

**Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
ИНСТИТУТ ДИНАМИКИ СИСТЕМ И ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ  
имени В.М. Матросова  
Сибирского отделения Российской академии наук**

## **ЛЯПУНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ**

**3 - 5 декабря 2018 года**

**Материалы конференции**



**Иркутск – 2018**

Материалы конференции «Ляпуновские чтения» (г. Иркутск, 3–5 декабря 2018 г.).  
– Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2018. – 110 с.

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на конференции «Ляпуновские чтения» (г. Иркутск, 3–5 декабря 2018 г.). Конференция организуется с целью обсуждения актуальных результатов исследований научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов по направлениям:

- Теория и методы исследования эволюционных уравнений и динамических систем с приложениями;
- Качественная теория и методы управления с приложениями;
- Методы математической физики в задачах теории поля, газовой и плазменной динамики;
- Теория, алгоритмы и вычислительные технологии решения задач оптимизации и исследования операций;
- Теоретические основы и технологии организации распределенных и высокопроизводительных вычислительных систем;
- Теоретические основы и технологии организации информационно-телекоммуникационных инфраструктур;
- Методы, технологии и сервисы формирования информационно-аналитических, геоинформационных, вычислительных и программноаппаратных систем в различных предметных областях (в том числе для поддержки комплексных междисциплинарных научных исследований).

# ТЕХНОЛОГИЯ ПОДГОТОВКИ ДАННЫХ ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННОЙ СЕТИ<sup>1</sup>

Ю.В. Авраменко, Фёдоров Р.К.

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[avramenko@icc.ru](mailto:avramenko@icc.ru), [fedorov@icc.ru](mailto:fedorov@icc.ru)

На сегодняшний день одним из оперативных способов оценки состояния региона является применение методов распознавания для дешифрирования данных дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ). Например, с их помощью можно в кратчайшие сроки оценить площади антропогенных объектов, возведенных за определенный период времени. Основными трудностями, с которыми приходится сталкиваться разработчикам данных методов является наличие помех в данных и изменение спектральных характеристик изображений в зависимости от условий съемки (в летнее и зимнее время один и тот же объект может кардинально отличаться, например, лес). Метод идентификации объектов по запросу пользователя на языке SOQL[1], разработанный в ИДСТУ СО РАН, позволяет частично решить данные трудности. В методе применяется классификатор на базе нейронной сети для учета спектральных и текстурных характеристик объектов.

Формирование обучающей выборки является одним из важнейших этапов, влияющих на качество классификации, она должна включать большое количество данных из различных источников, которые необходимо разбить на классы. Вручную это делать достаточно сложно, поэтому предлагается технология автоматизации формирования обучающей выборки. Данная технология работает на основе растровых и векторных данных ДЗЗ. Приведем описание технологии формирования обучающей выборки. На первом шаге формируется векторный слой, который содержит положения прецедентов – линейные (дороги) и полигональные (здания, лес, вода) объекты. На втором шаге линейные объекты переводятся в полигональные путем построения буферных зон, размер буферной зоны определяется шириной дорожного полотна, информация о котором содержится в атрибутивной части. Далее векторный слой преобразуется в растровый (маска классов). На последнем шаге полученная маска накладывается на растровые данные, из которых формируются прецеденты, подготовленные к использованию в процессе обучения нейронной сети.

Данная технология позволит сократить время работы, затрачиваемое на формирование обучающей выборки.

Результаты получены при использовании сетевой инфраструктуры Телекоммуникационного центра коллективного пользования «Интегрированная информационно-вычислительная сеть Иркутского научно-образовательного комплекса» (ЦКП ИИВС ИРНОК)

1. Бычков И.В. Интерпретатор языка SOQL для обработки растровых изображений / И.В. Бычков, Г.М. Ружников, Р.К. Фёдоров, Ю.В. Авраменко // Вычислительные технологии. 2016.Т. 21, № 1. С.49–59.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 37 СО РАН.

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПТИМИЗАЦИИ ПОТЕНЦИАЛА КИТИНГА С РАЗМЕРНОСТЯМИ ДО 50000000 ПЕРЕМЕННЫХ\*

А.С. Аникин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[anikin@icc.ru](mailto:anikin@icc.ru)

Особая «вычислительная» ситуация проявляется при исследовании низкоэнергетических состояний потенциала Китинга, предложенного для моделирования деформаций, возникающих в квантовых точках «кремний-германий», еще в 1966 г. [1]. Функции, описывающие потенциал Китинга (многомерные полиномы четвертой степени, см., напр., [2]), формально и фактически также должны быть отнесены к классу невыпуклых. Однако в данном случае для построения вычислительных схем удается привлечь информацию о начальном приближении, что позволяет успешно решать задачи совершенно других размерностей – до миллионов атомов. В этой ситуации возможно для достижения успеха использовать несложные глобализующие методы – например, варианты случайного мултистарта. Но проблема одновременно «перетекает в другую плоскость» – для нахождения глобального решения необходимо разрабатывать алгоритмы, способные, используя специфику и разреженность задачи, быстро решать задачи нахождения решений локальных. Интерес к модели Китинга, несмотря на ее «почтенный возраст», не ослабевает (см., напр., [3]), но отсутствие работоспособных алгоритмов, очевидно, заставляет специалистов искать ее упрощения (см., напр., [4]). Задача создания алгоритмов, способных численно исследовать устойчивые состояния потенциала Китинга для числа атомов порядка  $10^8$  продолжает оставаться актуальной.

В докладе рассматриваются вычислительные технологии, ориентированные на поиск глобального экстремума в модели Китинга со сверхбольшим числом атомов (число переменных в соответствующих задачах оптимизации равно утроенному числу атомов). В качестве базовых алгоритмов, используемых в многометодных вычислительных схемах в качестве «строительных кирпичей», используются модификации методов сопряженных градиентов (Хестенса-Штифеля, Флетчера-Ривса, Полака-Поляка-Рибьера и другие) и вариант метода LBFGS с шириной «полосы запоминания», равной пяти. Интегрирующая алгоритмическая схема основана на идее поочередного запуска алгоритмов из базового набора и периодического перезапуска их с наилучшего из достигнутых приближений. Глобализующая процедура состоит из формирования набора случайных стартовых точек, генерируемых в небольшой окрестности ненапряженного состояния квантовой точки.

Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Keating P.N. Effect of Invariance Requirements on the Elastic Strain Energy of Crystals with Application to the Diamond Structure // Phys. Rev. v. 145. 1966. p. 637–645.
2. Yakimov A. I., Stepina N. P., Dvurechenskii A. V., Nikiforov A. I., Nenashev A. V. Excitons in charged Ge/Si type-II quantum dots // Semiconductor Science and Technology, 2000. v. 15, № 12. p. 1125–1130.
3. Yakimov A. I., Bloshkin A. A., Dvurechenskii A. V. Calculating of energy spectrum and electronic structure of two holes in a pair of coupled Ge/Si quantum dots. – Phys. Rev. B, 2010, v. 81, 115434.
4. Давыдов С.Ю. Простой модельный потенциал для описания упругих свойств однослойного графена // Физика твердого тела, 2013, том 55, вып. 4, с. 813–815.

\* Работа поддержана РФФИ, проект 18-07-00587.

## МЕТОДИКИ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ СУПЕРКОМПЬЮТЕРОВ<sup>1</sup>

А.С. Аникин<sup>1</sup>, А.Н. Андрианов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

<sup>2</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

[anikin@icc.ru](mailto:anikin@icc.ru), [and@a5.kiam.ru](mailto:and@a5.kiam.ru)

Ускорение поиска решения задач оптимизации в настоящее время становится все более актуальной проблемой. Помимо текущего всплеска работ в области т.н. машинного обучения (machine learning), также существует всё возрастающий спрос на системы математического моделирования в самых различных областях: материаловедение, фармацевтика, газогидродинамика, транспортная логистика, химическая кинетика и т.д. Методы оптимизации, способные эффективно решать задачи рассматриваемого класса, становятся неотъемлемой частью современного технологического процесса.

Все возрастающая сложность таких моделей, а также увеличивающийся объем данных, используемых моделью для своей работы, существенно повышают требования к качеству и быстродействию программного кода, реализующего алгоритмы оптимизации. Естественным и неизбежным следствием этого стала необходимость эффективного использования современных параллельных вычислительных архитектур. Одной из них являются современные графические ускорители (GPU), которые имеют наилучшее соотношение «цена/производительность» для широкого класса задач. Однако использование GPU также сопряжено с целым рядом сложностей, обусловленных особенностями их архитектур. Можно утверждать, что для получения максимальной производительности алгоритмы и результирующий программный код должны изначально создаваться с учетом архитектурных ограничений GPU.

В работе авторами рассматривается ряд методик, направленных на эффективное использование вычислительных ресурсов GPU при решении задач оптимизации. Н.Вирт уже в заглавии своей знаменитой книги обозначил: *алгоритмы + структуры данных = программы*. Именно из этого тезиса следует исходить при изучении вопроса ускорения алгоритмов оптимизации при помощи GPU. Вполне очевидно, что алгоритмы методов локальной оптимизации следует ускорять «снизу», т.е. распараллеливать отдельные вычислительно затратные процедуры, такие как вычисление функции и её градиента, а также процедуры линейной алгебры. Методы же глобальной оптимизации изначально следует ускорять «сверху», т.е. выполнять параллельно такие операции, как локальный спуск (поиск) из различных стартовых точек. Наиболее сложным вопросом в случае GPU становится правильный выбор используемых структур данных, способ их хранения и обработки. Опыт авторов позволяет утверждать, что именно вопрос правильного оперирования данными является критически важным при работе с GPU. В большинстве случаев стоит поступиться «качеством работы» сложных алгоритмов и упростить их до того минимума, который будет сохранять работоспособность общей схемы. Одним из наиболее наглядных примеров являются процедуры локального поиска (одномерной минимизации), используемые практически всеми методами локальной оптимизации. Традиционные алгоритмы, работающие на центральном процессоре (CPU), как правило, достаточно надежны, но при этом имеют довольно сложный алгоритм и выполняют проверку различных критериев качества текущего решения. Подобная сложность алгоритмов имеет губительные последствия при их прямом переносе на GPU-архитектуру. Многочисленные условные переходы и различное время работы (число проб функции), зависящее от стартовой точки, не критично с точки зрения CPU,

---

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 16-07-00664.

но становится фатальным для быстродействия GPU-версии. Опыт авторов показывает, что реализация очень простой схемы, например метода парабол с фиксированным числом проб, показывает существенно лучший результат в рамках графического ускорителя - для многих задач оказывается достаточно всего 3-4 проб для получения релаксации оптимизируемой функции. Очевидно, что «качество» (значение, на которое уменьшается функция) такой релаксации будет хуже, чем в случае «честного» алгоритма одномерного поиска, но ухудшение на уровне одномерной минимизации будет с лихвой «отыграно» на уровне локальных спусков. За счет такого простого, но унифицированного алгоритма все ядра графического ускорителя смогут работать «синхронно», без простоев и ожидания «соседей». Очевидно, что в ряде случаев подобные «простые» алгоритмы будут давать сбои, приводящие к досрочному прерыванию процедуры локального спуска. Тем не менее, вычислительный опыт авторов показывает, что выгоднее запустить большое число (тысячи и десятки тысяч) не слишком точных и надежных, но быстрых локальных спусков, чем меньшее число (десятки и сотни) высокоточных медленных алгоритмов.

Стоит также отметить, что любая вычислительная система, оснащенная графическим ускорителем, является гибридной (оснащенной вычислительными устройствами с различной архитектурой), а любая программа, использующая GPU, первоначально запускается на центральном процессоре, который выполняет инициализацию данных и запуск GPU-алгоритма на исполнение. Все современные системы имеют в своем составе несколько ядер/процессоров, которые также следует использовать для эффективного решения поставленной задачи. Авторами предлагается следующая схема реализации методов глобальной оптимизации, работающих в рамках гибридной вычислительной системы:

1. Одно ядро процессора выделяется под управляющий процесс (CPU-master). Он координирует работу всех остальных процессов, а также хранит текущее значение глобального минимума (наилучшее найденное решение).
2. Для каждого установленного в системе GPU выделяется ядро процессора под алгоритм глобальной оптимизации, использующий ускоритель (GPU-slave).
3. На оставшихся свободных ядрах запускаются процессы, исполняющие CPU-алгоритм глобальной оптимизации (CPU-slave). Этот алгоритм использует полноценные (точные) процедуры локальных спусков и пытается улучшить глобальный минимум, найденный быстрым, но не слишком точным GPU-алгоритмом.

Применение предложенного подхода позволяет не только максимально эффективно задействовать доступные вычислительные устройства, но также обладает хорошей масштабируемостью, как на уровне отдельной вычислительной системы, так и на уровне гибридного вычислительного кластера. В последнем случае предложенная схема запускается на требуемом числе узлов с дополнительным выделением управляющего (координирующего) узла.

Предложенные авторами методики были успешно применены при решении различных задач - задаче нахождения PageRank-вектора (задача выпуклой оптимизации с размерностью порядка миллиона переменных), задаче оптимизации потенциала Морса (задача глобальной оптимизации с числом переменных порядка тысячи), задаче аппроксимации множества достижимости управляемой динамической системы (алгоритм интегрирования реализован на GPU). Реализованные алгоритмы показали высокую эффективность на различных аппаратных конфигурациях.

1. Wilt N. The CUDA Handbook: A Comprehensive Guide to GPU Programming. Pearson Education, 2013. 528 p.

# ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА УСЛОВНОГО ГРАДИЕНТА ДЛЯ ПОИСКА РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ БЭКМАНА<sup>1</sup>

А.С. Аникин<sup>1</sup>, А.В. Гасников<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН

<sup>2</sup> НИУ МФТИ

[anikin@icc.ru](mailto:anikin@icc.ru), [gasnikov.av@mipt.ru](mailto:gasnikov.av@mipt.ru)

Одной из основных задач последнего времени, остро стоящих во многих городах по всему миру является разработка транспортной модели, позволяющей решать задачи долгосрочного планирования (развития) транспортной инфраструктуры. Считается, что разработка такой модели поможет ответить на вопросы: какой из проектов дорожного строительства оптимален, где пропускная способность дороги недостаточна, как изменится транспортная ситуация, если построить в этом месте торговый центр (жилой район, стадион), как правильно определять маршруты и расписание движения общественного транспорта, какой эффект даст выделение полос для общественного транспорта.

В основе математической модели транспортной сети лежит направленный взвешенный граф, ребра которого задают дороги и функция стоимости, позволяющая оценить «затратность» перемещения между выбранными узлами графа с учетом его текущего состояния («загруженности дорог»). Например, классическая модель Бэкмана применяет гладкую монотонно возрастающую функцию (BPR-функцию), а модель стабильной динамики (Нестерова-Де Пальма) – негладкую разрывную функцию, которая более адекватно соответствует явлению «пробок» (заторов), но также накладывает существенные ограничения на выбор методов оптимизации такой модели.

Авторами рассматривается модель Бэкмана и задача поиска равновесия, которая заключается в нахождении такого распределения транспортных потоков по ребрам графа сети, которое обеспечивает наименьшую общую стоимость перемещения для всех участников движения. Рассматриваемая задача относится к классу конечномерных задач условной оптимизации, имеющую достаточно большую размерность, определяемую числом ребер транспортного графа - для современных постановок (мегаполисы) это десятки и сотни тысяч переменных. Помимо собственно размерности, сложность задачи также определяется необходимостью многократного поиска кратчайшего пути между выбранными узлами графа. Такой поиск выполняется на каждой итерации метода для всех участника движения, число которых может достигать значения порядка миллиона. Таким образом, вычислительная сложность задачи определяется как размером графа сети, так и числом транспортных единиц.

