

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
ИМЕНИ В.М. МАТРОСОВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

УДК 517.9

Рег. № НИОКТР АААА-А17-117032210080-7

Рег. № ИКРБС

Инв. № 2020-01

УТВЕРЖДАЮ

Директор ИДСТУ СО РАН



И.В. Бычков

г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ: ТЕОРИЯ,
ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ И ПРИЛОЖЕНИЯ
(заключительный, этап 4)

Приоритетное направление: I.1 Теоретическая математика

Программа I.1.4 Исследование задач динамики и управления: качественный и
численный анализ

Руководитель НИР
зав. отделением
чл.-кор.

А.А. Толстоногов

подпись, дата


28.12.2020

Иркутск 2020

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ


Руководитель темы:

Зав. Отделением,
чл.-кор. РАН

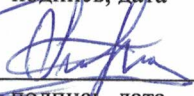

_____ А.А. Толстоногов
подпись, дата 28.12.2020

Исполнители темы:

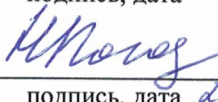
Гл. науч. сотр.,
д-р физ.-мат. наук


_____ И.А. Финогенко (Блок I)
подпись, дата 28.12.2020

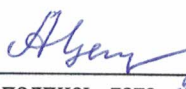
Ст. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ С.А. Тимошин (Блок I)
подпись, дата 28.12.2020

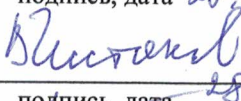
Вед. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ Н.И. Погодаев (Блок I)
подпись, дата 28.12.2020

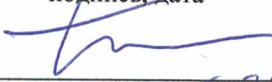
Зам. директора по
научной работе,
д-р физ.-мат. наук


_____ А.А. Щеглова (Блок II)
подпись, дата 28.12.2020

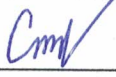
Гл. науч. сотр.,
д-р физ.-мат. наук


_____ В.Ф. Чистяков (Блок II)
подпись, дата 28.12.2020

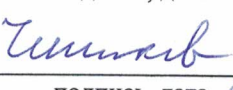
Гл. науч. сотр.,
д-р физ.-мат. наук


_____ М.В. Булатов (Блок II)
подпись, дата 28.12.2020

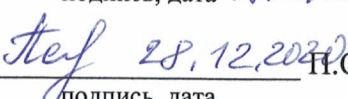
Ст. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ С.В. Свинина (Блок II)
подпись, дата 28.12.2020

Науч. сотр., канд.
физ.-мат. наук


_____ Е.В. Чистякова (Блок II)
подпись, дата 28.12.2020

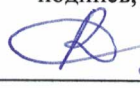
Науч. сотр., канд.
физ.-мат. наук


_____ Н.С. Петренко (Блок II)
подпись, дата 28.12.2020

Ст. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ Л.В. Соловарова (Блок II)
подпись, дата 28.12.2020

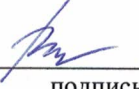
зав. лабораторией
д-р физ.-мат. наук


_____ В.А. Дыхта (Блок III)
подпись, дата 28.12.2020

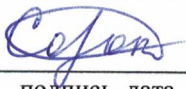
Вед. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


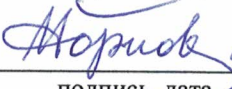

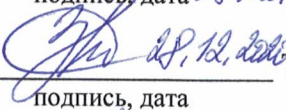
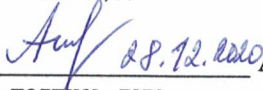
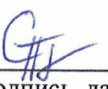


_____ Е.В. Гончарова (Блок III)
подпись, дата 28.12.2020

Ст. науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ О.Н. Самсонюк (Блок III)
подпись, дата 28.12.2020

Науч. сотр.,
канд. физ.-мат. наук


_____ С.И. Сорокин (Блок III)
подпись, дата 28.12.2020

Вед. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	 _____ М.В. Старицын (Блок III) подпись, дата
Гл. науч. сотр., д-р техн. наук	 _____ А.Ю. Горнов (Блок IV) подпись, дата
Гл. науч. сотр., д-р техн. наук	 _____ А.И. Тятюшкин (Блок IV) подпись, дата
Ст. науч. сотр., канд. техн. наук	 _____ Т.С. Зароднюк (Блок IV) подпись, дата
Мл. науч. сотр.	 _____ А.С. Аникин (Блок IV) подпись, дата
Программист	 _____ П.С. Сороковиков (Блок IV) подпись, дата
Нормоконтролер канд. техн. наук	 _____ Е.С. Фереферов подпись, дата

Реферат

Отчет 29 стр., 8 рис., 1 табл., 65 источников, 1 прил.

ПРОЦЕССЫ ВЫМЕТАНИЯ, ГИСТЕРЕЗИС, УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИБРИДНЫЕ СИСТЕМЫ, ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ, ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВАРИАЦИОННОГО ТИПА, ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ.

Проект посвящен исследованию ряда актуальных задач теории эволюционных уравнений и управляемых систем. Помимо классических динамических систем рассматриваются системы, описываемые процессами выметания, системы с гистерезисом и дифференциально-алгебраические уравнения. В 2020 г. в рамках проекта доказан аналог классической теоремы Н. Н. Боголюбова для задачи минимизации интегрального функционала на решениях двух типов управляемых систем с гистерезисом. Системы первого типа состоят из нелинейного дифференциального уравнения в сепарабельном банаховом пространстве и вариационного неравенства, определяющего гистерезисный оператор. Системы второго типа состоят из трех уравнений диффузии, одно из которых содержит гистерезисный оператор типа обобщенный упор, и могут быть использованы для моделирования эволюции трех биологических видов: добыча, хищник и пища для добычи. Предложен новый подход к исследованию асимптотического поведения решений механических систем с переменными коэффициентами трения. Для линейной стационарной системы ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности с интервальными коэффициентами получены достаточные условия, при которых возмущенная система имеет такую же структуру общего решения, что и номинальная система. С помощью теории ДАУ определена область существования решения в кипения неогретой жидкости в кольцевом канале. Предложены новые способы вычисления индекса вырожденные системы интегральных уравнений Вольтерра. В терминах матричных пучков и полиномов сформулированы условия существования и единственности решения линейные системы интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с матрицами-ядрами Вольтерра и Фредгольма. Получено необходимое условие глобальной оптимальности программного управления в классе позиционных управлений спуска по функционалу, экстремальных относительно новой квадратичной опорной мажоранты функционала. Изучены вопросы существования и единственности решения процесса выметания, заданного системой, состоящей из дифференциального уравнения с мерой и дифференциального включения с правой частью, зависящей от многозначного отображения с ограниченной полной вариацией относительно метрики Хаусдорфа. Разработана вычислительная технология решения невыпуклых задач динамической оптимизации с программным и параметрическим управлением. Выполнена программная реализация методов решения задач аппроксимации интегральной воронки для полиэдрально управляемых динамических систем с применением технологий параллельного программирования.

Проект соответствует:

приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в РФ: Транспортные и космические системы.

критическим технологиям РФ: Технологии информационных, управляющих, навигационных систем (13).

СОДЕРЖАНИЕ

Реферат	4
СОДЕРЖАНИЕ	5
Введение	5
Блок I. Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения	9
Цели и задачи	9
Основные результаты	9
Оценка результатов	10
Блок II. Исследование качественных свойств и численное решение управляемых систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с приложениями к вырожденным задачам оптимального управления	11
Цели и задачи	11
Основные результаты	11
Оценка результатов	13
Блок III. Качественное исследование неклассических и нерегулярных задач теории оптимального управления с приложениями к механике и численным методам улучшения управления	14
Цели и задачи	15
Основные результаты	15
Оценка результатов	18
Блок IV. Алгоритмы и вычислительные технологии решения задач оптимального управления и фазового оценивания	18
Цели и задачи	18
Основные результаты	18
Оценка результатов	21
Заключение	23
Приложение А – Список публикаций по проекту	25

Введение

Изучению процессов выметания и уравнений с гистерезисными операторами, посвящено множество работ, начиная с новаторских статей J.J. Moreau и A. Visintin. Интерес к таким динамическим системам вызван их несомненной прикладной значимостью. Так, например, процессы выметания используются для моделирования динамики механических систем с неупругими ударами и трением, а с помощью уравнений, содержащих гистерезисные операторы, описываются задачи памяти формы для сплавов, задачи фильтрации, задачи динамики популяций и т. д. Следует отметить, что в подавляющем большинстве работ, посвященных исследованию процессов выметания и уравнениям с гистерезисными операторами, основное внимание уделено вопросам существования, единственности и регулярности решений. В то же время задачи оптимального управления такими системами почти не изучены. В частности, авторам известно лишь несколько работ, посвященных оптимальному управлению процессами выметания с гистерезисом и все они касаются простейших задач минимизации квадратичных функционалов на решениях системы с выпуклыми постоянными ограничениями на управление. В то же время многие вопросы, относящиеся к процессам выметания с гистерезисом и *невыпуклыми*, зависящими от фазовой переменной, ограничениями на управление ранее не изучались. Их исследованию посвящен первый блок данного проекта.

