МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
ИМЕНИ В.М. МАТРОСОВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
(ИДСТУ СО РАН)

УДК 004:4; 004:7
Рег. № НИОКТР 121041300060-4
Шифр научной темы FWEW-2021-0002
Рег. № ИКРБС
Инв. № 2021- 6

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДСТУ СО РАН
академик

______________ И.В. Бычков
«__» 12 ______________ 2021 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ И УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМИ

(промежуточный, этап 1)

Руководитель НИР,
чл.-корр. РАН ______________ А.А. Толстоногов
подпись, дата 28.12.2021

Иркутск 2022

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы:

Зав. Отделением, чл.-корр. РАН	подпись, дата 28.12.2021	А.А. Толстоногов	

Исполнители темы:

Гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	26.05.22 подпись, дата	И.А. Финогенко	(Блок I)
Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	подпись, дата	С.А. Тимошин	(Блок I)
Вед. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	28.12.21 подпись, дата	Н.И. Погодаев	(Блок I)
Зам. директора по научной работе, д-р физ.-мат. наук	28.12.21 подпись, дата	А.А. Щеглова	(Блок I)
Гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	подпись, дата 28.12.2021	В.Ф. Чистяков	(Блок I)
Гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	28.12.21 подпись, дата	М.В. Булатов	(Блок I)
Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	28.12.21 подпись, дата	С.В. Свинина	(Блок I)
Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	подпись, дата 28.12.2021	Е.В. Чистякова	(Блок I)
Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	28.12.21 подпись, дата	П.С. Петренко	(Блок I)
Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	подпись, дата 28.12.2021	Л.В. Соловарова	(Блок I)
Гл. науч. сотр., д-р физ.-мат. наук	28.12.21 подпись, дата	В.А. Дыхта	(Блок II)
Вед. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	28.12.21 подпись, дата	Е.В. Гончарова	(Блок II)
Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	28.12.2021 подпись, дата	О.Н. Самсонюк	(Блок II)
Ст. науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	28.12.21 подпись, дата	С.П. Сорокин	(Блок II)

Вед. науч. сотр.,

канд. физ.-мат. наук	28.12.2021 подпись, дата	М.В. Старицын	(Блок II)
Программист	28.12.2021 подпись, дата	Н.С. Малтугуева	(Блок II)
Гл. науч. сотр., д-р техн. наук	28.12.21 подпись, дата	А.Ю. Горнов	(Блок II)
Вед. науч. сотр., д-р техн. наук	28.12.2021 подпись, дата	А.И. Тятюшкин	(Блок II)
Ст. науч. сотр., канд. техн. наук	28.12.2021 подпись, дата	Т.С. Зароднюк	(Блок II)
Науч. сотр., канд. физ.-мат. наук	28.12.2021 подпись, дата	А.С. Аникин	(Блок II)
Программист	28.12.2021 подпись, дата	П.С. Сороковиков	(Блок II)

Нормоконтролер канд. техн. наук	28.12.2021 подпись, дата	Е.С. Фереферов

РЕФЕРАТ

Отчет 63 с., 9 рис., 0 табл., 83 источн., 2 прил.

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ, МАКСИМАЛЬНО-МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ГИСТЕРЕЗИС, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИБРИДНЫЕ СИСТЕМЫ, РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ, НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВАРИАЦИОННОГО ТИПА, ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ.

Целью НИР является изучение качественных свойств, построение численных методов решения, а также развитие методов теории оптимального управления для следующих классов динамических систем: эволюционные включения с максимально монотонными операторами, интегро-дифференциальные и алгебро-дифференциальные уравнения в частных производных, дифференциальные уравнения в пространствах мер.

В ходе выполнения этапа НИР 2021 г. доказаны теоремы существования решений, а также изучены качественные свойства для различных неклассических эволюционных уравнений, в том числе неявных эволюционных включений, включений с возмущениями, заданными неограниченными многозначными отображениями, многозначными операторами с наследственностью и гистерезисными операторами. Получены необходимые и достаточные условия полной и R-управляемости для нестационарной гибридной системы, неразрешенной относительно производной непрерывной составляющей искомой функции. Для интервального семейства ДАУ получена оценка радиуса устойчивости, а также достаточные условия робастной устойчивости. Для двух классов систем со слабой особенностью в ядре (интегро-дифференциальных и интегро-алгебраических уравнений) предложены численные методы решения. Для линейных ДАУ произвольного порядка сформулировано формальное определение особой точки и предложена их классификация. Получены новые версии позиционного принципа минимума для невыпуклых классической и линейно-квадратичной дискретной задачи оптимального управления. Доказана теорема существования решения задачи оптимального управления уравнением баланса (уравнением неразрывности с источником) в пространстве знакопеременных мер. Описано множество решений управляемого процесса выметания, заданного системой из дифференциальных уравнений и дифференциального включения, управляемых мерой (импульсным управлением), и исследован вопрос существования и единственности решения. Разработаны и численно реализованы новые методы решения задачи оптимального управления, ориентированные на поиск локальных экстремумов путем криволинейного варьирования управления, и аппроксимации управляемой динамической системы с постоянным запаздыванием. Выполнено тестирование реализованных алгоритмов на ряде модельных и содержательных задач.

Проект соответствует

- приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в РФ: Транспортные и космические системы;
- критическим технологиям РФ: Технологии информационных, управляющих, навигационных систем (13).

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Целью настоящего исследования является изучение качественных свойств, построение численных методов решения, а также развитие методов теории оптимального управления для трех широких классов динамических систем, а именно:

- эволюционных включений с максимально монотонными операторами,
- интегро-дифференциальных и алгебро-дифференциальных уравнений в частных производных,
- дифференциальных уравнений в пространствах мер.

Эволюционные включения с зависящими от времени максимально-монотонными операторами привлекают к себе внимание широкого круга исследователей как в связи с их многочисленными приложениями, так и из-за наличия большого количества нерешенных проблем в данной области. Их частными случаями являются градиентные потоки, процессы выметания, системы с гистерезисными операторами. Такие включения используются при изучении зернистых материалов, квазистатической упругопластичности, при моделировании движения толпы, в математической экономике, электрических цепях с идеальными диодами. Несмотря на то, что эволюционные включения с максимально монотонными операторами изучаются уже давно, в этой области имеется целый ряд нерешенных проблем. В основном, они связаны с новыми постановками, которые призваны расширить область применимости техники максимально-монотонных операторов. Одна из важнейших задач первого этапа проекта состоит в изучении таких постановок.

Дифференциально-алгебраические системы уравнений (ДАУ) в частных производных описывают состояние пароводяного тракта прямоточного котлоагрегата при сверхкритических параметрах рабочей среды, движение тяжелого волчка с симметричной относительно оси волчка полостью, наполненной жидкостью, возмущения скорости и давления, возникающие на границе раздела двух сред и многие другие процессы. Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, который отражает сложность внутренней структуры системы. Свойства ДАУ существенно отличаются от свойств систем уравнений, разрешенных относительно эволюционного члена, что делает невозможным их исследование методами, ориентированными на системы уравнений в нормальной форме Коши-Ковалевской. Поэтому для исследования ДАУ необходима разработка принципиально новых теоретических подходов. В то же время результаты, полученные для ДАУ, часто обобщают хорошо известные факты из классической теории дифференциальных уравнений, в частности, численные алгоритмы для решения ДАУ в частных производных с кратными нулевыми и бесконечными корнями характеристических уравнений показали свою эффективность и для классических уравнений газовой динамики.

Важное место в теории управления дифференциально-алгебраическими и динамическими системами в целом занимают проблемы робастной управляемости, состоящие в поиске условий управляемости не одной конкретной системы, а целой совокупности систем с заданными ограничениями на их параметры. Здесь основная трудность связана с тем, что при возмущении входных данных может измениться внутренняя структура системы и информация о качественных свойствах невозмущенной системы окажется бесполезной для исследования робастных свойств. Поэтому одной из задач проекта является получение условий, при которых возмущения не меняют внутреннюю структуру номинальной системы.

Динамические системы в пространстве мер обычно возникают как предельные уравнения для мультиагентных систем при стремлении числа агентов к бесконечности. С их помощью исследуются макроскопические свойства больших формаций однотипных микроскопических объектов в ряде областей физики, биологии и социальных наук. Подавляющее большинство имеющихся в данном направлении работ посвящена динамическим системам в пространстве вероятностных мер, для исследования которых в последние годы активно применяется теория градиентных потоков в метрических пространствах. Значительно меньше работ связано с изучением уравнений в пространстве неотрицательных мер. Наконец, динамические системы в пространстве знакопеременных мер, ввиду ряда технических трудностей, являются почти не исследованным объектом, изучение которого является одной из задач первого этапа проекта.

Процессы выметания с решениями ограниченной вариации (BV-решениями) возникают при моделировании многих реальных процессов, связанных с упругопластичностью, размягчением материала вследствие усталости, математической биологией, движением толпы, гистерезисом и др. Разрывные процессы выметания возникают также в математических моделях экономики, социологии и экологии, где с их помощью моделируются гистерезисные нелинейности, возникающие в динамических системах и управлениях с обратной связью. Отметим, что большая часть полученных на сегодняшний день фундаментальных результатов касается непрерывных BV-решений, а результаты для разрывных решений формулируются при жестком предположении непрерывности оператора решения в сильной топологии пространства функций ограниченной вариации. При выполнении данного проекта показано, что классические результаты неприменимы к задачам оптимального управления с управлениями типа меры при наличии гистерезисных нелинейностей, моделируемых процессом выметания. Поэтому было рассмотрено обобщение классического понятия BV-решения, получено описание множества решений, и исследованы вопросы аппроксимации разрывных решений липшицевыми, а также существования и единственности решения.

В части развития методов теории оптимального управления этап этого года был посвящен обобщению позиционного принципа минимума - необходимого условия оптимальности с позиционными управлениями спуска по функционалу - на задачи с ограничениями и на новые классы динамических систем. Мотивировкой этих исследований являются, в частности, хорошие свойства алгоритмичности, необходимые для последующих методов улучшения. Дальнейшие обобщения в этом направлении весьма нетривиальны в силу нарушения для планируемых к изучению систем традиционных свойств типа гладкости, липшицевости, компактности и т.д.

Другая важная проблема состоит в разработке методов решения задач оптимального управления с гистерезисом, которые не удовлетворяют традиционным предположениям липшицевости правой части дифференциального включения, и потому не вкладываются в известные методы принципа максимума Понтрягина и динамического программирования. Задачи являются негладкими и невыпуклыми, причем управления могут быть определены обратной связью с гистерезисной нелинейностью. Ограничения для таких управлений задаются вариационными дифференциальными неравенствами или процессами выметания. Теория оптимального управления для таких задач на сегодняшний день состоит из отдельных результатов для частных случаев, но, судя по публикациям последних лет, начинает активно развиваться.

В отчетном периоде изучались системы с квадратичными импульсами и связанные с ними задачи гиперимпульсного управления, возникающие при моделировании лагранжевых систем, когда изменение части механических координат (обычно координат-скоростей) может быть непосредственно реализовано как заданная функция времени. Иными словами, такие координаты могут рассматриваться как управления, причем профиль последних может оказаться близким к обобщенным функциям типа Дирака. На практике подобного типа воздействия реализуются как быстрые вибрации элементов твердого тела, сохраняющие (почти) неподвижными соответствующие механические координаты, и приводящие к возникновению дополнительных сил (например, центробежных), воздействующих на остальные, подвижные координаты.

В направлении разработки алгоритмов и вычислительных технологий для задач оптимального управления важным вопросом является повышение их эффективности и создание новых, отвечающих современным требованиям и ориентированных на исследование актуальных постановок задач. Возникающие со стороны прикладных наук динамические системы довольно часто характеризуются запаздыванием, появляющимся естественным образом в силу временных затрат на процессы передачи информации или в связи с необходимостью возврата части продукта с целью его повторной переработки. Проведенные с помощью соответствующей тестовой коллекции вычислительные эксперименты позволяют выполнять сравнение новых алгоритмов с существующими, оценивать их предельные свойства и находить модификации алгоритмов, наиболее эффективные для исследуемых классов задач.

Блок I. Качественные свойства и численное решение дифференциальных уравнений

Цели и задачи

Целью данного блока является изучение качественных свойств и построение численных методов решения эволюционных включений с максимально монотонными операторами, интегро-дифференциальных и алгебро-дифференциальных уравнений в частных производных, а также дифференциальных уравнений в пространствах мер. Для ее достижения были поставлены следующие задачи:

ДУ1) Доказательство теорем существования и релаксации для невыпуклых задач оптимального управления, описываемых процессами выметания с мерами, траекториями которых являются непрерывные справа функции ограниченной вариации.

ДУ2) Изучение нелинейной управляемой системы уравнений в частных производных, возникающей при моделировании динамики популяций в рамках модели хищник-жертва-пища для жертвы с учетом гистерезисных явлений, возникающих в данном эволюционном процессе. Доказательство существования решений управляемой системы и исследование их свойств при минимальном наборе ограничений на соответствующую область гистерезиса.

ДУ3) Исследование вопросов существования, единственности, а также непрерывной зависимости от параметров нелокального уравнения баланса в пространстве знакопеременных мер.

ДУ4) Поиск достаточных условий существования единственного гладкого решения системы интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей при старшей производной.

ДУ5) Исследование ДАУ порядка выше первого с особыми точками, разработка методов поиска особых точек и классификация особых точек.

ДУ6) Построение эффективных численных методов для решения многомерных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных.

ДУ7) Построение и исследование предельных дифференциальных включения для механических систем с сухим трением, представленных уравнениями Лагранжа второго рода.

Ниже подробно описаны важнейшие результаты и приведен список всех результатов по проекту с характеристикой их новизны и значимости.

Важнейшие результаты

1. Условия максимальной монотонности многозначного оператора Немыцкого.

Пусть $T = [0, a]$, H — сепарабельное гильбертово пространство. Оператор A называется монотонным, если для любых $(x_i, y_i) \in grA$, $i = 1,2$, имеет место неравенство

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0.$$

Монотонный оператор A называется максимально монотонным, если его график не является собственным подмножеством графика другого монотонного оператора. Обычно для многозначных операторов А с областью определения $D(A)$ используют запись $A: D(A) \subset H \to 2^H$.