В работе предложена программная реализация метода условного градиента (Франка-Вульфа) для модели Бэкмана. Реализация выполнена на языке C++11 с применением технологии параллельного программирования OpenMP, используемой для ускорения процедуры поиска кратчайших путей (алгоритм Дейкстры). Также в рамках проведенных исследований выполнено изучение перспектив применения графических ускорителей (GPU) для решения рассматриваемой задачи.

Проведенные вычислительные эксперименты для различных задач из тестовой коллекции [1] показали существенное ускорение поиска транспортного равновесия и эффективность предложенных подходов.

1. <https://github.com/bstabler/TransportationNetworks>

---

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 18-29-03071.

## АЛГОРИТМ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А.С. Аникин, А.Ю. Горнов, Т.С. Зароднюк, П.С. Сороковиков

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

Рассматривается одна из основных задач фазового оценивания – задача аппроксимации множества достижимости для нелинейной алгебро-дифференциальной системы. Зависимость системы от управляющих воздействий предполагается линейной.

Предложен алгоритм, основанный на редукции к задаче оптимального управления стандартного типа и ее многократном решении. Введением дополнительной фазовой переменной и дополнительного управления «алгебраическая» переменная приводится к динамическому типу. В качестве функционала рассматривается интегральная невязка, порождаемая исходными уравнениями типа равенства. Численное решение поставленной серии задач производится в автоматическом режиме, при этом не слишком удачные решения – с невязкой, превышающей заданное пороговое значение – из «аппроксимирующего облака» удаляются.

В качестве примера рассмотрена управляемая система нижеследующего вида

$$\dot{x}_1 = x_2 + 0.25y, \quad \dot{x}_2 = u - \sin(x_1), \quad 0 = x_1 - 0.25y, \quad x_1(0) = 5, x_2(0) = 0, y(0) = 20,$$

определенная на временном интервале  $t \in [0, 6]$ . На управляющие воздействия накладываются ограничения  $|u(t)| \leq 1$ . Для данной системы возможно произвести очевидную редукцию к каноническому виду – управляемой системе в нормальной форме Коши. Это позволяет применить для оценки множества достижимости разработанные ранее вычислительные технологии (см., напр., [1]), сравнить результаты расчетов и, тем самым, проверить корректность работы предложенного подхода.

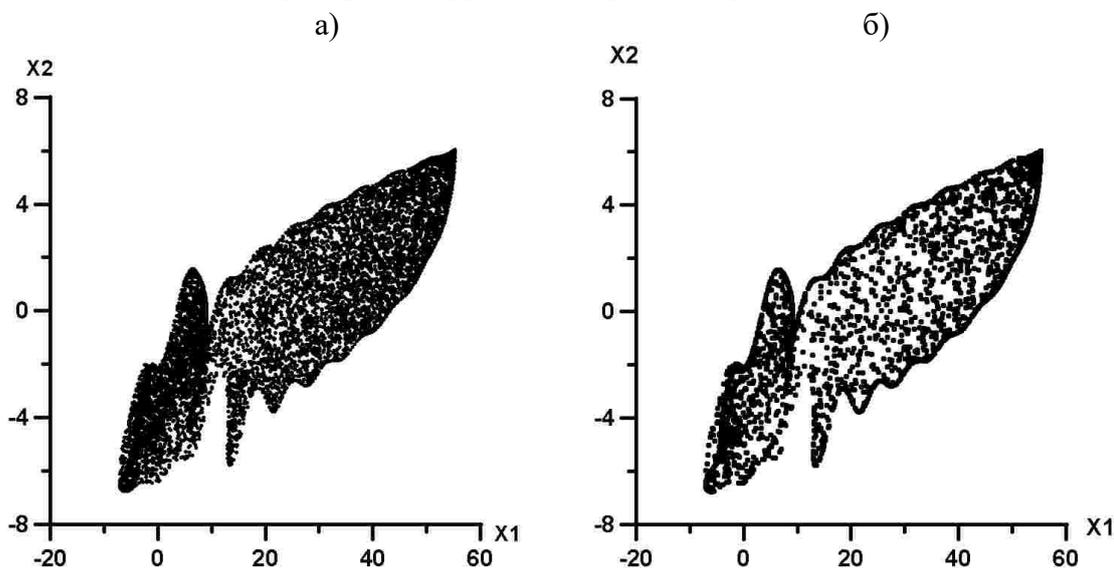


Рис. 1. Множество достижимости в рассмотренном тестовом примере, построенное с помощью: а) редукции к стандартному виду и б) предложенного алгоритма

На рис.1 представлены результаты расчетов, полученные с применением редукции к стандартному виду и с использованием разработанного авторами алгоритма. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов.

1. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск, Наука, 2009.

## ПРИМЕНЕНИЕ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В РЕШЕНИИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А.П. Асламов, руководитель: Голоскова О.В., учитель математики  
Муниципальное бюджетное общеобразовательное  
учреждение г. Иркутска лицей №3

С ускорением темпа жизни в математике стали актуальны задачи на движение, которые чаще решаются через множество действий с привлечением большого комплекса математических и физических навыков решения задач данного типа. Исходя из этого, становятся актуальны нестандартные способы решения задач. Например, использование геометрических методов: признаков подобия треугольников, свойства треугольника.

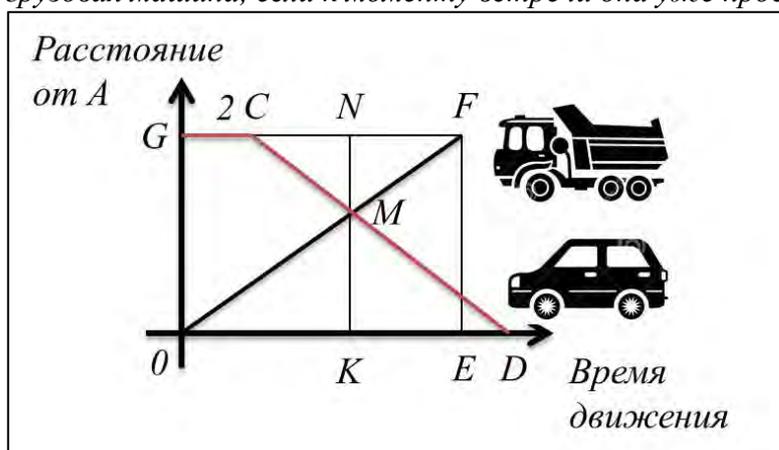
**Цели исследования:** Рассмотреть возможность использования свойств треугольников, подобия треугольников, средней линии треугольника при решении арифметических задач на равномерное движение.

**Гипотеза:** Если рассмотреть неарифметические способы решения задач на равномерное движение, то решение станет намного проще.

Существует множество видов арифметических задач, в данной работе будут рассмотрены арифметические задачи на равномерное прямолинейное движение.

В теоретической части представлены типы задач на прямолинейное движение, признаки подобия треугольников, свойство средней линии треугольника. В результате исследования были рассмотрены типовые арифметические задачи на прямолинейное движение. Одна из задач была решена тремя разными способами, используя составления линейного уравнения, системы уравнений и графический способ, в котором применяется подобие треугольников, которое приводит к решению пропорции. Другие задачи решены с использованием подобия треугольников как наиболее простым и кратким решением. Этот способ очень наглядный, понятный. Он относится к старинному способу решения арифметических задач и редко используется учителями сегодня.

*«Грузовая машина выехала из А в В. Спустя 2 ч из В в А выехала легковая машина, которая прибыла в А на час позже, чем грузовая машина в В. Сколько часов была в пути грузовая машина, если к моменту встречи она уже проехала 2/3 всего пути?»*



Данная задача решается в одно действие с помощью составления пропорции.

Применение подобия треугольников в решении арифметических задач не только показывает учащимся межпредметную связь математики с другими дисциплинами, но и позволяет выработать оптимальное решение с наименьшим использованием алгебраических действий. Это дает возможность не только изобразить схему решения, выбрав при этом определенный алгоритм, но и представить задачу в реальной жизни.

# Tomography of the Beltrami fields

Balandin A.L.

*V.M. Matrosov Institute of Systems Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences*  
*balandin@icc.ru*

## 1 Introduction

A three dimensional (3D) vector field  $\mathbf{B}$  is said to be force-free or Beltrami field in a region  $D$  of  $\mathbb{R}^3$  if [1, 2, 3, 4]

$$\nabla \times \mathbf{B} \times \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1)$$

The first equation means that  $\nabla \times \mathbf{B}$  is parallel to  $\mathbf{B}$  in region  $D$  and can be rewritten as

$$\nabla \times \mathbf{B} = f(\mathbf{r})\mathbf{B}, \quad \mathbf{B} \cdot \nabla f(\mathbf{r}) = 0, \quad (2)$$

When  $f(\mathbf{r}) = \varkappa$  everywhere in  $D$  the field is often called as Trkalian field.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \varkappa \mathbf{B}, \quad (3)$$

It is well known that vector functions  $\mathbf{L}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{N}(\mathbf{r})$  are the three independent solutions of the vector Helmholtz equation. In the spherical coordinate system they writes [5, 6]

$$\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times [\mathbf{r}\psi_{lm}(\mathbf{r})] = \sqrt{l(l+1)} Z_l(\varkappa r) \mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_l^m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\varkappa} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_l^m(\mathbf{r}) \\ &= l(l+1) \frac{Z_l(\varkappa r)}{\varkappa r} \mathbf{P}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) + \sqrt{l(l+1)} \frac{1}{\varkappa r} \frac{d(\varkappa r Z_l(\varkappa r))}{d(\varkappa r)} \mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\mathbf{L}_l^m(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \psi_{lm}(\mathbf{r}) = \sqrt{l(l+1)} \frac{Z_l(\varkappa r)}{\varkappa r} \mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{dZ_l(\varkappa r)}{d(\varkappa r)} \mathbf{P}_l^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (4c)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_{\hat{\mathbf{r}}}, \quad \nabla_{\hat{\mathbf{r}}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

where  $\mathbf{C}_l^m$ ,  $\mathbf{B}_l^m$ ,  $\mathbf{P}_l^m$  are the vector spherical harmonics,  $Z_l(\varkappa r)$  is designate any spherical Bessel function of the first, second or third kinds, respectively.

Hansen's vectors  $\mathbf{M}_l^m$ ,  $\mathbf{N}_l^m$ ,  $\mathbf{L}_l^m$  form a linearly independent system of functions even though they do not form an orthonormal set because,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_l^m \cdot \mathbf{M}_l^m &= \mathbf{M}_l^m \cdot \mathbf{N}_l^m = 0, \quad \mathbf{L}_l^m \cdot \mathbf{N}_l^m \neq 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{M}_l^m &= \nabla \cdot \mathbf{N}_l^m = 0, \quad \nabla \times \mathbf{L}_l^m = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

It can be shown that vectors  $\mathbf{M} + \mathbf{N}$  are the eigenvectors of the operator  $\nabla \times$ , that is

$$\nabla \times (\mathbf{N} + \mathbf{M}) = \varkappa (\mathbf{N} + \mathbf{M}).$$

and the field  $\mathbf{N} + \mathbf{M}$  is force-free field. Thus, the vectors  $\mathbf{N} + \mathbf{M}$  can be used as the basis vectors for the representation of an arbitrary force-free field.

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \mathbf{g}_{lm} [\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})]. \quad (6)$$

## 2 The Fourier and Ray transforms of $\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r})$ and $\mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})$ vectors

**Lemma 1.** *The 3D Fourier transforms of Hansen's  $\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r})$  and  $\mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})$  vectors in the spherical coordinate system writes*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_3^{-1} \mathbf{M}_l^m(\mathbf{k}) &= -i^l \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(\mathbf{k} - \varkappa)}{k^2} (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{l(l+1)} i^l \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(\mathbf{k} - \varkappa)}{k^2} \mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{k}}) \\ &= -\sqrt{l(l+1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} i^{l+1} \frac{\delta(\mathbf{k} - \varkappa)}{k^2} \mathbf{Y}_{lm}^{(0)}(\hat{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3^{-1}\mathbf{N}_l^m(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\varkappa} i^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(\mathbf{k}-\varkappa)}{k^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \\
&= \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\varkappa} i^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(\mathbf{k}-\varkappa)}{k^2} \mathbf{k} \times \mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = \sqrt{l(l+1)} i^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(\mathbf{k}-\varkappa)}{k\varkappa} \mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{k}}), \\
&= \sqrt{l(l+1)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} i^{l+1} \frac{\delta(\mathbf{k}-\varkappa)}{k\varkappa} \mathbf{Y}_{lm}^{(1)}(\hat{\mathbf{k}}),
\end{aligned} \tag{8}$$

where  $\mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{k}})$ ,  $\mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{k}})$ , [8], and  $\mathbf{Y}_{lm}^{(0)}(\hat{\mathbf{k}})$ ,  $\mathbf{Y}_{lm}^{(1)}(\hat{\mathbf{k}})$ , [9] are vector spherical harmonics.  $\mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = -i\mathbf{Y}_{lm}^{(0)}(\hat{\mathbf{k}})$ ,  $\mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = \mathbf{Y}_{lm}^{(1)}(\hat{\mathbf{k}})$ .

**Proof Lemma 1.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3^{-1}\mathbf{M}_l^m(\mathbf{k}) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \nabla_{\mathbf{r}} \times [\hat{\mathbf{r}} r j_l(\varkappa r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] d\mathbf{r} \\
&= -(2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} j_l(\varkappa r) (\hat{\mathbf{r}} \times \nabla_{\hat{\mathbf{r}}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r},
\end{aligned}$$

since  $(\hat{\mathbf{r}} \times \nabla_{\hat{\mathbf{r}}})$  only acts on angular variables the integrand writes

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_3^{-1}\mathbf{M}_l^m(\mathbf{k}) &= -(2\pi)^{-3/2} \int_{R^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}) [j_l(\varkappa r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})] d\mathbf{r} \\
&= -(2\pi)^{-3/2} (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) \int_{R^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} j_l(\varkappa r) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) d\mathbf{r}, \\
\nabla_{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial k} + \frac{1}{k} \nabla_{\hat{\mathbf{k}}}, \quad \nabla_{\hat{\mathbf{k}}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}.
\end{aligned}$$

The result is

$$\mathcal{F}_3^{-1}\mathbf{M}_l^m(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} i^l (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) \left\{ Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \frac{\delta(\mathbf{k}-\varkappa)}{k^2} \right\}$$

Noting that the operator  $(\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}})$  acts only on  $\hat{\mathbf{k}}$  and definition of vector functions  $\mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{k}})$  and  $\mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{k}})$ , the Lemma's 1 statement is obtained.

The result for the vector  $\mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})$  is obtained similarly.

**Lemma 2.** Let  $\boldsymbol{\xi} \in S^2$  then the ray transform of  $\mathbf{M}_l^m$  and  $\mathbf{N}_l^m$  vectors writes

$$\mathcal{I}_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{M}_l^m(\rho, \phi) = -\pi i^{l+1} \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha\beta\gamma=0) \frac{J_{m'}(\varkappa\rho)}{\varkappa} i^{m'} e^{im'\phi} A_{lm'}^{\theta'}, \tag{9}$$

$$\mathcal{I}_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{N}_l^m(\rho, \phi) = -\pi i^{l+1} \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha\beta\gamma=0) \frac{J_{m'}(\varkappa\rho)}{\varkappa} i^{m'} e^{im'\phi} B_{lm'}^{\theta'}, \tag{10}$$

$$A_{lm'}^{\theta'} = m' N_{lm'} P_l^{m'}(0), \quad B_{lm'}^{\theta'} = (l+|m'|) N_{lm'} P_{l-1}^{|m'|}(0),$$

$$N_{lm'} = \sqrt{(2l+1)(l-|m'|)!/(4\pi(l+|m'|)!)},$$

$$P_l^{m'}(0) = \begin{cases} (-1)^{(l-|m'|)/2} \frac{(l+|m'|-1)!!}{(l-|m'|)!!}, & \text{when } (l+|m'|) \text{ is even} \\ 0, & \text{when } (l+|m'|) \text{ is odd} \end{cases}$$

where  $D_{mm'}^l(\alpha\beta\gamma)$  are Wigner's  $D$ -functions,  $*$  means complex conjugation,  $\alpha, \beta, \gamma$  are the Euler angles,  $J_{m'}(\varkappa\rho)$  is the Bessel function,  $P_l^{m'}(x)$  are the associated Legendre functions.