Смешанные системы (coupled systems), состоящие из взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, возникают в механике, математической биологии, при моделировании транспортных потоков и т.д. В текущем отчетном периоде нами рассматривались смешанные системы, в которых уравнение в частных производных является уравнением неразрывности, с нелокальным, т.е. зависящим от меры, векторным полем. Отметим, что такие уравнения привлекают внимание целым рядом ученых в связи с их практической и теоретической значимостью. С одной стороны, (нелокальные) уравнения неразрывности можно трактовать как пределы в среднем поле (meanfield limits) классических мультиагентных систем, а потому они естественным образом появляются в макроскопических моделях математической биологии. С другой стороны, уравнение неразрывности, описывая эволюцию распределения во времени, является важным инструментом исследования геометрической структуры пространства вероятностных мер. В рамках последнего этапа проекта для систем, состоящей из взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений и нелокального уравнения неразрывности, изучались вопросы существования решений.

Эффективность метода предельных уравнений для исследование асимптотического поведения решений неавтономных динамических систем хорошо известна. В то же время его использование для изучения разрывных систем в общем виде сопряжено с рядом трудностей, и потому до сих пор не удавалось построить предельные дифференциальные уравнения для разрывных систем. В наших исследованиях предельные дифференциальные соотношения представлены в форме дифференциальных включений, что вполне согласуется с общей теорией дифференциальных уравнений с разрывной правой частью и позволяет изучать более широкие классы неавтономных дифференциальных уравнений, в том числе системы с сухим трением и разрывными позиционными управлениями релейного типа.

Задачи качественного анализа и численного решения систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) привлекают внимание исследователей во всем мире, поскольку такие системы используются при моделировании различных физических процессов, в частности, при описании механических динамических систем со связями, моделировании электрических и гидравлических цепей, задачах внутренней баллистики и других прикладных областях. Дифференциально-алгебраические уравнения в частных

производных второго порядка возникают, например, при описании тепловых процессов в газожидкостных системах.

Основные трудности, возникающие при исследовании робастных свойств ДАУ, связаны с тем, что даже в простейших случаях при сколь угодно малом возмущении коэффициентов может измениться внутренняя структура системы и, следовательно, вид общего решения, в результате чего структура и свойства невозмущенной системы могут потерять для анализа всякое значение. Участниками проекта разработан новый подход к исследованию робастных свойств ДАУ, основанный на том, что возмущения должны подчиняться некоторым конечным соотношениям для того, чтобы размерность пространства решений и структура общего решения возмущенных ДАУ оставались такими же, как у номинальной системы.

Сложные математические модели могут включать в себя не только ДАУ, интегро-алгебраические уравнения (ИАУ) – системы уравнений Вольтерра с вырожденной главной частью. Такие постановки задач принципиально отличаются от систем, разрешенных относительно главной части: они являются некорректными, т.е. могут либо не иметь решения, либо иметь множество решений; кроме того, отсутствует непрерывная зависимость от возмущения входных данных. Если рассматриваемые системы допускают принципиальную возможность сведения к системам интегро-дифференциальных уравнений в нормальной форме (форме Коши) или к системам интегральных уравнений второго рода путем дифференцирования и конечных гладких преобразований, то наименьшее число таких дифференцирований называется индексом (степенью некорректности) исходной задачи. Такое сведение не всегда возможно, в частности, оно невозможно в случае, когда интегральное слагаемое содержит слабую особенность. В проекте предлагаются методы исследования, учитывающие все характерные особенности таких задач.

Третий блок проекта связан с проблематикой расширения неклассических и нерегулярных задач оптимального управления, требующих перехода к обобщенным управлениям импульсного типа и разрывным траекториям. Одними из ключевых здесь являются методы неравенств Гамильтона-Якоби. С использованием слабо монотонных решений авторы получают оценки сверху для целевых функционалов задач и строят конструктивные необходимые условия оптимальности, названные позиционным принципом минимума. Примечательно, что в отчетном периоде для невыпуклой задачи оптимального управления со свободным правым концом получено новое необходимое условие оптимальности с позиционными управлениями второго порядка. Этот результат усиливает принцип максимума Понтрягина и дополняет позиционный принцип первого порядка

Заключительная часть проекта посвящена разработке алгоритмов и вычислительных технологий решения невыпуклых задач динамической оптимизации. с программными и параметрическими управлениями, а также проблемам аппроксимации множеств достижимости и интегральных воронок нелинейных управляемых динамических систем с применением технологий параллельного программирования.

Основные задачи проекта представлены четырьмя блоками и охватывают следующие проблемы теории эволюционных уравнений и управляемых систем:

Блок I. Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения.

Блок II. Исследование качественных свойств и численное решение управляемых систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с приложениями к вырожденным задачам оптимального управления.

Блок III. Качественное исследование неклассических и нерегулярных задач теории оптимального управления с приложениями к механике и численным методам улучшения управления.

Блок IV. Алгоритмы и вычислительные технологии решения задач оптимального управления и фазового оценивания.

Все запланированные на 2020 год задачи проекта были выполнены. Результаты по блоку I опубликованы в работах [1-10], по блоку II - [11-16], по блоку III - [17-26], по блоку IV - [27-65].

Блок I. Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения

Цели и задачи

Цель данного блока состоит в изучении качественных свойств неклассических управляемых систем, описываемых эволюционными уравнениями. Для ее достижения были поставлены следующие задачи:

1. Доказать аналог теоремы Н.Н. Боголюбова для полиэдральных процессов выметания.
2. Определить корректное понятие решения для смешанной системы, включающей в себя нелинейный закон сохранения и ОДУ. Изучить зависимость такого решения от начальных данных и управления.
3. Разработать методы изучения устойчивости и асимптотической устойчивости для дифференциальных включений и разрывных систем с использованием функций Ляпунова со знакопостоянной производной.

Основные результаты

Рассмотрено эволюционное включение в гильбертовом пространстве, правая часть которого содержит зависящий от времени максимально монотонный оператор и многозначное отображение с замкнутыми невыпуклыми значениями. Зависимость максимально монотонного оператора от времени описывается с помощью функции расстояния между максимально монотонными операторами в смысле Владимирова. Предполагается, что такое расстояние, как функция от времени, имеет ограниченную вариацию с верхней границей заданной некоторой положительной неатомической мерой Радона. Под решением включения понимается непрерывная функция ограниченной вариации, чья производная (мера Стильтьеса) абсолютно-непрерывна относительно указанной выше положительной меры Радона, а значения соответствующей функции плотности принадлежат, почти всюду, множеству из правой части включения. При традиционных предположениях (измеримость, липшицевость по фазовой переменной в метрике Хаусдорфа, условие подлинейного роста) доказывается существование решений и устанавливается ряд их свойств. (Толстоногов А.А.)

В сепарабельном банаховом пространстве рассмотрено дифференциальное включение, правая часть которого является суммой двух многозначных отображений. Значениями первого являются замкнутые ограниченные не обязательно выпуклые множества, и оно является липшицевым по фазовой переменной. Значениями второго отображения являются замкнутые множества, и оно обладает смешанными условиями полунепрерывности: либо в фазовой точке отображение имеет замкнутый график и его значением является выпуклое множество, либо в некоторой окрестности этой точки оно является полунепрерывным снизу. При дополнительных предположениях, связанных с измеримостью и условиями роста, доказана теорема существования решения. (Толстоногов А.А.)

Рассмотрена задача минимизации интегрального функционала на решениях управляемой системы, описываемой нелинейным дифференциальным уравнением в сепарабельном банаховом пространстве и вариационным неравенством. Это вариационное неравенство определяет гистерезисный оператор, входом которого является траектория управляемой системы, а выход содержится в правой части дифференциального уравнения, в ограничении на управление и в минимизируемом функционале. Ограничением на

управление является многозначное отображение с замкнутыми, невыпуклыми значениями, а интегрант является функцией, невыпуклой по управлению. Наряду с исходной рассмотрена задача минимизации интегрального функционала с овыпукленным по управлению интегрантом на решениях управляемой системы с овыпукленным ограничением на управление (релаксационная задача). Под решением управляемой системы понимается тройка: выход гистерезисного оператора, траектория и управление. Установлена связь между исходной задачей минимизации и релаксационной задачей. Эта связь является аналогом классической теоремы Н.Н. Боголюбова в вариационном исчислении. Изучена также связь между решениями исходной управляемой системы и системы с овыпукленным ограничением на управление. Эту связь обычно называют релаксацией. Для конечномерного пространства доказано существование оптимального решения в релаксационной задаче оптимизации. (Голстоногов А.А.)

Рассмотрена нелинейная управляемая система в частных производных, возникающая при моделировании динамики популяций. Система состоит из трех уравнений диффузии, описывающих эволюцию трех биологических видов: добыча, хищник и пища для добычи. Уравнение для плотности пищи включает в себя гистерезисный оператор типа обобщенный упор, учитывающий гистерезисные эффекты, возникающие при рассмотрении данного процесса. Изучена задача минимизации заданного интегрального функционала на решениях указанной системы. Многозначное отображение, определяющее ограничение на управление, имеет замкнутые, невыпуклые значения, а интегрант целевого функционала является функцией, невыпуклой по управлению. Наряду с исходной рассматривается релаксационная задача минимизации интегрального функционала с овыпукленным по управлению интегрантом на решениях управляемой системы с овыпукленным ограничением на управление. Доказан аналог классической теоремы Н.Н. Боголюбова в вариационном исчислении, устанавливающей связь между исходной задачей минимизации и релаксационной задачей. (Тимошин С.А.)