Пусть $A(t): D(A(t)) \subset H \to 2^H$, $t \in T$, — семейство максимально монотонных операторов и $L^2(T, H)$ — пространство интегрируемых с квадратом функций из T в H. Рассмотрим оператор

$$F: L^2(T, H) \to 2^{L^2(T,H)},$$

$$Fu = \{v \in L^2(T, H); v(t) \in A(t)u(t) \text{ п. в.}\}, \quad u \in L^2(T, H).$$

Этот оператор мы называем многозначным оператором Немыцкого.

В рамках проекта найдены условия, при которых оператор F является максимально монотонным. Дана конкретизация этих условий применительно к семейству максимально монотонных операторов $A(t)$, $t \in T$, наделенных псевдорасстоянием по Хаусдорфу, к семейству субдифференциальных операторов $\partial\phi^t$, $t \in T$, зависящей от времени собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции $\phi^t: H \to R$ и к семейству нормальных конусов $N_{K(t)}$, $t \in T$, движущегося замкнутого выпуклого множества $K(t) \subset H$. Общие условия максимальной монотонности сформулированы в следующей теореме.

Теорема. Предположим, что семейство $A(t)$, $t \in T$, максимально монотонных операторов обладает следующими свойствами:

(1) семейство $A(t)$, $t \in T$, измеримо;

(2) существует хотя бы один интегрируемый с квадратом селектор отображения $t \mapsto grA(t)$.

Тогда оператор

$$F: D(F) \subset L^2(T,H) \to 2^{L^2(T,H)},$$

$$F(x) = \{y \in L^2(T,H); y(t) \in A(t)x(t) \text{ п.в.}\}, \quad x \in D(F),$$

где

$$D(F) = \{x \in L^2(T,H); x(t) \in D(A(t)) \text{ п.в.} \exists y \in L^2(T,H),\ y(t) \in A(t)x(t) \text{ п.в.}\},$$

является максимально монотонным. (Толстоногов А.А.)

2. Исследование нелокального уравнения баланса в пространстве знакопеременных мер.

Изучены свойства решений семейства нелокальных уравнений баланса (уравнений неразрывности с источником) в пространстве знакопеременных мер с параметром, принимающим значение в метрическом пространстве. Система имеет вид

$$\partial_t \mu_t + \nabla \cdot (V_\lambda(t,\mu_t)\,\mu_t) = G_\lambda(t,\mu_t), \quad \mu_0 = \vartheta, \quad t \in [0,T],$$

где $T > 0$ — фиксированный момент времени, λ — параметр, принимающий значения в метрическом пространстве Λ, ϑ — заданная знакопеременная мера на R^d, $V_\lambda(t,\cdot)$ и $G_\lambda(t,\cdot)$ — параметрические семейства отображений, переводящие знакопеременные меры в векторные поля и в знакопеременные меры, соответственно. При каждом $t \in [0,T]$, μ_t является знакопеременной борелевской мерой на R^d. Типичные примеры отображений V и G:

$$V(\mu)(x) = \int K(x-y)d\mu(y), \quad G(\mu) = g\mu,$$

где $K: R^d \to R^d$, $g: R^d \to R$ — заданные функции.

При достаточно общих предположениях, охватывающий ряд известных содержательных моделей, доказана теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения от параметра и начального распределения. Получены некоторые следствия данной теоремы, полезные для теории управления, в т.ч., построен предел в среднем поле системы обыкновенных дифференциальных уравнений, доказано существование оптимального управления ансамблем траекторий в задаче с общим целевым функционалом типа Больца в классе сосредоточенных (зависящих только от времени) существенного ограниченных управлений, предложено простое доказательство формулы Троттера для произведения полугрупп соответствующих операторов, а также получен результат о существовании решения дифференциального включения в пространстве знакопеременных мер.

Полученные результаты могут применяться в моделировании нелокальных взаимодействий в физических (в частности, квантовых) системах, при описании динамики биологических сообществ и больших скоплений людей. (Погодаев Н.И., Старицын М.В.)

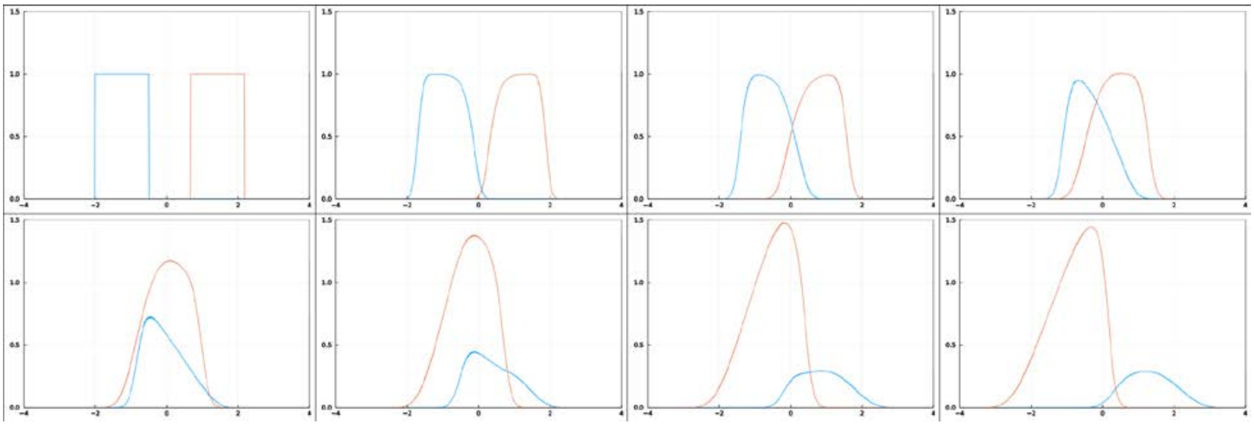

Рисунок 1.1 – Две популяции, движущиеся навстречу друг другу, одна из которых интерферирует в другую. Каждой из популяций присуще внутреннее взаимодействие (движение замедляется с ростом плотности).

3. **Исследование нового класса нелинейных систем интегро-алгебраических уравнений I рода, связанного с задачей автоматического управления техническими объектами с векторными входами и выходами.**

Для таких систем приведены достаточные условия существования единственного достаточно гладкого решения. Изучены специфики выделенных классов уравнений Вольтерра I рода, возникающих при описании нелинейной динамики с помощью аппарата интегро-степенных рядов Вольтерра. Предметная область исследований представлена имитационной моделью элемента теплообменной установки, описывающей изменение энтальпии при произвольных изменениях расхода жидкости и теплоподвода.

Цель исследования – представить решение обратных задач, играющих важную роль в теории автоматического регулирования и связанных с созданием единого подхода моделирования динамических систем типа «вход-выход» с помощью полиномов Вольтерра

$$y(t) = P_N(x(t)) = \sum_{m=1}^{N} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_m \le p} V_{i_1 \ldots i_m}(x(t)) \quad (1)$$

$$V_{i_1 \ldots i_m}(x(t)) = \int_0^t \ldots \int_0^t K_{i_1 \ldots i_m}(t, s_1, \ldots, s_m) \prod_{l=1}^{m} x_{i_l}(s_l) ds_l \qquad (2)$$

где входной сигнал $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))^T$ и выходной $y(t)$ есть функции времени t. В (2) функции $K_{i_1 \ldots i_n}(t, s_1, \ldots, s_m)$ называются ядрами Вольтерра, которые инвариантны относительно замены s_j на s_k при $i_j = i_k$.

Предметная область в данном случае представлена нелинейными динамическими системами, для которых справедливо следующее:

- система не является развивающейся, учитываются только динамические связи типа «вход-выход»;
- связь между входом $x(t)$ и выходом $y(t)$ является однонаправленной, т.е. реакция системы не оказывает опосредованного влияния на вход;
- система на начальный момент времени находится в установившемся режиме;
- допускается проведение активного эксперимента, в том числе тестовых сигналов ступенчатого вида, а также внешнее управление входными воздействиями.

Известные результаты относятся к скалярному случаю, $x(t) \equiv x_i(t)$, $N = 2$, $N = 3$.

В предположении, что построение интегральной модели в виде полинома Вольтерра выполнено, рассмотрим задачу идентификации входных сигналов $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_p(t))^T$, которая редуцируется к решению полиномиальных уравнений Вольтера I рода, где известны ядра Вольтерра K и отклик $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_p(t))^T$. Такая постановка связана с проблемой автоматического регулирования техническими объектами. Теория таких уравнений изучается сравнительно недавно, при этом в научной литературе пока отсутствует их единая терминология. В частности, данные уравнения называются «multilinear Volterra equations», «bilinear integral equations», «multiple integral equations». Мы будем называть рассматриваемые уравнения «полиномиальными», так как N-й член полинома P_N есть N-степенной интегральный оператор.

Теория и численные методы решения полиномиального уравнения (1) для $N = 1$ и $N > 1$ имеют существенные отличия. Ранее были исследованы случаи для $p = 1$, которая при $N > 1$ заключается в локальности решения уравнения в $C_{[0,T]}$, где под локальностью понимается малость правого конца отрезка $[0, T]$. Также способ получения оценок решений некоторых специальных нелинейных интегральных неравенств, играющих для (1) при $N > 1$ ту же роль, что и неравенство Гроноулла-Беллмана для линейного уравнения Вольтерра I рода. На базе кубатурных формул средних прямоугольников ранее были построены численные методы решения полиномиальных уравнений при $N=2$. Дальнейшие исследования были направлены на развитие теории и численных методов решения систем полиномиальных уравнений (1) для $p=2$, $N=2,3$ на основе метода Ньютона-Канторовича, а также практическому использованию разработанных подходов применительно для задачи стабилизации энтальпии $\Delta i(t)$ с помощью формирования управляющего входного воздействия $\Delta D(t)$.

Рассмотрим далее задачу (1), (2) при произвольном конечном значении p и $N=2$, но в отличие от ранее известных результатов, будем предполагать, что входные сигналы $x(t)=(x_1(t),x_2(t),...,x_p(t))^T$ являются неизвестными и, как и ранее, выходные сигналы $y(t)=(y_1(t),y_2(t),...,y_p(t))^T$ и ядра Вольтерра K - заданы. В этом случае мы будем иметь систему интегральных уравнений первого рода вида

$$y(t)=V[Z]=\int_0^t K(t,s_1)x(s_1)ds_1+Z[x], \tag{3}$$

где $K(t,s_1)$ - $(p\times p)$-матрица, $x(t)$ и $y(t)$ - искомая и заданная p-мерные вектор-функции, а оператор $Z[x]$ определены по правилу

$$\begin{gathered}Z[x]=\int_0^t\int_0^t[\sum_{j_1=1}^{p}L^1_{j_1}(t,s_1,s_2)x_1(s_1)x_{j_1}(s_2)+\sum_{j_2=1}^{p}L^2_{j_2}(t,s_1,s_2)x_2(s_1)x_{j_2}(s_2)+\\+\sum_{j_3=3}^{p}L^3_{j_3}(t,s_1,s_2)x_3(s_1)x_{j_3}(s_2)+...+\sum_{j_{p-1}=p-1}^{p}L^{p-1}_{j_{p-1}}(t,s_1,s_2)x_p(s_1)x_{j_{p-1}}(s_2)+\\+L^p_{j_p}(t,s_1,s_2)x_p(s_1)x_{j_p}(s_2)]ds_1ds_2,\end{gathered} \tag{4}$$

где $j_m=\overline{1,m}$. В формуле (4) $L^m_{j_m}(t,s_1,s_2)$ - p-мерные вектор-функции, т.е. $L^m_{j_m}(t,s_1,s_2)=\left(Z^{\ m}_{j_m1}(t,s_1,s_2),Z^{\ m}_{j_m2}(t,s_1,s_2),...,Z^{\ m}_{j_mp}(t,s_1,s_2)\right)^T$, той гладкости, которая необходима для проведения всех выкладок.

Если в (3)

$$\det K(t,t)\neq 0 \quad \forall t\in[0,T], \tag{5}$$

то исследование таких систем на предмет существования единственного решения в различных классах функций проводится по аналогии с интегральными уравнениями Вольтерра первого рода. Для этого достаточно продифференцировать по t систему (3) и переписать полученный результат в виде системы второго рода.

Если же для исходной задачи (3) условие (5) не выполнено, то стандартные подходы не дают желаемого результата – систему второго рода, т.к. после дифференцирования мы будем иметь систему интегральных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Такие задачи имеют принципиальные отличия от систем типа (3) с условием (5). Они наследуют от интегрального уравнения первого рода с условием $K_{t^j}^{(j)}(t,s_1)\big|_{s_1=t} \neq 0$, где j - неотрицательное целое число, неустойчивость к малым возмущениям $y(t)$ в метрике $C_{[0,T]}^j$ и отсутствие решения в классе непрерывных функций при $y^{(m)}(t)\big|_{t=0} \neq 0$, $m = 0,1,\ldots,j$.

Приведены достаточные условия существования непрерывно-дифференцируемого решения системы (3) при нарушении условия (5). Они включают в себя стандартное условие на гладкость входных данных, условия корректного задания $y(0)$ и условия, гарантирующие отсутствие сингулярных точек, через которые может проходить несколько решений, или решение носит разрывной характер. (Булатов М.В.)

4. **Формальное определение особой точки для линейных ДАУ произвольного порядка.**

Предложена классификация особых точек, получены критерии их наличия (отсутствия) на отрезке интегрирования. Показано, что при наличии на отрезке интегрирования особых точек размерность пространства решений однородного ДАУ может быть больше ранга матрицы при старшей производной искомой вектор-функции. В частности, пространство решений для ДАУ

$$\begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix}\dot{x} + x = 0, t \in T = [-1,1] \tag{6}$$

исчерпывается множеством вектор-функций

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X(t)c = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ t\phi_1(t) & t\phi_2(t) \end{pmatrix} c,\ \ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \tag{7}$$

Где $\phi_1(t) = \{0, t \in T_1; t^2, t \in T_2\}$, $\phi_2(t) = \{t^2, t \in T_1; 0, t \in T_2\}$, $T_1 = [-1,0], T_2 = (0,1]$. Для данного ДАУ любая начальная задача $\begin{pmatrix} x_1(\gamma) \\ x_2(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \gamma a \end{pmatrix}, \gamma \in T, a \in \mathbf{R}^1$ имеет бесконечное число решений на T (см. рисунок 1.2). Пусть, например, $\gamma \in T_2, a > 0$. Тогда

$$x_1(t) = \left(\frac{a}{\gamma}\right)^2 \phi_2(t) + c_1\phi_1(t), x_2(t) = tx_1(t), \tag{8}$$

где $c_1 c_1$ – произвольно (Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.)