**Proof Lemma 2.** According to the central slice theorem [7]

$$\mathcal{F}_2^{-1}\mathcal{I}\mathbf{g}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{1/2}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{F}_3^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \boldsymbol{\xi}^\perp, \quad \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}^\perp = 0,$$

whence one obtains

$$\mathcal{I}\mathbf{g}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{1/2}\mathcal{F}_2^{+1}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathcal{F}_3^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{k})), \quad \mathbf{u}, \mathbf{k} \in \boldsymbol{\xi}^\perp.$$

Using the transformation properties of the vector spherical harmonics under rotation, (A.2), the Fourier transform of the vectors  $\mathbf{M}_l^m$ , in (7) can be written in the rotated coordinate system  $S'(\hat{k}_x, \hat{k}_y, \hat{k}_z)$  as follows

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_l^m(\mathbf{k}) &\equiv \mathcal{F}_3^{-1}\mathbf{M}_l^m(\mathbf{k}) = \sqrt{l(l+1)} i^l \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(\mathbf{k} - \boldsymbol{\varkappa})}{k^2} \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha\beta\gamma) \mathbf{C}_l^{m'}(\hat{\mathbf{k}}') \\ &= -\sqrt{l(l+1)} i^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(\mathbf{k} - \boldsymbol{\varkappa})}{k^2} \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha\beta\gamma) \mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}(\hat{\mathbf{k}}'), \end{aligned}$$

The flat surface passing through the origin is defined by the normal vector  $\boldsymbol{\xi} = \hat{\mathbf{k}}'_z = (0, 0, 1)$  in the coordinate system  $S'$ ,  $\mathbf{k} = R^{-1}(\alpha, \beta, \gamma)\mathbf{k}'$ .

The two dimensional Fourier transform for different vectors  $\boldsymbol{\xi}$  writes

$$\mathcal{F}_2^{+1}\{\boldsymbol{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_l^m(\mathbf{k})\}(\rho, \phi) = -\frac{\sqrt{l(l+1)} i^{l+1}}{2} \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha, \beta) I_{m'}(\rho, \phi), \quad (11)$$

For the simplicity of notation the following notations have been used

$$I_{m'}(\rho, \phi) = \int_0^\infty \frac{\delta(\mathbf{k} - \boldsymbol{\varkappa})}{k^2} k dk \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{-ik\rho \cos(\varphi' - \phi)} \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}(\hat{\mathbf{k}}').$$

Since  $\theta'$  in the frame of reference  $S'$  has the value  $\theta' = \pi/2$ , the following relations hold.

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}(\hat{\mathbf{k}}') = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}_{lm'}^{\mathbf{k}'} = -[\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}]_{\theta'} = \frac{m' N_{lm'} e^{im'\varphi'}}{\sqrt{l(l+1)}} P_l^{m'}(0) = \frac{A_{lm'}^{\theta'} e^{im'\varphi'}}{\sqrt{l(l+1)}},$$

where  $[\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}]_{k'_x}$ ,  $[\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}]_{\theta'}$ ,  $[\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}]_{\varphi'}$  are the components of the vector spherical harmonics  $\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}(\hat{\mathbf{k}}')$  in the spherical coordinate system [9].

$$\mathbf{A}_{lm'}^{\mathbf{k}'} = \begin{pmatrix} [\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}]_{k'_x} \\ [\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}]_{k'_y} \\ [\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}]_{k'_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' & \cos \theta' \cos \varphi' & -\sin \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' & \cos \theta' \sin \varphi' & \cos \varphi' \\ \cos \theta' & -\sin \theta' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}]_{k'} \\ [\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}]_{\theta'} \\ [\mathbf{Y}_{lm'}^{(0)}]_{\varphi'} \end{pmatrix}$$

As a result, an equation (11) is written as

$$\mathcal{F}_2^{+1}\{\boldsymbol{\xi} \cdot \tilde{\mathbf{M}}_l^m(\mathbf{k})\}(\rho, \phi) = -\pi i^{l+1} \sum_{m'=-l}^l D_{mm'}^{l*}(\alpha, \beta) i^{m'} \frac{J_{m'}(\boldsymbol{\varkappa}\rho)}{\boldsymbol{\varkappa}} e^{im'\phi} A_{lm'}^{\theta'},$$

where  $A_{lm'}^{\theta'} = m' N_{lm'} P_l^{|m'|}(0)$ .

The result for the vector  $\mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})$  is obtained similarly.

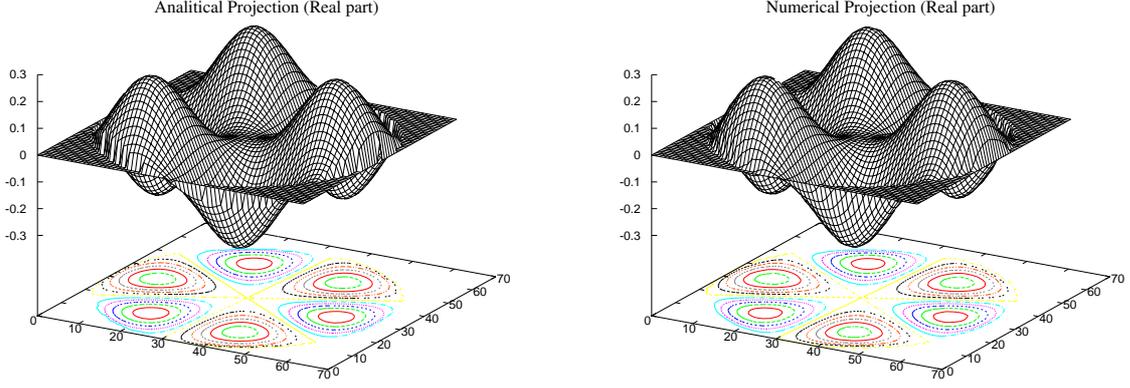


Figure 1: Real parts of the projections of the vector  $\mathbf{M}_3^2(\mathbf{r})$ : Analically calculated by the formula (9) is on the left and by direct numerical calculation is on the right. The relative difference in the norm of  $L^2$  is about 3%.

### 3 An Inversion procedure

As it was demonstrated above (6), the fields  $\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})$  are force-free fields; therefore, any force-free vector field can be presented as a multipole expansion with unknown coefficients  $g_l^m$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_{lm} [\mathbf{M}_l^m(\mathbf{r}) + \mathbf{N}_l^m(\mathbf{r})]. \quad (12)$$

The expression (12) do not contain the functions  $\mathbf{M}_l^m$ ,  $\mathbf{N}_l^m$  with  $l = 0$  since the scalar spherical harmonic  $Y_{00}(\hat{\mathbf{r}})$  is a constant and, consequently,  $\nabla_{\hat{\mathbf{r}}} \times Y_{00}(\hat{\mathbf{r}}) = 0$ .

Respectively, the ray transform of the vector field (12) writes

$$\check{\mathbf{g}}^{\xi}(\rho, \phi) \equiv \mathcal{I}_{\xi} \mathbf{g}(\rho, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_{lm} [\mathcal{I}_{\xi} \mathbf{M}_l^m(\rho, \phi) + \mathcal{I}_{\xi} \mathbf{N}_l^m(\rho, \phi)]. \quad (13)$$

Separating the real and imaginary parts in the equation (13), the ray transformation can be rewritten

$$\check{\mathbf{g}}^{\xi}(\rho, \phi) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_{lm}^R W_{lm}(\rho, \phi) + g_{lm}^I V_{lm}(\rho, \phi). \quad (14)$$

$$W_{lm} = -\pi \sum_{m'=-l}^l d_{mm'}^l(\beta) \frac{J_{m'}(\chi\rho)}{\chi} (B_{lm'}^{\theta'} + A_{lm'}^{\theta'}) f_{lmm'}^{(1)}(\phi)$$

$$V_{lm} = -\pi \sum_{m'=-l}^l d_{mm'}^l(\beta) \frac{J_{m'}(\chi\rho)}{\chi} (B_{lm'}^{\theta'} + A_{lm'}^{\theta'}) f_{lmm'}^{(2)}(\phi),$$

$$f_{lmm'}^{(1)}(\phi) = \cos[m\alpha + m'(\pi/2 + \gamma + \phi) + (l+1)\pi/2]$$

$$f_{lmm'}^{(2)}(\phi) = \sin[m\alpha + m'(\pi/2 + \gamma + \phi) + (l+1)\pi/2].$$

$$\Phi = \int dR \left\{ \check{\mathbf{g}}^{\xi}(\rho, \phi) - \sum_{l=1}^L \sum_{m=-l}^l [g_{lm}^R W_{lm}(\rho, \phi; \xi(\alpha, \beta)) + g_{lm}^I V_{lm}(\rho, \phi; \xi(\alpha, \beta))] \right\}^2, \quad (15)$$

where  $\int dR f(R) = \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin(\beta) d\beta \int_0^{2\pi} d\alpha f(\rho, \phi; \xi(\alpha, \beta))$ .

The equations  $\partial\Phi/\partial g_{l'm'}^R = 0$ ,  $\partial\Phi/\partial g_{l'm'}^I = 0$  are linear with respect to  $g_{l'm'}^R$  and

$\mathbf{g}_{l'm'}^I$  for any  $(l', m')$  and can be written in the form of the following system of equations

$$\sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}} \mathcal{A}_{\mu\nu} X_{\nu} = Y_{\mu}. \quad (16)$$

$$X_{\nu} = \begin{cases} \mathbf{g}_{lm}^R, & \text{for } \nu = l^2 + l + m, \\ \mathbf{g}_{lm}^I, & \text{for } \nu = L(L+2) + l^2 + l + m, \end{cases}$$

$$Y_{\mu} = \int dR \begin{cases} \check{\mathbf{g}}^{\xi}(\rho, \phi) W_{l'm'}(\rho, \phi; \xi(\alpha, \beta)), & \text{for } \mu = (l')^2 + l' + m' \\ \check{\mathbf{g}}^{\xi}(\rho, \phi) V_{l'm'}(\rho, \phi; \xi(\alpha, \beta)), & \text{for } \mu = L(L+2) + (l')^2 + l' + m'. \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{\mu\nu} = \int dR \begin{cases} W_{lm} W_{l'm'} + V_{lm} V_{l'm'}, & \text{for } \begin{cases} \mu = l^2 + l + m, \\ \nu = (l')^2 + l' + m' \end{cases} \\ -V_{lm} W_{l'm'} + W_{lm} V_{l'm'}, & \text{for } \begin{cases} \mu = l^2 + l + m, \\ \nu = L(L+2) + (l')^2 + l' + m' \end{cases} \\ W_{lm} V_{l'm'} - V_{lm} W_{l'm'}, & \text{for } \begin{cases} \mu = L(L+2) + l^2 + l + m, \\ \nu = (l')^2 + l' + m' \end{cases} \\ -V_{lm} V_{l'm'} + W_{lm} W_{l'm'}, & \text{for } \begin{cases} \mu = L(L+2) + l^2 + l + m, \\ \nu = L(L+2) + (l')^2 + l' + m'. \end{cases} \end{cases}$$

## 4 Conclusion

An important special class of the problems of magnetohydrodynamic stability is characterized by the absence of the Lorentz force, i.e.,  $\nabla \times \mathbf{B} = \varkappa \mathbf{B}$ , where  $\varkappa$  is a certain constant. Such (force-free) fields play an important role in astrophysical problems, in a plasma stability problems, in studying hydrodynamic processes, etc.[10]. The proposed method allows to study 3D force-free fields by the use of ray transform known from experiments. In particular, direct measurements in plasma facilities are often rather difficult, whereas the ray transform under fairly general assumptions can be obtained from the spectral measurements [11]. For the vector field and ray transform representations the Hansen vectors have been used [5]. An analytical form of the ray transform for Hansen vectors are obtained.

## 5 Appendix

### 1. Vector spherical harmonics. Some properties.

The set of vector spherical harmonics used in this paper are introduced in [1], [7].

$$\mathbf{P}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{r}}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A.1a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{-1}{\sqrt{l(l+1)}}(\hat{\mathbf{r}} \times \nabla_{\hat{\mathbf{r}}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A.1b}) \\ &= \left[\frac{im}{\sqrt{l(l+m)}}\frac{1}{\sin\theta}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \left[-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(l-m)(l+m+1)}{l(l+1)}}e^{-i\varphi}Y_{lm+1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{l(l+1)}}e^{i\varphi}Y_{lm-1}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\nabla_{\hat{\mathbf{r}}}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.1c}) \\ &\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(l-m)(l+m+1)}{l(l+1)}}e^{-i\varphi}Y_{lm+1} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{l(l+1)}}e^{i\varphi}Y_{lm-1}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \\ &\left[\frac{im}{\sqrt{l(l+m)}}\frac{1}{\sin\theta}Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}$$

where  $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$  are scalar spherical harmonics, the operators  $\nabla_{\mathbf{r}}, \nabla_{\hat{\mathbf{r}}}$  are given in the form

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\nabla_{\hat{\mathbf{r}}}, \quad \nabla_{\hat{\mathbf{r}}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

The vector spherical harmonics  $\mathbf{P}_l^m, \mathbf{C}_l^m, \mathbf{B}_l^m$  and vector spherical harmonics  $\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)}, \mathbf{Y}_{lm}^{(0)}, \mathbf{Y}_{lm}^{(1)}$ , [8], are related to each other as follows  $\mathbf{P}_l^m = \mathbf{Y}_{lm}^{(-1)}$ ,  $\mathbf{C}_l^m = -i\mathbf{Y}_{lm}^{(0)}$ ,  $\mathbf{B}_l^m = \mathbf{Y}_{lm}^{(1)}$ . Under rotation of the frame of reference defined by Euler angles, the vectors  $\mathbf{P}_l^m, \mathbf{C}_l^m, \mathbf{B}_l^m$  are transformed in the same manner as vectors  $\mathbf{Y}_{lm}^{(-1)}, \mathbf{Y}_{lm}^{(0)}, \mathbf{Y}_{lm}^{(1)}$ .

$$\mathbf{Y}_{lm'}^{(\lambda)}(\hat{\mathbf{r}}') = \sum_{m=-l}^l \mathbf{Y}_{lm}^{(\lambda)}(\hat{\mathbf{r}})D_{mm'}^l(\alpha, \beta, \gamma), \quad \lambda = (-1, 0, 1). \quad (\text{A.2})$$

Vector spherical harmonics are pointwise perpendicular,

$$\mathbf{P}_l^m \cdot \mathbf{C}_l^m = \mathbf{C}_l^m \cdot \mathbf{B}_l^m = \mathbf{B}_l^m \cdot \mathbf{P}_l^m = 0, \quad (\text{A.3})$$

and they satisfy the orthogonality conditions

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \mathbf{P}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{P}_l^{m'*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) &= \int_{S^2} \mathbf{C}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{C}_l^{m'*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{A.4}) \\ &= \int_{S^2} \mathbf{B}_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{B}_l^{m'*}(\hat{\mathbf{r}}) ds(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \end{aligned}$$

## References

- [1] S. Chandrasekhar, P.C. Kendall P.C., On Force-Free Magnetic Fields, *Astrophys. J.*, 126, 1957, 457-460.
- [2] S. Chandrasekhar, On Force-Free Magnetic Fields, *Proc. Nat. Acad. Sci. of USA*, 42, 1956, No1, 1-5.
- [3] H.K. Moffat, Magnetic field generation in electrically conducting fluids, Cambridge Univ. Press, London, New-York, 1978.
- [4] S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford University Press, 1961.