Рассмотрено уравнение неразрывности, заданное нелокальным (зависящим от меры) многозначным векторным полем в предположении, что последнее полунепрерывно сверху либо снизу в метрике Канторовича. Показано, что в обоих случаях, для всякого начального распределения, уравнение имеет решение, которое является абсолютно-непрерывной кривой в пространстве вероятностных мер. Данный результат применен для сведения смешанной системы, состоящей из нелокального закона сохранения и ОДУ к функционально-дифференциальному уравнению, для исследования которого оказалось возможным применить разработанные ранее методы. (Погодаев Н.И.)

Предложен новый подход к исследованию асимптотического поведения решений механических систем с кулоновым трением и с переменными коэффициентами трения, основанный на обобщениях принципа инвариантности Ла-Салля. (Финогенко И.А.)

Оценка результатов

Результаты, относящиеся к дифференциальному включению, правая часть которого является суммой двух многозначных отображений с различным типом непрерывности, являются новыми и не имеют аналогов. Их доказательство базируется на принадлежащей автору теореме о непрерывных по параметру селекторах, проходящих через неподвижные точки зависящих от параметра многозначных отображений с замкнутыми невыпуклыми значениями.

Аналог классической теоремы Н.Н. Боголюбова для задачи минимизации интегрального функционала с невыпуклым по управлению интегрантом на решениях системы, описываемой вариационным неравенством и нелинейным дифференциальным

уравнением с невыпуклыми ограничениями на управления, является новым. Подобные результаты для рассматриваемых систем авторам проекта не известны.

Результаты, относящиеся к существованию решений нелокального уравнения неразрывности с многозначным векторным полем, обобщают ряд результатов, имеющих в этом направлении (Bonnet, Frankowska). Кроме того, примененная техника, основанная на теоремах о непрерывных селекторах многозначных отображений с разложимыми значениями, позволяет существенно упростить большинство предложенных ранее доказательств.

Принцип инвариантности служит основой для ряда эффективных методов исследования притяжения и асимптотической динамики решений неавтономных систем, что само по себе является актуальной математической задачей. Полученные в этом направлении результаты лежат на стыке теорий дифференциальных включений и прямого метода Ляпунова с функциями Ляпунова со знакопостоянными производными. Особенностью предложенного подхода является широкое использование методов многозначного анализа, что обуславливает его новизну в задачах притяжения и устойчивости.

Блок II. Исследование качественных свойств и численное решение управляемых систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с приложениями к вырожденным задачам оптимального управления

Цели и задачи

Целью исследований являлось изучение внутренней структуры и качественных свойств ДАУ, в том числе с непрерывным и дискретным временем (гибридных), а также построение алгоритмов нормализации и создание устойчивых численных методов решения систем интегро-алгебраических и дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными.

В рамках НИР по блоку II в 2020 были поставлены следующие задачи:

1. Создать и обосновать многошаговые методы решения линейных и квазилинейных интегро-алгебраических уравнений со слабой особенностью в матрице-ядре. Численно реализовать предложенные методы.
2. Построить численные методы решения начально-краевых задач для эволюционных ДАУ в частных производных на основе метода наименьших квадратов с функционалом невязки, который выбирается в пространствах Соболева в зависимости от индекса ДАУ.
3. Разработать коллокационно-вариационные методы для численного решения начальной задачи ДАУ высокого индекса и содержащих жесткие компоненты. Построить для таких задач регуляризирующие алгоритмы.

Основные результаты

Для линейной стационарной системы ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности с интервальными коэффициентами получены достаточные условия, при которых возмущенная система имеет такую же структуру общего решения, что и номинальная система. В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры,

получены конструктивные оценки величины, определяющей размах неопределенностей, при выполнении которых рассматриваемое интервальное семейство робастно устойчиво. В частности, условия робастной устойчивости получены в предположении сверхустойчивости номинальной системы. (Щеглова А.А.)

Доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости начальной задачи для вырожденных гибридных систем как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Доказаны необходимые и достаточные условия R-управляемости и R-наблюдаемости, а также теоремы двойственности для вырожденных гибридных систем. Построена структурная форма для возмущенной системы дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), на основе анализа которой получены достаточные условия робастной полной, дифференциальной и R-управляемости ДАУ индекса неразрешенности 1 и 2. (Петренко П.С.)

Рассмотрены линейные многомерные дифференциально-алгебраические уравнения в частных производных со специальной структурой многопараметрического матричного пучка, построенного по коэффициентам уравнения. Для численного решения таких уравнений применен метод дробных шагов и метод бегущего счета с аппроксимацией искомой функции сплайном произвольного порядка по каждой независимой переменной. В обоих случаях созданы расчетные программы и выполнены необходимые вычисления. (Свинина С.В.)

Рассмотрена модель кипения недогретой жидкости в кольцевом канале, представленная в виде смешанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, алгебраических соотношений и одного уравнения в частных производных. С помощью теории дифференциально-алгебраических уравнений определена область существования решения математической модели и предложен численный метод. Определенное в результате расчетов время исчезновения жидкой пленки соответствует данным физического эксперимента по изучению нарушения эффекта Лейденфроста при охлаждении металлической поверхности, омываемой потоком этанола. (Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.)

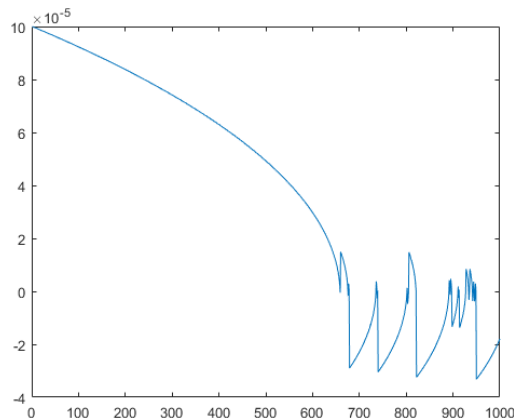


Рис. 1.1: Динамика изменения толщины слоя перегретой выше температуры насыщения жидкости

Рассмотрены вырожденные системы интегральных уравнений Вольтерра, предложены способы вычисления индекса таких систем и численная схема решения, основанная на методе наименьших квадратов. (Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.)

Рассмотрен один класс эволюционных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных, указаны способы вычисления индекса таких систем, найден критерий, при выполнении которых рассматриваемые системы уравнений имеют единственное решение в заданной области. Показано, что зачастую метод наименьших

квадратов является безальтернативным численным методом решения таких систем. (Чистяков В.Ф).

Исследованы линейные системы интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с матрицами-ядрами как Вольтерра, так и Фредгольма. Изучены системы, когда искомая вектор-функция зависит от одного аргумента и матрица перед главной частью является квадратной и тождественно вырожденной. В терминах матричных пучков и полиномов сформулированы условия существования и единственности решения рассматриваемых задач в классе достаточно-гладких функций. (Булатов М.В.)

Предложены и обоснованы коллокационно-вариационные разностные схемы с несколькими точками коллокации первого и второго порядков для начальной задачи дифференциально-алгебраических уравнений. Их построение основано на решении специальных задач квадратичного программирования. Проведено сравнение созданных методов с известными (методами типа Рунге-Кутты, классическими многошаговыми методами и др.) на ряде тестовых примеров. На тестовом примере показано, что коллокационно-вариационная разностная схема с одной точкой коллокации может породить регуляризирующий алгоритм с параметром регуляризации – шагом сетки. (Булатов М.В., Соловарова Л.С.)

Оценка результатов

На сегодняшний день получение результатов по робастной устойчивости систем ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности в условиях, когда возмущения присутствуют во всех матричных коэффициентах, по-прежнему актуально. К достоинствам полученных результатов нужно отнести их простоту для проверки. Для получения условий робастной устойчивости интервального семейства ДАУ был использован следующий подход. Сначала были найдены достаточные условия того, что интервальные возмущения не нарушают внутреннюю структуру номинальной ДАУ. Для этой цели была привлечена структурная форма, которая эквивалентна исходной системе в смысле решений и построение которой носит конструктивный характер. Затем с применением известных результатов по робастной устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной, были получены условия робастной устойчивости для преобразованной системы. Наконец, была обоснована эквивалентность в смысле решений преобразованного и исходного интервальных семейств.

Рассмотрены линейные многомерные дифференциально-алгебраические уравнения в частных производных, объединяющие уравнения гиперболического и параболического типов. Такие уравнения возникают при описании процессов гидродинамики, газовой динамики, теории малых колебаний жидкости и многих других. Для численного решения таких уравнений применен аналог метода дробных шагов, основы которого были положены в работах J. Douglas, Н.Н. Яненко, А.А. Самарского и др. Метод дробных шагов в литературе называют локально-одномерным методом. Его относят к группе экономичных методов и применяют для численного решения многомерных параболических уравнений, например, для уравнения теплопроводности. Аппроксимация искомой функции выполнена сплайном произвольного порядка по каждой независимой переменной. Доказано, что набор разностных схем в методе дробных шагов, как и в классическом случае, имеет первый порядок аппроксимации по времени. Показано, что метод дробных шагов связан с сильными ограничениями на структуру многопараметрического пучка матриц, построенного по коэффициентам системы. Эта особенность делает его менее эффективным при численном решении дифференциально-

алгебраических систем. Для численного решения многомерных дифференциально-алгебраических систем, по аналогии с численным решением классического уравнения переноса, применен метод бегущего счета с аппроксимацией искомого решения сплайном произвольного порядка по каждой независимой переменной. Записана соответствующая разностная схема, создана расчетная программа на компьютерном языке Си++ и выполнены необходимые вычисления. Метод бегущего счета является эффективным, обладает высокой точностью, но не является экономичным.

