интервальных семейств. Найдены линейные соотношения, которым должны подчиняться интервальные возмущения для того, чтобы размерность пространства решений и структура общего решения интервального семейства ДАУ были такими же, как у номинальной системы. Такие возмущения названы «сохраняющими внутреннюю структуру». В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получены достаточные и необходимые и достаточные условия робастной устойчивости для системы ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности, у которых неопределенность может присутствовать во всех матричных коэффициентах. (Щеглова А.А.)

Рассматривались линейные системы ДАУ, содержащие в своей динамике как непрерывные, так и дискретные переменные (вырожденные гибридные системы). Для таких систем доказаны теоремы двойственности, связывающие между собой понятия R -управляемости и R -наблюдаемости. Эти результаты получены как для случая с непрерывным, так и с кусочно-непрерывным решением. (Петренко П.С.)

Рассмотрена дифференциально-алгебраическая система уравнений в частных производных второго порядка. Для такой системы построена сплайн-коллокационная разностная схема, основанная на аппроксимации искомой функции бикубическим сплайном, представленным в виде разложения по базису из нормализованных В-сплайнов

(Свинина С.В.).

Для линейных интегро-алгебраических уравнений построено семейство неявных устойчивых многошаговых методов второго и третьего порядка, которые были успешно протестированы на модельных примерах. Результаты численных экспериментов показали, что работоспособность методов может контролироваться некоторым весовым параметром, который должен быть выбран из заданного интервала, чтобы обеспечить необходимую устойчивость алгоритма. На рисунке II.1 показано поведение функции ошибки, если весовой параметр M выбран из интервала устойчивости, рисунок II.2 показывает, что с уменьшением шага сетки погрешность методов только растет, если M выбирается вне границ интервала устойчивости. (Булатов М.В., Чистякова Е.В.)

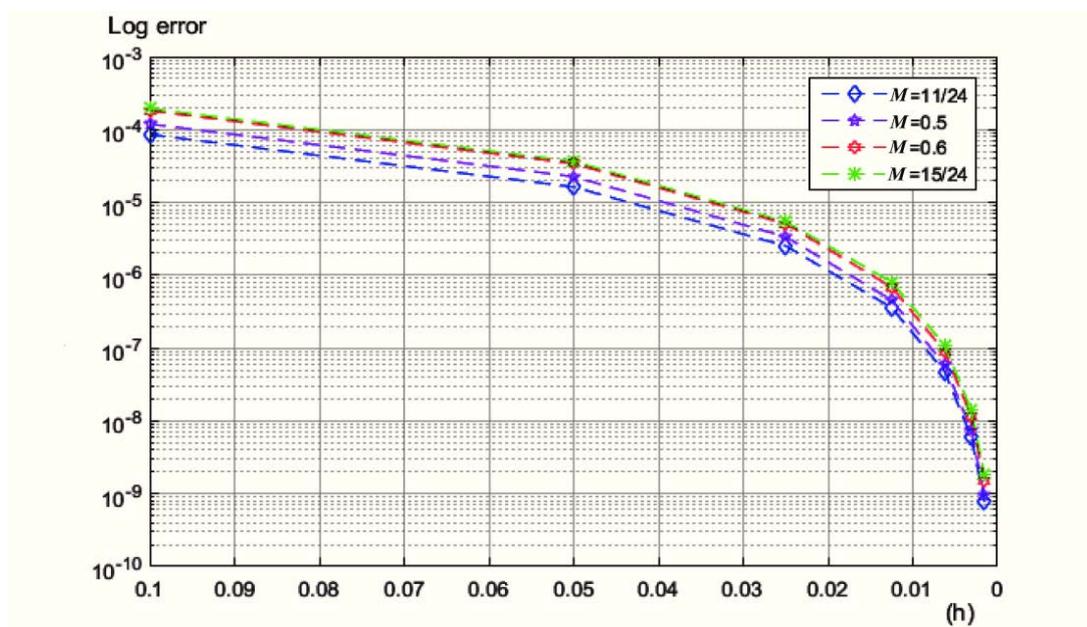


Рисунок II.1 – Функция ошибки

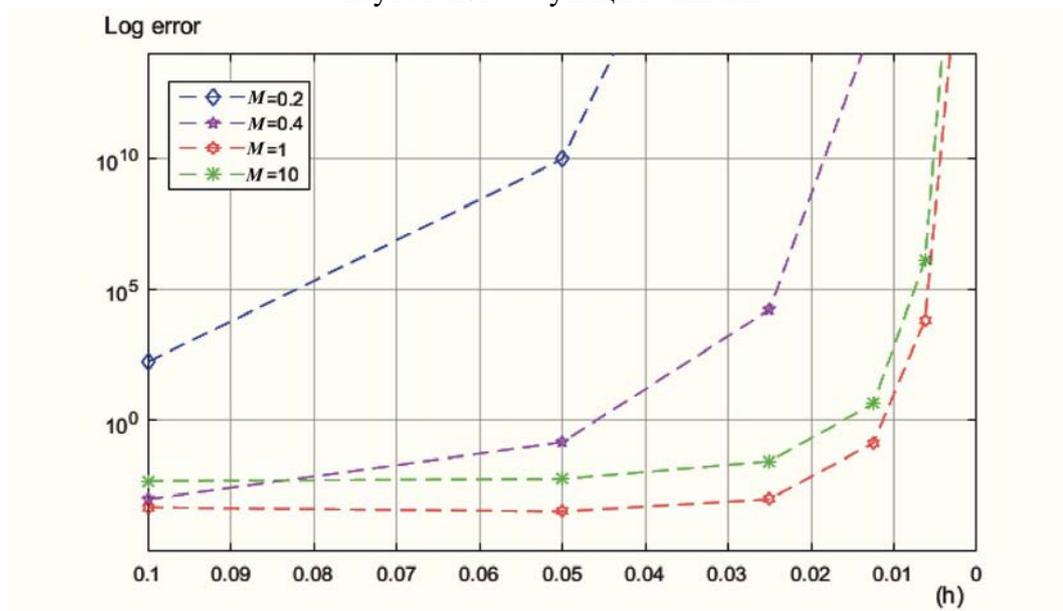


Рисунок II.2 – Зависимость погрешности от шага сетки

Предложены и обоснованы коллокационно-вариационные разностные схемы с несколькими точками коллокации первого и второго порядков. Их построение основано на решении специальных задач квадратичного программирования. Данные алгоритмы исследованы на жестком уравнении Далквиста на предмет A- и L-устойчивости. Проведено сравнение созданных методов с известными (методами типа Рунге-Кутты,

классическими многошаговыми методами и др.) на ряде тестовых примеров. Данные расчеты показали преимущество предлагаемых схем: они просты в программной реализации и не требуют вычисления проекторов на ядра матриц и производных входных данных. Были проведены численные эксперименты для ДАУ индекса не выше двух, у которых правая часть задана с возмущением в метрике C . Было выявлено, что коллокационно-вариационные схемы обладают свойством саморегуляризации. В качестве параметра регуляризации выступает шаг сетки, который выбирают из принципа невязки. На рисунке П.3 приведены в качестве иллюстрации результаты расчетов тестового примера из монографии К. Brenan, S. Campbell, L. Petzold, Numerical solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations, Appl. Math., Philadelphia, 1996, p. 114 методом с двумя крайними правыми точками коллокации. (Булатов М.В., Соловарова Л.С.)

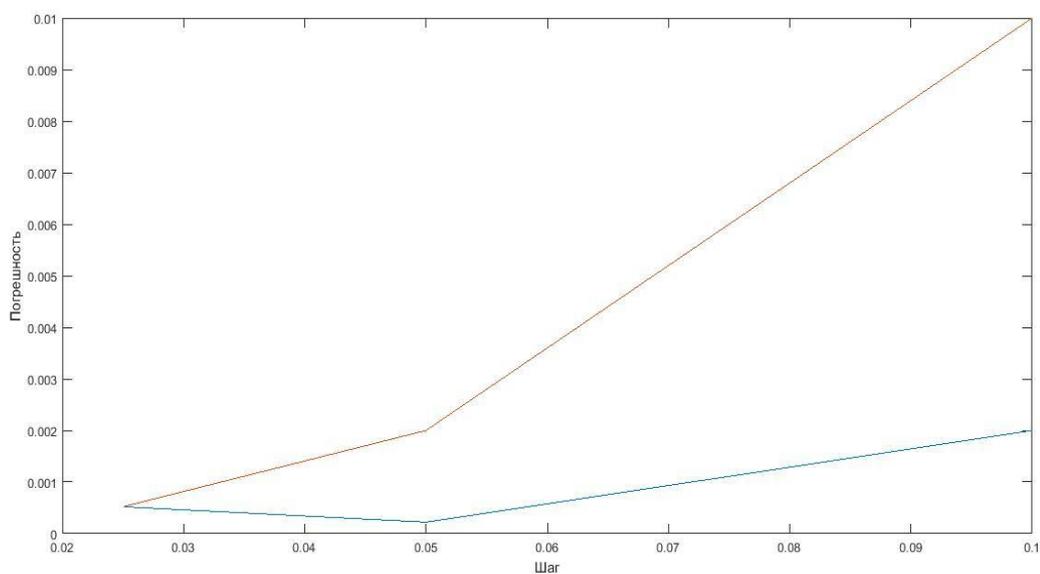


Рисунок П.3 – Зависимость погрешности от шага сетки

Рассмотрены системы ДАУ, возмущенные оператором Фредгольма. Для таких систем получены условия разрешимости и исследована устойчивость к возмущениям входных данных. В рамках теоремы существования построен численный метод на основе метода наименьших квадратов, доказана его сходимость. (Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.)