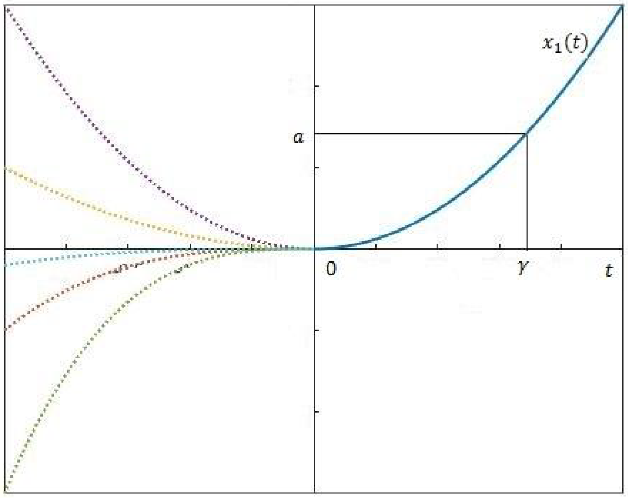

Рисунок 1.2 – Множество решений первой компоненты уравнения (6)

5. Исключение импульсных слагаемых в решении нестационарных дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) с помощью обратной связи.

Рассматривается управляемая линейная система ДАУ с бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами

$$A(t)\frac{\partial}{\partial t}x(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0,$$

$$detA(t) \equiv 0, \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Известно, что решение такой системы в классе обобщенных функций типа Соболева-Шварца представимо в виде суммы регулярной обобщенной функции и линейной комбинации дельта-функции и ее производных

$$x(t) = \{\omega(t)\} + \sum_{j=0}^{l} \gamma_j \left(\frac{d}{dt}\right)^j \delta(t-\tau).$$

Проблема исключения импульсных слагаемых в решениях хорошо изучена в случае стационарных ДАУ с регулярным матричным пучком и для систем с вещественно-аналитическими коэффициентами. При этом установлена связь между свойством импульсной управляемости и возможностью исключения сингулярной части общего решения. Для анализа используются каноническая форма Кронекера-Вейерштрасса и сильная стандартная каноническая форма, построение которых в общем случае является нетривиальной задачей.

В данной работе для систем произвольно высокого индекса неразрешенности с матрицей при производной постоянного ранга

$$rankA(t) = const \quad \forall t \in (-\infty, +\infty)$$

получены необходимые и достаточные условия существования позиционного управления

$$u(t) = F(t)x(t)$$

такого, что решение замкнутой системы не содержит сингулярных обобщенных функций. Показано, что эти условия равносильны наличию у системы свойства импульсной управляемости.

Аналогичная задача решена для систем с матрицами коэффициентов переменного ранга. Управление, исключающее импульсные слагаемые в решении ДАУ, строится в виде линейной комбинации компонент вектор-функции состояния системы и ее производной

$$u(t) = F_0(t)x(t) + F_1(t)\frac{d}{dt}x(t).$$

Получены достаточные условия существования такого управления и указаны способы его построения. Первый подход основан на приведении системы к так называемой расщепленной структурной форме. Другой способ построения искомой обратной связи опирается на использование свойств линейного дифференциального оператора

$$R = \sum_{j=0}^{r} \quad R_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

действие которого переводит рассматриваемую систему в ДАУ с разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами

$$J_2(t)x_1(t) + x_2(t) + U_1(t)colon(u(t), \frac{d}{dt}u(t), \ldots, \left(\frac{d}{dt}\right)^r)u(t) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}x_1(t) + J_1(t)x_1(t) + U_2(t)colon(u(t), \frac{d}{dt}u(t), \ldots, \left(\frac{d}{dt}\right)^r)u(t) = 0,$$

$colon\big(\, x_1(t), x_2(t)\big) = Qx(t),\ Q$ – матрица перестановок строк.

В частности, искомое управление построено для системы, оператор которой имеет нулевое ядро. Преимуществом второго подхода является его конструктивность. (Щеглова А.А.)

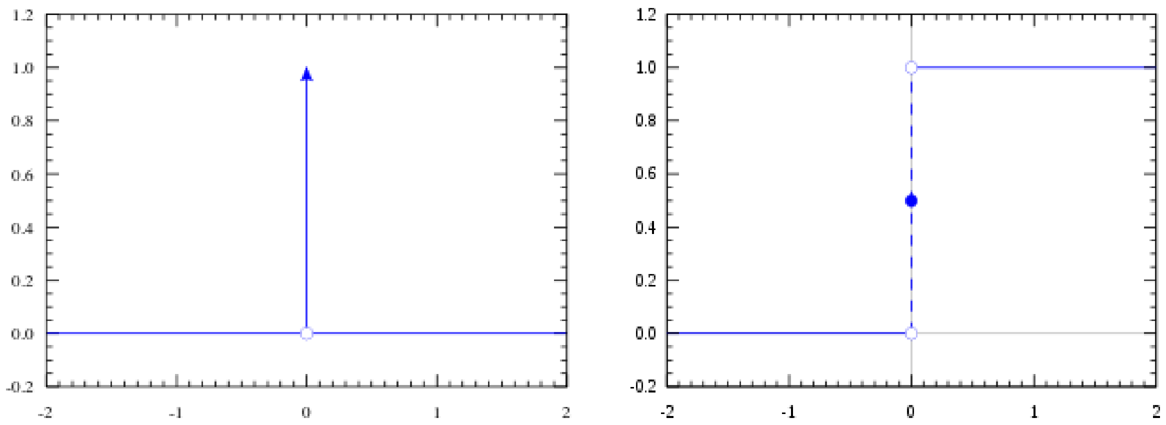

Рисунок 1.3 – Дельта-функция Дирака $\delta(t)$ (слева), Функция Хевисайда $\theta(t)$ (справа)

Все результаты

1. Рассмотрена управляемая система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с невыпуклым и зависящим от фазовых переменных ограничением на управление. Данная система моделирует динамику популяций в рамках процесса типа «хищник-жертва-пища для жертвы» с учетом диффузионных и гистерезисных эффектов, возникающих в процессе. Доказано существование решения системы и установлено, что решения системы близки в определенном смысле к решениям соответствующей системы с выпуклым ограничением на управление. (Тимошин С.А.)

2. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается эволюционное включение, правая часть которого содержит субдифференциал зависящей от времени собственной, выпуклой, полунепрерывной снизу функции и многозначное возмущение. Значениями возмущения являются замкнутые, не обязательно выпуклые множества. Субдифференциал, входящий в правую часть включения, вычисляется не в точках значений решений, а на значениях функции, переменными у которой являются как значения решения, так и значения его производной. Такие включения называют неявными. Доказана теорема существования решения. Когда возмущение является однозначной функцией, то при естественных предположениях решение является единственным. Выведено обыкновенное явное дифференциальное включение, множество решений которого совпадает с множеством решений исходного неявного эволюционного включения. Как следствие получены теоремы существования решений неявных выпуклых процессов выметания с невыпуклозначными возмущениями. Для неявных эволюционных включений субдифференциального типа результаты являются новыми и не имеют аналогов. Для неявных процессов выметания полученные результаты обобщают известные. (Тимошин С.А., Толстоногов А.А.)

3. На пространстве непрерывных функций из отрезка числовой прямой со значениями в рефлексивном банаховом пространстве рассматривается оператор, значениями которого являются замкнутые выпуклые подмножества этого пространства. Когда значениями оператора являются одноточечные множества, он превращается в хорошо известный однозначный оператор с наследственностью. Изучаются свойства этого оператора. Доказывается теорема о неподвижной точке, являющаяся аналогом теоремы о неподвижной точке для однозначного оператора с наследственностью. Приводятся примеры. Полученные результаты используются для изучения неразрешенных относительно производных эволюционных включений с максимально монотонными операторами и с возмущениями в гильбертовом пространстве. Этими возмущениями являются однозначные и многозначные операторы с наследственностью. (Толстоногов А.А.)

4. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается семейство максимально монотонных операторов с областями определения, зависящими на отрезке числовой прямой от времени. Рассматривается также пространство интегрируемых с квадратом функций, определенных на этом отрезке, со значениями в указанном гильбертовом пространстве. Исходя из семейства максимально монотонных операторов, на пространстве интегрируемых с квадратом функций строится оператор суперпозиции — оператор Немыцкого. При достаточно общих предположениях доказывается максимальная монотонность оператора Немыцкого. Дается конкретизация этого результата применительно: к семейству максимально монотонных операторов, наделенных псевдорасстоянием по А. А. Владимирову; к семейству субдифференциальных операторов, порожденных собственной выпуклой зависящей от времени полунепрерывной снизу функцией; к семейству нормальных конусов движущегося выпуклого замкнутого множества. (Толстоногов А.А.)

5. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривался измеримый процесс выметания со смешанным возмущением при следующих предположениях. Движущееся множество, генерирующее процесс, является замкнутым и выпуклым, а ретракция процесса выметания ограничена некоторой положительной мерой Радона. Рассматривалось возмущение, представленное в виде суммы двух многозначных отображений. Значения первого из них - замкнутые, ограниченные, не обязательно выпуклые множества. Само многозначное отображение удовлетворяет стандартному условию роста, измеримо по временной и липшецево по пространственной переменной. Значения второго многозначного отображения являются замкнутыми, выпуклыми, не обязательно ограниченными множествами. Само это отображение имеет замкнутый по

фазовой переменной график. Оставшиеся условия связаны со свойствами пересечения второго отображения и многозначного отображения, определенного условиями роста. Предполагается, что это пересечение имеет измеримый селектор с определенными свойствами компактности. Было доказано существование решения такого включения. Доказательство основано на принадлежащей автору теореме о непрерывных по параметру селекторах, проходящих через неподвижные точки сжимающих многозначных отображения с замкнутыми, невыпуклыми, разложимыми значениями, а также на классической теореме Ки-Фана. (Толстоногов А.А.)

6. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривалось эволюционное включение, правая часть которого содержит зависящий от времени максимально монотонный оператор и многозначное отображение с замкнутыми невыпуклыми значениями. Зависимость максимально монотонного оператора от времени описывается с помощью расстояния между максимально монотонными операторами по Владимирову. Это расстояние, как функция времени, имеет ограниченную вариацию с верхней границей, задаваемой неатомической положительной мерой Радона. Под решением включения понимается непрерывная функция ограниченной вариации, чья обобщенная производная (мера Стилтьеса) абсолютно непрерывна относительно упомянутой выше положительной меры Радона, а значения соответствующей функции плотности принадлежат правой части включения почти всюду. При традиционных предположениях о возмущении (измеримость, липшицевость по фазовой переменной в метрике Хаусдорфа, условие подлинейного роста) доказано существование решений, а также установлены некоторые свойства множества решений. (Толстоногов А.А.)

7. В сепарабельном гильбертовом пространстве рассматривается выпуклый процесс выметания. В большинстве работ, посвященных процессам выметания для описания движения выпуклого множества, генерирующего процесс, используется метрика Хаусдорфа. Однако для неограниченных множеств использование этой метрики не всегда гарантирует выполнение условий существования решений. В связи с этим нами было предложено использовать вместо метрики Хаусдорфа полуотклонения множеств. Эти полуотклонения подчинены положительной мере Радона. Доказано существование непрерывных справа BV решений и изучена их зависимость от зависящего от времени возмущения. Полученные результаты использованы для доказательства теорем существования и релаксации для экстремальных непрерывных справа BV решений процесса выметания с многозначным возмущением. Как следствия получены некоторые результаты, касающиеся абсолютно непрерывных решений. (Толстоногов А.А.)

8. Изучается параметрическое семейство нелокальных уравнений баланса в пространстве знакопеременных мер. В предположениях, охватывающих ряд известных содержательных моделей, доказана теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения от параметра и начального распределения. Обсуждаются некоторые следствия данной теоремы, полезные для теории управления, в том числе предел в среднем поле системы обыкновенных дифференциальных уравнений, формула Троттера для произведения полугрупп соответствующих операторов, а также существование решения дифференциального включения в пространстве знакопеременных мер. (Погодаев Н.И., Старицын М.В.)

9. Рассматривается управляемая линейная система ДАУ с бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами. Известно, что решение такой системы в классе обобщенных функций типа Соболева-Шварца представимо в виде суммы регулярной обобщенной функции и линейной комбинации дельта-функции и ее производных. Для систем произвольно высокого индекса неразрешенности с матрицей при производной постоянного ранга получены необходимые и достаточные условия существования позиционного управления такого, что решение замкнутой системы не содержит сингулярных обобщенных функций. Показано, что эти условия равносильны наличию у системы свойства импульсной управляемости. Аналогичная задача решена для систем с матрицами коэффициентов переменного ранга. Управление, исключающее импульсные слагаемые в решении ДАУ, строится в виде линейной комбинации компонент вектор-функции состояния системы и ее производной. Получены достаточные условия существования такого управления и указаны способы его построения. Первый подход основан на приведении системы к так называемой расщепленной структурной форме. Другой способ построения искомой обратной связи опирается на использование свойств линейного дифференциального оператора, действие которого переводит рассматриваемую систему в ДАУ с разделенными дифференциальной и алгебраической подсистемами. В частности, искомое управление построено для системы, оператор которой имеет нулевое ядро. (Щеглова А.А.)