Результаты, связанные с решением интегро-алгебраических уравнений, получены путем исследования матричных полиномов, составляющих систему. Матрица перед главной частью вырождена, а это означает, что система одновременно содержит уравнения Вольтерра первого и второго рода. Методы решения уравнений Вольтерра первого рода к настоящему времени обоснованы только для некоторых частных случаев, например, для линейных уравнений с ядром, которое не обращается в нуль на диагонали для всех точек из отрезка определения. Следствием этого являются трудности в выборе численного метода, который бы дал удовлетворительные результаты для уравнений Вольтерра и первого и второго рода. Такие задачи становятся еще более сложными, если ядро интегральной системы содержит слабую особенность. Разработанная схема численного решения, основанная на методе наименьших квадратов, и протестированная на модельных примерах, показала себя наиболее оптимальным методом для данного класса уравнений.

Начально-краевые задачи для эволюционных дифференциально-алгебраических уравнений имеют большое прикладное значение. Для таких задач не существует общепринятого понятия индекса – целочисленного параметра, характеризующего сложность структуры исследуемой системы. Индекс, в частности, определяет порядок производных входных данных, от которых зависит решение задачи и играет важную роль в поиске условий существования и единственности решений. В рамках построенной математической теории показано, что зачастую метод наименьших квадратов является безальтернативным численным методом решения таких систем. Полученные результаты были использованы для исследования модели кипения недогретой жидкости в кольцевом канале, представленной в виде смешанной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, алгебраических соотношений и одного уравнения в частных производных.

На основе теории разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений, теории некорректных задач и методов решения задач математического программирования получены и обоснованы оригинальные коллокационно-вариационные разностные схемы для линейных ДАУ. Их отличительной характеристикой является простота реализации, так как они не требуют вычисления производных входных данных, проекторов на ядро матриц и обобщенных обратных матриц. Численные эксперименты для ДАУ индекса не выше двух показали, что коллокационно-вариационные схемы могут учитывать погрешности входных данных и порождать регуляризирующий алгоритм.

Блок III. Качественное исследование неклассических и нерегулярных задач теории оптимального управления с приложениями к механике и численным методам улучшения управления

Цели и задачи

Основные цели блока III связаны с проблематикой расширения неклассических и нерегулярных задач оптимального управления, требующих перехода к обобщенным управлениям импульсного типа и разрывным траекториям. Для этих задач итоговые результаты проекта будут содержать конструкции естественного релаксационного расширения, необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина и его существенного усиления – так называемого позиционного принципа минимума, а также примыкающие достаточные условия оптимальности и двойственность для некоторых классов невыпуклых задач (обобщенно-линейных по состоянию и квадратичных).

В рамках НИР по блоку III в 2020 г. были поставлены следующие задачи:

1. Исследовать задачи оптимального импульсного управления с гистерезисом при наличии дополнительных условий (невыпуклая область гистерезиса, наличие фазовых ограничений и др.).
2. Разработать принципиальную схему численного решения гибридных задач управления на основе сингулярного преобразования, решение тестовых задач.

Методика проведения научно-исследовательской работы базируется на современной нелокальной теории управления, группирующейся в рамках уравнений и неравенств Гамильтона-Якоби-Беллмана и методах релаксационного расширения вырожденных задач оптимального управления.

Результаты по задачам управления динамическими системами в пространствах мер сочетают классический аппарат теории оптимизации и оптимального управления с результатами по нелокальным транспортным уравнениям, элементами анализа в пространстве вероятностных мер и техникой сингулярных пространственно-временных преобразований типа разрывной замены времени.

Результаты, связанные с тематикой управляемых систем с гетерогенными импульсными воздействиями, преимущественно опираются на оригинальную технику пространственно-временных преобразований, которая сочетает в себе разрывную замену времени и расширение фазового пространства, позволяющее независимо отслеживать эволюцию односторонних пределов траектории в фазе импульсных воздействий.

Основные результаты

Получено необходимое условие глобальной оптимальности программного управления в классе позиционных управлений спуска по функционалу, экстремальных относительно новой квадратичной опорной мажоранты функционала. Результат усиливает и дополняет классический и позиционный принципы минимума первого порядка и особенно эффективен в задачах с особыми и скользящими режимами. (Дыхта В.А.)

Рассмотрен класс задач оптимизации нелинейных импульсных процессов с управлениями, заданными борелевскими мерами, и ограничениями на промежуточные значения разрывной траектории. Развита метод составных (векторных) функций типа Ляпунова со свойствами сильной и/или слабой монотонности относительно импульсной управляемой системы. Получены условия оптимальности, основанные на использовании множеств составных функций типа Ляпунова. Для билинейной задачи оптимального импульсного управления найдены составные функции, точно описывающие множества достижимости в промежуточные моменты времени и конкретизирующие необходимые и достаточные условия оптимальности. (Самсонюк О.Н.)

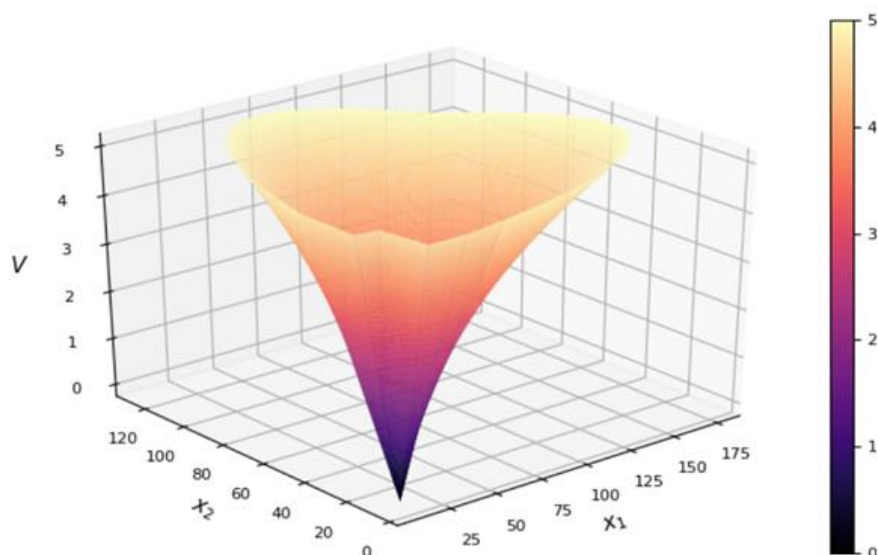


Рис. III.1 Точное описание множества достижимости билинейной импульсной системы, заданное векторной (составной) функцией типа Ляпунова

Рассмотрен управляемый процесс выметания, заданный системой, состоящей из дифференциального уравнения с мерой (импульсным управлением) и дифференциального включения с правой частью, зависящей от многозначного отображения с ограниченной полной вариацией относительно метрики Хаусдорфа. Процесс выметания задан в конечномерном пространстве, его решения принадлежат пространству пополнений графиков функций ограниченной вариации. Изучены вопросы существования и единственности решения при заданном импульсном управлении и вопросы получения условий оптимальности для одной задачи оптимального управления с гистерезисной нелинейностью типа «люфт», моделируемой таким процессом выметания. (Самсонюк О.Н.)

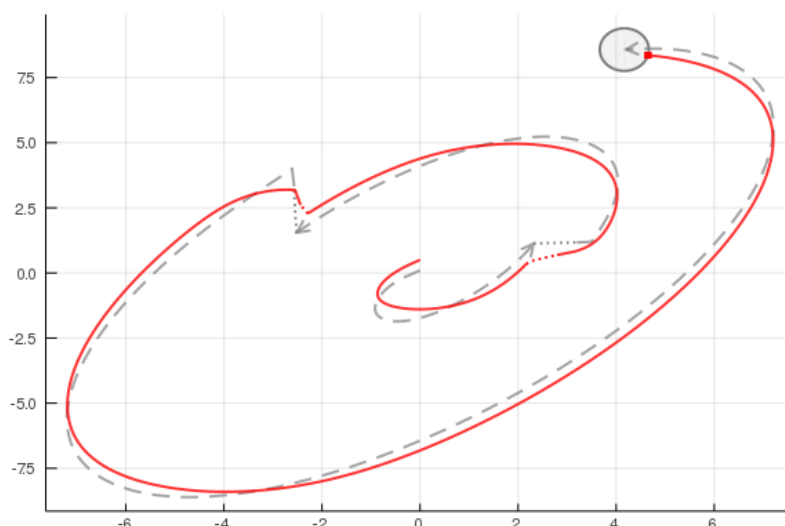


Рис. III.2 Разрывный процесс выметания, соответствующий допустимому пополнению графика управляющей BV-функции

Для задачи оптимального импульсного управления нелокальным уравнением неразрывности в пространстве вероятностных мер с линейным терминальным функционалом получено представление в терминах интегрального уравнения с мерами в пространстве разрывных мерозначных кривых ограниченной вариации. Предложено эквивалентное преобразование поставленной задачи к задаче с ограниченным векторным полем и терминальным ограничением. Доказано необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума (Погодаев Н.И., Старицын М.В.).

Для гибридной задачи управления динамической системой с двумя независимыми типами импульсных воздействий разработана схема численного решения на основе нового сингулярного пространственно-временного преобразования, сочетающего разрывную замену времени с расширением фазового пространства. Последнее соответствует расщеплению разрывной траектории на две ветви, отвечающие её (левому и правому) односторонним пределам. В рамках апробации развиваемого подхода получены результаты численного исследования нескольких моделей механических систем с блокируемыми степенями свободы и гиперимпульсными воздействиями вибрационной природы (см. Рис. III.1). Расчёты проведены прямым методом с привлечением пакета ГЕККО и решателей IPOPT, APOPT и WPOPT. (Гончарова Е.В., Старицын М.В.)