- [5] W.W. Hansen, A new type of expansion in radiation problems, *Phys. Rev.* 47, 1935, 139-143.
- [6] J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1941.
- [7] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [8] P.M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, Vols 1, 2, McGraw-Hill: New York, 1953.
- [9] D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, V.K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific Publishing: Singapore, 1988.
- [10] G.E. Marsh, *Force-Free Magnetic Fields. Solution, Topology and Applications*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd, 1996.
- [11] A.L. Balandin, Y. Ono, Tomographic determination of plasma velocity with the use of ion Doppler spectroscopy, *Eur. Phys. J. D*, 17, 2001, 337-344. doi:10.1007/s100530170008

# ЧИСЛЕННОЕ ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА С ОБНОВЛЕНИЕМ ШТРАФНОГО ПАРАМЕТРА

М.В. Баркова, А.С. Стрекаловский

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
mbarkova@icc.ru, strekal@icc.ru

В работе рассматривается задача минимизации d.c. функции с d.c. ограничениями - неравенствами:

$$\begin{cases} f_0(x) = g_0(x) - h_0(x) \downarrow \min_x, x \in S, \\ f_i(x) = g_i(x) - h_i(x) \leq 0, i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, m\}, \end{cases} \quad (P)$$

где функции  $g_i, h_i, i \in \mathcal{I} \cup \{0\}$  – выпуклые, множество  $S \in \mathbb{R}^n$  – выпуклое и замкнутое.

В предположении, что допустимое множество задачи (P) не пусто, а её оптимальное значение конечно, задача (P) сводится к следующей вспомогательной задаче:

$$\Theta_\sigma(x) = f_0(x) + \sigma W(x) \downarrow \min_x, x \in S, \quad (P_\sigma)$$

где  $\sigma \geq 0$  – штрафной параметр, а  $W(x) := \max\{0, f_1(x), \dots, f_m(x)\}$  – штрафная функция. Кроме того функция  $\Theta_\sigma(\cdot)$  является d.c. функцией:

$$\Theta_\sigma(x) = G_\sigma(x) - H_\sigma(x).$$

Для поиска локального решения в задаче (P) разработан новый специальный метод, основанный на линейаризации оштрафованной задачи (P<sub>σ</sub>) по базовой невыпуклости [1]:

$$\Phi_v(x) := G_\sigma(x) - \langle H'_\sigma(v), x \rangle \downarrow \min_x, x \in S, \quad (P_\sigma L(v))$$

где  $H'_\sigma(v) \in \partial H_\sigma(v)$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Особенностью этого метода локального поиска является использование теории двойственности для невыпуклых задач, а также процедуры выбора и изменения значения штрафного параметра  $\sigma$ . Линейаризованные задачи, возникающие на шагах метода локального поиска, являются выпуклыми и могут быть решены любыми подходящими методами выпуклой оптимизации [2] и пакетами прикладных программ.

Тестирование работоспособности и эффективности метода локального поиска проводилось на задачах с квадратичными функциями вида:

$$f_i(x) = \langle x, Q^i x \rangle + \langle b_i, x \rangle + d_i, i \in \mathcal{I} \cup \{0\},$$

где  $Q^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – знаконеопределённые матрицы,  $x, b_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , с известными глобальными решениями [3,4].

Метод локального поиска реализован в среде Matlab. Для решения вспомогательных выпуклых задач использована встроенная функция `fmincon`.

Первые вычислительные эксперименты по тестированию метода локального поиска показали его работоспособность и возможность применения в алгоритме глобального поиска.

1. Strekalovsky A. S. Local search for nonsmooth DC optimization with DC equality and inequality constraints (в печати).
2. Nocedal J., Wright S. Numerical Optimization. New York: Springer-Verlag, 2006.
3. Floudas C.A., Pardalos P.M. Handbook of Test Problems in Local and Global Optimization. Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.
4. The COCONUT Benchmark, <https://www.mat.uni.vie.ac.at/~neum/glopt/coconut/Benchmark/Benchmark.html> (21.11.2018).

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДВОДНОГО РЕЛЬЕФА И ТЕЧЕНИЙ В СОСТАВЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРУЮЩЕГО КОМПЛЕКСА

К.В. Беденко

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
bedenko@icc.ru

Назначение имитационного моделирующего комплекса заключается в предоставлении виртуального полигона для тестирования и отладки алгоритмов интеллектуального поведения автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) и их группировок. В данной работе описывается модуль моделирования подводной среды, который включает в себя генератор рельефа морского дна и генератор подводных течений согласно рельефу.

Рассматривается задача генерации реалистичного рельефа морского дна с возможностью настройки параметров рельефа посредством использования графического интерфейса пользователя (graphical user interface, GUI). Данная задача находит практическое применение в различных областях, и в зависимости от поставленной цели используются разные алгоритмы генерации и их комбинации [1]. В данной работе предложена концепция настройки параметров ландшафта, количество этапов генерации и схема переключения состояний GUI. Улучшен алгоритм генерации рельефа с использованием ранее разработанного метода «масок» (на основе шума Перлина [2]), который позволяет формировать ландшафт «по слоям» и учитывает выбранные пользователем параметры: высоту холмов или гор, их зернистость и др. Предложена схема формирования реалистичного рельефа морского дна с использованием четырех шагов. Первым шагом является создание «подложки» – песчаного дна, на котором в дальнейшем размещаются все остальные объекты рельефа. Далее следует создание «больших» (100–400 м), «средних» (30–100 м) и «малых» (1–30 м) гор, чьи размеры классифицированы по удобству использования и генерации. Реализованы сохранение и загрузка карты рельефа. Кроме этого, реализован подход по генерации карты высот рельефа на основе фрактального алгоритма «diamond-square» и предложена его модификация, которая позволяет генерировать с заданными параметрами «крутизны» и «зернистости» какую-либо часть рельефа размером  $2^n \times 2^n$  м<sup>2</sup> (где  $n$  – целое), опираясь на данные высот на ее границах, таким образом предоставляя более гибкий инструмент для работы с рельефом и формирования зон с различными типами песчаных холмов и гористых поверхностей.

В рамках моделирования подводной среды также рассматривается задача генерации подводных течений согласно полученному рельефу. Предлагается использовать подход, основанный на алгоритме поиска пути на квадратной регулярной сетке [3]. Генерация течений проходит в три этапа: 1) создание бинарной карты проходимостей по данным о высотах рельефа; 2) выбор «источника» течения, присвоение ему нулевого значения и дальнейшее использование алгоритма фронта волны для заполнения карты стоимостей; 3) генерация векторов поля течения по карте стоимостей. Реализовано расширение данного алгоритма на трехмерный случай, а также предложен ряд модификаций. Перенос источника за пределы видимой для пользователя карты позволил избавиться от «стягивания» всех объектов, плывущих по течению, к одной зоне. Использование на втором этапе случайного набора ячеек из всех возможных смежных ячеек на текущем шаге алгоритма, а также выбор случайного слагаемого от 0 до 1 при вычислении поля стоимостей разнообразили поле течений.

Обработка стоимости ячеек, смежных с непроходимыми, улучшила визуальную составляющую процесса огибания препятствия течением.

1. Rastislav Tisovčík. Generation and Visualization of Terrain in Virtual Environment / Bachelor thesis // Masaryk University, Brno, Czech Republic, 2012. URL: <https://is.muni.cz/th/hb7zk/Thesis.pdf>
2. Perlin K. Improving Noise // ACM Transactions on Graphics (TOG). 2002. Vol. 21, No. 3.
3. Pentheney G. Efficient Crowd Simulation for Mobile Games // Game AI Pro: Collected Wisdom of Game AI Professionals. A K Peters/CRC Press. 2013, September. Vol. 1. URL: [http://www.gameapro.com/GameAIPro/GameAIPro\\_Chapter24\\_Efficient\\_Crowd\\_Simulation\\_for\\_Mobile\\_Games.pdf](http://www.gameapro.com/GameAIPro/GameAIPro_Chapter24_Efficient_Crowd_Simulation_for_Mobile_Games.pdf)

# АВТОМАТИЗАЦИЯ ВЫЗОВА СЕРВИСОВ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ, ПОЛУЧАЕМЫХ С ДАТЧИКОВ МОБИЛЬНОГО УСТРОЙСТВА<sup>1</sup>

М. Л. Воскобойников

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[voskoboynikov1988@gmail.com](mailto:voskoboynikov1988@gmail.com)

На сегодняшний день развитие сетей передачи данных обеспечивает достаточно высокую скорость обмена информацией практически в любой точке мира. Активно внедряются и удешевляются разнородные информационные и программно-аппаратные системы, позволяющие получать точные и оперативные данные с различных датчиков, реализовать удаленное управление. Развитие программно-аппаратных систем и сетей передачи данных позволяет производить автоматизацию большего количества процессов, окружающих человека. Уже сейчас человек способен управлять многими устройствами, используя мобильный телефон. Многие устройства предоставляют программный интерфейс в виде Web-сервисов, доступных через Интернет, что дает возможность унифицировать их использовать, организовать каталогизацию сервисов, поиск и т.д. Для взаимодействия с такими сервисами могут применяться как стандартизированные, такие как, REST, WPS, SOAP, так и не стандартизированные интерфейсы и протоколы.

Для сбора и хранения данных об использовании сервисов разработано Android-приложение, устанавливаемое на мобильное устройство пользователя.

Разработан метод классификации контекстов использования сервисов, позволяющий автоматизировать их вызов сервисов внутри помещения. Контекстом использования сервисов внутри помещения являются данные, получаемые с видимых мобильным устройством Wi-Fi точек доступа. Разработанный метод классификации базируется на расчете метрики, учитывающей изменение уровня сигнала Wi-Fi точек доступа в зависимости от расстояния до мобильного устройства. Точность классификации составляет 95%, что позволяет использовать данный метод в системах умного дома и умного города. Метод реализован в виде модуля Android-приложения.

Для достижения высокой точности классификации использования сервисов внутри помещения необходимо постоянно получать данные с видимых Wi-Fi точек доступа, что ведет к повышенному энергопотреблению. Для снижения энергопотребления Android-приложением разрабатывается метод предсказания значения метрики.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке центра коллективного пользования ИИВС ИРНОК и гранта РФФИ, № 16-07-00411.

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЛНОФАКТОРНОЙ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АЭРОДИНАМИКИ  
ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ВБЛИЗИ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Галушко Е.А., Кривель С.М.  
Иркутский государственный университет, Иркутск  
[photon\\_91@mail.ru](mailto:photon_91@mail.ru)

Особенностью движения летательного аппарата (ЛА) вблизи подстилающей поверхности является его сложная многофакторная аэродинамика [1,2]. В качестве основных факторов, влияющих на изменение характеристик летательного аппарата, могут выступать: отстояние от поверхности экрана, углы отклонения управляющих поверхностей, углы атаки и углы скольжения.

Следует отметить, что подобный режим полета (полет вблизи экрана) используют экранопланы. Поскольку для таких ЛА экранный режим полета является эксплуатационным, поэтому данное исследование является достаточно актуальным.

Как известно, на большинстве экранопланов для улучшения их взлетно-посадочных характеристик применяется поддув под несущие поверхности (крылья или центроплан). Это приводит к увеличению их несущих свойств и улучшению эксплуатационных характеристик. Влияние поддува оказывает значительный эффект, так, например, подъемная сила экраноплана может увеличиться в 2 и более раз. Так же следует учесть тот факт, что при изменении угла атаки ЛА значительное влияние оказывает положение его центра тяжести, так как при вращении ЛА относительно этой точки изменяется расстояние от задней кромки несущих поверхностей до экранирующей поверхности.

Предложенная в настоящей работе математическая модель учитывает наиболее полный спектр параметров, влияющих на летательный аппарат около подстилающей поверхности в прямолинейном горизонтальном полете, включая кинематические и управляющие факторы. Представление аэродинамических коэффициентов реализовано с учетом нелинейных зависимостей аэродинамических характеристик ЛА от параметров его движения. Для нахождения аэродинамических характеристик ЛА использовалась программа конечно-элементного анализа ANSYS.

Особенностью предлагаемой модели, является возможность получения аэродинамических характеристик не только с учетом угла атаки, угла скольжения, угла крена, относительного отстояния от подстилающей поверхности, углов отклонения управляющих поверхностей и вариантов положения центра тяжести летательного аппарата, но и с учетом поддува как вне, так и вблизи поверхности раздела сред.

Для упрощения математической модели и уменьшения расчетных данных выполнены некоторые допущения. Так, при изменении в небольшом диапазоне угла атаки ЛА и координаты его центра тяжести приращение коэффициентов при отклонении управляющих поверхностей изменяются незначительно. Поэтому приращения аэродинамических коэффициентов зависят только от относительного отстояния, угла управляющих поверхностей и скорости струи.

Таким образом, предлагаемая математическая модель позволяет достаточно достоверно определить аэродинамические характеристики летательного аппарата в прямолинейном горизонтальном полете с учетом различных факторов, в том числе и с учетом поддува. Также данная модель позволяет определить сложную аэродинамику вблизи поверхности раздела сред с учетом особенностей выдува струи и процесса обтекания объекта. В дальнейшем данная математическая модель может широко применяться для исследования динамических свойств летательного аппарата.

1. Жуков В.И. Особенности аэродинамики, устойчивости и управляемости экраноплана. - М.: Изд. ЦАГИ им. проф. Н.Е.Жуковского, 1997.
2. Маскалик А.И., Колызаев Б.А., Жуков В.И. и др. Экранопланы. Особенности теории и проектирования. - СПб.: Судостроение, 2000.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АТАК В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ БУЛЕВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Д.Е. Горбатенко, А.А. Семенов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО

РАН ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»

[gorbadima@yandex.ru](mailto:gorbadima@yandex.ru) , [biclop.rambler@yandex.ru](mailto:biclop.rambler@yandex.ru)

Рассмотрим математическую модель, в которой компьютерная сеть представлена графом  $G = (V, E)$ , где множества  $V, E$  интерпретируют компьютеры в сети (хосты) и наличие физической связи между хостами соответственно. Определим для этой сети набор правил взаимодействия между хостами в дискретном времени, а также условия возможности исполнения этих правил. Такие условия назовем уязвимостями, а правила, эксплуатирующие эти уязвимости, будем называть элементарными атаками. Результатом элементарной атаки на хост является повышения прав некоторого пользователя на нём. Предполагается, что расстановка уязвимостей на хостах известна и не меняется во времени.

Выделим в множестве  $V$  два хоста –  $v_M$ , принадлежащий злоумышленнику, и  $v_T$ , являющийся целью злоумышленника в сети (целевым хостом). Целью злоумышленника является установление полного контроля над целевым хостом.

Графы атак [1-2] – это графы специального вида, отображающие множество возможных атак в сети, которые может осуществить злоумышленник. Эти графы используются для оценки безопасности компьютерных сетей и разработки мер противодействия атакам.

В докладе будет представлен подход к построению т.н. «графов атак», основанный на решении задачи булевой выполнимости (SAT). Более точно, будет показано, что для построения графа атак на самом деле достаточно использовать простое правило распространения булевых ограничений, известное как Unit Propagation rule [3]. Преимуществом предложенного подхода является возможность строить графы атак, которые не содержат циклов и отображают строгую причинно-следственную связь действий злоумышленника за счёт явно описанной дискретной динамики развития событий в сети.