10. Рассматривается интервальное семейство ДАУ в предположениях, гарантирующих совпадение структуры общего решения каждой из систем рассматриваемого семейства со структурой общего решения номинальной системы. Анализ базируется на преобразовании интервального семейства ДАУ к виду с разделенными дифференциальной и алгебраической составляющими. Такое преобразование включает в себя обращение интервальной матрицы. Получены условия, позволяющие оценить норму обратной интервальной матрицы. В предположении

сверхустойчивости дифференциальной подсистемы номинальных ДАУ найдена оценка радиуса устойчивости. Получены достаточные условия робастной устойчивости на основе условия сверхустойчивости дифференциальной части интервального семейства. (Щеглова А.А.)

11. Рассмотрена начально-краевая задача для линейной многомерной дифференциально-алгебраической системы. Записана сплайн-коллокационная разностная схема. При определенных условиях на структуру многопараметрического матричного пучка, построенного по коэффициентам системы, доказана безусловная устойчивость разностной схемы. Построена четырехточечная локально-одномерная разностная схема первого порядка аппроксимации по времени и второго порядка по пространственным переменным. В конечномерном гильбертовом пространстве сеточных вектор-функций получены достаточные условия равномерной ограниченности сеточного решения по начально-краевым условиям и правой части при условии гладкой эквивалентности двухпараметрических матричных пучков расщепленной системы в канонической форме пучка, удовлетворяющего двойному критерию «ранг-степень». (Свинина С.В.)

12. Рассмотрена нестационарная гибридная (дискретно-непрерывная) система, неразрешенная относительно производной непрерывной составляющей искомой функции. Анализ работы существенным образом опирается на методику исследования вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и проводится в предположении существования эквивалентной структурной формы. Данная структурная форма эквивалентна исходной системе в смысле совпадения множеств решений, а преобразующий к ней оператор обладает левым обратным. Построение структурной формы носит конструктивный характер и не использует замену переменных, при этом автоматически решается проблема согласования начальных данных. Получены необходимые и достаточные условия полной и R-управляемости (управляемости в пределах множества достижимости). (Петренко П.С.)

13. Выделен новый класс нелинейных систем интегро-алгебраических уравнений первого рода, связанный с задачей автоматического управления техническими объектами с векторными входами и выходами. Для таких систем даны достаточные условия существования единственного достаточно гладкого решения (Булатов М.В., Солодуша С.В.).

14. На основе теории матричных пучков проанализированы условия существования и единственности решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений со слабой особенностью в ядре и предложен численный метод их решения (Чистякова Е.В., Соловарова Л.С., Сон Т.Д.).

15. Предложены и обоснованы k-шаговые методы решения систем интегральных уравнений типа Вольтерра первого и второго рода со слабой степенной особенностью ядер в нижнем пределе интегрирования. Предлагаемые методы основаны на экстраполяционных формулах для главной части, многошаговых методах типа Адамса и формуле интегрирования произведений для интегрального члена (Булатов М.В., Будникова О.С., Ботороева М.Н., Орлов С.С.).

16. Сформулировано формальное определение особой точки для линейных ДАУ произвольного порядка. Предложена классификация особых точек, получены критерии их наличия (отсутствия) на отрезке интегрирования (Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.).

17. Для численного решения линейных ДАУ первого порядка с особыми точками на отрезке интегрирования разработан вариант метода наименьших квадратов; предварительные численные эксперименты на модельных примерах подтвердили его работоспособность в решении такого рода задач (Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.).

Оценка результатов

Результаты №№ 1-7 распространяют классическую теорию эволюционных дифференциальных уравнений с максимально монотонными операторами на целый ряд новых постановок. Разработаны оригинальные методы, позволяющие изучать неявные эволюционные включения с субдифференциальными операторами, работать с возмущениями, заданными неограниченными многозначными отображениями и многозначными операторами с наследственностью, исследовать задачи, допускающие не только стандартные абсолютно непрерывные решения, но и разрывные решения, имеющие ограниченную вариацию. В основе этих методов лежат чрезвычайно общие теоремы о непрерывных селекторах, которые, в частности, позволяют строить непрерывные отображения, проходящие через неподвижные точки параметризованного семейства сжимающих многозначных отображений с замкнутыми, невыпуклыми, разложимыми значениями.

Почти все существующие работы, связанные с изучением нелокальных уравнений баланса, ограничиваются распределениями, задаваемыми неотрицательными мерами. Во многом это связано с тем, что на пространстве неотрицательных мер можно определить формальную риманову структуру, в которой целый ряд уравнений приобретает вид “градиентных потоков” геодезически выпуклых функционалов. На пространстве знакопеременных мер ввести такую структуру, по-видимому, нельзя. С другой стороны, пространство знакопеременных мер всегда можно снабдить классической метрикой Канторовича–Рубинштейна. Тогда, в предположении липшицевости нелокальных операторов относительно этой метрики, появляется возможность изучать уравнения баланса, применяя топологическую технику, сходную с той, что используется в классической теории дифференциальных уравнений. Теоремы о существовании и единственности нелокальных уравнений баланса (результат № 8) получены именно в рамках этого подхода.

Результат № 9 посвящен проблеме исключения импульсных слагаемых из общего решения системы ДАУ, которая хорошо изучена в стационарном случае. Для систем с гладкими (в том числе бесконечно-дифференцируемыми) коэффициентами на настоящий момент не известны структурные формы, предоставляющие достаточно детальную информацию о внутренней структуре ДАУ для того, чтобы можно было установить связь между преобразованием системы в систему, не обладающую импульсным поведением, и импульсной управляемостью. Исследование систем, у которых матрица при производной имеет постоянный ранг, и ДАУ с матричными коэффициентами переменного ранга требует принципиально различных подходов. Поэтому, если в первом случае управление можно строить в виде обычной обратной связи, то во втором случае это невозможно. Для таких систем управление включает в себя не только компоненты состояния системы, но и его производной. Преимуществом использованного подхода является его конструктивность.

Анализ робастной устойчивости (результат № 10) в случае систем ДАУ существенно сложнее, чем для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных. Это связано с тем, что даже в простейшем случае индекса один сколь угодно малое возмущение коэффициентов может привести к изменению внутренней структуры системы. Свойство сверхустойчивости позволяет получить простое или явное представление для радиуса робастной устойчивости. Преимуществом этого результата является то, что использованные предположения не накладывают ограничений на внутреннюю структуру номинальных ДАУ, ориентированы на системы произвольного индекса с возмущениями, присутствующими во всех матричных коэффициентах. Полученные условия робастной устойчивости носят конструктивный характер и несложны для практической проверки.

Результаты (№№ 14, 15), связанные с решением интегро-дифференциальных и интегро-алгебраических уравнений, получены путем исследования матричных полиномов. Матрица перед главной частью вырождена, а это означает, что система одновременно содержит уравнения Вольтерра первого и второго рода, обыкновенные дифференциальные уравнения и алгебраические связи. Алгоритмы численного решения таких систем при корректно заданных начальных условиях практически не развиты. Методы решения уравнений Вольтерра первого рода к настоящему времени обоснованы только для некоторых частных случаев, например, для линейных уравнений с ядром, которое не обращается в нуль на диагонали для всех точек из отрезка определения. Следствием этого являются трудности в выборе численного метода, который бы дал удовлетворительные результаты для уравнений Вольтерра и первого и второго рода. Такие задачи становятся еще более сложными, если ядро интегральной системы содержит слабую особенность. Для интегро-алгебраических уравнений со слабой степенной особенностью ядер в нижнем пределе интегрирования разработаны и обоснованы k-шаговые методы решения. Для интегро-дифференциальных уравнений со слабой особенностью в ядре предложен и протестирован на модельных примерах численный метод первого порядка.

На сегодняшний день получение результатов, касающихся наличия особых точек у различных классов ДАУ по-прежнему актуально. К достоинствам полученных результатов (№№ 16, 17) можно отнести простоту их проверки. Для получения условий проверки наличия особых точек для линейных ДАУ высокого порядка был использован следующий подход. Было формализовано само понятие особой точки для ДАУ с помощью левого регуляризующего оператора и предложено их разделение на две принципиально разные категории: дифференциальные и алгебраические. Было установлено, что в алгебраических особых точках решение исследуемой задачи терпит разрыв второго рода. Наличие дифференциальных особых точке в области определения означает, что решение имеет разрывы первого рода. Предложенный вариант метода наименьших квадратов показал хорошую работоспособность при решении ДАУ с алгебраическими особыми точками.

Блок II. Аналитические и численные методы оптимального управления

Цели и задачи

Блок посвящен исследованию вопросов релаксации задач оптимального управления, в том числе, изучению импульсных и гиперимпульсных управлений, поиску необходимых условий оптимальности, как классических, так и новых конструктивных условий, усиливающих принцип максимума Понтрягина, а также построению численных методов решения задач оптимального управления. Для достижения этих целей были поставлены следующие задачи.

ОУ1) Разработка итерационного метода решения обобщенно-квадратичных невыпуклых задач оптимального управления (с управляемыми матрицами при состоянии), базирующегося на прямом и двойственном позиционном принципе минимума.

ОУ2) Распространение позиционного принципа минимума на классические задачи оптимального управления с терминальными ограничениями: полувогнутая и Моро-Иосиды аппроксимация негладкого штрафного функционала с предельным переходом.

ОУ3) Математическая постановка задачи оптимального управления разрывными процессами выметания, описание через вспомогательную задачу (пространственно-временное представление разрывных процессов выметания) и обоснование эквивалентности задач.

ОУ4) Преобразование задачи управления гиперимпульсными системами с линейным функционалом типа Майера к модели с ограниченными управлениями и терминальным ограничением. Доказательство прямого и двойственного позиционного принципа минимума для преобразованной задачи.

ОУ5) Изучение задачи управления ансамблями траекторий с помощью измеримых ограниченных сигналов. Описание подходящего класса решений динамических систем в пространстве мер с позиционными воздействиями, зависящими от меры. Разработка алгоритма типа пристрелки и итеративных методов, использующих структуру опорного решения.

ОУ6) Разработка методики численного решения для задачи аппроксимации управляемой системы с постоянным запаздыванием. Построение численных методов решения задач оптимального управления, основанных на криволинейном варьировании управления и ориентированных на поиск локальных экстремумов.

Важнейшие результаты

1. Необходимое условие оптимальности в форме общего позиционного принципа минимума в классической задаче оптимального управления порождается любой опорной мажорантой исследуемого процесса. Тем самым возникает бесчисленное семейство позиционных принципов минимума (а следовательно, и принципов максимума Понтрягина), различающихся котраекториями процесса в силу неоднозначности порождающих его (совместимых по траектории) управлений. Этот результат обобщает и усиливает позиционный принцип минимума с квазилинейной опорной мажорантой и охватывает случай обобщенного исследуемого управления типа Гамкрелидзе. (Дыхта В.А.)

2. Представление решений BV-процесса выметания.

Описано множество решений управляемого процесса выметания, заданного системой, состоящей из дифференциального уравнения и дифференциального включения, управляемых мерой (импульсным управлением). Многозначное отображение, задающее движущееся множество процесса выметания, зависит от выбора управляющей меры и имеет ограниченную полную вариацию относительно метрики Хаусдорфа. Процесс выметания задан в конечномерном пространстве, его решения принадлежат пространству пополнений графиков функций ограниченной вариации. Доказана теорема существования и единственности решения при заданном импульсном управлении. Реализована численная схема нахождения решения разрывного процесса выметания.

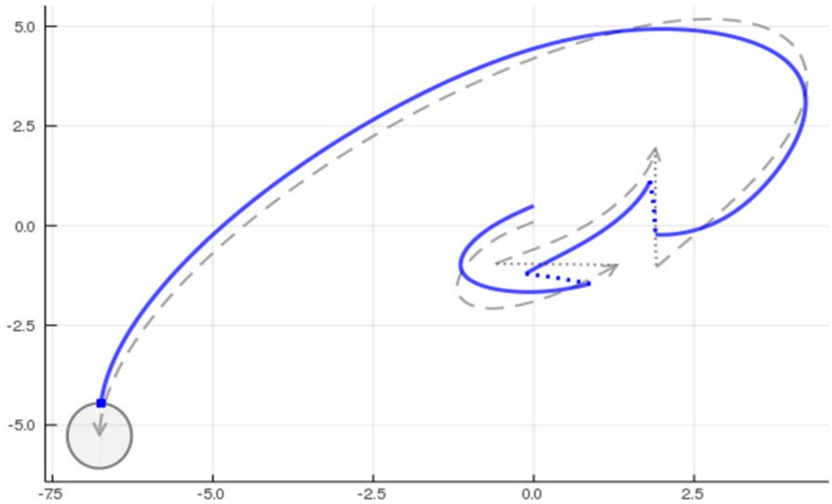

Рисунок 2.1. – Численное построение решения процесса выметания, соответствующего заданному импульсному управлению

Этот результат получен для управляемых процессов выметания с движущимся множеством специального вида и, в частности, для процессов импульсной управляемой системы с гистерезисной нелинейностью, заданной векторным play оператором (гистерезис типа люфт). Методы качественного и численного анализа таких процессов разработаны на сегодняшний день недостаточно и мало представлены в литературе. В основе полученных результатов лежит оригинальный подход к исследованию разрывных процессов выметания, опирающийся на расширение классического понятия решения ограниченной вариации (BV-решения) и анализ отдельных пополнений графиков BV-функций. Используемый подход позволяет дать корректное определение разрывного решения и обосновать существование и единственность решения. Особый интерес представляет предложенный численный метод нахождения решения, основанный на сочетании модифицированного «catching-up» алгоритма и метода Эйлера с пересчетом. (Самсонюк О.Н.)

3. Метод решения задачи оптимального управления, основанный на криволинейном варьировании управления и локальной аппроксимации множества достижимости.

Метод основан на том, что на каждой итерации, используя антиградиент функционала и одну случайно сгенерированную пробную точку – вспомогательное управление, строится кривая в многомерном пространстве, минимум вдоль которой ищется локальным методом одномерного поиска. Алгоритм реализован на языке C/C++ с использованием технологии параллельного программирования NVIDIA CUDA. Вычислительные эксперименты с алгоритмом проводились на различных вычислительных системах, имеющих в своем составе ускорители NVIDIA GeForce 1060, GeForce 1070 и GeForce 2080 Ti. Результаты, полученные в режиме одинарной точности, продемонстрировали значительное ускорение расчётов. В качестве примера приведем решение модельной задачи оптимального управления с тремя фазовыми переменными. Динамика процесса определяется системой

$$\dot{x}_1 = \sin x_2,\ \dot{x}_2 = \sin x_3,\ \dot{x}_3 = \sin x_1 + u,$$
$$t \in [0, 17],\ x(0) = (1, 0, 0),\ 0 \le u(t) \le 0.1.$$

Задача заключается в минимизации $I(u) = (x_1(17) - 2)^2 + (x_2(17) + 1.8)$.