Изучен класс линейных эволюционных систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами общего вида с вырожденной матрицей перед старшей производной по времени от искомой вектор-функции. Предложено определение индекса неразрешенности такой системы, наиболее близкое к понятию индекса дифференциально-алгебраических уравнений. (Чистяков В.Ф.)

Оценка результатов

Все запланированные на 2019 год результаты были получены. Все результаты являются новыми и полностью соответствуют итоговым целям проекта.

Робастная теория устойчивости ДАУ в настоящее время далека от завершения. Полученные в рамках проекта результаты основаны на принципиально новом подходе, разработанном участниками проекта, и вносят значительный вклад в развитие этой теории. В рамках основных задач проекта получены условия, гарантирующие, что введение матричных возмущений в коэффициенты ДАУ не нарушает внутреннюю структуру системы и вид общего решения. В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получены конструктивные достаточные и необходимые и

достаточные условия робастной устойчивости. В известной литературе имеются результаты по робастной устойчивости нестационарных ДАУ индекса неразрешенности единица. Для классов систем, допускающих произвольно высокий индекс неразрешенности системы относительно производной искомой вектор-функции и переменный ранг матричных коэффициентов номинальной (невозмущенной) системы, в случае, когда возмущения присутствуют во всех матричных коэффициентах системы, результаты по робастной устойчивости получены впервые.

Построенная сплайн-коллокационная разностная схема для приближенного решения дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных второго порядка является более экономичной, чем сплайн-коллокационная разностная схема, основанная на аппроксимации искомого решения сплайном произвольного порядка, но применима только к системам малого индекса.

На основе результатов из теории разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений и методов решения задач математического программирования получены и обоснованы оригинальные коллокационно-вариационные разностные схемы для линейных ДАУ. Их отличительной характеристикой является простота реализации, так как они не требуют вычисления производных входных данных, проекторов на ядро матриц и обобщенных обратных матриц. Численные эксперименты для ДАУ индекса не выше двух показали, что коллокационно-вариационные схемы порождают регуляризирующий алгоритм. Параметр регуляризации выбирается на основе принципа невязки Морозова.

Результаты, связанные с решением интегро-алгебраических уравнений, получены путем исследования матричных полиномов, составляющих систему. Матрица перед главной частью вырождена, а это означает, что система одновременно содержит уравнения Вольтерра первого и второго рода. Методы решения уравнений Вольтерра первого рода к настоящему времени обоснованы только для некоторых частных случаев, например, для линейных уравнений с ядром, которое не обращается в нуль на диагонали для всех точек из отрезка определения. Следствием этого являются трудности в выборе численного метода, который бы дал удовлетворительные результаты для уравнений Вольтерра и первого и второго рода. Такие задачи часто встречаются в приложениях в области энергетики, и их дальнейшее исследование имеет важное практическое значение.

Результаты по ДАУ с оператором Фредгольма относятся к исследованиям систем, связывающих обыкновенные дифференциальные уравнения различных порядков, алгебраические соотношения и уравнения Фредгольма. Полученные ранее результаты были обобщены на системы высокого порядка и выделен класс задач, чьи свойства наиболее близки к свойствам обыкновенных дифференциальных уравнений, что облегчает поиск условий разрешимости и построение численных методов. Показано, что в настоящий момент метод наименьших квадратов является наиболее перспективным алгоритмом для решения таких задач. Дальнейшее исследование предполагает анализ выбора координатных функции и свойства саморегуляризации численных алгоритмов.

Блок III. Качественное исследование неклассических и нерегулярных задач теории оптимального управления с приложениями к механике и численным методам улучшения управления

Цели и задачи

Основные цели блока III связаны с проблематикой расширения неклассических и нерегулярных задач оптимального управления, требующих перехода к обобщенным управлениям импульсного типа и разрывным траекториям, а также задач оптимизации с жесткими фазограничениями и управляемыми системами смешанного типа (напр., «закон сохранения – ОДУ») (результаты по последнему типу задач также представлены в блоке I). Для этих задач итоговые результаты проекта будут содержать конструкции естественного релаксационного расширения, необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина и его существенного усиления – так называемого позиционного принципа минимума, а также примыкающие достаточные условия оптимальности и двойственность для некоторых классов невыпуклых задач (обобщенно-линейных по состоянию и квадратичных). Качественные результаты применяются для разработки итерационных методов улучшения управления, формализации ряда моделей механики (напр., ударного взаимодействия тел при вязком трении) и их исследования.

В рамках НИР по блоку III в 2019 г. были поставлены следующие задачи:

1. Получить численные методы улучшения управления на основе вариационных условий оптимальности. Разработать и реализовать численные методы улучшения управления (спуска по функционалу), существенно использующие позиционные (с обратной связью) вариации управления.
2. Исследовать вопросы существования решений и получения условий оптимальности для задач оптимального импульсного управления с векторным гистерезисом.
3. Исследовать проблему релаксации и существования решения задач оптимального управления гибридными системами, неустойчивыми относительно возмущения импульсных воздействий.

Методика проведения научно-исследовательской работы базируется на современной нелокальной теории управления, группирующейся в рамках уравнений и неравенств Гамильтона-Якоби-Беллмана и методах релаксационного расширения вырожденных задач оптимального управления. Результаты, связанные с тематикой гибридных систем с нелинейными импульсами и импульсных систем с гистерезисом, преимущественно опираются на оригинальную (разработанную авторами) технику пространственно-временных преобразований, которая сочетает в себе разрывную замену времени и расширение фазового пространства, позволяющее независимо отслеживать эволюцию односторонних пределов траектории в фазе импульсных воздействий.

Основные результаты

Разработана схема улучшения управления для негладкой задачи оптимального управления с терминальным функционалом, который задается произвольной липшицевой функцией. Метод основан на равномерной аппроксимации целевой функции квадратичной \inf -конволюцией Моро-Иосиды, которая является как полувогнутой, так и DC-функцией с гладкой выпуклой составляющей (тип квадрата нормы) и негладкой вогнутой. Такая структура аппроксимирующей функции позволяет использовать для итерационного улучшения управления аппроксимативный позиционный принцип минимума для субоптималей задачи, причем без предположения выпуклости множества скоростей динамической системы и введения обобщенных управлений (скользящих режимов). Предшествующие результаты охватывали только случай проксимально

супердифференцируемой целевой функции или разности гладкой и выпуклой функций непосредственно в исходной постановке задачи. (Дыхта В.А.)

Получены необходимые условия оптимальности со слабо инвариантными функциями типа Ляпунова для задач оптимального импульсного управления. Разработан метод генерации импульсных позиционных управлений, потенциально обеспечивающих спуск по целевому функционалу в нелинейной задаче управления дифференциальной системой с мерами. Метод идейно близок к методу опорных мажорант, предложенному В.А. Дыхтой для классических задач оптимального управления. Но в отличие него при построении позиционных управлений используется специальный класс функций, подуровни которых слабо инвариантны относительно импульсной управляемой системы. Доказаны необходимые условия оптимальности в форме позиционного принципа минимума для нелинейных импульсных процессов и предложен конструктивный итерационный метод построения управлений, последовательно улучшающих значения критерия качества. Разработан алгоритм численного исследования задачи оптимального импульсного управления с линейно-квадратичным функционалом. Результаты апробированы на нескольких тестовых примерах. На рисунке III.1 приведена одна из тестовых задач оптимального импульсного управления с линейно-квадратичным функционалом. Точное описание множества достижимости получено при помощи двух сильно монотонных функций типа Ляпунова. На рисунке III.1 приведены линии уровня целевой функции и точки ее локального и глобального минимумов. Предложенный метод позволяет при старте с произвольного начального допустимого процесса достигнуть глобального минимума за конечное число итераций (в рассмотренных случаях меньше чем за 10 итераций). (Самсонюк О.Н., Старицын М.В., Сорокин С.П.)