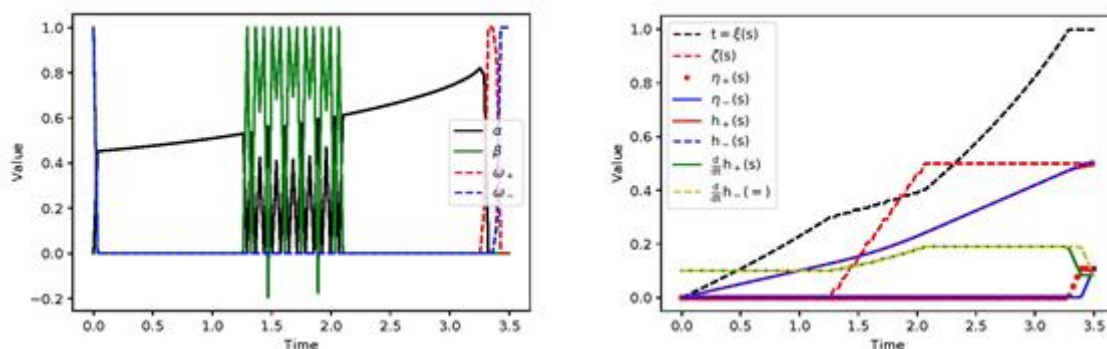


Рис. III. 3. Телескопический маятник с блокируемой степенью свободы: управления (слева) и траектории (справа) в преобразованной задаче. Пилообразный участок на графике управлений (зеленый и черный цвет) соответствует вибрации – гиперимпульсу; финальный сегмент (красная и синяя пунктирные линии) характеризует импульсное блокирование линейной координаты.

Изучены базовые свойства нелокального неоднородного уравнения типа переноса (уравнения баланса) в пространстве знакопеременных мер на n -мерном евклидовом пространстве. Одной из интерпретаций таких моделей может служить описание динамики бесконечного ансамбля взаимодействующих заряженных частиц, движущихся в пространстве под воздействием векторного поля, в присутствии «источника», моделирующего процесс появления новых частиц, их исчезновения или изменения заряда. Доказана теорема о существовании и единственности решения, а также установлена непрерывная зависимости решения от параметра и начального распределения. Даны примеры векторных полей и источников, возникающие в математической биологии. Исследование обобщает известные результаты по нелокальным транспортным уравнениям с источником в пространстве знакопеременных мер на более широкий класс векторных полей и источников, и составляет основу для исследования задач управления неконсервативными мультиагентными системами. Результаты могут быть обобщены на произвольное ограниченно-компактное пространство (т.е., пространство, в котором замкнутые шары являются компактными множествами). (Старицын М.В.)

Разработаны три численных алгоритма оптимального управления импульсными системами с линейным состоянием. Алгоритмы основаны на стандартном преобразовании задач импульсного управления посредством разрывной замены времени и так называемых прямом и двойственном позиционных принципах минимума. Позиционные принципы

минимума это вариационные необходимые условия оптимальности, использующие управления с обратной связью, конструируемые с помощью обычных конструкций принципа максимума Понтрягина (ПМП; хотя эти условия оптимальности полностью сформулированы в формализме ПМП, они существенно усиливают этот классический результат.. Все алгоритмы нелокальны в том смысле, что они нацелены на улучшение неоптимальных экстремалей ПМП. (Сорокин С.П., Старицын М.В.)

Оценка результатов

Все запланированные результаты были получены. Все результаты являются новыми и полностью соответствуют итоговым целям проекта.

Принцип максимума, полученный авторами в задаче импульсного управления нелокальным уравнением неразрывности, является первым из известных авторам результатов по необходимым условиям оптимальности для задач с разрывными траекториями в пространствах мер.

Схема численного решения гибридной задачи управления динамической системой с двумя независимыми типами импульсных воздействий позволяет адаптировать для изучаемого класса задач существующие алгоритмы оптимального управления и сторонние решатели, и может применяться, в частности, для компьютерного моделирования механических систем с блокируемыми степенями свободы и вибрационными воздействиями.

Результаты по нелокальным транспортным уравнениям с источником в пространстве знакопеременных мер обобщают известные результаты в этой области на более широкий класс векторных полей и источников, охватывающий ряд прикладных моделей из математической биологии и динамики скоплений людей. Результат о непрерывной зависимости решения закона баланса от параметра со значениями в метрическом пространстве открывает возможность для корректной постановки и исследования соответствующих задач управления.

Блок IV. Алгоритмы и вычислительные технологии решения задач оптимального управления и фазового оценивания

Цели и задачи

В рамках НИР по блоку IV в 2020 г. были поставлены следующие задачи:

1. Выполнить сравнение разработанных алгоритмов и программных средств с коммерческими пакетами прикладных программ на основе коллекции тестовых примеров.
2. Сформировать коллекцию тестовых задач и провести вычислительные эксперименты по исследованию свойств предложенных алгоритмов.
3. Сформировать коллекцию тестовых задач и решить модельные и прикладные задачи в управляемых системах изучаемого типа.

Основные результаты

Разработана вычислительная технология решения невыпуклых задач динамической

оптимизации с программным и параметрическим управлением. Рассмотрены задачи оптимального управления, включающие как управления-функции, так и управления-константы. Управления-функции традиционно располагаются в правых частях системы. Управления-константы могут находиться как в правых частях, так и в начальных состояниях, так и в оптимизируемом функционале, который предполагается невыпуклым. Предложенная технология включает этап первоначального неявного сканирования множества достижимости системы, выполняемый с помощью модификации метода Лууса-Яколы, что позволяет – в не слишком сложных задачах – найти приближение в области притяжения глобального экстремума. Для улучшения найденного приближения – уточнения точки глобального экстремума – применяется декомпозиционная алгоритмическая градиентная схема, реализующая итеративный спуск сначала по управляющим параметрам, затем по управлениям-функциям.

Пример. Задача успокоения нелинейного маятника, в которой необходимо, помимо стабилизирующего управления, найти также наилучшее начальное положение системы и его скорость. Динамика системы описывается уравнениями $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u(t) - \sin x_1$, $t \in [0,5]$, на управление и начальные состояния наложены ограничения $|u(t)| \leq 1$ и $|x_1(0)| \leq 1, |x_2(0)| \leq 4$. Необходимо найти, перебирая $u(t)$ и $x_1(0), x_2(0)$, минимальное значение функционала $I(u, x(0)) = \|x(5)\|^2 + x_1^2(0) - x_2^2(0)$. Выбрана равномерная сетка дискретизации управления-функции с числом узлов равным 50. Найдено два глобальных решения с одинаковым оптимальным значением $I^* = I(u^*, x^*(0)) = -9.7394$, первое представлено на рисунке IV.1, а):

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,3] \\ 1, & t \in (3,5] \end{cases}, \quad x^*(0) = (-0.4000, 3.2204);$$

второе – на рисунке VI.1, б):

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,3] \\ -1, & t \in (3,5] \end{cases}, \quad x^*(0) = (0.4000, -3.2204).$$

Множество достижимости системы и концы оптимальных траекторий, выделенные красными крестиками, изображены на рисунке IV.2. (Горнов А.Ю.)

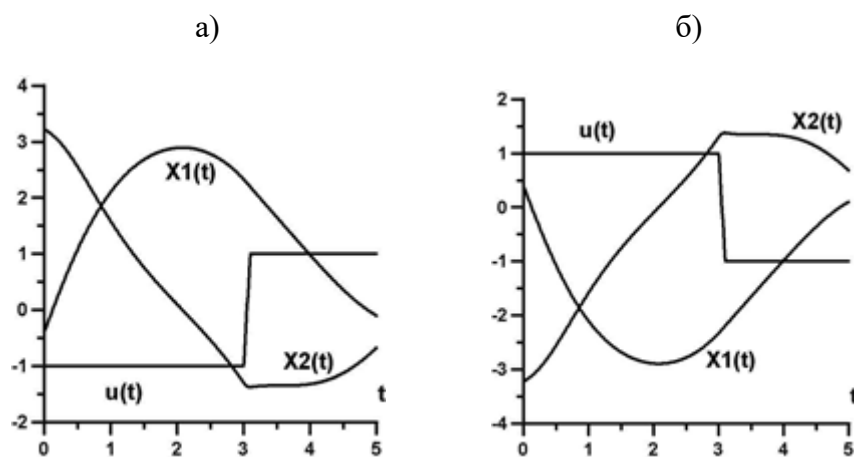


Рис. IV.1. Оптимальные траектории и управление в тестовой задаче стабилизации нелинейного маятника

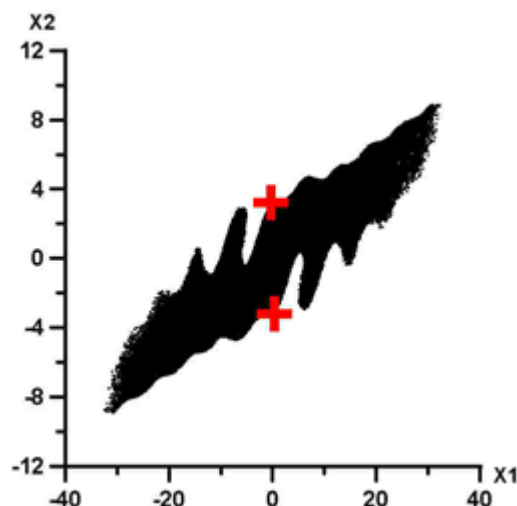


Рис. IV.2. Множество достижимости и экстремальные точки в тестовой задаче стабилизации нелинейного маятника

Выполнена программная реализация методов решения задач аппроксимации интегральной воронки для полиэдрально управляемых динамических систем с применением технологий параллельного программирования. Предложенная технология основывается на редукции к задачам фазового оценивания и оптимального управления с ограничениями более простой структуры. Используемые для исследования вспомогательных задач обобщенные методы стохастической аппроксимации множества достижимости управляемой динамической системы опираются на построение управлений в виде функций релейного типа с заданным числом точек переключения. Для параллельной генерации допустимых управлений из полиэдрального множества с последующим интегрированием дифференциальной системы с целью нахождения соответствующего значения функционала применялись современные графические ускорители. Предлагаемые в работе подходы реализованы на языке C/C++ с использованием технологии параллельного программирования NVIDIA CUDA.