С использованием предложенного подхода была разработана программа, получившая название UnProVET – Unit Propagation Vulnerability Escalation Tool, успешно решающая поставленную задачу. В докладе будет проведено сравнение функциональных возможностей ресистемы UnProVET и широко известного инструмента построения графов атак MulVAL[4-5].

1. Sheyner O., Haines J.W., Jha S., Lippman R., Wing J. M. Automated Generation and Analysis of Attack Graphs // Proceedings of 2002 IEEE Symposium on Security and Privacy. 2002. P. 273-284.
2. Amman P., Wijesekera D., Kaushik S. Scalable, Graph-Based Network Vulnerability Analysis // Proc. of 9th ACM Conf. on Computer and Communication Security. 2002. P. 217-224.
3. Marques-Silva J.P., Lynce I., Malik S. Conflict-driven clause learning SAT solvers. In Biere et al. “Handbook on Satisfiability”. IOS Press. 2009. P. 131-153.
4. Ou X., Govindavajhala S., Appel A. MulVAL: A Logic-based Network Security Analyzer // SSYM'05 Proc. of the 14th conference on USENIX Security Symposium. 2005. Vol. 14. P. 113-128.
5. Ou X., Boyer W., McQueen M. A scalable approach to attack graph generation //Proc. of the 13th ACM Conference on Computer and Communications Security. 2006. P. 336-345.

## ПАМЯТЬ-ЭКОНОМИЧНЫЕ ЭВРИСТИЧЕСКИЕ ВАРИАНТЫ МЕТОДА НЕРАВНОМЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ Ю.Г.ЕВТУШЕНКО\*

А.Ю. Горнов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

Алгоритмы поиска глобального экстремума функции, исходя из их требований к оперативной памяти вычислительных систем, можно условно разделить на «мало-затратные» и алгоритмы «с полной памятью». Алгоритмы первого типа (методы случайного поиска, варианты мултистарта, методы «поколений», «basin hoping», методы, основанные на одномерной оптимизации, биоинспирированные методы и др.) очень популярны и способны, в ряде случаев, получать решения задач достаточно больших размерностей. В оперативной памяти, как правило, хранится только рекордная точка и рекордное значение функции, небольшой комплект аппроксимирующих точек («популяция»), оценки констант роста и информация, необходимая для работы вспомогательных локальных методов оптимизации. Но экономичность этих методов накладывает серьезные ограничения на их эффективность, и в достаточно сложных, мультиэкстремальных задачах или задачах с малой областью притяжения глобального экстремума нахождение верного решения может оказаться невозможным за разумное время. Алгоритмы «с полной памятью» (интервальные методы, методы липшицевой оптимизации, «диагональные» методы, методы семейства «alfa-BB», методы покрытий и другие) традиционно ориентированы на гарантированное достижение глобального решения. Но при этом возникают жесткие ограничения на классы задач – необходимо точное знание констант роста, факторизуемость функции, наличие явного разложения на разность выпуклых, отсутствие «wrapping»-эффектов и др. Кроме того, экспоненциальный рост числа брусков во вспомогательных разложениях приводит к жесткому ограничению на размерность решаемых задач, на практике, как правило, не превышающей десятка переменных. К сожалению, не слишком расширяют возможности указанных методов также и технологии распараллеливания и виртуализации памяти.

Предложенные в работах Ю.Г. Евтушенко (см., напр., [1]) методы неравномерных покрытий могут быть отнесены к методам «с полной памятью». В докладе обсуждаются предложенные эвристические варианты метода неравномерных покрытий, ориентированные на невыпуклые задачи средних и больших размерностей – до нескольких тысяч переменных, реализуемые исходя из объемов доступной оперативной памяти. Оценка перспективности брусков производится с помощью метода случайного мултистарта, что позволяет существенно расширить класс задач и снять требование априорного знания констант роста. Генерируемый посредством технологии разбиения по максимальному ребру список брусков линейно разбивается на три множества: А) «наилучшие», В) «перспективные» и С) «малоперспективные» и может занимать всю доступную оперативную память. На каждой итерации алгоритма бруски сортируются отдельно в каждом из множеств А, В и С. Периодическая процедура координации приводит к переводу брусков из одного множества в другое в зависимости от оценок их перспективности; вытесненные из множества С бруски исчезают из рассмотрения. Для повышения надежности алгоритма используется процедура перезапуска с сохранением списка наилучших брусков. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Evtushenko Yu. G., Posypkin M. A. A deterministic algorithm for global multi-objective optimization // Optimization Methods and Software. 2014, v. 29, i. 5, pp. 1005-1019.

---

\* Работа поддержана РФФИ, проект 18-07-00587.

# МЕТОДИКА ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАНТИЙНЫХ И КОРОВЫХ МАГМ НА РАЗЛИЧНЫХ ГИПСОМЕТРИЧЕСКИХ УРОВНЯХ ЗЕМНОЙ КОРЫ\*

А.Ю. Горнов, Д.П. Гладкочуб, Е.В. Скляр, Т.В. Донская  
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
Институт земной коры СО РАН  
[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

Моделирование процессов магматических взаимодействий может позволить уточнить оценку временных интервалов и масштабов гранитообразования, а также температур родоначальных расплавов и доли в них мантийного вещества, позволит провести численное моделирование процессов формирования гранитоидов, слагающих гигантские батолиты в пределах рассматриваемого региона, и обеспечить корректность петрологическим моделям, геодинамическим интерпретациям и последующим металлогеническим прогнозам. Результаты моделирования позволят решить вопрос о правомочности отнесения гранитоидных батолитов карбона-перми и триаса, в совокупности с близковозрастными им базит-ультрабазитовыми комплексами Забайкалья и Северной Монголии, к категории редкого «сиалического» типа крупных изверженных провинций, аналоги которых на территории РФ до настоящего времени еще не были обнаружены (см., напр., [1, 2]).

В работе поставлена задача моделирования взаимодействий, позволяющих учитывать соотношение изотопных характеристик в гранитоидах и близковозрастных базитах, и, таким образом, определить вклад мантийного вещества в источники гранитных магм для каждого этапа батолитообразования. В докладе обсуждается математическая модель процессов магматических взаимодействий, описываемая нелинейной системой дифференциальных уравнений. Информационное наполнение модели выполнялось на основе комплекса геологических, геофизических и петрогеохимических данных, как известных из литературы, так и полученных в ходе полевых работ. Для решения задачи параметрической идентификации применялись многометодные вычислительные технологии, реализованные в рамках программного комплекса OPTCON (см., напр., [3]). Использованы вычислительные схемы, основанные на алгоритмах поисковой оптимизации – методах Пауэлла-Брента, Лууса-Яаколы, Растригина, сферического и туннельного поиска. Оценка допустимых интервалов для параметров модели производилась с применением алгоритмов фазового оценивания. Проведенное математическое моделирование позволило выявить некоторые закономерности становления крупных изверженных провинций «сиалического» типа.

1. Скляр Е.В., Гладкочуб Д.П., Котов А.Б., Старикова А.Е., Шарьгин В.В., Великославинский С.Д., Ларин А.М., Мазукабзов А.М., Толмачева Е.В., Хромова Е.А. Генезис Катугинского редкометального месторождения: магматизм против метасоматоза // Тихоокеанская геология. 2016. Т. 35. № 3. С. 9–22.
2. Котов А.Б., Владыкин Н.В., Ларин А.М., Гладкочуб Д.П., Сальникова Е.Б., Скляр Е.В., Толмачева Е.В., Донская Т.В., Великославинский С.Д., Яковлева С.З. Новые данные о возрасте оруденения уникального Катугинского редкометалльного месторождения (Алданский щит) // Доклады Академии наук. 2015. Т. 463. № 2. С. 187–191.
3. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск, Наука, 2009.

---

\* Работа поддержана интеграционным проектом Комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН, проект № 39.

## МНОГОМЕТОДНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ СО ЗНАКОВОЙ ФУНКЦИЕЙ АКТИВАЦИИ\*

А.Ю. Горнов, Е.А. Нурминский, А.С. Аникин  
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
Дальневосточный федеральный университет  
[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru), [nurmi@dvo.ru](mailto:nurmi@dvo.ru)

Одной из самых популярных методик искусственного интеллекта является, несомненно, методика моделирования на основе искусственных нейронных сетей («нейромоделирование»). Предложенная более полувека назад технология конструирования функций, аппроксимирующих данные, вызывает постоянный интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Особую значимость в настоящее время придает этой методике успешность решения множества нетривиальных практических задач, которые ранее были доступны для исследования только с применением человеческого интеллекта. Имеется и большой «социальный заказ» на нейромоделирование, и огромные надежды «лиц, принимающих решения» на достижение существенных и/или прорывных результатов во всех прикладных сферах. Появившаяся в последние годы т.н. «теория глубокого обучения», которую многие специалисты считают всего-навсего ребрендингом метода нейромоделирования, вызвала огромный общественный резонанс и удостоилась даже публикаций в журналах, никогда ранее не уделявших внимания математическим проблемам (см., напр., [1]).

Одной из важнейших задач, возникающих при конструировании нейронных моделей, является задача их обучения. Обучение модели традиционно основывается на наборах экспериментальных данных, сформированных в формате обучающей выборки. Смысл обучения состоит в поиске значений внутренних параметров модели, позволяющих наилучшим образом – в смысле некоторого функционала невязки – совместить ее выходные переменные с аппроксимируемыми данными. С математической точки зрения это задача конечномерной оптимизации, еще точнее, параметрической идентификации. Но имеется и существенная специфика задачи: оптимизируемые функционалы, за редким исключением, невыпуклые; весьма вероятным является вырожденность функционалов, связанная с разномасштабным влиянием оптимизируемых параметров; для моделей с негладкими функциями активации целевые функционалы недифференцируемы.

В докладе обсуждается многометодная методика обучения нейронных сетей, включающих знаковые функции активации. На первом этапе расчетов применяются глобализующие методы, ориентированные на поиск приближений в окрестности глобального экстремума – партан-алгоритм, алгоритмы табу поиска, Лууса-Яколы, Хука-Дживса, Растригина, криволинейного и туннельного поиска. На этапе уточнения решения использованы методы недифференцируемой оптимизации (см., напр., [2]) либо методы гладкой оптимизации (квазиньютоновские, сопряженных направлений, Пауэлла-Брента и другие), дополненные единой параметризованной технологией сглаживания знаковой функции типа арктангенса. Вычислительные эксперименты, проведенные для полносвязных нейронных моделей перцептронного типа с одним и двумя внутренними слоями, подтвердили принципиальную работоспособность предложенного подхода.

1. LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep Learning // Nature, 2015. V. 521, pp. 436–444.
2. Нурминский Е.А., Тьен Д. Метод сопряженных субградиентов с ограниченной памятью // Автоматика и телемеханика, 2014, № 4. С. 67–80.

---

\* Работа поддержана РФФИ, проект 18-29-03071.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА РЕЛАКСАЦИИ  
ФОТОПРОВОДИМОСТИ МАССИВА КВАНТОВЫХ ТОЧЕК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ\*

А.Ю. Горнов<sup>1</sup>, Т.С. Зароднюк<sup>1</sup>, А.Ф. Зиновьева<sup>2</sup>, А.В. Ненашев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН

<sup>2</sup>Институт физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН

[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru), [tz@icc.ru](mailto:tz@icc.ru), [aigul@isp.nsc.ru](mailto:aigul@isp.nsc.ru), [nenashev@isp.nsc.ru](mailto:nenashev@isp.nsc.ru)

В работе проведена параметрическая идентификация модели, отражающей динамику процесса временной релаксации фотопроводимости в зависимости от интенсивности освещения и напряженности магнитного поля [1, 2]. Исследованы различные варианты структуры предложенной динамической модели, включающей в правых частях системы дифференциальных уравнений от пяти до тринадцати компонент, как линейных, так и нелинейных. Для идентификации построенных моделей была создана информационная система, включающая результаты экспериментов по измерению воздействия на образцы светового и магнитного поля при криогенных температурах.

Рассмотрены семейства вложенных структур моделей, включающих как однопараметрические, так и двухпараметрические варианты управляемых динамических систем. В однопараметрических вариантах предполагалось, что проводимость образца определяется единственным параметром, зависящим от времени, а именно, фактором заполнения квантовых точек носителями заряда. В двухпараметрических вариантах моделей добавлялось влияние фактора проявления ловушек для носителей заряда в окружающей квантовые точки полупроводниковой матрице. Для проведения вычислительных экспериментов использовался разработанный авторами специализированный программный комплекс, включающий методы оптимизации, алгоритмы интегрирования динамических систем, диалоговую систему, средства настройки алгоритмических параметров, средства коррекции модели, алгоритмы предоптимизационного и постоптимизационного анализа, средства конструирования многометодных вычислительных схем, средства верификации и визуализации полученных решений.

В результате проведенных компьютерных экспериментов была установлена существенно более высокая точность двухпараметрических вариантов моделей. Выполненные расчеты позволили выявить и количественно оценить вклад ловушек (центров локализации) для носителей заряда в полупроводниковой матрице в процесс релаксации фотопроводимости массива квантовых точек в магнитном поле.

1. Н.П. Степина, А.И. Якимов, А.В. Ненашев, А.В. Двуреченский, Н.А. Соболев, Д.П. Лейтао, В.В. Кириенко, А.И. Никифоров, Е.С. Коптев, Л. Перейра, М.С. Кармо. Фотопроводимость по массиву туннельно-связанных квантовых точек Ge/Si. Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2006, т. 130, № 2. – С. 309–318.
2. Н.П. Степина, А.В. Ненашев, А.В. Двуреченский. Эффект Холла в прыжковой проводимости по ансамблю квантовых точек. Письма в ЖЭТФ, т. 106, вып. 5, 2017. – С. 288–292.

---

\*Работа поддержана интеграционным проектом Комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН, проект № 7.

## РЕЙДЕР-МЕТОД ДЛЯ КВАЗИСЕПАРАБЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ\*

А.Ю. Горнов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

В последние годы интересные результаты появляются на пути переосмысления потенциала методов оптимизации с несложными конструкциями, предложенными «на заре» исследований по теории оптимизации. Специализация простых алгоритмов на отдельные классы задач привела к появлению новых возможностей для эффективного решения задач с большим (large scale) и сверхбольшим (huge scale) числом переменных – миллионами и миллиардами. В частности, в работах Ю.Е. Нестерова (см., напр., [1]) с использованием переоткрытого им «дерева Канторовича» («абстрактное синтаксическое дерево») построены высокоскоростные алгоритмы для класса «матричных задач» (минимизации функций, зависящих от матриц) и получены оценки их вычислительной сложности. Однако, гарантированные оценки сложности алгоритмов, как правило, очень завышены, и на практике предложенные алгоритмы могут получать оптимальные решения невероятно быстро.

Рассматривается экстремальная задача конечномерной оптимизации квазисепарабельного класса. В данном классе будем рассматривать задачи поиска минимума функции, у которой гессиан имеет структуру, близкую – в каком-то смысле – к диагональной. В частности, к квазисепарабельным задачам можно отнести задачи с гессианами, имеющими ненулевые элементы только на нескольких диагоналях, прилегающих к основной – трехдиагональные, пятидиагональные и т.д. (см., напр., [2]).