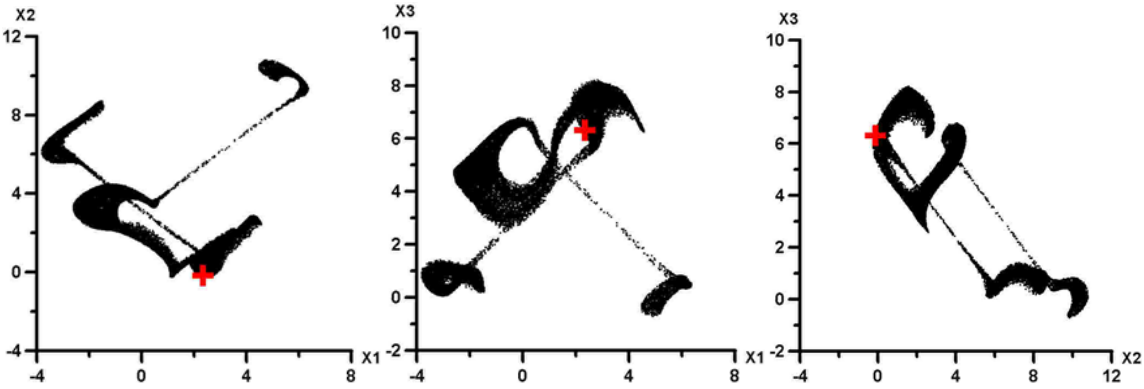

Рисунок 2.2. – Проекции множества достижимости рассмотренной системы на плоскости

На рисунке 2.2 приведены проекции множества достижимости системы на плоскости первой–второй, первой–третьей и второй–третьей фазовых переменных; проекции оптимальной траектории в конечный момент времени обозначены красным маркером (Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Аникин А.С., Сороковиков П.С., Тятюшкин А.И.)

Все результаты

1. Для невыпуклой линейно-квадратичной задачи оптимизации в дискретной динамической системе получено необходимое условие оптимальности с позиционными управлениями спуска по функционалу. Вспомогательные позиционные управления, потенциально обеспечивающие улучшение неоптимальных управлений, порождаются квадратичными мажорантами целевой функции, обладающими свойством слабого убывания, т.е. для каждой из них существует хотя бы одна траектория динамической системы, вдоль которой мажоранта не возрастает. В отличие от дискретного принципа максимума полученное условие не требует выпуклости задачи. (Сорокин С.П.)

2. Для задачи управления ансамблями траекторий со специального вида терминальным ограничением получен следующий набор результатов: описан класс решений динамических систем в пространствах мер с позиционными воздействиями, зависящими от меры-состояния по типу конструктивных движений Красовского-Субботина; разработан итеративный метод приближенного решения задачи, использующий структуру известного, опорного решения. (Гончарова Е.В., Погодаев Н.И., Старицын М.В.)

3. Доказана теорема о существовании решения задачи оптимального управления уравнением баланса (уравнением неразрывности с источником) в пространстве знакопеременных мер с общим целевым функционалом типа Больца в классе сосредоточенных (зависящих только от времени) существенно ограниченных управлений. Результат получен для случая нелокального векторного поля и нелинейного источника при довольно слабых предположениях регулярности (в частности, без предположения компактности носителей мер-состояний). (Погодаев Н.И., Старицын М.В.)

4. Поставлена и изучена задача оптимального управления бесконечным ансамблем траекторий с квадратичными импульсными воздействиями. Подобные модели возникают при описании «гиперимпульсных» вибраций в механических системах с активными фазовыми ограничениями при наличии неопределенности и/или возмущений вероятностного типа. Исследуемая экстремальная задача сводится к проблеме управления локальным уравнением неразрывности в пространстве вероятностных мер со специального вида импульсной характеристической системой, допускающей разрывные решения ограниченной вариации. Для последней, с помощью разрывной замены времени и мер Янга получено новое «пространственно-временное» представление в форме линейной по управлению обыкновенной управляемой системы. Доказано существование решения результирующей задачи оптимального импульсного управления. (Гончарова Е.В.)

5. Рассмотрена задача оптимального импульсного управления с промежуточными фазовыми ограничениями. Представлена гибридная задача с управляющими параметрами, которая дает эквивалентное описание такой задачи оптимального импульсного управления. Рассмотрен вариант численного решения гибридной задачи, основанный на прямом коллокационном методе, и представлена схема соответствующих численных расчетов для тестового примера. (Малтугуева Н.С., Погодаев Н.И., Самсонюк О.Н.)

6. Разработана методика численного решения задачи аппроксимации управляемой системы с постоянным запаздыванием, в рамках которой предложена технология редукции управляемой системы с запаздыванием к задаче оптимального управления для системы в нормальной форме Коши, основанная на «методе шагов». Технология предполагает «вертикальную развертку» системы: для каждого временного шага формулируется свой экземпляр системы без отклонения аргумента, число которых соответствует числу шагов в исходной системе с запаздыванием. Координация подсистем, соответствующих различным шагам, выполняется путем формирования точечных условий

на траектории, позволяющих «склеить» конечный фазовый вектор предыдущей системы с начальным фазовым вектором последующей. Для численного решения сформированной задачи оптимального управления используется программный комплекс OPTCON.

В качестве примера рассмотрена модификация управляемой системы для задачи стабилизации нелинейного маятника:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\, \dot{x}_2(t) = -\sin\big(x_1(t-\tau)\big),$$
$$\tau = 3,\, t \in [0, 9].$$

Управление системой выполняется путем вариации начального условия для x_1:

$$x_1(t) = u(t),\, t \in [-3, 0].\, x_1(0) = 5,\, x_2(0) = 0.$$

Целью управления, как и в исходной модельной задаче, является стабилизация системы: $\min(x_1^2(9) + x_2^2(9))$. В результате оптимизации достигнуто следующее значение целевого функционала – 12.3678. Траектории найденного решения приведены рисунках 2.3–2.8, полученное управляющее воздействие представлено на рисунке 2.9.

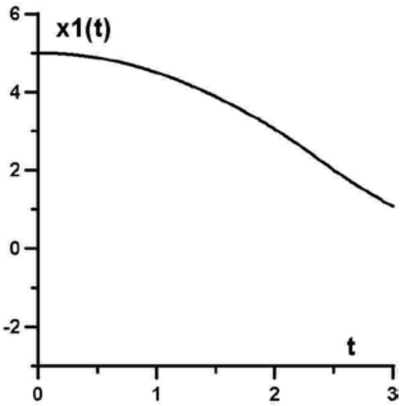

Рисунок 2.3 – $x_1(t)$, $t \in [0, 3]$

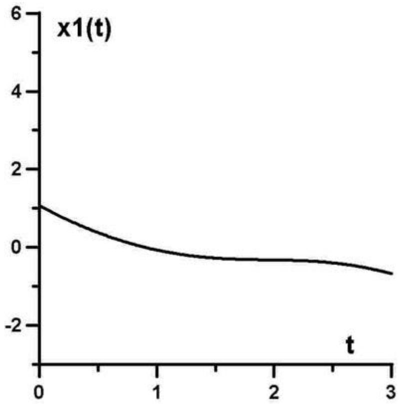

Рисунок 2.4 – $x_1(t)$, $t \in [3, 6]$

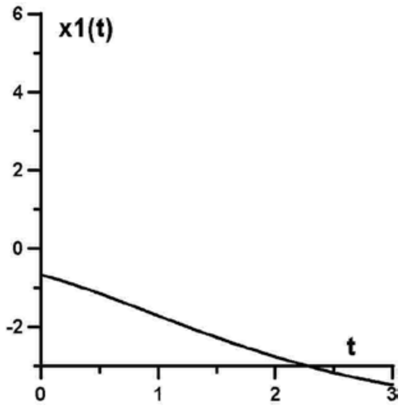

Рисунок 2.5 – $x_1(t)$, $t \in [6, 9]$

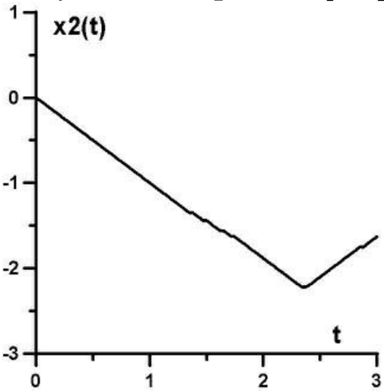

Рисунок 2.6 – $x_2(t)$, $t \in [0, 3]$

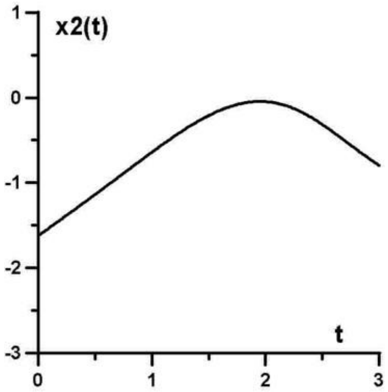

Рисунок 2.7 – $x_2(t)$, $t \in [3, 6]$

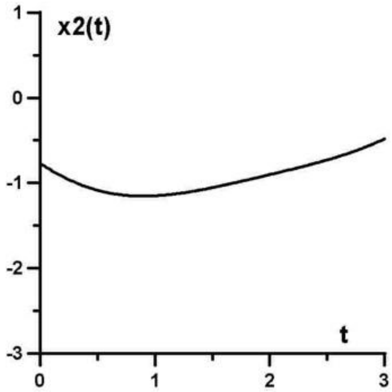

Рисунок 2.8 – $x_2(t)$, $t \in [6, 9]$

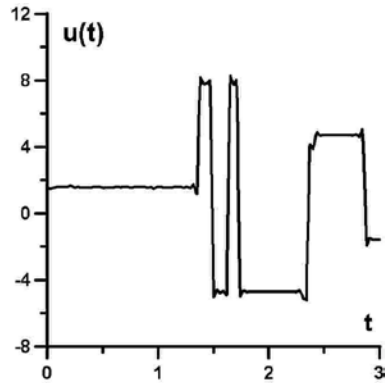

Рисунок 2.9 – Управление $u(t),\, t \in [-3, 0]$

На графиках 2.3–2.5 представлены оптимальные компоненты траектории, полученные для трех экземпляров системы, соответствующих трем временным этапам. (Зароднюк Т.С., Горнов А.Ю., Тятюшкин А.И.)

7. Разработаны многометодные алгоритмы для решения сложных прикладных задач оптимального управления, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений, в правые части которых входят как управляющие функции, так и параметры. (Тятюшкин А.И.)

Оценка результатов

Запланированные результаты были получены. Все результаты являются новыми и соответствуют целям проекта.

Результаты по разработке позиционных условий оптимальности лежат в русле исследований, посвященных развитию теории уравнения и неравенств Гамильтона-Якоби в оптимальном управлении. Применение так называемых супер-решений уравнения Гамильтона-Якоби, обладающих свойством слабой монотонности относительно управляемой системы, позволяет получать оценки целевых функционалов задач динамической оптимизации и необходимые условия глобальной оптимальности в них. Установленные результаты развивают этот подход на новые, нелинейные и невыпуклые постановки задач. Нужно заметить, что полученные ответы естественным образом открывают путь к разработке алгоритмов (в том числе, численных) решения соответствующих задач.

Задача управления бесконечным ансамблем траекторий с нелинейными импульсами ставится впервые. Результаты в этом направлении представляют интерес для исследования прикладных задач, возникающих при моделировании механических систем в условиях неопределенности и возмущения начальных данных (или же при наличии случайных параметров), что актуально, например, в робототехнике.

Поставленная задача оптимального управления нелокальным уравнением баланса в пространстве знакопеременных мер обобщает известные постановки задач управления бесконечными ансамблями траекторий и охватывает ряд прикладных моделей из математической биологии и логистики.

При получении результата 5 известное описание импульсных процессов через вспомогательную управляемую систему было дополнено оригинальной схемой представления решений импульсной системы. Это позволило записать исходную задачу как эквивалентную гибридную задачу оптимального управления мультипроцессами. Отметим, что гибридная задача была получена без привлечения дополнительных предположений относительно количества и местоположений точек скачка траектории. Полученная гибридная задача имеет самостоятельное значение и в дальнейшем будет использована при доказательстве условий оптимальности. В отчетном периоде для этой задачи были протестированы несколько известных методов численного решения, а также предложен и реализован оригинальный алгоритм, основанный на прямом коллокационном методе.

Реализованная технология решения задач оптимизации в системах с постоянным запаздыванием, алгоритм криволинейного варьирования управления для локальной аппроксимации множества достижимости и многометодная технология исследования задач оптимального управления показали свою работоспособность в рамках серии вычислительных экспериментов. Программные реализации предложенных методов протестированы с использованием задач динамической оптимизации, как модельных, так и содержательных. Тестирование реализовано на ряде вычислительных систем, в том числе, высокопроизводительных. Проведены сравнения с доступными программными технологиями оптимизации, в том числе, зарубежными. Для тестирования использовались как известные модельные задачи, так и прикладные задачи из нескольких научно-технических областей. Проведенные вычислительные эксперименты и сравнения позволили продемонстрировать эффективность предложенных алгоритмов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что все исследования в рамках НИР выполнены в соответствии с государственным заданием ИДСТУ СО РАН на 2021-2025 гг. по теме «Теория и методы исследования эволюционных уравнений и управляемых систем с их приложениями». Содержание НИР раскрыто в Планах научно-исследовательских работ ИДСТУ СО РАН на 2021-2025 годы.

Все задачи, поставленные на этапе НИР 2021 г., решены в полном объеме, опубликовано 24 статьи в российских и зарубежных изданиях, включенных в международные базы цитирования Web of Science [1, 2, 4-10, 12, 15-18, 20, 22, 29] и Scopus [23-25, 30-33]; 9 статей в изданиях, включенных в базу данных РИНЦ [11, 14, 19, 21, 34, 35]. Общее количество подготовленных по результатам этапа НИР 2021 г. публикаций – 83, из них в журналах – 41.