Расширенная коллекция тестовых задач с полиэдральными управляющими воздействиями использована для тестирования предложенных алгоритмов и программных средств. На рисунке IV.3 представлен пример множеств достижимости для управляемой динамической системы $\dot{x}_1 = 0.1u_2 \sin x_2$, $\dot{x}_2 = u_1 - |x_1|^{x_1}$ с фиксированными начальными значениями траектории $x_1(t_0) = 0.1, x_2(t_0) = 0$ и полиэдральными ограничениями на управления: $u(t) \in U_i, i = \overline{1,5}$ (рис. IV.4). Вычислительные эксперименты проводились на различных системах, имеющих в своём составе ускорители NVIDIA GeForce 1060, GeForce 1070 и GeForce 2080 Ti. Результаты, полученные в режиме одинарной точности (float), продемонстрировали значительное ускорение расчётов. С использованием разработанных вычислительных технологий решены содержательные задачи рассматриваемого типа. (Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Аникин А.С., Сороковиков П.С.).

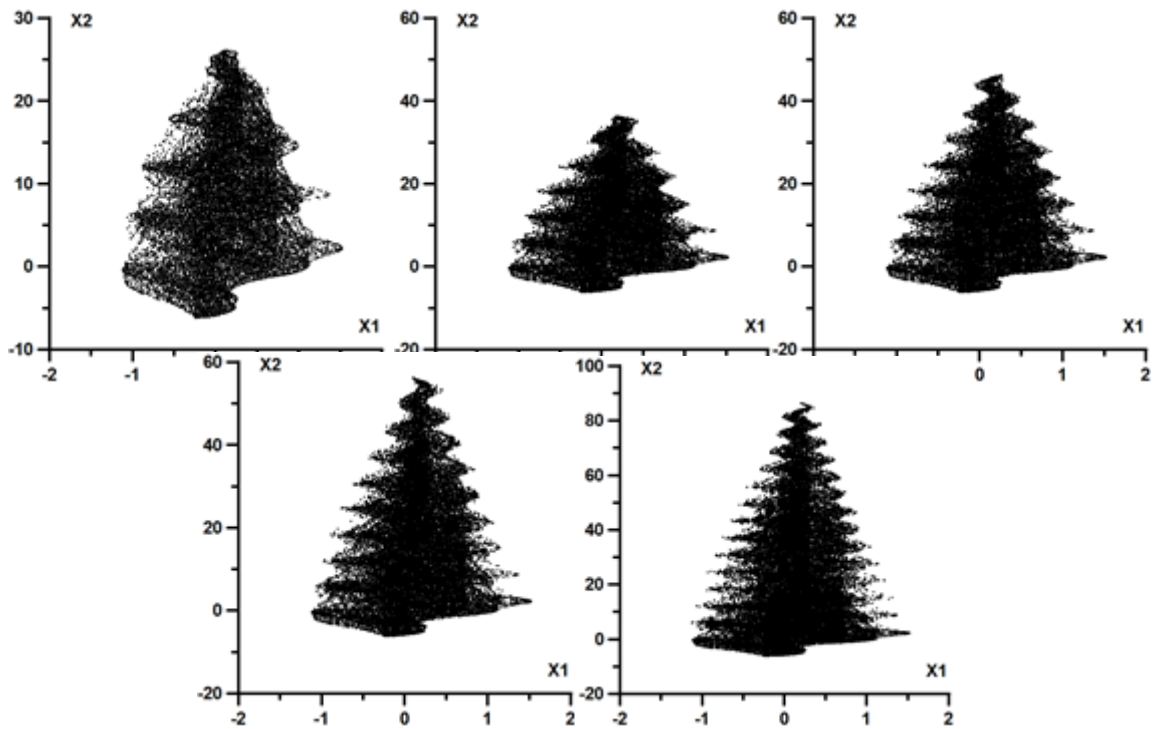


Рис. IV.3. Аппроксимация множества достижимой управляемой динамической системы для рассмотренного семейства тестовых задач.

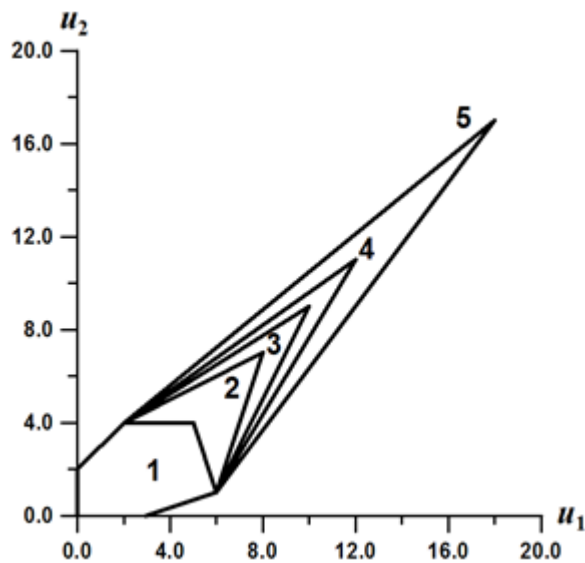


Рис. IV.4. Полиэдральные множества допустимых управлений для семейства тестовых задач.

Оценка результатов

Программные реализации алгоритмов, предложенные в рамках проекта, протестированы с использованием специализированной коллекции тестовых задач. Исследованы их свойства и проведены сравнения с доступными программными средствами, ориентированными на исследование задач рассматриваемого типа. Сформирована коллекция тестовых множеств достижимости для управляемых систем с

полиэдральным множеством допустимых управлений и алгебро-дифференциальных систем.

Проведенное тестирование позволило продемонстрировать эффективность предложенных алгоритмов. Для реализации вычислительных экспериментов использовались как известные тестовые задачи (в том числе больших размерностей), так и прикладные задачи из нескольких научно-технических областей.

Заключение

Все исследования в рамках НИР выполнены в соответствии с государственным заданием ИДСТУ СО РАН на 2017-2020 гг. по теме № I.1.4.1 «Эволюционные уравнения и управляемые системы: теория, численный анализ и приложения». Содержание НИР раскрыто в Планах научно-исследовательских работ ИДСТУ СО РАН на 2017-2020 годы (Тема I.1.4.1. ПФНИ ГАН I. Математические науки, подраздел 1. Теоретическая математика Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 гг.).

Все задачи, поставленные на этапе НИР 2020 г., решены в полном объеме, опубликовано 27 статей в российских и зарубежных изданиях, включенных в международные базы цитирования Web of Science [1, 3-5, 7-9, 11, 12, 17, 20, 23, 24, 27, 36] и Scopus [13, 14, 18, 25, 26, 28-30, 32, 33, 35, 37]; 6 статей в изданиях, включенных в базу данных РИНЦ [8, 34, 38, 41-43]. Общее количество публикаций по результатам этапа НИР 2020 г. – 65, из них в журналах – 33.

Результаты, относящиеся к эволюционным включениям являются новыми и, как правило не имеют аналогов, поскольку их доказательства базируются на принципиально новой технике, разрабатываемой авторами на протяжении многих лет. Значимость результатов подчеркивается их публикацией в престижных как отечественных, так и зарубежных журналах.

Получена серия результатов, относящаяся к управляемым системам, состоящим из взаимосвязанных нелинейных уравнений неразрывности и обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, для таких систем доказана плотность траекторий, соответствующих “бэнг-бэнг” управлениям, в множестве всех траекторий системы. Для случая линейного закона сохранения найдены необходимые условия оптимальности в соответствующих задачах оптимального управления.

В рамках проекта получены новые результаты, относящиеся к теории дифференциально-алгебраических и интегро-алгебраических уравнений. Для линейной нестационарной системы ДАУ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами доказана теорема о существовании решения в классе распределений типа Соболева-Шварца, получены критерии управляемости скачком регулярной составляющей решения и управляемости сингулярной составляющей решения. Для линейных стационарных ДАУ со структурированной матричной неопределенностью найдены линейные соотношения, которым должны подчиняться элементы матриц возмущений системы для того, чтобы размерность пространства решений и структура общего решения возмущенных ДАУ были такими же, как у номинальной системы. Получены условия робастной устойчивости для системы ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности, у которых неопределенность присутствует во всех матричных коэффициентах. Получены достаточные и необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости нестационарной системы ДАУ произвольно высокого индекса неразрешенности с интервальными возмущениями. Для интервального семейства стационарных ДАУ получены конструктивные оценки величины, определяющей размах неопределенностей, при выполнении которых рассматриваемое семейство робастно устойчиво. В частности, условия робастной устойчивости получены в предположении сверхустойчивости номинальной системы.