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } J[\sigma] = \langle x(t_1), Ax(t_1) \rangle, \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \text{ subject to} \\ & x_1(t) = \int_0^t \mu_{c1}(d\tau) + \sum_{s \in S, s \leq t} (z_1^s(d_s) - x_1(s^-)), \quad x_1(0) = 0, \\ & x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) \mu_{c2}(d\tau) + \sum_{s \in S, s \leq t} (z_2^s(d_s) - x_2(s^-)), \quad x_2(0) = 0, \\ & \frac{z_1^s(\tau)}{d\tau} = \omega_1^s(\tau), \quad z_1^s(0) = x_1(s^-), \\ & \frac{z_2^s(\tau)}{d\tau} = z_1^s(\tau) \omega_2^s(\tau), \quad z_2^s(0) = x_2(s^-), \\ & |\omega_1^s(\tau)| + |\omega_2^s(\tau)| \leq 1 \quad \text{for } s \in S, \mathcal{L}\text{- a.e. } \tau \in [0, d_s], \\ & |\mu_c|([0, t_1]) + \sum_{s \in S} d_s \leq M. \end{aligned}$$

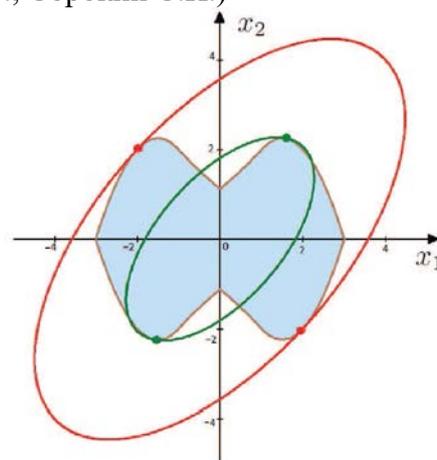


Рисунок III.1 – Тестовая задача

Изучены вопросы существования решения и получения условия оптимальности для разрывных управляемых процессов с гистерезисной нелинейностью. Рассмотрена задача оптимального управления с гистерезисной нелинейностью, заданной векторным play оператором, и разрывными траекториями ограниченной вариации. Доказана теорема существования оптимального решения и предложен метод доказательства необходимых условий оптимальности. Предложено расширение play оператора на входы ограниченной вариации и изучен вопрос разрешимости совместной системы, состоящей из дифференциального уравнения с мерой и дифференциального вариационного неравенства. Для иллюстрации полученных результатов построено расширение задачи оптимизации рекламных расходов с векторным гистерезисом, моделирующим запаздывание спроса на товар при изменении объема продаж взаимодополняющих товаров, и проведено численное моделирование соответствующей управляемой системы, состоящей из дифференциального уравнения с векторной управляющей мерой и дифференциального вариационного неравенства. На рисунке III.2 приведены две

аппроксимации управляющей меры, которые порождают два разных разрывных решения, различающихся пополнениями графиков. (Самсонюк О.Н.)

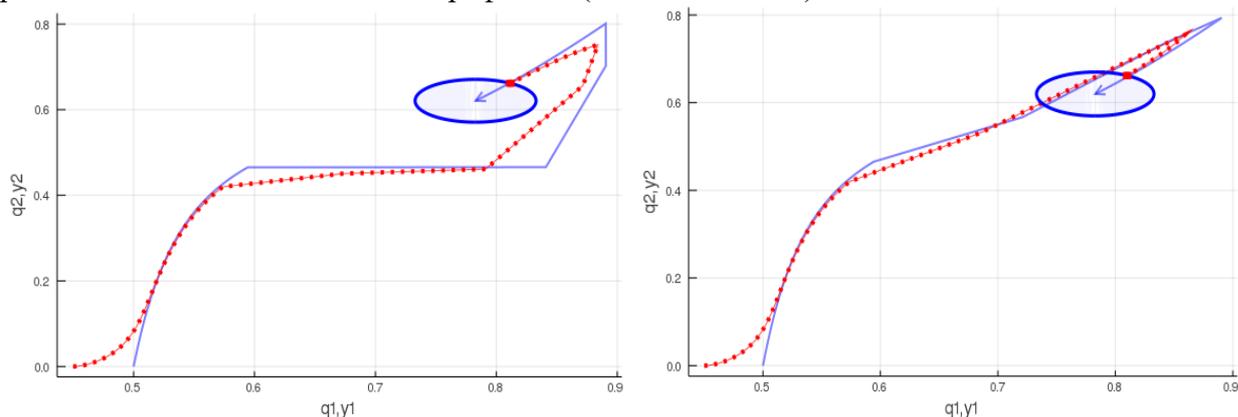


Рисунок III.2 – Модель оптимизации рекламных расходов с гистерезисом

Рассмотрен класс нелинейных импульсно-гибридных систем в форме дифференциального уравнения в мерках с явным представлением скачков траекторий, задаваемым с помощью абстрактного замкнутого отношения односторонних пределов в точках скачка, без предположений типа робастности. Для таких систем и связанных с ними задач оптимального управления развит аппарат сингулярных пространственно-временных представлений. На основе последнего построено релаксационное расширение изучаемого класса систем в подходящей (достаточно слабой) топологии пространства функций ограниченной вариации. При стандартных предположениях регулярности показано существование решения задачи оптимального управления. Подход основан на разрывной замене времени и преобразовании разрывного решения в фазе импульса, согласованном с предложенным ранее методом аппроксимации траекторий импульсно-гибридной системы непрерывными процессами. Заметим, что для систем общего вида аппроксимация разрывной траектории требует наличия двух непрерывных процессов сравнения, приближающих односторонние пределы разрывной функции и независимых друг от друга. (Гончарова Е.В., Старицын М.В.)

Оценка результатов

Все запланированные на 2019 год результаты были получены. Все результаты являются новыми и полностью соответствуют итоговым целям проекта.

Результаты, связанные с распространением необходимых условий оптимальности в форме позиционного принципа минимума на класс задач оптимального импульсного управления, получены путем применения известной схемы, предложенной ранее в работах В.А. Дыхты для классических задач оптимального управления. Новизна состоит в описании и использовании специального класса функций типа Ляпунова, подуровни которых обладают свойством слабой инвариантности относительно импульсной управляемой системы, а также в описании позиционного импульсного управления в терминах исходной импульсной системы, в отличие от предыдущих результатов, полученных для вспомогательной задачи классического типа. Условие оптимальности сформулировано в конструкциях обобщенного принципа максимума для импульсных процессов. Полученные условия оптимальности естественным образом приводят к конструктивным методам улучшения управления, их численная реализация имеет несомненную практическую значимость при исследовании прикладных задач рассматриваемого направления.

В проекте рассматривается новый подход к исследованию разрывных процессов управляемых систем с гистерезисными нелинейностями, заданными векторным гистерезисом типа «люфт». Подход опирается на расширение классического векторного play оператора на входы и выходы ограниченной вариации (BV-решения) и анализ

отдельных пополнений графиков BV-функций. Используемый подход позволяет дать корректное определение разрывного решения для импульсной управляемой системы с гистерезисной нелинейностью и доказать существование и единственность решения. В отличие от классических подходов (предложенных J.-J. Moreau, M.D. Marques, Krejci P., Rescigno V.) предложенный подход позволяет получить корректное описание разрывных BV-решений. Полученные на текущем этапе результаты подтверждают эффективность разрабатываемого подхода.

Ранее результаты по релаксационным расширениям импульсно-гибридных систем и соответствующих задач оптимизации были получены для частных классов моделей – для случая, когда отношение между состояниями до и после скачка представимо в виде декартового произведения двух множеств, а также для дискретно-непрерывных систем с явным представлением скачков фазового состояния. На текущем этапе проекта эти результаты обобщены на системы общего вида – нелинейные дифференциальные уравнения с мерами при абстрактной связи односторонних пределов траекторий в точках разрыва. Это обобщение существенно, поскольку аппроксимация произвольной импульсно-гибридной системы непрерывными процессами требует наличия уже не одного, а двух независимых процессов сравнения. Это приводит к более сложному сингулярному преобразованию модели, основанному на разрывной замене временной координаты и некотором преобразовании фазового пространства.

Блок IV. Алгоритмы и вычислительные технологии решения задач оптимального управления и фазового оценивания

Цели и задачи

В рамках НИР по блоку IV в 2019 г. были поставлены следующие задачи:

1. Апробировать разработанные алгоритмы на задачах, полученных путем дискретизации прикладных задач оптимального управления с непрерывным временем.
2. Выполнить программную реализацию метода Понтрягина с использованием параллельных вычислительных технологий.
3. Разработать вычислительную технологию для задачи аппроксимации интегральной воронки дифференциального включения полиэдрального типа.