В рамках проекта получены следующие результаты:

Доказаны теоремы существования решений, а также изучены качественные свойства для различных неклассических эволюционных уравнений, в том числе неявных эволюционных включений, включений с возмущениями, заданными неограниченными многозначными отображениями, многозначными операторами с наследственностью и гистерезисными операторами [1-11].

Доказана теорема о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения от параметра и начального распределения для нелокального уравнения баланса в пространстве знакопеременных мер [22].

Построена сплайн-коллокационная разностная схема численного решения начально-краевой задачи для линейной многомерной дифференциально-алгебраической системы, доказана ее устойчивость при определенных условиях на структуру многопараметрического матричного пучка [14].

Получены необходимые и достаточные условия полной и R-управляемости для нестационарной гибридной (дискретно-непрерывная) системы, неразрешенной относительно производной непрерывной составляющей искомой функции [13].

Для систем ДАУ с бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами получены условия существования и предложены конструктивные способы построения управления в виде обратной связи такого, что решение замкнутой системы существует в классе обобщенных функций типа Соболева-Шварца и не содержит сингулярных слагаемых [15, 17].

Для интервального семейства ДАУ получена оценка радиуса устойчивости, а также достаточные условия робастной устойчивости с использованием свойства сверхустойчивости [16].

Получены достаточные условия существования единственного гладкого решения нелинейных интегро-алгебраических уравнений первого рода, связанных с задачей автоматического управления техническими объектами с векторными входами и выходами в теплоэнергетических установках [18].

Предложены и обоснованы k-шаговые методы решения систем интегральных уравнений типа Вольтерра первого и второго рода со слабой степенной особенностью ядер в нижнем пределе интегрирования, разработан и протестирован численный алгоритм первого порядка для интегро-дифференциальных уравнений со слабой особенностью в ядре [19, 20].

Для классической задачи оптимального управления получено семейство позиционных принципов минимума (а следовательно, и принципов максимума Понтрягина), различающихся котраекториями процесса в силу неоднозначности порождающих его (совместимых по траектории) управлений. Результат обобщает и усиливает позиционный принцип минимума с квазилинейной опорной мажорантой [36].

Для невыпуклой линейно-квадратичной задачи оптимизации в дискретной динамической системе получено необходимое условие оптимальности с позиционными управлениями спуска по функционалу, которые порождаются квадратичными мажорантами целевой функции [35].

Для задачи управления ансамблями траекторий со специального вида терминальным ограничением разработан итеративный метод приближенного решения задачи, использующий структуру известного, опорного решения [23].

Доказана теорема существования решения задачи оптимального управления уравнением баланса (уравнением неразрывности с источником) в пространстве знакопеременных мер с общим целевым функционалом типа Больца в классе сосредоточенных (зависящих только от времени) существенно ограниченных управлений [22].

Рассмотрена задача оптимального импульсного управления с промежуточными фазовыми ограничениями. Предложен вариант численного решения гибридной задачи, основанный на прямом коллокационном методе, и представлена схема соответствующих численных расчетов для тестового примера [21].

Описано множество решений управляемого процесса выметания, заданного системой, состоящей из дифференциального уравнения и дифференциального включения, управляемых мерой (импульсным управлением). Доказана теорема существования и единственности решения при заданном импульсном управлении. Реализована численная схема нахождения решения разрывного процесса выметания. [54].

Разработана методика численного решения задачи аппроксимации управляемой системы с постоянным запаздыванием, в рамках которой предложена технология редукции управляемой системы с постоянным запаздыванием к задаче оптимального управления для системы в нормальной форме Коши, основанная на «методе шагов» [70].

Предложен метод решения задачи оптимального управления, основанный на использовании методики криволинейного варьирования и локальной аппроксимации множества достижимости [29, 32].

ПРИЛОЖЕНИЕ А Список публикаций

1. Timoshin S.A., Aiki T. Relaxation in population dynamics models with hysteresis // SIAM Journal on Control and Optimization. 2021. Vol. 59, №1. pp. 693-708. DOI: 10.1137/19M1279551. (Web of Science Q1)

2. Chen B., Timoshin S.A. Optimal Control of a Population Dynamics Model with Hysteresis // Acta Mathematica Scientia. 2021 DOI: 10.1007/s10473-022-0116-x. (Web of Science Q2)

3. Chen B., Timoshin S.A. Periodic solutions of a phase-field model with hysteresis, Applied Mathematics and Optimization, accepted.

4. Timoshin S.A., Tolstonogov A.A. Implicit subdifferential inclusions with nonconvex-valued perturbations // Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2021. Vol. 23, №3. pp. 23-32. DOI: 10.1007/s11784-021-00872-2. (Web of Science Q1)

5. Tolstonogov A. A. BV Solutions of a Convex Sweeping Process with Local Conditions in the Sense of Differential Measures // Applied Mathematics and Optimization. 2021. 84. P. 591-629. DOI: 10.1007/s00245-021-09780-w. (Web of Science Q1)

6. Tolstonogov A.A. BV Continuous Solutions of an Evolution Inclusion with Maximal Monotone Operator and Nonconvex-Valued Perturbation. Existence Theorem // Set-Valued and Variational Analysis. 2021. Vol. 29, №1. pp. 29-60. DOI: 10.1007/s11228-020-00535-3. (Web of Science Q2)

7. Tolstonogov A.A. BV solutions of a convex sweeping process with a composed perturbation // Evolution Equations and Control Theory. 2021 DOI: 10.3934/eect.2021012. (Web of Science Q2)

8. Tolstonogov A.A. Differential inclusions in a Banach space with composite right-hand side // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2021. Vol. 313, №1. pp. 201-210. DOI: 10.1134/S008154382103021426. (Web of Science Q4)

9. Tolstonogov A.A. A Multivalued History-Dependent Operator and Implicit Evolution Inclusions. I // Siberian Mathematical Journal. 2021. Vol. 62, №3. pp. 545-553. DOI: 10.1134/S003744662103017462. (Web of Science Q3). Толстоногов А.А. Многозначный оператор с наследственностью и неявные эволюционные включения. I // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, №3. С. 668-678. DOI: 10.33048/smzh.2021.62.317. (РИНЦ)

10. Tolstonogov A.A. A Multivalued History-Dependent Operator and Implicit Evolution Inclusions. II // Siberian Mathematical Journal. 2021. Vol. 62, №4. pp. 747-762. DOI:

10.1134/S0037446621040170. (Web of Science Q3). Толстоногов А.А. Многозначный оператор с наследственностью и неявные эволюционные включения. II // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62, №4. С. 917-935. DOI: 10.33048/smzh.2021.62.417. (РИНЦ)

11. Толстоногов А.А. Максимальная монотонность оператора Немыцкого // Функциональный анализ и его приложения. 2021. Т. 55, №3. С. 51-61. DOI: 10.4213/faa3892. (РИНЦ)

12. Maltugueva N., Pogodaev N. Modeling of crowds in regions with moving obstacles // Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series A. 2021. Vol. 41, №14. pp. 5009 - 5036. DOI: 10.3934/dcds.2021066 (Web of Science Q2)

13. Петренко П.С. К вопросу о разрешимости вырожденной гибридной системы // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2021. Т. 196. С. 90-97. (РИНЦ)

14. Свинина С.В. Об устойчивости сплайн-коллокационной разностной схемы для линейных многомерных дифференциально-алгебраических систем // Известия вузов. Математика. 2022 (принята к печати) (WoS).

15. Shcheglova A.A. Feedback Elimination of Impulse Terms from the Solutions of Differential-Algebraic Equations // Differential Equations. 2021. Vol. 57. pp. 41-59. DOI: 10.1134/S0012266121010043. (Web of Science Q3) Щеглова А.А. Об исключении импульсных слагаемых в решении дифференциально-алгебраических уравнений с помощью обратной связи // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, №1. С. 43-60. DOI: 10.31857/S0374064121010052. (РИНЦ)

16. Shcheglova A.A. On the Superstability of an Interval Family of Differential-Algebraic Equations // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82, №2. pp. 232-244. DOI: 10.1134/S0005117921020041. (Web of Science Q4) Щеглова А.А. К вопросу о сверхустойчивости интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений // Автоматика и телемеханика. 2021. — №2. С. 55-70. DOI: 10.31857/S0005231021020045. (РИНЦ)

17. Shcheglova A.A. Feedback and impulse behavior of differential-algebraic equations // Mathematical Notes. 2021. Vol. 110, №3-4. pp. 592-608. DOI: 10.1134/S0001434621090303. (Web of Science Q4) Щеглова А.А. Обратная связь и импульсное поведение дифференциально-алгебраических уравнений // Математические заметки. 2021. Т. 110, №4. С. 610-629. DOI: 10.4213/mzm13034. (РИНЦ)

18. Solodusha S., Bulatov M. Integral equations related to volterra series and inverse problems: Elements of theory and applications in heat power engineering // Mathematics. 2021. Vol. 9, №16 DOI:10.3390/math9161905. (Web of Science Q1)

19. Чистякова Е.В., Соловарова Л.С., Т.Д. Сон. Об одном методе численного решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений со слабой особенностью в ядре // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Вычисл. математика и информатика. 2021. Т. 10, №3. С. 5-15. DOI: 10.14529/cmse210301. (РИНЦ)

20. Будникова О.С., Ботороева М.Н., Булатов М.В., Орлов С.С. Численное решение интегро-алгебраических уравнений со слабой граничной особенностью k-шаговыми методами// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2021, т.61, № 11, - С.1825-1838 DOI: 10.31857/S0044466921110041(Web of Science Q4)

21. Maltugueva N.S., Pogodaev N.I., Samsonyuk O.N. Optimization of impulsive control systems with intermediate state constraints // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 35 (2021), С. 18–33. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.18 (WoS, RSCI).

22. Погодаев Н.И., Старицын М.В. Нелокальные уравнения баланса с параметром в пространстве знакопеременных мер // Математический сборник. Том 213, № 1, 2022 https://doi.org/10.4213/sm9516 (WoS Q2, Scopus, SJR Q1)

23. Staritsyn M., Pogodaev N., Goncharova E. Feedback Maximum Principle for a Class of Linear Continuity Equations Inspired by Optimal Impulsive Control // Lecture Notes in Computer Science, 2021, 12755 LNCS, pp. 356-368. (WoS, Scopus)

24. Тятюшкин А.И. Многометодные алгоритмы для решения сложных задач оптимального управления // ЖВМиМФ. 2021, Т.61, №2, С. 189-205. DOI: 10.31857/S0044466921020137 (WoS RSCI, Scopus).

25. Tyatushkin A.I. Multimethod Algorithms for Solving Complicated Optimal Control Problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2021, Vol. 61, No. 2, pp. 177–193. DOI: 10.31857/S0044466921020137 (WoS RSCI, Scopus).

26. Тятюшкин А.И. Многометодные алгоритмы оптимизации для расчета оптимального управления // Sciences of Europe. № 62, vol 1, 2021, pp 22-29. DOI: 10.224412/3162-2364-2021-62-1-22-29.

27. Тятюшкин А.И. Оптимизация управляющих параметров // Sciences of Europe. № 67, vol 1, 2021, pp 26-30. DOI: 10.224412/3162-2364-2021-67-1-26-30.

28. Тятюшкин А.И. Многометодная оптимизация управления в сложных прикладных задачах // Sciences of Europe. № 80, vol 1, 2021, pp 12-19. DOI: 10.24412/3162-2364-2021-80-1-12-19.

29. Gornov A.Yu., Anikin A.S., Andrianov A.N. Numerical Study of High-Dimensional Optimization Problems Using a Modification of Polyak's Method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. pp. 1053–1062. DOI: 10.1134/S0965542521070034. (WoS RSCI, Scopus)

30. Maslovskiy A., Pasechnyuk D., Gasnikov A., Anikin A., Rogozin A., Gornov A., Antonov L., Vlasov R., Nikolaeva A., Begicheva M. Non-convex Optimization in Digital Pre-distortion of the Signal // Communications in Computer and Information Science: 20th Intern. Conf. on Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2021 Virtual, Online, 5 - 10 July 2021). 2021. Vol. 1476. pp. 54 - 70. DOI: 10.1007/978-3-030-86433-0_4. (Scopus)

31. Sorokovikov P., Gornov A. Combined non-convex optimization algorithms based on differential evolution, harmony search, firefly, and L-BFGS methods // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (IWMMA-2020, Krasnoyarsk, 20–21 ноября 2020 г.). 2021. pp. 12077. DOI: 10.1088/1757-899X/1047/1/012077. (Scopus)

32. Sorokovikov P., Gornov A., Strelnikov A. Algorithm for the numerical solution of optimal control problems in robotic systems //: XII International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA 2021; Petrovac; Montenegro; September 27 - October 1, 2021). 13078, pp. 203–214. DOI: 10.1007/978-3-030-91059-4_15. (Scopus)

33. Sorokovikov P.S., Gornov A.Yu. Software package for the numerical solution of nonlocal optimization problems // EUROGEN 2021: 14th ECCOMAS Thematic Conference on Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control / N. Gauger, K. Giannakoglou, M. Papadrakakis, J. Periaux (eds.), Streamed from Athens, Greece, 17–19 May 2021. Pp. 262–270. DOI: 10.7712/140121.7965.18340. (Scopus)

34. Андрианов А.Н., Аникин А.С., Горнов А.Ю. Численное исследование задач оптимизации больших размерностей с использованием модификации метода Б.Т. Поляка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. Т. 61, №7. С. 1059-1069. DOI: 10.31857/S0044466921070036. (РИНЦ)

35. Сорокин С.П. Позиционное условие оптимальности для невыпуклой дискретной динамической линейно-квадратичной задачи // System Analysis & Mathematical Modeling. 2021. Т. 3, No 3. С. 169-175. (РИНЦ)

36. Дыхта В.А. Квадратичные опорные мажоранты функционалов оптимального управления и их приложения // Известия ИГУ (подготовлена) (WoS, RSCI).