Установлены условия разрешимости для ДАУ, в том числе с возмущениями в виде интегральных операторов, построены алгоритмы вычисления индекса ДАУ порядка выше первого, разработаны численные методы решения различных классов интегро-алгебраических уравнений. Получены критерии существования левых регуляризирующих операторов для ДАУ в частных производных и найдены способы построения таких операторов для некоторых классов ДАУ в частных производных.

Построены численные методы решения начально-краевых задач для эволюционных ДАУ в частных производных и рассмотрены математические модели из теплоэнергетики на их основе. Исследованы модели прикладных задач из области теплоэнергетики. Предложены и обоснованы новые коллокационно-вариационные разностные схемы с несколькими точками коллокации первого и второго порядков для начальной задачи ДАУ, в том числе, содержащие жесткие компоненты. Их преимуществом является простота реализации, так как они не требуют вычисления производных входных данных, проекторов на ядро матриц и обобщенных обратных матриц. Исследованы регуляризирующие свойства численных методов для ДАУ – схема типа неявного метода Эйлера первого порядка и коллокационно-вариационная разностная схема с одной точкой коллокации. Проведены исследования по качественной теории и численным методам решения интегро-алгебраических уравнений. Данные результаты нашли применение в исследовании модели долгосрочного развития электроэнергетической системы.

Построены численные методы высокого порядка для сингулярной краевой задачи на полуоси для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, описывающих радиус плотности пузыре в неоднородной жидкости.

Исследованы линейные и квазилинейные ДАУ в частных производных первого и второго порядка с двумя независимыми переменными. Построены эффективные универсальные численные алгоритмы для решения систем произвольного индекса. Для систем, первый параметр индекса которых не превосходит единицу, получены условия существования решения. Положено начало исследованию линейных многомерных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных. Выполнен сравнительный анализ метода бегущего счета, численного алгоритма, основанного на методе дробных шагов (локально-одномерной разностной схемы) и метода переменных направлений.

Для задач оптимизации нелинейных импульсных процессов с управлениями, заданными борелевскими мерами, и ограничениями на промежуточные значения разрывной траектории развит метод составных (векторных) функций типа Ляпунова со свойствами сильной и/или слабой монотонности относительно импульсной управляемой системы. С помощью таких функций получены достаточные и необходимые условия оптимальности.

Основываясь на паре двойственных принципов минимума, разработаны три численных алгоритма решения задач оптимального управления импульсными системами с линейным состоянием. Проведенное тестирование показало способность алгоритмов улучшать неоптимальные экстремали классического принципа максимума.

Разработана вычислительная технология решения невыпуклых задач динамической оптимизации с программным и параметрическим управлением. Рассмотрены задачи оптимального управления, включающие как управления-функции, так и управления-константы. Программные реализации алгоритмов, предложенные в рамках проекта, протестированы с использованием специализированной коллекции тестовых задач. Исследованы их свойств и проведены сравнения с доступными программными средствами, ориентированными на исследование задач рассматриваемого типа.

В целом, все задачи, поставленные проекте на 2017-2020 годы, выполнены.

Приложение А – Список публикаций по проекту

1. Sergey A. Timoshin, Chen Bin, Optimal control of a population dynamics model with hysteresis, *Acta Mathematica Scientia* (accepted).
2. Sergey A. Timoshin, Bang-bang control of a prey-predator model with a stable food stock and hysteresis (submitted).
3. Timoshin S.A., Tolstonogov A.A. Existence and Relaxation of BV Solutions for a Sweeping Process with a Nonconvex-Valued Perturbation // *Journal of Convex Analysis*. 2020. Vol. 27, №2. pp. 645-672.
4. Tolstonogov A. A. Compactness of BV Solutions of a Convex Sweeping Process of Measurable Differential Inclusion // *Journal of Convex Analysis*. 2020. Vol. 27, №2. pp. 673-695.
5. Tolstonogov A.A. BV Continuous Solutions of an Evolution Inclusion with Maximal Monotone Operator and Nonconvex-Valued Perturbation. Existence Theorem // *Set-Valued and Variational Analysis*. 2020 DOI: 10.1007/s11228-020-00535-3. (WoS)
6. Финогенко И.А. О притяжении для механических систем с сухим трением // *Известия ИГУ. Сер. Математика*. (на рецензировании)
7. Толстоногов А.А. Полиэдральные многозначные отображения: свойства и приложения // *Сибирский математический журнал*. 2020. Т. 61, №2. С. 428-452. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.216. (WoS)
8. Толстоногов А.А. Дифференциальное включение в банаховом пространстве со смешанными свойствами полунепрерывности // *Функц. анализ и его прил.* 2020. Т. 54, №3. С. 48-62. (WoS)
9. Толстоногов А.А. Теорема Н. Н. Боголюбова для управляемой системы, связанной с вариационным неравенством // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2020. Т. 84, №6. С. 165-196. (WoS)
10. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве с составной правой частью // *Труды института математики и механики УрО РАН*. 2020. Т. 26, №1. С. 212-222. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-212-222. (РИНЦ)
11. Chistyakov V.F., Chistyakova E.V., Levin A.A. Application of underdetermined differential algebraic equations to solving one problem from heat mass transfer // *Lecture Notes in Computer Science*. 2020. Vol. 12141. pp. 84-93. DOI: 10.1007/978-3-030-50426-7_7.
12. Кононов А.Д., Щеглова А.А. Устойчивость интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений // *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2020, № 6, с. 15-31. (WoS переводная версия).
13. Petrenko P. Samsonyuk O., Staritsyn M. A note on Differential-Algebraic Systems with Impulsive and Hysteresis Phenomena // *Cybernetics and Physics*. 2020. Vol. 9, No. 1. P. 51-56. <https://doi.org/10.35470/2226-4116-2020-9-1-51-56>. (Scopus)
14. Petrenko P.S. Controllability of a singular hybrid system *Bulletin of Irkutsk State University-Series Mathematics*. 2020. Vol.34. (WoS ESCI) (принята к печати)
15. Чистякова Е.В., Чистяков В.Ф. Решение некоторых классов систем интегральных уравнений Вольтерра методом наименьших квадратов // *Материалы конференции «Ляпуновские чтения»*, Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 7-11 декабря 2020, с. 80.
16. Чистяков В.Ф. О разрешимости некоторых классов эволюционных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных и методе наименьших квадратов // *Материалы конференции «Ляпуновские чтения»*, Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 7-11 декабря 2020, с. 81.

17. Pogodaev N., Staritsyn M. Impulsive control of nonlocal transport equations // *Journal of Differential Equations*. 2020. Vol. 269, №4. pp. 3585-3623. DOI: 10.1016/j.jde.2020.03.007. (WoS)
18. Dykhta V.A. Approximate Feedback Minimum Principle for Suboptimal Processes in Non-smooth Optimal Control Problems // In: Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) *Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences – Proceedings*. Springer. Cham. 2020. P. 127-132. DOI: 10.1007/978-3-030-42831-0_12
19. Дыхта В.А. Квадратичные опорные суперрешения уравнения Гамильтона-Якоби и позиционный принцип минимума второго порядка // *Материалы III Международного семинара, посвященного 75-летию академика А.И. Субботина*. Екатеринбург, Россия 26-30 октября 2020 г. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2020., с. 153-156.
20. Samsonyuk O.N. Optimality conditions for optimal impulsive control problems with multipoint state constraints // *Journal of Global Optimization*. 2020. 76(3), 625-644 DOI: 10.1007/s10898-019-00868-w. (WoS Q1)
21. Samsonyuk O.N., Sorokin S.P. Optimality Conditions for Impulsive Processes with Intermediate State Constraints. The 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB), Moscow, Russia, 3-5 June 2020. IEEE, 2020. DOI: 10.1109/STAB49150.2020.9140658
22. Самсонюк О.Н. Управление процессами выметания с решениями ограниченной вариации // *Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого) [Электронный ресурс]: Материалы XV Междунар. научн. конфер. (3-5 июн. 2020 г., Москва) / под общ. ред. В. Н. Тхай; Ин-т проблем упр. им. В. А. Трапезникова Рос. акад. наук. – М.: ИПУ РАН, 2020. С. 395–398.*
23. Goncharova, E., Staritsyn, M., Pereira, F.L. Optimal Impulsive Control Problems Motivated by Mechanical Systems with Vibrations and Blockable DOFs // *IEEE Control Systems Letters*, 2021, 5 (2), pp. 701-706. (WoS)
24. Staritsyn, M., Sorokin, S. On feedback strengthening of the maximum principle for measure differential equations // *Journal of Global Optimization*, 2020, 76 (3), pp. 587-612. (WoS Q1)
25. Sorokin, S., Staritsyn, M. Numerical algorithms for state-linear optimal impulsive control problems based on feedback necessary optimality conditions // *Cybernetics and Physics*, 2020, 9 (3), pp. 152-158. (Scopus)
26. Staritsyn, M., Goncharova, E. On complementarity measure-driven dynamical systems // *Lecture Notes in Electrical Engineering*, 2020, 495, pp. 699-718. (Scopus)
27. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Anikin A.S., Finkelstein E.A. Extension technology and extrema selections in a stochastic multistart algorithm for optimal control problems // *Journal of Global Optimization*. 2020. Vol. 76, №3. pp. 533–543. DOI: 10.1007/s10898-019-00821-x. (Scopus, Web of Science Q1).
28. Sorokovikov P., Gornov A., Anikin A. Computational technology for the study of atomic-molecular Morse clusters of extremely large dimensions // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 734 (2020) 012092 (Scopus).
29. R. Enkhbat, S. Batbileg, N. Tungalag, A. Anikin, and A. Gornov, A Global Optimization Approach to Nonzero Sum Six-Person Game // *Frontiers in Games and Dynamic Games: Part of the Annals of the International Society of Dynamic Games book series (AISDG, volume 16)*, pp. 219-227. DOI: 10.1007/978-3-030-39789-0_7. (Scopus).
30. Zarodnyuk T., Gornov A., Anikin A., Sorokovikov P. Numerical Technologies for Investigating Optimal Control Problems with Free Right-Hand End of Trajectories // *Advances in Intelligent Systems and Computing: 6th International Conference on Computer Science, Applied Mathematics and Applications (ICCSAMA 2019; Hanoi;*