Основные результаты

Разработан и реализован численный метод приближенного решения задачи оптимального управления на основе нелокального условия оптимальности. Соответствующий алгоритм опирается на предварительное формирование набора успешно решенных задач с дальнейшей экстраполяцией заложенных в базе оптимальных решений. Рассматривается однопараметрическое семейство задач оптимального управления, по единственному параметру которого формулируется и решается набор точечных задач. С использованием традиционных нелокальных методик анализа данных на основе полученной «обучающей выборки» строятся приближения к решению целого семейства задач оптимального управления, каждая из которых соответствует определенному значению параметра. Для проверки качества сформированных приближений полученный результат используется как начальное значение в локальном алгоритме оптимизации, глубина спуска которого и может выступать в качестве оценки эффективности предложенного способа экстраполяции имеющихся точечных решений. Задачи оптимального управления в предложенной схеме решаются с использованием метода приведенного градиента, для построения нелокальной экстраполяции применяется метод Шепарда. Продемонстрируем особенности применения данного подхода с помощью классической модельной задачи о стабилизации нелинейного маятника: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u - \sin x_1$, $u(t) \in [-1,1]$, $t \in [0,3]$, $x_1(0) = p$, $x_2(0) = 0$, $I(x(t_1)) = x_1^2(3) + x_2^2(3) \rightarrow \min$, где p – параметр семейства задач. Для получения информационной базы (обучающей выборки) решаем набор задач при разных значениях параметра $p = 3, 3.5, 4, \dots$ (таблица IV.1.). Используя эту обучающую выборку, строим начальные приближения для всех задач с промежуточными значениями параметра – 3.25, 3.75, ..., 6.75, – и для каждого из них проводим решение задачи оптимального управления.

Таблица IV.1 – Результаты решения модельной задачи оптимального управления при разных значениях параметра p .

n	p	$I_p(x(t_1))$	$I(x(t_1))$	n	p	$I_p(x(t_1))$	$I(x(t_1))$
1	3		0.5219	10	5.25	22.9952	22.9817
2	3.25	1.1583	1.0441	11	5.5		21.5470
3	3.5		1.8928	12	5.75	19.5910	19.5791
4	3.75	3.9045	3.3188	13	6		17.3345
5	4		6.4337	14	6.25	15.1213	15.0728
6	4.25	13.6350	12.9080	15	6.5		13.0060
7	4.5		19.1913	16	6.75	11.3739	11.3048
8	4.75	22.5746	22.5331	17	7		10.0499
9	5		23.5037				

Успешность предложенной методики получения приближенного решения оценивается разницей между значениями функционала $I_p(x(t_1))$, полученными с помощью предложенной экстраполяционной методики, и точными значениями задач $I(x(t_1))$ из обучающей выборки: $I_r = |I_p(x(t_1)) - I(x(t_1))|$ (рисунок IV.1).

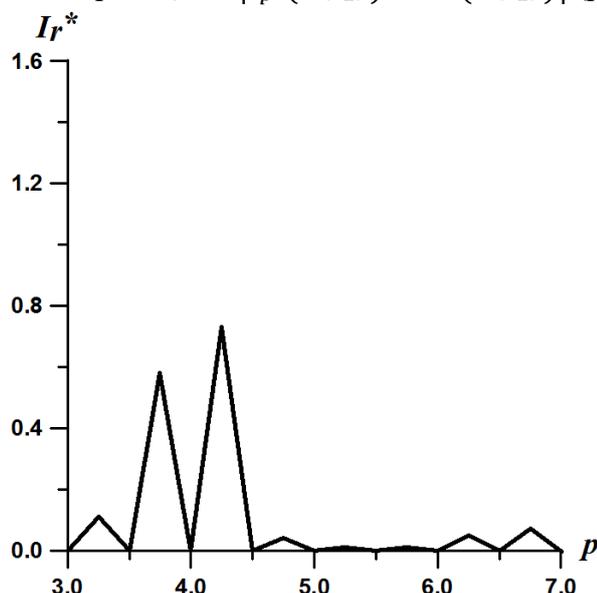


Рисунок IV.1 – Отклонение от точных решений рассматриваемой модельной задачи на заданной сетке при разных значениях начального фазового вектора.

Для значений параметра из диапазона 3.25–4.25, как видно из таблицы, произошло заметное улучшение целевого функционала, что говорит о невысокой точности экстраполяции на данном интервале. Но для значений параметра из диапазона 4.75–6.75 почти не удалось добиться улучшения функционала, полученные приближенные решения мало отличались от оптимальных. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили как принципиальную работоспособность, так и достаточно высокую точность предложенного метода улучшения управления, использующего построение экстраполяции позиционных управлений. (Т.С. Зароднюк, С.П. Сорокин).

Разработанные алгоритмы апробированы при численном решении задач, полученных путем дискретизации прикладных задач оптимального управления с непрерывным временем. Для этой цели использовались как классические хорошо известные модели, так и их модификации, позволяющие генерировать дополнительные вычислительные трудности для разработанных алгоритмов: модель Видала-Вулфа оптимизации рекламной стратегии фирмы, модель экономического роста Мэнкью-Ромера-Вейла, неоклассическая модель экономического роста (модель Солоу) и другие. Исходные постановки хорошо изучены, в том числе аналитически, что позволило провести сравнение полученных с помощью разработанных алгоритмов результатов с известными решениями и убедиться в их эффективности для исследования управляемых динамических моделей. Для примера приведем следующую задачу, которая позволяет продемонстрировать возможность наличия магистральных участков решения в нелинейных по управлению задачах оптимального управления, характерную для прикладных экономических задач: $\dot{x}_1 = x_1 + u$, $\dot{x}_2 = x_1 - 3u - u^2$, $0 \leq u(t) \leq 2$, $t \in [-1, 2]$, $x(-1) = (5, 0)$, $J[u] = x_2(2) \rightarrow \min$. В результате модификации исходной задачи: $\dot{x}_2 = 4\sin x_1 - 3u - u^2$, $x(-1) = (-1, 0)$, $J[u] = -x_1(2) - x_2(2) \rightarrow \min$, сформирована более сложная постановка характеризующаяся уже неединственностью решения и невыпуклостью множества достижимости (рисунок 4.2).

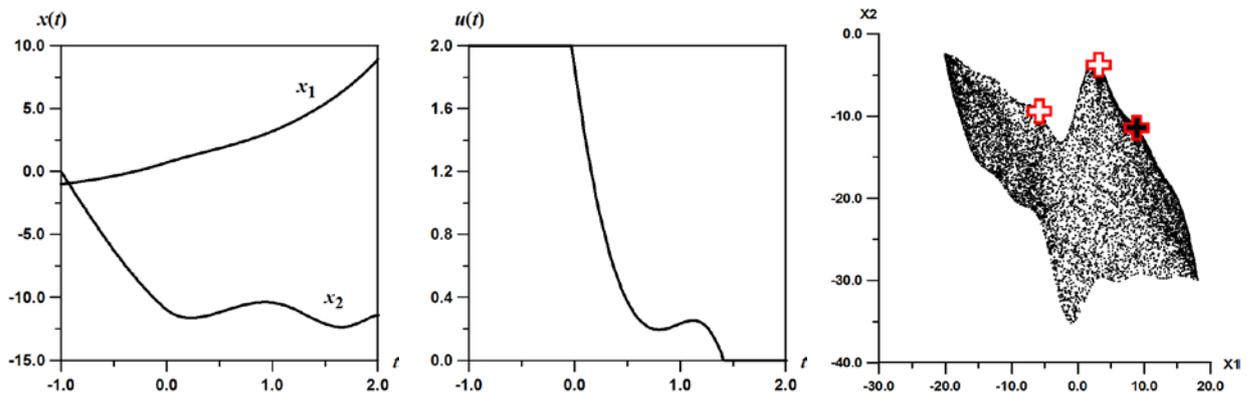


Рисунок IV.2 – Результаты численного решения возмущенной постановки исследуемой модельной задачи оптимального управления.

Разработанные алгоритмы использованы при решении задачи ретроспективного анализа сейсмостойкости зданий путем исследования модели сложного упругопластического деформирования механической системы с двумя степенями свободы. Результаты проведенных вычислительных экспериментов по исследованию дискретизованных задач оптимального управления позволили продемонстрировать работоспособность предложенных алгоритмов и вычислительных технологий для исследования управляемых динамических систем (Зароднюк Т.С., Горнов А.Ю., Сорокин П.С., Аникин А.С., Сороковиков П.С.)