37. Gornov A.Yu., Anikin A.S., Zarodnyuk T.S., Sorokovikov P.S., Tyatyushkin A.I. Software engineering for optimal control problems// International Conference on Mathematics

and its Applications in New Computer Systems (MANCS 2021, 15–17 December 2021, Stavropol, Russia): Springer Book 2021 (in print).

38. Sorokovikov P.S., Anikin A.S. Computational techniques for investigating low-potential Gupta clusters of extremely large dimensions // International Conference on Mathematics and its Applications in New Computer Systems (MANCS 2021, 15–17 December 2021, Stavropol, Russia): Springer Book 2021 (in print).

39. Sorokovikov P.S., Gornov A.Yu. Modifications of genetic, biogeography and particle swarm algorithms for solving multiextremal optimization problems // The 10th International Workshop on Mathematical Models and their Applications (IWMMA 2021, November 16–18, 2021, Krasnoyarsk): AIP 2021 (in print).

40. Shamirzaev T. S., Gornov A.Yu.. High temperature annealing of semiconductor heretostructures: effect of thermally-generated carries distribution // Physical Review B, 2021 (in print).

41. Zarodnyuk T.S., Gornov A., Sorokovikov P.S. Testing techniques of optimization algorithms for nonlinear controlled dynamical systems // ICECET 2021 Conference Proceedings: International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (Cape Town, South Africa; 09 – 10 December 1, 2021). 2021. (In print).

42. Чистяков В.Ф. О численном решении линейных интегро-алгебраических уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами // Материалы 37 Всероссийской конференции «Ляпуновские чтения», Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 6-10 декабря 2021, с. 15.

43. Chistyakova E.V. Some Properties of Higher Order Differential Algebraic Equations with Singular Points // Proceedings of International Conference on the Numerical Solution of Differential and Differential-Algebraic Equations (NUMDIFF-16), September 6-10, 2021, Halle. P. 1.

44. Чистякова Е.В., Чистяков В.Ф. Свойства линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка с особыми точками. Тезисы докладов Международной конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы», 25-29 октября 2021 г, Белгород. С. 1.

45. Чистяков В.Ф. О связи свойств произвольных линейных дифференциально-алгебраических и интегро-алгебраических уравнений. Тезисы докладов Международной конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы», 25-29 октября 2021 г, Белгород. С. 2.

46. М.В. Булатов, Л.С. Соловарова. Системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа, Понтрягинские чтения — XXXII (3–9 мая 2021 г.). 2021. с.43.

47. Bulatov M.V., Solovarova L.S. On collocation-variation difference schemes for differential algebraic equations. Analytical and Numerical Methods in Differential Equations (Yanenko 100 and ANMDE 2021, 23 – 27 August 2021). 2021. p.12.

48. Solovarova L.S., Phuong T.D. On difference schemes for the second-order differential-algebraic equations. Analytical and Numerical Methods in Differential Equations (Yanenko 100 and ANMDE 2021, 23 – 27 August 2021). 2021. p.67.

49. Булатов М.В., Соловарова Л.С. Приложение матричных полиномов к исследованию систем интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной главной частью. Материалы 3-й Междунар. конф. "Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения" (DYSC 2021; Иркутск, 13–17 сентября 2021 г.). 2021. С. 20-21.

50. Петренко П.С. Об управляемости одной вырожденной гибридной системы // Материалы конференции «Ляпуновские чтения», Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 6-10 декабря 2021 г. С. 44.

51. Свинина С.В. О численном решении некоторых многомерных дифференциально-алгебраических систем // Тезисы междунар. конф. Марчуковские научные чтения – 2021, Новосибирск, 4–8 октября 2021 г.). 2021. С. 63. DOI 10.24412/cl-35065-2021-1-00-62.

52. Свинина С.В. О четырехточечной локально-одномерной разностной схеме для некоторых линейных многомерных дифференциально-алгебраических систем первого порядка // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 50.

53. Финогенко И.А., Сесекин А.Н. О позиционных импульсных управлениях для дифференциальных включений // Материалы Междунар. конф. памяти проф. Р.Ф. Габасова "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация" (Минск, 5–10 октября 2021 г.). 2021. С. 187-189. (РИНЦ)

54. Самсонюк О.Н. Представление решений BV-процесса выметания // Материалы конференции «Ляпуновские чтения» (г. Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2021. С. 48.

55. Горнов А., Зароднюк Т. Облачные аппроксимации в алгоритмах оптимизации // Тринадцатая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач»: тезисы докладов, Новосибирск, Академгородок, 12–22 апреля 2021 г.

56. Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Аникин А.С., Сороковиков П.С. Вычислительные технологии поиска глобального экстремума в задачах оптимального управления //

Совещание «Геометрическое и квантовое управление». Программа и тезисы. Сочи: Федеральная территория «Сириус», 2021. С. 16–17.

57. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Anikin A.S., Tyatyushkin A.I. Approaches to studying controlled processes described by systems of functional differential equations // Proc. of Intern. Workshop “Critical Infrastructures in the Digital World” (IWCI-2021) (Baikalsk, March 26 – April 2, 2021). Irkutsk: ESI SB RAS, 2021.

58. Gornov A.Yu., Sorokovikov P.S. Multi-stage technology for constructing mathematical models // Proc. of Intern. Workshop “Critical Infrastructures in the Digital World” (IWCI-2021) (Baikalsk, March 26 – April 2, 2021). Irkutsk: ESI SB RAS, 2021.

59. Sorokovikov P.S, Gornov A.Yu. Low-potential Sutton-Chen clusters of dimensions from 81 to 110 atoms // Book includes abstracts of reports presented at the XII Int. Conf. on Optimization Methods and Applications Optimization (OPTIMA’2021, September 27 – October 1, 2021). P. 96

60. Zarodnyuk T.S., Gornov A.Yu., Sorokovikov P.S. Testing techniques of optimization algorithms for nonlinear controlled dynamical systems // Book includes abstracts of reports presented at the XII Int. Conf. on Optimization Methods and Applications Optimization (OPTIMA’2021, September 27 – October 1, 2021). P. 108.

61. Горнов А.Ю. Программный комплекс для задач смешанной целочисленной оптимизации // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 9.

62. Горнов А.Ю. Численное исследование алгоритма Архимеда для оценки объема многомерных тел // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 10-11.

63. Горнов А.Ю. Об одной классификации невыпуклых задач оптимизации // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 12–13.

64. Горнов А.Ю. Про «островной» подход к задаче невыпуклой оптимизации // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 14.

65. Куклин С.Г., Горнов А.Ю. Программный комплекс анализа данных холтеровского мониторирования для персонифицированной медицины // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 33.

66. Пасечнюк Д.А., Горнов А.Ю. «Солнечный» метод: двухуровневый алгоритм в одноуровневой задаче оптимизации // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 42.

67. Сороковиков П.С., Горнов А.Ю. Низкопотенциальные атомные кластеры Саттона-Чена размерностей от 121 до 150 атомов // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 51.

68. Тятюшкин А.И. Многометодные алгоритмы для решения сложных задач оптимального управления // Материалы Межд. Науч. Конф. «Памяти проф Р.Ф. Габасова ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: УСТОЙЧИВОСТЬ, УПРАВЛЕНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ». (Минск, 5–10 октября). 2021. С. 181-183.

69. Тятюшкин А.И. Многометодный алгоритм для решения задачи перевода нелинейного объекта // Материалы конференции «Ляпуновские чтения» (г. Иркутск, 6–10 декабря 2021) – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2021. – С. 55–57.

70. Тятюшкин А.И., Зароднюк Т.С. Методика численного решения задачи оптимального управления в системе с постоянным запаздыванием // Материалы конференции «Ляпуновские чтения» (г. Иркутск, 6–10 декабря 2021) – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2021. – С. 58–59.

71. Зароднюк Т.С. Модельная задача оптимального управления с исчезающе малой областью притяжения глобального экстремума // Материалы конференции «Ляпуновские чтения» (г. Иркутск, 6–10 декабря 2021) – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2021. – С. 20.

72. Аникин А.С. Модификация метода LBFGS с экономичным одномерным поиском // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 4.

73. Аникин А.С. Оценка пределов масштабирования сеток дискретизации для задач оптимального управления // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 5.

74. Сороковиков П.С., Горнов А.Ю. Низкопотенциальные атомные кластеры Саттона-Чена размерностей от 121 до 150 атомов // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 51.

75. Сороковиков П.С., Хандаров Ф.В. Комбинированный алгоритм невыпуклой оптимизации на основе методов генетического поиска и роя частиц // Материалы конф. “Ляпуновские чтения” (Иркутск, 6–10 декабря 2021 г.). 2021. С. 52–53.

76. Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С. Методика оценки степени несепарабельности функции // Труды 20-й Всероссийской конференция с международным участием «Математические методы распознавания образов» (ММРО-2021), 7–10 декабря 2021. (в печати)

77. Аникин А. С. Модификация метода LBFGS с экономичным одномерным поиском // Труды 20-й Всероссийской конференция с международным участием

«Математические методы распознавания образов» (ММРО-2021), 7–10 декабря 2021. (в печати)

78. Сороковиков П. С., Горнов А. Ю. Вычислительные технологии поиска низкопотенциальных состояний кластеров Морса размерностей от 460 до 690 атомов // Труды 20-й Всероссийской конференция с международным участием «Математические методы распознавания образов» (ММРО-2021), 7–10 декабря 2021. (в печати)

79. Горнов А.Ю. Q-поиск: удачный метод для задачи безусловной минимизации // Тезисы докладов 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ: 29 ноября – 3 декабря 2021 (в печати).

80. Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С. Методика «профильного» анализа невыпуклой функции многих переменных // Тезисы докладов 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ: 29 ноября – 3 декабря 2021 (в печати).

81. Сороковиков П.С. Численное решение задачи оптимального управления манипулятором промышленного робота // Тезисы докладов 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ: 29 ноября – 3 декабря 2021 (в печати).

82. Сороковиков П.С., Хандаров Ф.В. Численное исследование свойств алгоритма опыления цветков для решения задач нелокальной оптимизации // Тезисы докладов 64-й Всероссийской научной конференции МФТИ: 29 ноября – 3 декабря 2021 (в печати).

83. Gornov A.Yu, Zarodnyuk T.S., Anikin A.S., Sorokovikov P.S. Non-convex optimization problems: classification and applied statements // Евразийская конференция по прикладной математике, 16–21 декабря 2021. Академгородок, Новосибирск (в печати).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б Список конференций

№ п/п	Наименование доклада	Дата доклада (ДД.ММ.ГГГГ)	Место проведения конференции	Название конференции, семинара	Статус конференции (Международная, Всероссийская, Региональная, Локальная)	Статус доклада (Пленарный, Секционный, Стендовый)	Авторы	Докладчик	Ссылка на web-страницу
1	Feedback Maximum Principle for a Class of Linear Continuity Equations Inspired by Optimal Impulsive Control	08.07.2021	г. Иркутск	“Mathematical Optimization Theory and Operations Research” (MOTOR 2021)	Международная	Секционный	Maxim Staritsyn, Nikolay Pogodaev and Elena Goncharova	Старицын М.В.	https://easychair.org/smart-program/MOTOR2021/2021-07-08.html#session:53941
2	Quadratic Supersolutions Of Hamilton–Jacobi Equations And Second Order Feedback Minimum Principle	27.05.2021	г. Москва	Семинаре А.В. Арутюнова лаб. 45 Института проблем управления РАН	Всероссийский	Пленарный	Дыхта В.А.	Дыхта В.А.	
3	Few-shot classification via optimal ensemble control of «infinitely deep and	06.12.2021	г. Иркутск	ЛЯПУНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ 2021	Всероссийский	Секционный	Старицын М.В., Pogodaev N., Chertovskih R. and Pereira	Старицын М.В.	http://idstu.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021

	large» neural networks						F.L.		
4	Представление BV-решений управляемого процесса выметания	06.12.2021	г. Иркутск	ЛЯПУНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ 2021	Всероссийский	Секционный	Самсонюк О.Н.	Самсонюк О.Н.	http://idstu.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021
5	Оптимизация Промысла Рыб с Учетом Возрастной Структуры и Искусственного Воспроизводства	16.09.2021	г. Иркутск	3-я Междунар. конф. "Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения" (DYSC 2021; Иркутск, 13–17 сентября 2021 г.)	Международная	Секционный	Сорокин С.П., Сорокина П.Г.	Сорокин С.П.	http://math.isu.ru/ru/conference/2021/index.html
6	Experience in solving applied optimization problems	01.04.2021	г.Байкальск	VIII International Workshop “Critical Infrastructures in the Digital World” (IWCI-2021), March 26 – April 2, 2021, Baikalsk	Международная	Секционный	A.Yu.Gornov, A.I.Tyatyushkin, T.S.Zarodnyuk, A.S.Anikin, P.S.Sorokonikov, T.I.Madzhara	Горнов А.Ю.	https://conf.isem.irk.ru/event/9/
7	Multi-stage technology for constructing mathematical models	01.04.2021	г.Байкальск	VIII International Workshop “Critical Infrastructures in	Международная	Секционный	A.Yu.Gornov, P.S.Sorokonikov	Сороковиков П.С.	https://conf.isem.irk.ru/event/9/

				the Digital World” (IWCI-2021), March 26 – April 2, 2021, Baikalsk					
8	Непрерывная оптимизация. Проблемы, надежды, контуры будущего	10 марта 2021	г. Москва	Семинар ВЦ РАН	Всероссийский	Пленарный	Горнов А.Ю.	Горнов А.Ю.	
9	Cloud approximations in optimization algorithms	14 апреля 2021	г. Новосибирск	Тринадцатая международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» Новосибирск, Академгородок, 12-22 апреля 2021 г.	Международная	Секционный	Alexander Gornov	Горнов А.Ю.	http://conf.ict.nsc.ru/tcmiip2021/scientific_program
10	Computational technologies for the	14 апреля 2021	г. Новосибирск	Тринадцатая международная молодежная	Международная	Секционный	Anton Anikin	Аникин А.Ю.	http://conf.ict.nsc.ru/tcmiip2021/scientific_program

	optimization of ultra-large atomic-molecular clusters			научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» Новосибирск, Академгородок, 12-22 апреля 2021 г.					
11	Global Extremum Search Algorithms for Nonlinear Optimal Control Problem	29 апреля 2021	г. Иркутск	Объединенный семинар в ИДСТУ СО РАН совместно с компанией Хуавей	Международный	Секционный	Alexander Yu. Gornov Tatiana S. Zarodnyuk Anton S. Anikin Pavel S. Sorokoviko v Alexander I. Tyatyushki n	Зароднюк Т.С.	
12	Computational technologies for the optimization of ultra-large	29 апреля 2021	г. Иркутск	Объединенный семинар в ИДСТУ СО РАН совместно	Международный	Секционный	Аникин А.С., Горнов А.Ю.	Аникин А.С.	