- Viet Nam; December 19-20, 2019). 2020. Vol. 1121. pp. 99-105. DOI: 10.1007/978-3-030-38364-0_9. (Scopus)
31. Anikin A., Gasnikov A., Gornov A., Kamzolov D., Maximov Yu., Nesterov Yu. Efficient Numerical Methods to Solve Sparse Linear Equations with Application to PageRank // Optimization Methods and Software. (На рецензии).
 32. Anikin A., Dorn Y., Nesterov Y. Computational Methods for the Stable Dynamic Model // Communications in Computer and Information Science: 10th International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA 2019; Petrovac; Montenegro; September 30 - October, 4 2019). 2020. Vol. 1145. pp. 280-294. DOI: 10.1007/978-3-030-38603-0_21. (Scopus).
 33. Sorokovikov P., Gornov A., Anikin A. Computational technology for the study of atomic-molecular Morse clusters of extremely large dimensions // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing, 2020. Vol. 734, No. 1. P. 012092. DOI: 10.1088/1757-899X/734/1/012092. (Scopus).
 34. Сороковиков П.С. Модификации алгоритмов нелокального одномерного поиска, основанные на условии Гёльдера // Вестник Бурятского гос. ун-та. Математика, информатика. 2019. №4. С. 40–56. DOI: 10.18101/2304-5728-2019-4-40-56. (The first online – 2019, проиндексирована в 2020).
 35. Zarodnyuk T., Gornov A., Anikin A., Sorokovikov P. Numerical Technologies for Investigating Optimal Control Problems with Free Right-Hand End of Trajectories // Advances in Intelligent Systems and Computing: 6th International Conference on Computer Science, Applied Mathematics and Applications (ICCSAMA 2019; Hanoi; Viet Nam; December 19–20, 2019). 2020. Vol. 1121. pp. 99–105. DOI: 10.1007/978-3-030-38364-0_9 (Scopus).
 36. Stepina N.P., Shumilin A.V., Zinovieva A.F., Nenashev A.V., Gornov A.Yu., Dvurechenskii A.V. Magnetic field effect on the slow relaxation of photoconductance in tunnel coupled quantum dot arrays // Physical E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, Volume 121, July 2020, 114126; DOI: 10.1016/j.physe.2020.114126. (Web of Science Q2)
 37. Enkhbat R., Zarodnyuk T.S., Gornov A.Yu. Computational Algorithms for Fractional Optimal Control Problems // Mongolian Mathematical Journal (has been accepted and to appear in December 2020) (Scopus)
 38. Горнов А.Ю., Аникин А.С., Андрианов А.Н. Численное исследование задач оптимизации больших размерностей с использованием модификации метода Б.Т. Поляка // Журнал Вычислительной математики и математической физики, 2021. Т. 61. № 5.
 39. Gornov Yu., Sorokovikov P., Gornov A. Algorithm for the numerical investigation of optimal control problems in robotic systems // ASME Letters in Dynamic Systems and Control. 2020. 12 p. (В печати).
 40. Sorokovikov P., Gornov A. Combined non-convex optimization algorithms based on differential evolution, harmony search, firefly, and L-BFGS methods // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing, 2021. 12 p. (В печати).
 41. Тятюшкин А.И. Многометодная оптимизация управляющих функций и параметров // Журнал Национальная ассоциация ученых (НАУ). № 54, 2020. С. 48–53.
 42. Тятюшкин А.И. Многометодная оптимизация управляющих параметров // Danish Scientific Journal, № 36, Т. 2, 2020. С. 55-61.
 43. Тятюшкин А.И. Многометодные алгоритмы оптимизации управления в сложных прикладных задачах // J. Sciences of Europe. № 52. Vol. 1, 2020, pp 57–67.
 44. Тятюшкин А.И. Многометодные алгоритмы для решения сложных задач оптимального управления // ЖВМиМФ. №2, 2021 (в печати).
 45. Горнов А.Ю. Вычислительная технология решения невыпуклой задачи динамической оптимизации с программным и параметрическим управлением //

- Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 13.
46. Аникин А.С., Зароднюк Т.С. Параллельная реализация алгоритма криволинейного поиска для невыпуклой задачи оптимального управления // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 7.
 47. Горнов А.Ю. Численное исследование эффективности ПК ORTCON для задач оптимального управления в сравнении с коммерческими программными технологиями // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 14.
 48. Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С. Коллекция тестовых множеств достижимости для управляемых алгебро-дифференциальных систем // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 15.
 49. Зароднюк Т.С., Аникин А.С. Модификация метода криволинейных покрытий для задачи диссипации двухатомных молекул // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 24.
 50. Зароднюк Т.С., Аникин А.С. Параллельный алгоритм аппроксимации интегральной воронки динамической системы с полиэдральным управлением // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 25.
 51. Sorokovikov P. Application of reinforcement learning techniques for the construction of non-convex optimization algorithms // Proc. of Intern. Workshop “Critical Infrastructures in the Digital World” (IWCI-2020) (Baikalsk, March 10–15, 2020). Irkutsk: ESI SB RAS, 2020.
 52. Сороковиков П.С. Численное исследование свойств алгоритмов невыпуклой оптимизации различного генезиса // Современные проблемы математики и её приложений: тезисы Международной (51-й Всероссийской) молодежной школы-конференции (Екатеринбург, 3–7 февраля, 2020). Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, Уральский федеральный университет, 2020. С. 37–38.
 53. Сороковиков П.С. Численное решение двух задач оптимального управления роботами с фазовыми ограничениями // Современные проблемы математики и её приложений: тезисы Международной (51-й Всероссийской) молодежной школы-конференции (Екатеринбург, 3–7 февраля, 2020). Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, Уральский федеральный университет, 2020. С. 75–76.
 54. Sorokovikov P. Numerical investigation of non-convex optimization algorithms based on reinforcement learning techniques // Book of Abstracts of the XI Intern. Conf. “Optimization and Applications” (OPTIMA-2020) (Petrovac, Montenegro, September 28 – October 2, 2020). Moscow: DCC RAS, 2020. P. 76.
 55. Сороковиков П.С. Пакет программ для численного решения задач многоэкстремальной оптимизации // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО
 56. РАН, 2020. С. 67.
 57. Хандаров Ф.В., Сороковиков П.С. Численное исследование свойств метода нелокального поиска teaching–learning-based optimization // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 77–78.
 58. Gornov A., Anikin A., Sorokovikov P., Zarodnyuk T. Algorithms for search of best-of-known solutions for Morse clusters // Proc. of Intern. Workshop “Critical Infrastructures

- in the Digital World” (IWCI-2020) (Baikalsk, March 10–15, 2020). Irkutsk: ESI SB RAS, 2020.
59. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S.. Unconditional optimization algorithms based on curvilinear search // Book of Abstracts of the XI Intern. Conf. “Optimization and Applications” (OPTIMA-2020) (Petrovac, Montenegro, September 28 – October 2, 2020). Moscow: DCC RAS, 2020. P.46.
 60. Zarodnyuk T.S., Gornov A.Yu. The trust-region-type algorithm using the main diagonal of the Hessian matrix // Book of Abstracts of the XI Intern. Conf. “Optimization and Applications” (OPTIMA-2020) (Petrovac, Montenegro, September 28 – October 2, 2020). Moscow: DCC RAS, 2020. P. 85.
 61. Sorokovikov P., Gornov A. Low-energy Z1 clusters of dimensions from 81 to 110 atoms // Book of Abstracts of the XI Intern. Conf. “Optimization and Applications” (OPTIMA-2020) (Petrovac, Montenegro, September 28–October 2, 2020). Moscow: DCC RAS, 2020. P. 77.
 62. Аникин А.С. Методика сравнения эффективности генераторов псевдослучайных чисел // // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 6.
 63. Сороковиков П.С., Горнов А.Ю. Статистическое тестирование вычислительной технологии оптимизации потенциалов атомно-молекулярных кластеров // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 68.
 64. Кузьменко В.В., Горнов А.Ю., Аникин А.С. Моделирование концентрации аполипопротеина А1 в крови с применением модифицированной технологии Шепарда // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 37.
 65. Сороковиков П.С., Горнов А.Ю. Низкопотенциальные атомно-молекулярные кластеры Морса размерностей от 330 до 460 атомов // Материалы конф. «Ляпуновские чтения» (Иркутск, 7–11 декабря 2020 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2020. С. 69.