В докладе обсуждается предложенный вариант градиентного метода, названный нами «рейдер-алгоритмом», устройство которого заставляет вспомнить многочисленные негативные явления в современной отечественной экономике – передел собственности, рейдерские захваты и др. Идея алгоритма проста – на каждой итерации следует пытаться продвинуться только по существенным, наиболее «влиятельным» компонентам, не обращая внимание на малозначимые – в данный момент – переменные, которые способны, тем не менее, существенно сдерживать продвижение за счет ограничения на шаг по направлению спуска. При этом список «влиятельных» переменных может радикальным образом изменяться от итерации к итерации – «кто был ничем, тот станет всем». Для реализации подхода вычисляется максимальная по модулю компонента градиента и, применяя «сечение от максимального», управляемое алгоритмическим параметром, все компоненты градиента, модули которых меньше порогового уровня, полагаются равными нулю. Предложенная стратегия оказалась особенно успешной для квазисепарабельных задач с диагональным преобладанием в гессиане и при отсутствии существенного «овражного эффекта». Для оценки шага по «усеченному» направлению спуска оказалось целесообразным использование простейшего алгоритма поиска, реализующего кратное деление шага до достижения улучшения по значению функции.

Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. МЦНМО, Москва, 2010 г. 281 с.
2. Andrianov A.N., Anikin A.S., Bychkov I.V., Gornov A.Y. Numerical solution of huge-scale quasiseparable optimization problems // LOBACHEVSKII JOURNAL OF MATHEMATICS, 2017. T.38, Vol. 5. Pp. 870-873.

---

\* Работа поддержана РФФИ, проект 16-07-00664.

## РАЗРАБОТКА СЕРВИСА ДЛЯ ПРОВЕРКИ ВЫПОЛНИМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТИПА ДОСТИЖИМОСТИ В БУЛЕВЫХ СЕТЯХ\*

С.А. Горский, В.Г. Богданова

Институт динамики систем и теории управления СО РАН

[gorsky@icc.ru](mailto:gorsky@icc.ru)

Для решения практически важных классов задач актуально применение сборочной технологии программирования, на основе которой сложная система собирается из готовых программных ресурсов (модулей, компонентов, сервисов). Для создания сервисов применяется технология, описанная в работе [1]. В распределенном мультиагентном решателе, реализуемом в рамках этой технологии, агенты создаются в виде сервисов на основе различных классов. Класс DSA (Distributed Solver Agent), используется для создания группы агентов, управляющей запуском вычислительных агентов, созданных на основе класса CMA (Computational Module Agent). В докладе основное внимание уделяется созданию вычислительных сервисов на основе второго класса. Разработка таких сервисов включает три этапа: создание программного приложения, реализующего алгоритм для проверки конкретного динамического свойства автономных синхронных двоичных динамических систем (ДДС), называемых в зарубежной литературе булевыми сетями; создание агента на основе класса CMA; конфигурирование вычислительного агента. Спецификация динамического свойства задается на языке формальной логики на основе метода булевых ограничений [2]. Согласно этому методу для ДДС, функционирование которых рассматривается на конечном интервале времени, строится булева модель в виде булевых уравнений или булевых формул с кванторами (более точно, формул вида 2QBF). Таким образом, проверка выполнимости свойств сводится к решению соответственно SAT или 2QBF задач. В частности, к первой задаче сводится проверка выполнимости основного свойства достижимости, свойств безопасности, одновременной достижимости, достижимости при фазовых ограничениях и свойства притяжения; в то время как ко второй задаче сводится проверка таких свойств, как свойство связности целевого множества и свойство тотальной достижимости. Спецификация этих свойств на основе метода булевых ограничений приведена в [2]. В докладе рассматриваются разработанные авторами приложения (решатели) для SAT ([3]) и 2QBF задач в кластерной вычислительной среде. Рассматриваются архитектура и функциональные возможности решателей, приводятся результаты тестирования и сравнения с аналогичными решателями на ряде SAT и 2QBF задач. Так, например, при тестировании ста двадцати 2QBF задач для разработанного решателя hrcqsat при увеличении количества процессорных ядер (от 32 до 512) получено ускорение, близкое к линейному.

1. Богданова В.Г., Пашинин А.А. Разработка самоорганизующейся мультиагентной системы децентрализованного управления распределенным решением прикладных задач // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2018. № 3 (11). С. 115-126.
2. Опарин Г.А., Богданова В.Г., Пашинин А.А. Метод булевых ограничений в качественном анализе двоичных динамических систем // Международный журнал фундаментальных и прикладных исследований, 2018. № 9. С. 19-29.
3. V. G. Bogdanova and S. A. Gorsky. Scalable parallel solver of Boolean satisfiability problems // 2018 41st International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO), Opatija, 2018, pp. 0222-0227.

\* Работа поддержана РФФИ, проект 18-07-00596/18.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ О ПРОДОЛЬНЫХ  
КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ  
И ПРИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКЕ

Е.Ю. Гражданцева

Институт математики, экономики и информатики ИГУ  
grelyur@mail.ru

Уравнение, описывающее продольные колебания упругого стержня с учетом инерции и при внешней нагрузке [1]

$$(\lambda - \Delta) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \alpha(\Delta - \lambda') \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \beta(\Delta - \lambda'') u(x, t) + f(x, t)$$

представляет собой полное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно переменной по времени с вырожденным оператором при старшей производной в банаховом пространстве.

Одним из способов исследования разрешимости задачи Коши для вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах является способ восстановления непрерывного решения, условий его существования, обобщенного решения и связи обобщенного и непрерывного решений при помощи фундаментальной оператор-функции [2] вырожденного дифференциального оператора

$$B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t),$$

где  $B = \lambda - \Delta$ ,  $A_1 = \alpha(\Delta - \lambda')$ ,  $A_0 = \beta(\Delta - \lambda'')$ ,  $B$ ,  $A_1$ ,  $A_0$  — линейные непрерывные операторы, действующие из банахова пространства  $E_1$  в банахово пространство  $E_2$ , операторный пучок  $(A_1, A_0)$  является полиномиально ограниченным относительно  $B$ , оператор  $B$  необратим,  $E_1 \equiv W_q^{l+2}(\Omega)$  такое, что любая функция  $u(x)$  из  $W_q^{l+2}(\Omega)$  удовлетворяет условию  $u(x) = 0$  при  $x \in \partial\Omega$ ,  $E_2 \equiv W_q^l(\Omega)$  (здесь  $W_q^l(\Omega)$  — пространство Соболева,  $2 \leq q < \infty$ ), который соответствует исследуемой задаче.

В работе [3] представлены результаты построения фундаментальной оператор-функции полного сингулярного дифференциального оператора второго порядка в случае спектральной ограниченности. Применяя полученные ранее результаты построено обобщенное решение [4] задачи Коши для уравнения о продольных колебаниях упругого стержня с учетом инерции и при внешней нагрузке [1]

$$(\lambda - \Delta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha(\Delta - \lambda') \frac{\partial u}{\partial t} + \beta(\Delta - \lambda'') u + f,$$

при условиях

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega,$$

где  $\Omega \subset R^n$  — ограниченная область с границей  $\partial\Omega \in C^\infty$ , и  $u(x, t) = 0$  при  $(x, t) \in \partial\Omega \times R$ , и, как следствие, определены условия существования непрерывного решения исследуемой задачи.

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. - М. : Мир, 1977.
2. Гражданцева Е.Ю., Фалалеев М.В. Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах // СМЖ. – 2005. – Т. 46, № 6. – с. 1393 – 1403.

3. Гражданцева Е.Ю. Задача Коши для полного сингулярного дифференциального уравнения второго порядка в условиях спектральной ограниченности / Е.Ю. Гражданцева // Труды ИМЭИ ИГУ. Математика и информатика: сб. науч. тр. / редкол.: Ю.Д. Корольков и др. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2011. – Вып. 1. – с. 34-41.

## О ФУНКЦИЯХ, ПОРОЖДАЕМЫХ ОСЛАБЛЯЮЩИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ЗАДАЧАХ ПОИСКА ПРООБРАЗОВ ХЕШ-ФУНКЦИЙ СЕМЕЙСТВА MD4-k

И.А. Грибанова, А.А. Семенов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[the42dimension@gmail.com](mailto:the42dimension@gmail.com) , [biclop Rambler@yandex.ru](mailto:biclop Rambler@yandex.ru)

Криптографическая хеш-функция MD4 была предложена Р. Ривестом в 1991 году. Она является одной из первых криптографических хеш-функций, которая широко использовалась в течение ряда лет. В 2004-2005 годах было показано, что данная функция, а также ее усложнение – хеш-функция MD5 – не являются стойкими к атакам поиска коллизий [1]. Однако даже для MD4 до настоящего момента не известно эффективных атак, позволяющих строить по известному 128-битному хеш-значению исходное 512-битное сообщение, которое породило данный хеш. Такие атаки называются атаками поиска прообразов (preimage attacks, PA-атаки). В статье [2] впервые были предложены нетривиальные PA-атаки на неполнораундовые версии хеш-функции MD4 (т.е. на хеш-функции вида MD4-k, где k – рассматриваемое число шагов). В частности, для варианта, состоящего из 32 шагов данной функции (для двух первых раундов), была предложена атака, выполняемая на обычном ПК. Основная идея [2] заключается в использовании специальных дополнительных ограничений на некоторые переменные, присутствующие в уравнениях криптоанализа рассматриваемой функции. Ослабляющие ограничения позволяют существенно упростить процесс решения таких уравнений. В работе [3] к уравнениям криптоанализа функций вида MD4-k, дополненным ослабляющими ограничениями того же типа, что и в [2], был применен SAT подход. Это позволило эффективно обрабатывать некоторые (но не произвольные) хеш-значения функций MD4-k до k = 39 включительно. В [4] задача поиска ослабляющих ограничений была поставлена в форме проблемы максимизации специальной псевдо-булевой функции. Как результат, удалось найти новые ограничения, использование которых позволило эффективно (в среднем менее чем за минуту на ПК) обрабатывать случайные 128-битные булевы векторы, рассматривая их как образы хеш-функции MD4-39.

В настоящем докладе будет представлено новое свойство функций семейства MD4-k для  $k \in \{39, \dots, 48\}$ . А именно, будет показано, что для случайно выбранного 128 битного вектора задачу поиска его 512 MD4-k прообраза при помощи ослабляющих ограничений можно свести к задаче обращения специальной функции вида  $g_{MD4-k}: \{0,1\}^{128} \rightarrow \{0,1\}^{128}$ . Для данной задачи можно оценить время ее решения, используя технику, представленную в [5].

1. Wang X., Yu H. How to break MD5 and other hash functions // Advances in Cryptology - EUROCRYPT 2005, ser. Lecture Notes in Computer Science. 2005. Vol. 3494. P. 19–35.
2. Dobbertin H. The first two rounds of MD4 are not one-way // Fast Software Encryption, ser. Lecture Notes in Computer Science. 1998. Vol. 1372. P. 284–292.
3. De D., Kumarasubramanian A., Venkatesan R. Inversion attacks on secure hash functions using SAT solvers // SAT 2007, Proc., ser. Lecture Notes in Computer Science. 2007. Vol. 4501. P. 377–382.
4. Griбанова I., Семенов A. Using Automatic Generation of Relaxation Constraints to Improve the Preimage Attack on 39-step MD4 // Proc. of MIPRO-2018, IEEE. 2018. P. 1174–1179.
5. Семенов A., Заикин O., Отпущеников I., Коchemазов S, Ignatiev A. On cryptographic attacks using backdoors for SAT // The Thirty-Second AAAI Conf. on Artificial Intelligence, AAAI'2018, 2018, pp. 6641–6648.

## ПОИСК ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ ПРОМЫШЛЕННОСТИ И ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКИ МОНГОЛИИ

Т.В. Груздева

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[gruzdeva@icc.ru](mailto:gruzdeva@icc.ru)

Моделирование производственных и экономических процессов зачастую приводит к невыпуклым задачам математической оптимизации, в которых, в отличие от выпуклых задач, может существовать большое число локальных экстремумов, которые не представляют такого практического интереса как глобальное решение задачи.

В представляемом на конкурс цикле статей теория глобального поиска, разработанная А.С. Стрекаловским для задач d.c. оптимизации, была применена для решения реальных прикладных задач промышленности и электроэнергетики Монголии.

Первой практической задачей было построение и идентификация математической модели обогащения медной руды на монгольском предприятии «Эрдэнэт» [1, 2]. Прежде всего, была проведена объемная статистическая обработка данных наблюдений двух случайных величин: а) процент извлечения меди; б) так называемый «коллективный» концентрат. Эти величины зависят от нескольких параметров. Для каждого из двух вышеуказанных показателей были опробованы два типа математических моделей: линейные и квадратичные. При этом удалось показать, что линейные регрессии неадекватно отражают технологический процесс обогащения руды (флотацию). Поэтому квадратичные зависимости были выбраны за базовые. Дополнительные исследования построенной квадратичной модели показали, что возникающие при моделировании процесса обогащения руды задачи оптимизации, оказываются невыпуклыми ввиду знаконеопределенности соответствующих матриц.

Для задачи максимизации процента содержания меди в «коллективном» концентрате, которая была сформулирована для этой модели, были разработаны и реализованы специальные алгоритмы глобального поиска [1]. Была также успешно решена и задача максимизации процента извлечения меди из концентрата [1]. Проведен анализ полученных результатов совместно со специалистами предприятия, в котором проверена как адекватность модели, так и применимость полученных решений по разным технологическим параметрам.

Далее была сформулирована более точная бикритериальная задача невыпуклой оптимизации, моделирующая исследуемый технологический процесс обработки руды [2]. Ее критериями одновременно являются максимизация процента содержания меди в «коллективном» концентрате и максимизация процента извлечения меди из концентрата. Для решения бикритериальной задачи был разработан метод [2] поиска аппроксимации множества Парето-оптимальных решений, сочетающий алгоритмы локального и глобального поисков, основанные на теории глобального поиска для задач d.c. программирования и метода точного штрафа, а также известный в области многокритериальной оптимизации метод главного критерия. Отметим, что применение

теории глобального поиска для построения аппроксимации множества Парето проведено впервые. Разработанный новый подход был также протестирован на реальных данных, предоставленных горно-обогатительным комбинатом «Эрдэнэт».

Проведен вычислительный эксперимент [2] по оптимизации производственных характеристик процесса извлечения меди из концентрата, который позволил построить аппроксимацию множества Парето-оптимальных решений в исходной бикритериальной задаче. При этом было установлено, что поскольку функции, задающие критерии в задаче, являются невыпуклыми, то и Парето фронт не является границей выпуклого множества. Проведено численное сравнение разработанного алгоритма с пакетами прикладных программ BARON, CONOPT, MINOS. Отметим, что последние позволили построить аппроксимацию только выпуклых участков Парето фронта.

Другой практической задачей была минимизация средних издержек предприятия, которая была смоделирована для шести самых крупных монгольских энергетических предприятий: ТЭЦ 2, 3, 4 города Улан-Батор, ТЭЦ городов Дархан и Эрдэнэт, ветропарк «Салхит» [3]. Ее математическая модель имеет вид задачи дробной оптимизации с кубическими функциями, построенными с помощью регрессионного анализа на основе реальных данных по выработке электроэнергии. Для фракционных задач был разработан и апробирован метод [4], комбинирующий сведение исходной задачи к решению уравнения с оптимальным значением задачи d.c. оптимизации с векторным параметром и редукцию к задаче минимизации линейной функции на невыпуклом множестве, заданном посредством неравенств с d.c. функциями. Разработанный двухкомпонентный алгоритм поиска глобального решения в задачах дробной оптимизации был успешно применен для решения задачи минимизации средних издержек.

Результаты вычислительного эксперимента показали, что для минимизации своих средних издержек энергетические компании Монголии не обязательно должны производить выработку электроэнергии на максимальном уровне, достаточно поддерживать ее в вычисленных в ходе эксперимента объемах.