	atomic-molecular clusters			с компанией Хуавей					
13	Computational technologies for finding a global extremum in optimal control problems	8 июня 2021	г. Сочи	International Conference “Geometric and Quantum Control”, June 7–11, 2021, Sirius, Sochi	Международная	Секционный	Alexander Yu. Gornov, Tatiana S. Zarodnyuk, Anton S. Anikin, Pavel S. Sorokovikov	Горнов А.Ю.	
14	Software package for the numerical solution of nonlocal optimization problems	28 июня 2021	г. Афины, Греция	14th International Conference on Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control (EUROGEN-2021), June 28-30, 2021, Athens, Greece	Международная	Секционный	Pavel Sorokovikov and Alexander Gornov.	Сороковиков П.С.	https://eurogen2021.org/files/uploads/general/2021_programme.pdf
15	Library of unimodal optimization algorithms and their comparative testing	6 июля 2021	г. Иркутск	20th International Conference “Mathematical Optimization Theory and Operation Research”	Международная	Секционный	Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S.	Зароднюк Т.С.	https://easychair.org/smart-program/MOTOR2021/2021-07-08.html

				(MOTOR-2021), July 5–10, 2021, Irkutsk					
16	Computational techniques for investigating low-potential Gupta clusters of extremely large dimensions	8 июля 2021	г. Иркутск	20th International Conference “Mathematical Optimization Theory and Operation Research” (MOTOR-2021), July 5–10, 2021, Irkutsk	Международная	Секционный	Sorokovikov P.S., Gornov A.Yu., Anikin A.S., Zarodnyuk T.S.	Сороковиков П.С.	https://easychair.org/smart-program/MOTOR2021/2021-07-08.html
17	Методика стресс-тестирования вычислительных технологий решения задач оптимального управления	30 июня 2021	г. Иркутск	XXVI Байкальская Всероссийская конференция с международным участием «Информационные и математические технологии в науке и управлении», 29 июня – 9 июля 2021 г., Иркутск	Всероссийская	Секционный	Зароднюк Т.С., Горнов А.Ю.	Зароднюк Т.С.	https://conf.isem.irk.ru/event/13/
18	Трехэтапная вычислительная технология оптимизации потенциалов	30 июня 2021	г. Иркутск	XXVI Байкальская Всероссийская конференция с международны	Всероссийская	Секционный	Сороковиков П.С., Аникин А.С., Горнов	Сороковиков П.С.	https://conf.isem.irk.ru/event/13/

	атомно-молекулярных кластеров сверхбольших размерностей			м участием «Информационные и математические технологии в науке и управлении», 29 июня – 9 июля 2021 г., Иркутск			А.Ю.		
19	Многометодные алгоритмы для расчета оптимального управления	8 октября 2021	г.Минск, Белоруссия	Международная научная конференция "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация" (DSSCO’21) памяти профессора Р.Ф. Габасова (5–10 октября 2021 г., Белорусский государственный университет, г. Минск, Белоруссия)	Международная	Пленарный	Тятюшкин А.И.	Тятюшкин А.И.	http://conf.bsu.by/dssco
20	The Problem Of Practical Solution Of Non-Convex Optimization	29 октября 2021	г. Москва	Huawei Russian Wireless Workshop 2020, 27–29 October, 2021	Международная	Секционный	Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Аникин А.С.,	Горнов А.Ю.	

	Problems						Сороковиков П.С.		
21	Algorithms for the numerical solution of optimal control problems in robotic systems	28 сентября 2021	г. Петровац? Черногория	XII International Conference "Optimization and Applications" (OPTIMA-2021), September 27 – October 1, 2021.	Международная	Секционный	Sorokovikov P., Gornov A., Strelnikov A.	Сороковиков П.С.	http://agora.guru.ru/display.php?conf=OPTIMA-2021
22	Modifications of Genetic, Biogeography and Particle Swarm Algorithms for Solving Multiextremal Optimization Problems	17 ноября 2021	г. Красноярск	The 10th International Workshop on Mathematical Models and their Applications (IWMMA 2021), Krasnoyarsk, November 16–18, 2021	Международная	Секционный	Pavel Sorokovikov and Alexander Gornov	Сороковиков П.С.	https://sites.google.com/view/iwmma2021/schedule-and-program?authuser=0
23	Q-поиск: удачный метод для задачи безусловной минимизации	30 ноября 2021	г. Москва	64-ая Всероссийская научная конференция МФТИ: 29 ноября – 3 декабря, 2021.	Всероссийская	Секционный	Горнов А.Ю.	Горнов А.Ю.	https://conf.mipt.ru/
24	Методика профильного анализа выпуклой	30 ноября 2021	г. Москва	64-ая Всероссийская научная конференция	Всероссийская	Секционный	Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С.	Зароднюк Т.С.	https://conf.mipt.ru/

	функции многих переменных			МФТИ: 29 ноября – 3 декабря, 2021.					
25	Численное решение задачи оптимального управления манипуляторов промышленного робота	30 ноября 2021	г. Москва	64-ая Всероссийская научная конференция МФТИ: 29 ноября – 3 декабря, 2021.	Всероссийская	Секционный	Сороковиков П.С., Горнов А.Ю.	Сороковиков П.С.	https://conf.mipt.ru/
26	Модификация метода LBFGS с экономичным одномерным поиском	10 декабря 2021	г. Москва	20-я Всероссийская конференция с международным участием «Математические методы распознавания образов» (ММРО-2021), 7–10 декабря 2021.	Всероссийская	Секционный	Аникин А.С.	Аникин А.С.	https://clck.ru/Z9nD9
27	Методика оценки степени несепарабельности функции	10 декабря 2021	г. Москва	20-я Всероссийская конференция с международным участием «Математические методы распознавания образов» (ММРО-2021),	Всероссийская	Секционный	Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С.	Горнов А.Ю.	https://clck.ru/Z9nD9

				7–10 декабря 2021.					
28	Вычислительные технологии поиска низкопотенциальных состояний кластеров Морса размерностей от 460 до 690 атомов	10 декабря 2021	г. Москва	20-я Всероссийская конференция с международным участием «Математические методы распознавания образов» (ММРО-2021), 7–10 декабря 2021.	Всероссийская	Секционный	Сороковиков П.С., Горнов А.Ю.	Сороковиков П.С.	https://clck.ru/Z9nD9
29	Многометодный алгоритм для решения задачи перевода нели-нейного объекта	8 декабря 2021	г. Иркутск	Ляпуновские чтения 2021, 7–10 декабря 2021 г.	Всероссийский	Секционный	Тятюшкин А.И.	Тятюшкин А.И.	http://idstu.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021
30	Об одной классификации невыпуклых задач оптимизации	8 декабря 2021	г. Иркутск	Ляпуновские чтения 2021, 7–10 декабря 2021 г.	Всероссийский	Секционный	Горнов А.Ю.	Горнов А.Ю.	http://idstu.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021
31	Модельная задача оптимального управления с исчезающе малой областью притяжения	8 декабря 2021	г. Иркутск	Ляпуновские чтения 2021, 7–10 декабря 2021 г.	Всероссийский	Секционный	Зароднюк Т.С.	Зароднюк Т.С.	http://idstu.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021

	глобального экстремума								
32	Модификация метода LBFGS с экономичным одномерным поис-ком	8 декабря 2021	г. Иркутск	Ляпуновские чтения 2021, 7–10 декабря 2021 г.	Всероссийский	Секционный	Аникин А.С.	Аникин А.С.	http://idstu.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021
33	Комбинированный алгоритм невыпуклой оптимизации на основе методов генетического поиска и роя частиц	8 декабря 2021	г. Иркутск	Ляпуновские чтения 2021, 7–10 декабря 2021 г.	Всероссийский	Секционный	Сороковиков П.С., Хандаров Ф.В.	Сороковиков П.С.	http://idstu.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021
34	Testing techniques of optimization algorithms for nonlinear controlled dynamical systems	9 декабря 2021	г. Кейптаун, ЮАР	International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET), Cape Town, South Africa. Conference Dates: 09-10 December, 2021	Международная	Секционный	Zarodnyuk T.S., Gornov A.Yu., Sorokovikov P.S.	Зароднюк Т.С.	http://www.icecet.com/home
35	Software Engineering for Optimal Control	16 декабря 2021	г. Ставрополь	MANCS 2021: 15-17 December 2021, Stavropol, Russia	Международная	Секционный	Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S.,	Горнов А.Ю.	

	Problems						Anikin A.S., Sorokovikov P.S.		
36	Non-Convex Optimization Problems: Classification And Applied Statements	20 декабря 2021	г. Новосибирск	Евразийская конференция по прикладной математике, 16–21 декабря 2021. Академгородок, Новосибирск	Международная	Секционный	Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Anikin A.S., Sorokovikov P.S., and Tyatyushkin A.I.	Горнов А.Ю.	
37	Принцип инвариантности и глобальная асимптотическая устойчивость для систем с сухим трением	06.10.2021	Минск, Беларусь	International Scientific Conference in memory of Professor R.F. Gabasov “Dynamical Systems: Stability, Control, Optimization”	Международная	Секционный	Финогенко И.А.	Финогенко И.А.	http ://conf.bsu.by/dssco/.
38	О позиционных импульсных управлениях для дифференциальных включений	07.10.2021	Минск, Беларусь	International Scientific Conference in memory of Professor R.F. Gabasov “Dynamical Systems: Stability, Control, Optimization”	Международная	Секционный	Финогенко И.А., Сесекин А.Н.	Финогенко И.А.	http ://conf.bsu.by/dssco/.

39	Системы интегральных уравнений Вольтерра первого рода	05.05.2021	Воронеж, онлайн	Воронежская весенняя математическая школа, Понтрягинские чтения — XXXII (3–9 мая 2021 г.)	Международная	Секционный	М.В. Булатов, Л.С. Соловарова	Л.С. Соловарова	https://vvmsh.math-vsu.ru/program
40	On collocation-variation difference schemes for differential algebraic equations	27.08.2021	Онлайн	Analytical and Numerical Methods in Differential Equations (Yanenko 100 and ANMDE 2021), 23 – 27 August 2021.	Международная	Секционный	М.В. Булатов, Л.С. Соловарова	М.В. Булатов	https://math.sut.ac.th/Mathematics/Program
41	On difference schemes for the second-order differential-algebraic equations	27.08.2021	Онлайн	Analytical and Numerical Methods in Differential Equations (Yanenko 100 and ANMDE 2021), 23 – 27 August 2021.	Международная	Секционный	Л.С. Соловарова, T.D. Phuong	Л.С. Соловарова	https://math.sut.ac.th/Mathematics/Program
42	Приложение матричных полиномов к исследованию систем интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной главной	14.09.2021	Иркутск, онлайн	"Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения" (DYSC 2021; 13–17 сентября 2021 г.).	Международная	Секционный	М.В. Булатов, Л.С. Соловарова	Л.С. Соловарова	http://math.isu.ru/ru/conference/2021/index.html

	частью								
43	On One Family of Integro-Algebraic and Integro-Differential Systems of Volterra-Fredgolm Kind	27.11.2021	Улан-Батор, Монголия, онлайн	2nd International Conference on Applied Sciences and Engineering (ICASE), November 26-27, 2021.	Международная	Секционный	М.В. Булатов	М.В. Булатов	http://icase.mn/online-conference
44	Some Properties of Higher Order Differential Algebraic Equations with Singular Points	07.09.2021	Халле (Германия)	International Conference on the Numerical Solution of Differential and Differential-Algebraic Equations (NUMDIFF-16), 6-10 сентября 2021 г.	Международная	Секционный	Чистякова Е.В., Чистяков В.Ф.	Чистякова Е.В.	https://sim.mathematik.uni-halle.de/numdiff/Numdiff16/
45	О свойствах особых точек линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка	27.10.2021	Белгород	Международная конференция «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы», 25-29 октября 2021 г, Белгород	Международная	Секционный	Чистякова Е.В., Чистяков В.Ф	Чистякова Е.В.	http://agora.guru.ru/display.php?conf=diff-2021&PHPSESSID=e22ajrqce91lm32kmsbdq99o01
46	О связи свойств произвольных линейных	27.10.2021	Белгород	Международная конференция «Дифференциальные	Международная	Секционный	Чистяков В.Ф	Чистяков В.Ф	http://agora.guru.ru/display.php?conf=diff-2021&PHPSESSID=e22ajrqce91lm32kmsbdq99o01

	дифференциально-алгебраических и интегро-алгебраических уравнений			уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы», 25-29 октября 2021 г, Белгород					
47	О численном решении линейных интегро-алгебраических урав-нений Фредгольма с вырожденными ядрами	06.12.2021	Иркутск	37 Всероссийская конференция «Ляпуновские чтения», 6-10 декабря 2021 г.,	Всероссийская	Секционный	Чистяков В.Ф	Чистяков В.Ф	http://idstu.irk.ru/ru/content/lyapunovskie-chteniya-2021
48	О численном решении некоторых многомерных дифференциально-алгебраических систем	5 октября 2021г.	Россия, Новосибирск	Марчуковские научные чтения 2021	Международная	секционный	Свинина С.В.	Свинина С.В.	http://conf.nsc.ru/msr2021
49	О четырехточечной локально-одномерной разностной схеме для некоторых линейных многомерных дифференциально-алгебраически	7 декабря 2021г.	Россия, Иркутск	Ляпуновские чтения	Всероссийская	секционный	Свинина С.В.	Свинина С.В.	

	х систем первого порядка								