Реализованы модификации метода Л.С. Понтрягина, позволяющие находить нелокальные решения задач оптимального управления. Предлагаемый подход опирается на построение расширенной системы дифференциальных уравнений, включающей исходные и сопряженные уравнения. Для формирования соответствующей задачи Коши используются известные значения начальных фазовых координат и стартовые значения сопряженных переменных, выбираемые для двумерного случая с окружности единичного радиуса, для трехмерного – с единичной сферы. Для задач большей размерности с использованием технологии параллельного программирования Nvidia CUDA для графических ускорителей реализован стохастический способ генерации значений сопряженного вектора в начальный момент времени с дальнейшим параллельным запуском процедуры интегрирования динамической системы. Результаты проведенных экспериментов позволили продемонстрировать эффективность применения технологий распараллеливания вычислительных процессов для численного решения задач оптимального управления (рисунок IV.3) (Горнов А.Ю., Аникин А.С., Зароднюк Т.С.).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\sin 2x_1 + 2} - 9.5e^{x_2} + 0.1u^2 \\ x(t_0) &= (-1, 1), u \in [-2.5, 2.5], \\ t &\in [0, 2\pi] \\ I(u) &= x_2(t_1) \rightarrow \min. \end{aligned}$$

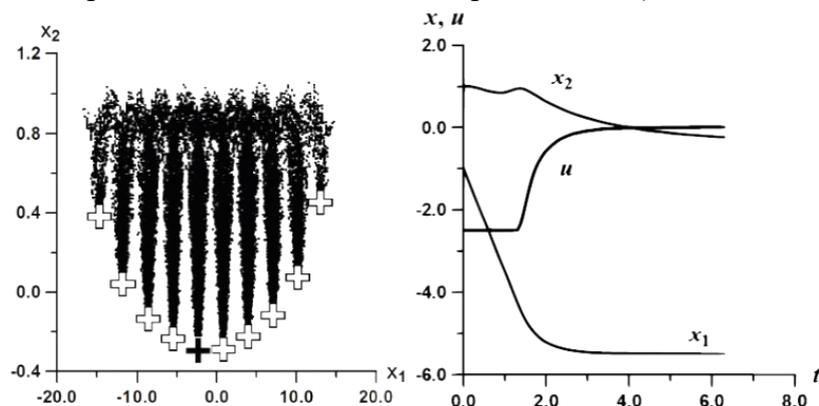


Рисунок IV.3 – Постановка задачи оптимального управления, решенная с использованием разработанной вычислительной технологии (слева); множество достижимости с экстремальными точками (глобальный экстремум выделен черным), оптимальные траектории и управление (справа).

Разработана технология решения задач аппроксимации интегральной воронки для полиэдрально управляемых динамических систем. Эффективным подходом к исследованию подобных задач является метод стохастической аппроксимации в комбинации с алгоритмами генерации управляющих воздействий релейного типа с фиксированным числом точек переключения, использующийся для решения задач фазового оценивания и оптимального управления с ограничениями более простой структуры. Предложенная вычислительная технология включает также программные реализации методов интегрирования систем дифференциальных уравнений, генерации управляющих воздействий, глобальной оптимизации, а также обобщенные методы аппроксимации множества достижимости для задач с полиэдральными ограничениями на управляющие воздействия. На рисунке IV.4 представлены множества достижимости семейства задач: $\dot{x}_1 = 1 + u_1 \sin x_1 + u_2 \cos x_2$, $\dot{x}_2 = u_1 \cos x_1 + u_2 \sin x_2$, $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = 1$, $t \in [0,1]$, с полиэдральными ограничениями на управления: $u(t) \in U_i, i = \overline{1,4}$ (рисунок IV.5). Проведено многовариантное тестирование разработанных алгоритмов и вычислительных технологий с помощью сформированной коллекции тестовых задач рассматриваемого типа, подтвердившее их применимость для исследования дифференциальных систем с полиэдральными ограничениями. (Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Аникин А.С., Сороковиков П.С.).

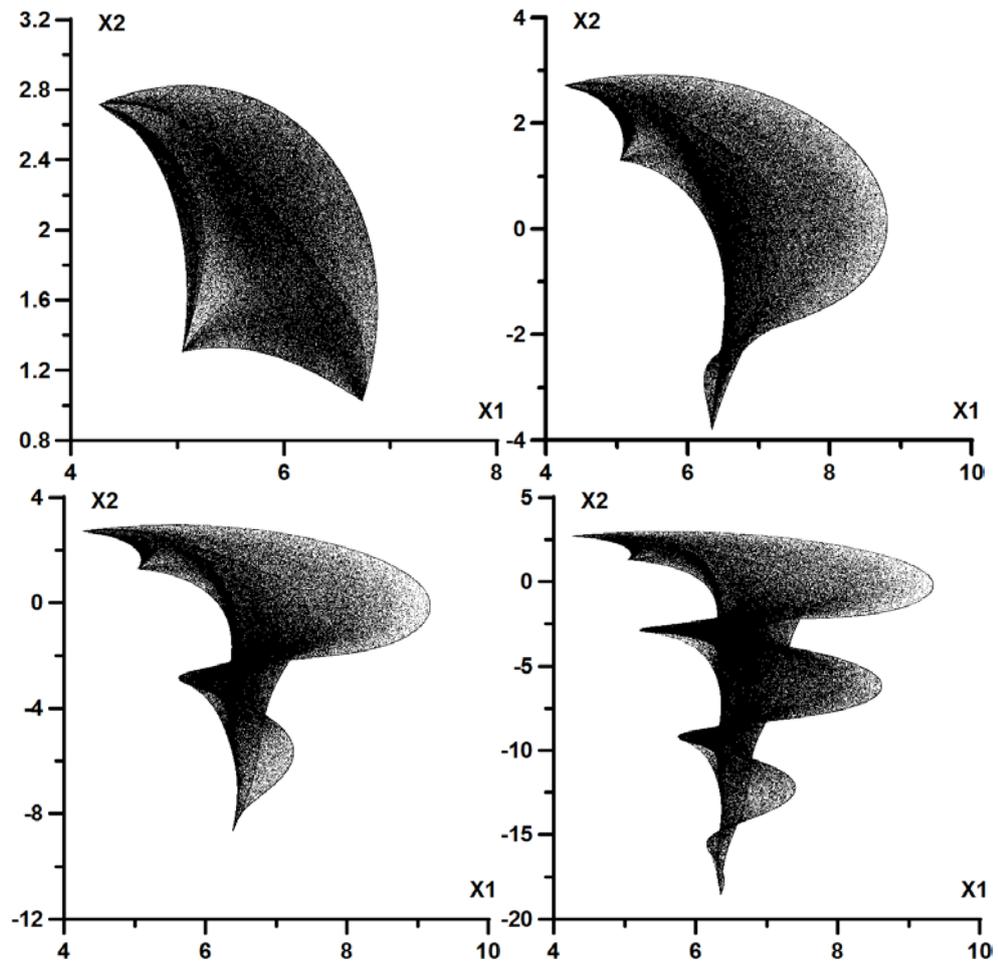


Рисунок IV.4 – Аппроксимации множеств достижимости управляемых динамических систем для рассмотренного семейства тестовых задач.

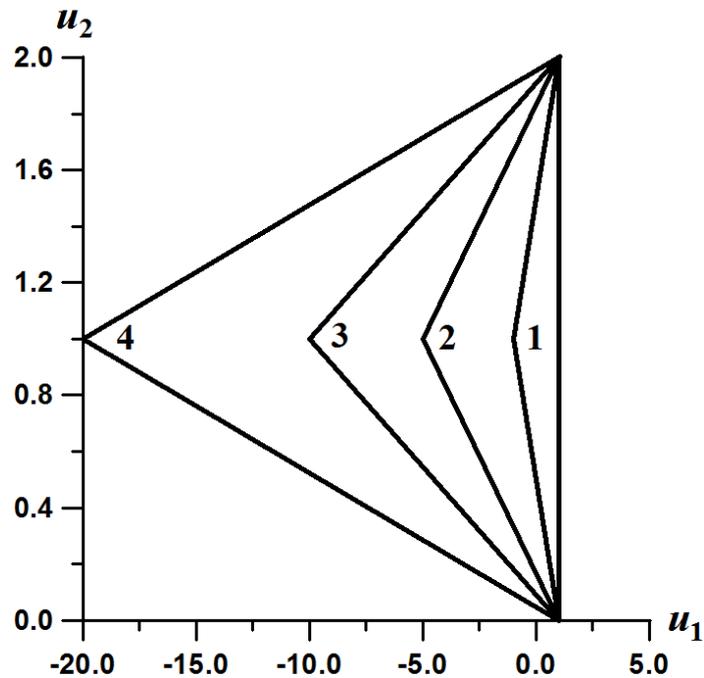


Рисунок IV.5 – Множества допустимых управлений для семейства задач с полиэдральными ограничениями

Оценка результатов

Проведено многовариантное тестирование разработанных алгоритмов и вычислительных технологий с помощью сформированной коллекции, позволившее продемонстрировать их эффективность для изучаемых классов задач. Исследована результативность предложенных алгоритмов от значений алгоритмических параметров, в частности, зависимость качества покрытия множества достижимости от выбранного числа переключений управляющих воздействий и количества стохастических проб.

Предложенная процедура генерации управлений и, соответственно, траекторий исходной и сопряженной систем использована в методе позиционных вариаций, основанном на позиционном принципе минимума. Её применение может оказаться эффективным на этапе построения позиционных управлений спуска по функционалу за счет множественности сопряженных траекторий.