1. Gruzdeva T.V., Enkhbat R., Barkova M. V. D.C. programming approach for solving an applied ore-processing problem // *Journal of Industrial and Management Optimization*. 2018. V. 14, № 2. P. 613-623.
2. Gruzdeva T., Enkhbat R., Ushakov A. A Biobjective DC Programming Approach to Optimization of Rougher Flotation Process // *Computers and Chemical Engineering*. 2018. V. 108. P. 349-359.
3. Gruzdeva T., Enkhbat R., Tungalag N. Fractional programming approach to a cost minimization problem in electricity market // *Yugoslav Journal of Operations Research*. 2018. DOI: 10.2298/YJOR160517018B
4. Gruzdeva T.V., Strekalovsky A.S. On a Solution of Fractional Programs via D.C. Optimization Theory // *CEUR Workshop Proceedings. OPTIMA-2017*. 2017. V. 1987. P. 246-252.

# МЕТОД И ПРОГРАММНОЕ СРЕДСТВО РАЗРАБОТКИ БАЗ ЗНАНИЙ НА ОСНОВЕ ТРАНСФОРМАЦИИ КОНЦЕПТУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ\*

Н.О. Дородных

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
tualatin32@mail.ru

Разработка новых подходов и программных средств автоматизации создания интеллектуальных систем и баз знаний (БЗ) остается перспективной областью научных исследований. Одним из способов повышения эффективности процесса разработки БЗ является применение методов получения знаний из различных источников, в том числе концептуальных (информационных) моделей.

Работа посвящена описанию моделей и методов (образующих технологию) автоматизации проектирования и синтеза программных кодов БЗ в форме декларативных программ на основе трансформации концептуальных моделей [1-5]. Основные элементы технологии:

- Оригинальная модель типового программного компонента, особенностью которой является использование модели трансформации в форме сценария преобразования (декларативной программы) и интерпретатора данной модели, обеспечивающих специализацию типового программного компонента в соответствии с определенными форматами входных и выходных данных.

- Метод создания программных компонентов анализа концептуальных моделей и синтеза кода БЗ, особенностью которого является использование языка модельных трансформаций и оригинальной модели типового программного компонента.

- Предметно-ориентированный декларативный язык TMRL (Transformation Model Representation Language) [5], предназначенный для представления и хранения модели трансформации.

- Методика автоматизированной разработки БЗ, основанная на использовании предлагаемых моделей, метода и языка [3, 5].

- Веб-ориентированная система – Knowledge Base Development System (KBDS), обеспечивающая программную поддержку технологии.

1. Yurin A.Yu., Dorodnykh N.O., Nikolaychuk O.A., Grishenko M.A. Designing rule-based expert systems with the aid of the model-driven development approach // *Expert Systems*. 2018. Vol. 35, No. 5. P. 1-23. DOI: doi.org/10.1111/exsy.12291
2. Yurin A.Yu., Dorodnykh N.O., Nikolaychuk O.A., Grishenko M.A. Prototyping Rule-Based Expert Systems with the Aid of Model Transformations // *Journal of Computer Science*. 2018. Vol. 14, No. 5. P. 680-698. DOI: 10.3844/jcssp.2018.680.698
3. Yurin A.Yu., Berman A.F., Dorodnykh N.O., Nikolaychuk O.A., Pavlov N.Yu. Fishbone diagrams for the development of knowledge bases // *Proceedings of the 41st International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO)*. 2018. P. 1136-1141. DOI: 10.23919/MIPRO.2018.8400177
4. Dorodnykh N.O., Yurin A.Y., Stolbov A.B. Ontology Driven Development of Rule-Based Expert Systems // *Proc. of the 3rd Russian-Pacific Conf.on Computer Technology and Applications (RPC)*. 2018. P. 1-6. DOI: 10.1109/RPC.2018.8482174
5. Dorodnykh N.O., Yurin A.Y. A domain-specific language for transformation models // *CEUR Workshop Proc. Information Technologies: Algorithms, Models, Systems (ITAMS 2018)*. – 2018. – Vol. 2221. – P. 70-75. <http://ceur-ws.org/Vol-2221>

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект 18-37-00006.

## МОДУЛЬ СИНТЕЗА CRUD-ИНТЕРФЕЙСА ДЛЯ ПРОДУКЦИОННЫХ БАЗ ЗНАНИЙ\*

М.А. Грищенко, Н.О. Дородных

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
ООО «ЦентраСиб»  
tualatin32@mail.ru

Работа посвящена описанию концепции модуля синтеза графического интерфейса пользователя для создания, просмотра и редактирования элементов продукционных баз знаний (CRUD, create, read, update, delete).

Модуль предназначен для функционирования в рамках инструментального средства Personal Knowledge Base Designer (PKBD) [1] и web-сервиса для автоматизированного формирования продукционных баз знаний на основе концептуальных моделей [2]. В связи с этим предполагается реализация модуля под разные программные платформы: Object Pascal и PHP.

Рассматриваются две формы представления спецификаций для синтеза графического пользовательского интерфейса:

- в виде типизированных текстовых файлов, используется для совместимости с более ранними разработками авторов, в частности, с программной системой поддержки проведения экспертизы промышленной безопасности [3]. Основные разделы файла: Metadata, Fields, Captions, Values.

- в виде XML-файлов формата PKBD. Данные содержат описание элементов базы знаний, основные теги: KnowledgeBase, Template, Slot, Fact, Grule, Rule.

При программной реализации модуля было предложено использовать концепцию интерпретатора. На настоящий момент модуль реализован на Object Pascal (Рис).

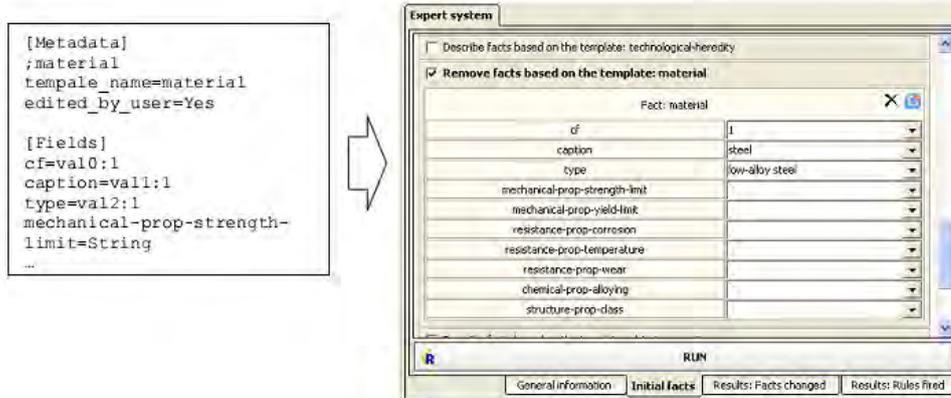


Рис. Пример интерпретации спецификаций в форме типизированного файла

1. Дородных Н.О., Грищенко М.А., Юрин А.Ю. Система программирования продукционных баз знаний: Personal Knowledge Base Designer // Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем. 2016. № 6. С.209–212.
2. Юрин А.Ю., Дородных Н.О. Web-сервис для автоматизированного формирования продукционных баз знаний на основе концептуальных моделей // Программные продукты и системы. 2014. № 4. С. 103–107.
3. Берман А.Ф., Николайчук О.А., Юрин А.Ю., Кузнецов К.А. Поддержка принятия решений на основе продукционного подхода при проведении экспертизы промышленной безопасности // Химическое и нефтегазовое машиностроение. 2014. № 11. С. 28–35.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект 18-37-00006.

# О МОДЕЛИРОВАНИИ РАБОТЫ МИКРОЛОГИСТИЧЕСКИХ- ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ<sup>1</sup>

М.Л. Жарков

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

Автором предлагается подход к построению математических моделей работы микрологистических-транспортных систем на основе многофазных систем массового обслуживания с групповым поступлением заявок.

Под микрологистическими-транспортными системами (микро-ЛТС) понимаются подсистемы, структурные составляющие логистических систем, охватывающие работу отдельного предприятия. В сферу деятельности таких систем входит внутрипроизводственная логистика какого-либо объекта, т.е. подготовка и планирование производства, транспортно-складские работы и т.д.

Многофазной системой называется последовательность из систем массового обслуживания, в каждой из которых поступившая заявка проходит обслуживание [1].

При построении математической модели работы микро-ЛТС предлагается выделение двух основных компонентов системы: входящего потока заявок и структуры системы. Для описания входящего потока заявок в микро-ЛТС используется модель *ВМАР*-потока [2], что позволяет учитывать наличие нескольких различных потоков заявок, при этом каждый из них может быть групповым. Для описания структуры системы применяются многофазные (обычно – трехфазные) СМО с обратными связями. Каждая фаза соответствует некоторой подсистеме микро-ЛТС. Обратная связь позволяет регулировать работу системы, чтобы предотвратить потерю заявок между фазами, в случае отсутствия свободных мест в очереди на второй или третьей фазах.

В докладе представлена обобщенная математическая модель работы микро-ЛТС, на основе которой созданы стохастические модели работы железнодорожной сортировочной станции [3] и транспортно-пересадочных узлов [4]. Кроме того, описывается имитационная модель и обсуждаются результаты модельных экспериментов.

В дополнение приводятся рекуррентные формулы, с помощью которых можно найти стационарные вероятности СМО с групповым поступлением заявок, и численно-аналитический метод расчета стационарных вероятностей многофазных систем с групповым поступлением и блокировками.

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.
2. Дудин А.Н., Клименок В.И. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн.: БГУ, 2000.
3. Жарков М.Л., Парсюрова П.А., Казаков А.Л. Моделирование работы станций и участков железнодорожной сети на основе изучения отклонений от графика движения // Вестник ИргТУ. 2014. Т. 53, № 6. С. 23–31.
4. Жарков М.Л., Казаков А.Л., Лемперт А.А. Определение критических показателей работы транспортно-пересадочного узла на основе многофазной системы массового обслуживания // Вестник УРГУПС. 2017. №3 (35). С. 40–52.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 18-07-00604.

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ НЕВЫПУКЛОЙ ТРАЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ\*

Т.С. Зароднюк, А.С. Аникин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[tz@icc.ru](mailto:tz@icc.ru), [anikin@icc.ru](mailto:anikin@icc.ru)

Методики молекулярной динамики представляют собой высокоэффективный аппарат как для исследования множества явлений микромира, так и для разработки технологий конструирования новых материалов, веществ и устройств. Затрудненность мониторинга изучаемых явлений атомно-молекулярных размеров неизбежно приводит к необходимости использования математического моделирования и развитию новых методов исследования предложенных моделей.

Термин «молекулярная динамика» традиционно трактуется чрезвычайно многозначно. Задачи молекулярной динамики, известные из научной литературы (см., напр., [1]), имеют широкий спектр постановок – от статических – поиск глобальных минимумов различных потенциальных функций, до динамических («траекторных»), в том числе включающих постановки задач оптимизационного типа – с идентифицируемыми параметрами и управляющими воздействиями. Предлагаемые на современном этапе модели носят, как правило, нелинейный характер и не могут быть исследованы без использования численного инструментария.

В докладе обсуждается задача диссипации (распада) двухатомной молекулы под воздействием лазерного управления, впервые, по-видимому, поставленная как задача оптимального управления с потенциалом Морзе в работе [2]. В дальнейшем задача была изучена в работах [3–5], но проблема поиска глобального решения авторами не рассматривалась. Предложена специализированная технология поиска глобального экстремума, основанная на методе аппроксимации множества достижимости. В качестве аппроксимативной сетки использован набор управляющих функций релейного типа. Для достижения надежной оценки глобального значения функционала применялась методика численного овыпукления множества, основанная на подходе облачной аппроксимации (см., напр., [6]). Рассмотрены варианты задачи как с линейными, так и с нелинейными функциями при управляющих воздействиях. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Холмуродов Т.Х., Алтайский М.В., Пузынин И.В., Дардин Т., Филатов Ф.П. Методы молекулярной динамики для моделирования физических и биологических процессов // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2003, т.34, вып. 2, с. 474–515.
2. Goggin M.E., Milonni P.W. Driven Morse oscillator: Classical chaos, quantum theory and photodissociation // Phys. Rev. A. 1988. V. 37. № 3. P. 796. 145.
3. Guldberg A., Billing G.D. Laser-induced dissociation of hydrogen fluoride // Chem. Phys. Lett. 1991. V. 186, № 2–3. P. 229.
4. Yu C., Gross P., Ramakrishna V., Rabitz H., Mease K., Singh H. Control of classical regime molecular objectives – applications of tracking and variations of the theme // Automatica. 1997. № 9. P. 1617–1633.
5. Liu W.K., B. Wu, J.M. Yuan. Nonlinear dynamics of chirped pulse excitation and dissociation of diatomic molecules // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75, № 7. P. 1292.
6. Gornov A. Algorithms of cloud approximation for nonconvex set in a finite-dimension space // Proc. of 12 Int. Conference Intelligent Data Processing: Theory and Application. 2018, P. 52–53.

---

\* Работа поддержана РФФИ, проект 18-07-00587.

# ОПТИМИЗАЦИЯ ВЕСА КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ С ПОДКРЕПЛЕНИЕМ \*

Т.С. Зароднюк<sup>1</sup>, Е.В. Амелина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

<sup>2</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН

[tz@icc.ru](mailto:tz@icc.ru)

В последние годы в различных промышленных отраслях все более широко используются многослойные композитные конструкции ответственного назначения. Высокие требования, предъявляемые к таким конструкциям, обосновывают актуальность разработки эффективных методов и алгоритмов, позволяющих проводить численное исследование описывающих их математических моделей.

В работе сформулирована и исследована задача минимизации веса композитных конструкций при наличии определенных структурных и технологических ограничений. Выполнен учет существующих требований и физико-механических ограничений при моделировании композитных конструкций [1]. В рассматриваемой постановке присутствуют как прямые ограничения на управляющие воздействия, так и ограничения на фазовые переменные, наложенные в конце интервала изменения независимой переменной. Факторами, осложняющими численное решение поставленной задачи, являются: невыпуклость оптимизируемого функционала, плохая обусловленность и разномасштабность критериев, неустойчивость решений системы дифференциальных уравнений, нелинейность оптимизируемого функционала и другие. Перечисленные факторы позволяют отнести класс рассматриваемых экстремальных задач к чрезвычайно сложным, требующим разработки специализированных подходов к их решению.

Предложен подход к решению задачи минимизации веса композитных конструкций, основанный на использовании идеологии машинного обучения с подкреплением и заключающийся в поиске оптимальных решений в классе рациональных проектов. Для минимизации веса композитной конструкции формируется свертка терминальных функционалов с многократным решением однокритериальной задачи с использованием различных методов оптимизации, конструктивно учитывающих прямые ограничения на управление [2, 3]. Показана эффективность предложенного подхода путем решения ряда тестовых, исследованных аналитически задач.

Проведены сравнения результатов расчетов напряженно-деформированного состояния гибридных конструкций, получаемых в рамках различных математических моделей. Выполнены серии вычислительных экспериментов по нахождению параметров моделей. Разработанный подход к оптимальному проектированию гибридных конструкций позволил сформировать требования для существенного улучшения их эксплуатационных характеристик. Путем изменения внутренней структуры композитного материала, толщины слоев и формы конструкции удалось построить проекты минимального веса заданной прочности.

1. Голушко С.К., Немировский Ю.В. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008.
2. Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Аникин А.С., Финкельштейн Е.А. Программные комплексы для численного исследования задач оптимизации // Материалы XX юбилейной Междунар. конф. по вычисл. механике и соврем. прикладным программным системам (ВМСППС'2017), 24-31 мая 2017 г., Алушта. 2017. С. 680 – 683.
3. Зароднюк Т.С. Алгоритм поиска глобального минимума на основе технологий обучения с подкреплением // Proc. of the 6th Intern. Conf. on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2018). Irkutsk: ISDCT SB RAS, 2018. P. 154–155.