На следующем этапе работы (в 2020 г.) планируется дальнейшее развитие методов решения задач аппроксимации интегральной воронки для полиэдрально управляемых динамических систем с применением технологий параллельного программирования, пополнение сформированной коллекции тестовых задач и ее использование для сравнения предложенных алгоритмов и программных средств с коммерческими пакетами прикладных программ путем решения модельных и прикладных задач в управляемых системах изучаемого типа.

Заключение

Все исследования в рамках НИР выполнены в соответствии с государственным заданием ИДСТУ СО РАН на 2017-2020 гг. по теме № I.1.4.1 «Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения». Содержание НИР раскрыто в Планах научно-исследовательских работ ИДСТУ СО РАН на 2017-2020 годы (Тема I.1.4.1. ПФНИ ГАН I. Математические науки, подраздел 1. Теоретическая математика Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 гг.).

Все задачи, поставленные на этапе НИР 2019 г., решены в полном объеме, опубликовано 35 статей в российских и зарубежных изданиях, включенных в международные базы цитирования Web of Science [1-5, 8, 9, 18, 19, 22, 25, 26, 31, 32, 34, 35, 40, 45, 50, 51, 53, 54, 57, 59-61] и Scopus [6, 16, 17, 36, 44, 49, 55, 56, 58]; 7 статей в изданиях, включенных в базу данных РИНЦ [7, 22, 21, 23, 24, 30, 33]. Общее количество публикаций по результатам этапа НИР 2018 г. – 85, из них в журналах – 42.

В рамках этапа 2019 г. получены следующие основные результаты. Доказан аналог релаксационной теоремы Н.Н. Боголюбова для задачи оптимального управления системой, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением в сепарабельном банаховом пространстве и вариационным неравенством. Установлено существование периодического решения для системы уравнений в частных производных, описывающая модель фазовых переходов с ограничением на фракцию фазы, зависящим от относительной температуры. Разработан и обоснован новый метод исследования асимптотического поведения решений неавтономных разрывных систем с измеримой по совокупности аргументов правой частью. Получены условия робастной устойчивости для нестационарных систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с интервальными возмущениями высокого индекса неразрешенности. Доказаны теоремы о взаимосвязи управляемости и наблюдаемости вырожденных линейных гибридных систем для случая непрерывного, а также кусочно-непрерывного решения. Разработаны устойчивые разностные схемы для численного решения систем ДАУ с частными производными второго порядка и для обыкновенных ДАУ высокого индекса, содержащих жесткие компоненты. Разработаны многошаговые многостадийные методы решения интегро-алгебраических уравнений и алгоритмы построения левых регуляризирующих операторов для некоторых классов ДАУ в частных производных. На основе позиционного принципа минимума разработана схема улучшения управления для негладкой задачи оптимального управления с терминальным функционалом, который задается произвольной липшицевой функцией. Доказано необходимое условие оптимальности с позиционными управлениями спуска по функционалу для нелинейной задачи управления дифференциальной системой с мерами, при этом используемые позиционные управления порождаются новым классом слабо инвариантных функций. На базе этого условия разработан алгоритм численного исследования задачи оптимального импульсного управления с линейно-квадратичным функционалом. Изучены вопросы существования решения и получения условия оптимальности для разрывных управляемых процессов с гистерезисной нелинейностью. Разработаны и численно реализованы новые нелокальные методы приближенного решения задач оптимального управления, проведено их тестирование на ряде задач, в том числе прикладных.

Приложение А – Список публикаций по проекту

1. Samsonyuk O.N., Timoshin S.A. Optimal control problems with states of bounded variation and hysteresis // Journal of Global Optimization. 2019 DOI: 10.1007/s10898-019-00752-7. (Web of Science Q1)
2. Timoshin S.A., Aiki T. Control of biological models with hysteresis // Systems and Control Letters. 2019. Vol. 128. pp. 41-45. DOI: 10.1016/j.sysconle.2019.04.003. (Web of Science Q2)
3. Timoshin S.A., Aiki T. Extreme solutions in control of moisture transport in concrete carbonation // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2019. Vol. 47. pp. 446-459. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2018.12.003. (Web of Science Q1)
4. Finogenko I.A. Method of Limiting Differential Inclusions for Nonautonomous Discontinuous Systems with Delay // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Vol. 305. Suppl.1.1, pp S65-S74. (Web of Science Q3)
5. Maltugueva N., Pogodaev N., Samsonyuk O. Optimality conditions and numerical algorithms for hybrid control systems // Lecture Notes in Computer Science, 18th International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research, MOTOR 2019; Ekaterinburg. 2019. Vol. 11548. pp. 474-488. DOI: 10.1007/978-3-030-22629-933. (Web of Science Q4)
6. Pogodaev N.I. Bang-Bang Theorem for a Coupled ODE-PDE Control System // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2019. Vol. 23, №2. pp. 146-158. DOI: 10.1007/s10958-019-04298-7. (Scopus)
7. Старицын М.В., Погодаев Н.И. Об одном классе задач оптимального импульсного управления уравнением неразрывности // Труды института математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, №1. С. 229-244. DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-229-244. (РИНЦ)
8. Толстоногов А.А. Плотности мер как альтернатива производных для измеримых включений // Функциональный анализ и его приложения. 2019. Т. 53, №4. С. 52-62. (Web of Science Q3)
9. Tolstonogov A.A. Local conditions for the existence of solutions for sweeping processes // Sbornik Mathematics. 2019. Vol. 210, №9. pp. 1305-1325. DOI: 10.1070./SM9122. (Web of Science Q2)
10. Финогенко И.А. Принцип инвариантности для разрывных систем. Материалы междунар. конф. «Устойчивость, управление, дифференциальные игры». Екатеринбург. 2019. С. 342-346.
11. Финогенко И.А. Принцип инвариантности для разрывных систем с сухим трением. Материалы междунар. Симпозиума «Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование». Иркутск. 2019. С. 176-179.
12. Staritsyn M., Pogodaev N. Impulsive Relaxation of Continuity Equations and Modeling of Colliding Ensembles // Proc. 9th Intern. Conf. on Optimization and Applications "Communications in Computer and Information Science" (OPTIMA 2018). 2019. Vol. 974. pp. 367-381. DOI: 10.1007/978-3-030-10934-926. (Scopus)
13. Финогенко И.А. Метод эквивалентного управления для дифференциальных включений с разрывными обратными связями. Междунар. Конф. «Математика в приложениях». Тез докладов. Новосибирск. 2019. С.224

14. Малтугуева Н.С., Погодаев Н.И. Локальный поиск в задаче размещения с квадратичной ценой // Материалы Междунар. симпозиума, посвященного 100-летию матем. образования в Вост. Сибири и 80-летию со дня рождения проф. О. В. Васильева. 2019. С. 400-401. (РИНЦ)
15. Погодаев Н.И., Старицын М.В. Об одной игровой задаче импульсного управления мультиагентной системой // Материалы Междунар. симпозиума, посвященного 100-летию матем. образования в Вост. Сибири и 80-летию со дня рождения проф. О. В. Васильева. 2019. С. 269-271. (РИНЦ)
16. Shcheglova A.A., Kononov A.D. Stability of an Interval Family of Differential-Algebraic Equations with Variable Coefficients // Journal of Mathematical Sciences, 2019, V. 239, No. 2, pp. 214-231. (Scopus)
17. Svinina S.V. Stability of Difference Scheme for a Semilinear Differential Algebraic System of Index $(k, 0)$ // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 239, №2. pp. 172-184. DOI: 10.1007/s10958-019-04296-9. (Scopus)
18. Svinina S.V. On a Quasi-Linear Partial Differential Algebraic System of Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59, №11. pp. 1791-1805. DOI: 10.1134/S0965542519110125. (Web of Science Q4)
19. Svinina S.V., Svinin A.K. Stability of a Difference Scheme for a Quasi-Linear Partial Differential Algebraic System of Equations of Index $(k, 0)$ // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59, №4. pp. 513-528. DOI: 10.1134/S0965542519040158. (Web of Science Q4)
20. Svinina S.V., Svinin A.K. Existence of solution to some mixed problems for linear differential-algebraic systems of partial differential equations // Russian Mathematics. 2019. Vol. 63, №4. pp. 64-74. DOI: 10.3103/S1066369X19040078. (Web of Science Emerging Sources Citation Index)
21. Svinina S.V., Svinin A.K. On an initial-boundary value problem for a semilinear differential-algebraic system of partial differential equations of index $(1,0)$ // Russian Mathematics. 2019. Vol. 63, №5. pp. 63-74. DOI: 10.3103/S1066369X19050074. (Web of Science Emerging Sources Citation Index)
22. Bulatov M., Solovarova L. Collocation-variation difference schemes with several collocation points for differential-algebraic equations // Applied Numerical Mathematics. 2019 DOI: 10.1016/j.apnum.2019.06.014. (Web of Science Q1)
23. Bulatov M.V., Chistyakov V.F. The Index and Split Forms of Linear Differential-Algebraic Equations // Bulletin of Irkutsk State University-Series Mathematics. 2019. T. 28. С. 21-35. DOI: 10.26516/1997-7670.2019.28.21. (Web of Science Emerging Sources Citation Index)
24. Bulatov M.V., Hadizadeh M., Chistyakova E.V. Construction of implicit multistep methods for solving integral algebraic equations // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya Matematika Informatika Protsessy Upravleniya. 2019. Vol. 15, №3. pp. 310-322. DOI: 10.21638/11702/spbu10.2019.30. (Web of Science Emerging Sources Citation Index)
25. Bulatov M.V., Linh V.H., Solovarova L.S. Block Difference Schemes of High Order for Stiff Linear Differential-Algebraic Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. Vol. 59, №7. pp. 1049-1057. DOI: 10.1134/S0965542519070042. (Web of Science Q4)
26. Farahani M., Hadizadeh M., Bulatov M.V., Chistyakova E.V. Adaptive iterative regularization schemes for two-dimensional integral-algebraic systems // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2019 DOI: 10.1002/mma.5768. (Web of Science Q2)
27. Булатов М.В. О подходах к численному решению начальной задачи для дифференциально-алгебраических уравнений // Сб. материалов Междунар. конф. КРОМШ-2019 "XXX Крымская осенняя матем. школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам" (пос. Батилиман, 17-29 сентября 2019 г.). 2019. С. 232-233. (РИНЦ)

28. Булатов М.В., Соловарова Л.С. О линейных дифференциально-алгебраических уравнениях высокого порядка // *Материалы Междунар. конф. "Воронежская зимняя матем. школа"* (Воронеж, 28 января-2 февраля 2019 г.). 2019. С. 56. (РИНЦ)
29. Булатов М.В., Соловарова Л.С. О блочных методах высокого порядка для линейных дифференциально-алгебраических уравнений (// *Материалы Междунар. симпозиума, посвященного 100-летию матем. образования в Вост. Сибири и 80-летию со дня рождения проф. О. В. Васильева*. 2019. С. 115-116. (РИНЦ)
30. Ботороева М.Н., Будникова О.С., Соловарова Л.С. О выборе краевых условий для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка // *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*. 2019. — №3. С. 32-41. DOI: 10.18101/2304-5728-2019-3-32-41. (РИНЦ)
31. Chistyakova E.V., Chistyakov V.F. Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // *Applied Numerical Mathematics*. 2019 DOI: DOI: 10.1016/j.apnum.2019.04.013. (Web of Science Q1)
32. Chistyakov V.F. Improved Estimates of the Effect of Perturbations on the Solutions of Linear Differential-Algebraic Equations // *Differential Equations*. 2019. Vol. 55, №2. pp. 279-282. DOI: 10.1134/S0012266119020137. (Web of Science Q3)
33. Ботороева М.Н., Будникова О.С., Соловарова Л.С. О выборе краевых условий для дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка // *Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика*. 2019. — №3. С. 32-41. DOI: 10.18101/2304-5728-2019-3-32-41. (РИНЦ)
34. Chistyakova E.V., Chistyakov V.F. Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // *Applied Numerical Mathematics*. 2019 DOI: DOI: 10.1016/j.apnum.2019.04.013. (Web of Science Q1)
35. Chistyakov V.F. Improved Estimates of the Effect of Perturbations on the Solutions of Linear Differential-Algebraic Equations // *Differential Equations*. 2019. Vol. 55, №2. pp. 279-282. DOI: 10.1134/S0012266119020137. (Web of Science Q3)
36. Petrenko P.S. Robust Controllability of Nonstationary Differential-Algebraic Equations with Unstructured Uncertainty // *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, Volume 239, Issue 2, pp 123–134 (Scopus)
37. Petrenko P. Samsonyuk O., Staritsyn M. A note on Differential-Algebraic Systems with Impulsive and Hysteresis Phenomena // *Proceedings of the 9th International Scientific Conference on Physics and Control "PhysCon2019"*, 8–11 september, 2019, Innopolis, Russia, pp. 206-209
38. Петренко П.С. К вопросу о разрешимости вырожденной гибридной системы // *Материалы Международного симпозиума "Динамические системы, оптимальное управление и математическое моделирование"*, Иркутск, ИГУ, ИДСТУ СО РАН, с.163-166. (Труды РИНЦ)
39. Петренко П.С. К вопросу об управляемости одной вырожденной гибридной системой *Материалы Международной конференции «Устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2019)*, с. 251-255.
40. Dykhtha V., Sorokin S. Feedback minimum principle for optimal control problems in discrete-time systems and its applications // *Lecture Notes in Computer Science*. 2019. Vol. 11548. Pp. 449-460. DOI: 10.1007/978-3-030-22629-9_31. (Web of Science Q4)
41. Dykhtha V. Approximate feedback minimum principle for suboptimal processes in non-smooth optimal control problems // *Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences – Proceedings*. Принята к печати.
42. Dykhtha V., Sorokin S. Feedback minimum principle for optimal control problems in discrete-time systems and its applications // *XVIII International Conference "Mathematical Optimization Theory and Operations Research" (MOTOR 2019)*. Abstracts / M. Khachay, Y. Kochetov (Eds.). - Ekaterinburg, Russia: Publisher "UMC UrFU", 2019. P. 83.

43. Дыхта В.А. Приближенный позиционный принцип минимума для субоптимальных процессов в негладких задачах оптимального управления // Материалы Междунар. конф., посвященной 95-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 16-20 сентября 2019 г.). 2019. С. 127-130. (РИНЦ)
44. Samsonyuk O.N. The space-time representation for optimal impulsive control problems with hysteresis // *Communications in Computer and Information Science*. 2019. Vol. 974. pp. 351-366. DOI: 10.1007/978-3-030-10934-9_25. (Scopus)
45. Samsonyuk, O., Sorokin, S., Staritsyn, M. Feedback Optimality Conditions with Weakly Invariant Functions for Nonlinear Problems of Impulsive Control. 2019. *Lecture Notes in Computer Science*, vol 11548, pp. 513-526. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-22629-9_36 (Web of Science Q4, Scopus)
46. Малтугуева Н.С., Самсонык О.Н. Управление процессами выметания с траекториями ограниченной вариации // Материалы Междунар. симпозиума, посвященного 100-летию матем. образования в Вост. Сибири и 80-летию со дня рождения проф. О. В. Васильева. 2019. С. 238-241. (РИНЦ)
47. Орлов Св.С., Самсонык О.Н. Процесс выметания с разрывным движущимся множеством // Материалы Международной конференции «STABILITY, CONTROL, DIFFERENTIAL GAMES (SCDG2019)», посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского. Изд-во: Институт математики и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского (Екатеринбург), 2019, С. 239-243 (РИНЦ)
48. Samsonyuk O., Sorokin S., Staritsyn M. Feedback Necessary Optimality Conditions for Nonlinear Measure-Driven Processes // *The joint Conference the 8th IFAC Symposium on Mechatronic Systems (MECHATRONICS 2019) and the 11th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS-2019)*, 4-6 September, 2019, Vienna, Austria: Conference Booklet. 2019. P. 36.
49. Staritsyn M., Goncharova E. (2020) On Complementarity Measure-driven Dynamical Systems. In: Gusikhin O., Madani K. (eds) *Informatics in Control, Automation and Robotics. ICINCO 2017. Lecture Notes in Electrical Engineering*, vol. 495, p. 699-718. Springer, Cham (Scopus)
50. Sorokin S.P., Staritsyn M.V. Numeric algorithm for optimal impulsive control based on feedback maximum principle // *Optimization Letters*. 2019. Vol. 13, №8. pp. 1953-1967. DOI: 10.1007/s11590-018-1344-9. (Web of Science Q2)
51. Staritsyn M., Sorokin S. On feedback strengthening of the maximum principle for measure differential equations // *Journal of Global Optimization*. 2019 DOI: 10.1007/s10898-018-00732-3. (Web of Science Q1)
52. Dykhta V., Sorokin S. Feedback minimum principle for optimal control problems in discrete-time systems and its applications // XVIII International Conference “Mathematical Optimization Theory and Operations Research” (MOTOR 2019). Abstracts / M. Khachay, Y. Kochetov (Eds.). – Ekaterinburg, Russia: Publisher “UMC UrFU”, 2019. – P. 83.
53. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Anikin A.S., Finkelstein E.A. Extension technology and extrema selections in a stochastic multistart algorithm for optimal control problems // *Journal of Global Optimization*. 2019. DOI: 10.1007/s10898-019-00821-x. (Web of Science Q1, Scopus)
54. Guminov S., Gasnikov A., Anikin A., Gornov A. A universal modification of the linear coupling method // *Optimization Methods and Software*. 2019. Vol. 34, №3. pp. 560–577. DOI: 10.1080/10556788.2018.1517158. (Web of Science Q2, Scopus).
55. Gornov A., Zarodnyuk T., Anikin A., Sorokovikov P. The Stochastic Coverings Algorithm for Solving Applied Optimal Control Problems // *Communications in Computer and Information Science*, 18th International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019). DOI: 10.1007/978-3-030-33394-2_37. (Scopus)

56. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Anikin A.S. The computational technique for nonlinear nonconvex optimal control problems based on modified gully method // DEStech transactions on Computer Science and Engineering: IX International Conference on Optimization and Applications. – Pp. 152–162. DOI: 10.12783/dtcse/optim2018/27929, (Web of Science).
57. Berzhinsky Yu.A., Ordynskaya A.P., Berzhinskaya L.P., Gornov A.Yu., Finkelstein E.A., 2019. Analysis of the mechanism of transition to the limit state of Series 111 residential buildings during the 1988 Spitak earthquake. // *Geodynamics & Tectonophysics* 10 (3), 715–730. DOI: 10.5800/GT-2019-10-3-0437. (Web of Science, Scopus, РИНЦ).
58. Beklaryan A., Beklaryan L., Gornov A. Solutions of Traneling Wave Type for Korteweg-de Vries-Type System with Polynomial Potential // *Communications in Computer and Information Science*. 9th International Conference on Optimization and Applications, OPTIMA 2018. 2019. Vol. 974. pp. 291-305. DOI: 10.1007/978-3-030-10934-9_21. (Scopus)
59. Tyatyushkin A.I., Zarodnyuk T.S., Gornov A.Y. Algorithms for Nonlinear Optimal Control Problems Based on the First and Second Order Necessary Conditions // *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2019. Vol. 239, №2. pp. 185-196. DOI: 10.1007/s10958-019-04293-y. (Scopus)
60. Gornov A., Sorokovikov P., Zarodnyuk T. Computational technology for global search based on modified algorithm of the univariate nonlocal optimization // *Advances in Intelligent Systems Research: VIth Intern. Workshop “Critical Infrastructures: Contingency Management, Intelligent, Agent-Based, Cloud Computing and Cyber Security” (IWCI 2019)*. Vol. 169. 2019. P. 189–193. DOI: <https://doi.org/10.2991/iwci-19.2019.33>. (Web of Science).
61. Gornov A., Massel L., Sorokovikov P., Anikin A., Zarodnyuk T. The approach to solving the problem of legacy systems on the examples of INTEC and OPTCON software // *Advances in Intelligent Systems Research: Proc. of the VI Intern. Workshop “Critical Infrastructures: Contingency Management, Intelligent, Agent-Based, Cloud Computing and Cyber Security” (IWCI 2019)*. Atlantis Press, 2019. P. 229–233. DOI: <https://doi.org/10.2991/iwci-19.2019.40>. (Web of Science).
62. Т.С. Зароднюк, Р. Энхбат, А.Ю. Горнов, Ф.В. Хандаров. Численное исследование экономических моделей оптимального управления с использованием преобразования Гернет-Валентайна // *Труды Восьмой Международной конференции «Системный анализ и информационные технологии», 8–14 июля 2019г., г. Иркутск, Россия – С. 80–85. (РИНЦ)*
63. Zarodnyuk T., Gornov A., Anikin A., Sorokovikov P. Numerical technologies for investigating optimal control problems with free right-hand end of trajectories // *Proceedings of the 6th International Conference on Computer Science, Applied Mathematics and Applications (ICCSAMA 2019)* (в печати). (Scopus).
64. Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С. Вычислительная технология решения задач оптимального управления в системах с переменным запаздыванием // «Устойчивость, управление, дифференциальные игры (SCDG’2019)»: *Материалы Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского, (Екатеринбург, 16–20 сентября 2019 г.)*. – Екатеринбург: ИММ УрОРАН, 2019. – С. 99–102. (РИНЦ)
65. Sorokovikov P. Software implementation of nonlocal one-dimensional search algorithms based on the Hölder condition // *Book include abstracts of reports presented at the X International Conferene on Optimization Methods and Applications Optimization and applications (OPTIMA-2019) held in Petrovac, Montenegro, September 30 October 4, 2019.* – p.113
66. Gornov A.Yu., Anikin A.S. Investigation of the reachable set for the dynamic neural model // *Book include abstracts of reports presented at the X International Conferene on*

- Optimization Methods and Applications Optimization and applications (OPTIMA-2019) held in Petrovac, Montenegro, September 30 October 4, 2019. – p. 48.
67. Zarodnyuk T.S., Gornov A.Yu. Optimization problems for trajectory bundles of controlled systems Book include abstracts of reports presented at the X International Conferene on Optimization Methods and Applications Optimization and applications (OPTIMA-2019) held in Petrovac, Montenegro, September 30 October 4, 2019. – p. 133.
 68. Anikin A., Zarodnyuk T., Sorokovikov P., Khandarov F. Techniques for software performance and reliability testing // Proc. of Intern. Workshop “Critical Infrastructures in the Digital World” (IWCI-2019), March 17-24, 2019. Baikalsk, Irkutsk. – Pp. 11–12.
 69. Gornov A., Zarodnyuk T., Anikin A., Sorokovikov P., Finkelshtein E. Collection of reachable sets for dynamical systems with linear controls // Proc. of Intern. Workshop “Critical Infrastructures in the Digital World” (IWCI-2019), March 17-24, 2019. Baikalsk, Irkutsk. – Pp. 92–93.
 70. Anikin Anton, Zarodnyuk Tatiana, Sorokovikov Pavel, Khandarov Fedor. Techniques for software performance and reliability testing // Proceedings of the International Workshops «Critical Infrastructures in the Digital World» (IWCI-2019), March 17-24, 2019. Baikalsk, Irkutsk. – Pp.11–12.
 71. Gornov A.Yu. The technology for solving of mathematical programming problems for equilibria search in several person games // The 6th Intern. Conf. on Optimization, Simulation and Control (COSC2019) (Ulaanbaatar, Mongolia, June 21-23, 2019). Program and Abstracts. Ulaanbaatar: National University of Mongolia, 2019. P. 59–60.
 72. Zarodnyuk T.S. Numerical study of one nonconvex trajectory problem of molecular dynamics // The 6th Intern. Conf. on Optimization, Simulation and Control (COSC2019) (Ulaanbaatar, Mongolia, June 21-23, 2019). Program and Abstracts. Ulaanbaatar: National University of Mongolia, 2019. P. 61.
 73. Аникин А.С. Численные эксперименты по исследованию алгоритмических схем типа «мультистарт с поколениями» для оптимизации невыпуклых воронкообразных функций // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 4.
 74. Аникин А.С. Технология GPU-распараллеливания для оптимизации энергетической модели молекулярного докинга // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 5.
 75. Аникин А.С. Ускоренный покомпонентный метод для разреженных задач выпуклой оптимизации: строгие оценки сложности и практическая эффективность // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.). С. 6–7.
 76. Аникин А.С., Зароднюк Т.С. Безградиентный метод глобальной оптимизации на основе мультиагентной технологии для графического ускорителя // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 8.
 77. Горнов А.Ю., Аникин А.С. Исследование валидности тригонометрической редукции задач «mixed-integer» класса к непрерывным задачам глобальной оптимизации // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 22.
 78. Горнов А.Ю., Аникин А.С., Зароднюк Т.С. Программная реализация метода Понтрягина с использованием параллельных вычислительных технологий // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 23.
 79. Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Зиновьева А.Ф., Ненашев А.В. Исследование возможности управления проводимостью массива квантовых точек на примере релаксации фотопроводимости в магнитном поле // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 25.
 80. Зароднюк Т.С., Горнов А.Ю. Многоэтапная методика повышения надежности численного решения невыпуклых задач оптимального управления // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 36.

81. Зароднюк Т.С., Горнов А.Ю. Технология численной аппроксимации интегральной воронки для полиэдрально управляемой системы // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 37–38.
82. Зароднюк Т.С., Горнов А.Ю., Аникин А.С. Технология аппроксимации многомерных временных рядов с использованием нелинейных динамических моделей на плоскости // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 39.
83. Зароднюк Т.С., Сорокин С.П. Технология приближенного решения задачи оптимального управления на основе нелокального условия оптимальности // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 40–41.
84. Сороковиков П.С., Зароднюк Т.С. Задача оптимального управления мобильным роботом с фазовыми ограничениями // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 78–79.
85. Сороковиков П.С. Программная реализация алгоритмов невыпуклой оптимизации с систематическим разделением на несколько множеств // Материалы конф. "Ляпуновские чтения" (г. Иркутск, 2–5 декабря 2019 г.) – С. 76–77.