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-07-00627.

# ИССЛЕДОВАНИЕ УНИМОДАЛЬНОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ОСНОВЕ ТЕХНОЛОГИИ АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ВОРОНКИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ\*

Т.С. Зароднюк<sup>1</sup>, И.С. Гусева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

<sup>2</sup>Бурятский государственный университет,  
[tz@icc.ru](mailto:tz@icc.ru)

Свойство унимодальности – наличие единственного экстремума – может быть использовано для гарантированного поиска решения с применением богатого арсенала локальных численных методов. Однако в нелинейных задачах оптимального управления оценка унимодальности функционала представляет собой сложную задачу, для решения которой пока не предложено регулярных подходов.

В работе предлагается методика оценки унимодальности функционала, основанная на технологии фазового оценивания – методах аппроксимации множества достижимости. Интегральная воронка управляемой системы аппроксимируется на априори заданной сетке по времени, в каждой из узлов которой строится оценка множества достижимости. На основе анализа полученных сечений интегральной воронки выявляется отрезок времени, на котором функционал теряет унимодальность. На втором этапе исследования, путем деления этого интервала пополам приближенно находится момент времени, в который происходит изменение статуса функционала – потеря унимодальности.

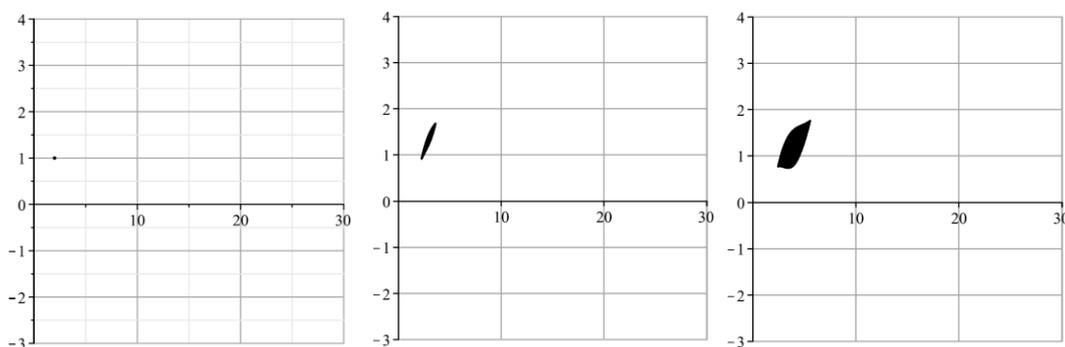
В качестве примера приводится решение следующей невыпуклой задачи оптимального управления

$$\dot{x}_1 = u + \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{2}, \dot{x}_2 = u + \sin x_1, t \in [0, 3]$$

с заданными начальными условиями  $x_0 = (2, 1)$  и ограничениями на управление  $u \in [-1, 1]$ . Необходимо минимизировать терминальный функционал следующего вида

$$J(u) = x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1) \rightarrow \min.$$

На рис. 1. приведена интегральная воронка системы, представленная в виде ее сечения в разные моменты времени  $t$ . Проведенные вычислительные эксперименты позволили продемонстрировать работоспособность предложенной методики оценки унимодальности функционала в невыпуклой задаче оптимального управления.



\* Работа поддержана РФФИ, проект № 17-07-00627.

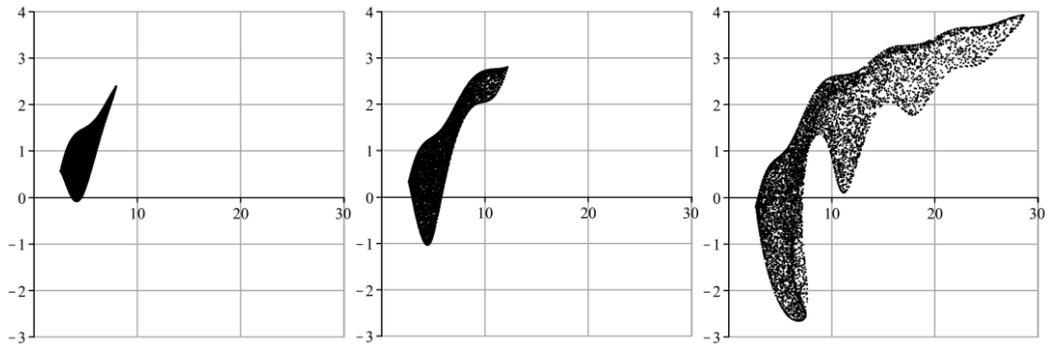


Рис. 1. Множество достижимости в задаче оптимального управления колебаниями нелинейного маятника в моменты времени  $t = 0, 0.5, 1$  (верхний ряд),  $t = 1.5, 2$  и  $3$  (нижний ряд).

1. Gornov A.Yu., Zarodnyuk T.S., Finkelshtein E.A., Anikin A.S. The Method of Uniform Monotonous Approximation of the Reachable Set Border for a Controllable System // J Glob Optim, 2016, Volume 66, Issue 1. P. 53–64.

## О ЗАДАЧЕ ГЕССА-АППЕЛЬРОТА\*

В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[irteg@icc.ru](mailto:irteg@icc.ru)

В докладе представлены результаты качественного анализа уравнений движения твердого тела в случае Гесса–Аппельрота. Для анализа уравнений используются обобщения метода Рауса–Ляпунова. Обращено внимание на выделение семейств стационарных инвариантных многообразий задачи и специфику исследования таких множеств.

В рассматриваемой задаче на постоянные параметры, характеризующие геометрию масс тела, наложены следующие ограничения – условия Гесса:

$$y_0 = 0, \quad x_0^2 A(B - C) - z_0^2 C(A - B) = 0. \quad (1)$$

Если исключить из уравнений Эйлера с помощью выражений (1)  $B$  и  $y_0$ , то получим такую систему, описывающую движение тела в случае Гесса–Аппельрота :

$$\begin{aligned} A(Ax_0^2 + Cz_0^2)\dot{p} &= Cz_0^2(A - C)qr + z_0(Ax_0^2 + Cz_0^2)\gamma_2, \\ AC(x_0^2 + z_0^2)\dot{q} &= (Ax_0^2 + Cz_0^2)[(C - A)pr - z_0\gamma_1 + x_0\gamma_3], \\ C(Ax_0^2 + Cz_0^2)\dot{r} &= Ax_0^2(A - C)pq - (Ax_0^2 + Cz_0^2)x_0\gamma_2, \\ \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Первые интегралы этой системы будут такими:

$$\begin{aligned} 2H &= Ap^2 + \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)}q^2 + Cr^2 + 2x_0\gamma_1 + 2z_0\gamma_3 = 2h, \\ V_1 &= Ap\gamma_1 + \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)}q\gamma_2 + Cr\gamma_3 = m, \\ V_2 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad V_3 = Ap x_0 + Cr z_0 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Запишем дифференциальные уравнения нашей системы на инвариантном многообразии (ИМ), определяемом интегралом Гесса  $V_3 = 0$  (3), исключая  $r$  из системы (2) с помощью последнего равенства:

$$\begin{aligned} A(Ax_0^2 + Cz_0^2)\dot{p} &= -A(A - C)x_0 z_0 pq + z_0(Ax_0^2 + Cz_0^2)\gamma_2, \\ AC^2 z_0(x_0^2 + z_0^2)\dot{q} &= [-Ax_0(C - A)p^2 + Cz_0(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3)](Ax_0^2 + Cz_0^2), \\ \dot{\gamma}_1 &= -\frac{Ap x_0}{Cz_0}\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\left(\gamma_3 + \frac{Ax_0}{Cz_0}\gamma_1\right), \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) имеет следующие первые интегралы:

---

\* Работа поддержана РФФИ, грант 16-07-00201а.

$$\begin{aligned}
2\tilde{H} &= Ap^2 \left(1 + \frac{Ax_0^2}{Cz_0^2}\right) + Aq^2 \frac{C(x_0^2 + z_0^2)}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)} + 2x_0\gamma_1 + 2z_0\gamma_3 = 2h, \\
\tilde{V}_1 &= Ap\left(\gamma_1 - \frac{x_0}{z_0}\gamma_3\right) + \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)}q\gamma_2 = m, \quad V_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Составим полную линейную связку из интегралов (5)

$$\tilde{K} = \tilde{H} - \lambda_1 \tilde{V}_1 - \frac{1}{2} \lambda_2 V_2$$

и запишем условия стационарности  $\tilde{K}$ :

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{K}}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \gamma_2} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \gamma_3} = 0.$$

В докладе показано, что последняя система уравнений при условии  $\frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)} \lambda_1^2 = -\lambda_2$  вырождена и имеет семейство решений:

$$x_0 - \lambda_1 Ap + \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)} \lambda_1^2 \gamma_1 = 0, \quad z_0 + \lambda_1 \frac{x_0}{z_0} Ap + \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)} \lambda_1^2 \gamma_3 = 0, \quad q - \lambda_1 \gamma_2 = 0. \tag{6}$$

Полученные уравнения определяют семейство стационарных ИМ системы (4) на многообразии  $Apx_0 + Crz_0 = 0$ . Если с помощью последнего уравнения (6) исключить параметр  $\lambda_1 = q\gamma_2^{-1}$  из уравнений семейства, то получим два уравнения:

$$x_0\gamma_2^2 - Apq\gamma_2 + \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)} q^2 \gamma_1 = 0, \quad z_0^2\gamma_2^2 + Apq\gamma_2 x_0 + \frac{AC(x_0^2 + z_0^2)}{(Ax_0^2 + Cz_0^2)} q^2 \gamma_3 z_0 = 0,$$

которые также определяют ИМ коразмерности 2 рассматриваемой системы. В докладе приведены другие ИМ (семейства ИМ) системы (4), полученные изложенным способом. Проведено исследование выделенных ИМ на устойчивость по Ляпунову.

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: ГИТ-ТЛ, 1953.
2. Беляев А.В. Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса // Матем. сб. 2015. Т. 206, № 5. С. 5-34.

# НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКОМ\*

Казаков А.Л.

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
kazakov@icc.ru

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности с источником при степенной нелинейности, которое в случае степенной функции источника (стока) при наличии симметрий может быть записано в виде

$$u_t = u \left( u_{\rho\rho} + \frac{\mu}{\rho} u_\rho \right) + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \alpha u^\beta. \quad (1)$$

Здесь  $\mu$  принимает значения 0 в случае плоской, 1 – круговой и 2 – сферической симметрии;  $\beta, \sigma > 0, \alpha$  – константы ( $\alpha > 0$  – источник,  $\alpha < 0$  – сток);  $t$  – время,  $\rho$  – расстояние до начала координат,  $u = u(t, \rho)$  – искомая функция. Для уравнения (1) будем искать нетривиальные решения со свободной границей, имеющие тип тепловой волны, распространяющейся по холодному фону, т.е. удовлетворяющие условию

$$u|_{\rho=a(t)} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $a(t) > 0$  – достаточно гладкая функция. Рассмотрим вначале случай  $\alpha = 0$ , когда источник отсутствует. Будем искать решения задачи (1), (2) в виде

$$u = \lambda(t)w(z), \quad z = \varphi(t, \rho). \quad (3)$$

**Теорема 1.** Задача (1), (2) при отсутствии источника ( $\alpha = 0$ ) имеет точные решения  $u = \lambda(t)w(z)$  следующего вида:

1.  $\mu = 0, 1, 2$ ,  $z = \rho / [C_1 \exp(C_2 t)]$ ,  $\lambda(t) = C_1^2 C_2 \exp(C_2 t)$ , а  $w(z)$  удовлетворяет задаче

$$ww'' + \frac{1}{\sigma}(w')^2 + \left( z + \frac{\mu w}{z} \right) w' + 2w = 0, \quad w(1) = 0. \quad (4)$$

2.  $\mu = 0, 1, 2$ ,  $z = \rho / (C_3 t + C_4)^\omega$ ,  $\lambda(t) = \omega C_3 (C_3 t + C_4)^{2\omega-1}$ , а  $w(z)$  удовлетворяет задаче

$$ww'' + \frac{1}{\sigma}(w')^2 + \left( z + \frac{\mu w}{z} \right) w' + \frac{2\omega-1}{\omega} w = 0, \quad w(1) = 0. \quad (5)$$

3.  $\mu = 0$ ,  $z = \rho - \ln(C_5 t + C_6)^\omega$ ,  $\lambda(t) = \omega C_5 / (C_5 t + C_6)$ , а  $w(z)$  удовлетворяет задаче

$$ww'' + \frac{1}{\sigma}(w')^2 + w' + \frac{1}{\omega} w = 0, \quad w(0) = 0. \quad (6)$$

4.  $\mu = 0$ ,  $z = \rho - C_7 t - C_8$ ,  $\lambda(t) = C_7$ , а  $u(t, \rho) = -C_7 \sigma (\rho - C_7 t - C_8)$ .

**Замечание.** Решения (3)–(5) иногда называют обобщенно-автомодельными; (3), (6) – обобщенной бегущей волной [1]. К ним сводятся наиболее содержательные решения задачи (1), (2) в случае  $\alpha = 0$ , полученные ранее в работе [2].

Теперь рассмотрим общий случай, когда  $\alpha \neq 0$ .

**Теорема 2.** Задача (1), (2) имеет точные решения  $u = \lambda(t)w(z)$  следующего вида:

1.  $\mu = 0, 1, 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $z = \rho / [C_1 \exp(C_2 t)]$ ,  $\lambda(t) = C_1^2 C_2 \exp(2C_2 t)$ , а  $w(z)$  удовлетворяет задаче

$$ww'' + \frac{1}{\sigma}(w')^2 + \left( z + \frac{\mu w}{z} \right) w' + (2 + \alpha)w = 0, \quad w(1) = 0. \quad (7)$$

\* Работа частично поддержана РФФИ, проект № 16-01-00608.

2.  $\mu = 0, 1, 2$ ,  $\beta \neq 1, \beta \neq 2$ ,  $z = \rho / (C_3 t + C_4)^\omega$ ,  $\lambda(t) = \omega C_3 (C_3 t + C_4)^{2/(2-2\beta)}$ , где  $\omega = (\beta - 2) / (2\beta - 2)$ , а  $w(z)$  удовлетворяет задаче

$$ww'' + \frac{1}{\sigma}(w')^2 + \left(z + \frac{\mu w}{z}\right)w' + \frac{2}{2-\beta}w + \alpha w^\beta = 0, w(1) = 0. \quad (8)$$

3.  $\mu = 0$ ,  $\beta = 2$ ,  $z = \rho - \ln(C_5 t + C_6)^\omega$ ,  $\lambda(t) = \omega C_5 / (C_5 t + C_6)$ , а  $w(z)$  удовлетворяет задаче

$$ww'' + \frac{1}{\sigma}(w')^2 + w' + \frac{1}{\omega}w + \alpha w^2 = 0, w(0) = 0. \quad (9)$$

4.  $\mu = 0$ ,  $\beta = 2$ ,  $z = \rho - C_7 t - C_8$ ,  $\lambda(t) = C_7$ , а  $w(z)$  удовлетворяет задаче

$$ww'' + \frac{1}{\sigma}(w')^2 + w' + \alpha w^2 = 0, w(0) = 0. \quad (10)$$

Других решений при  $\alpha \neq 0$ ,  $z = \rho / a(t)$  или  $z = \rho - a(t)$  задача (1), (2) не имеет.

Для задач (4)–(10) доказаны утверждения, обеспечивающие существование нетривиальных гладких решений.

Рассмотрим теперь более подробно содержательный частный случай. Следуя [3] (см. также [2]), перейдем от уравнения (9) к динамической системе

$$\frac{dw}{d\xi} = wv, \frac{dv}{d\xi} = -\alpha w^2 - \frac{v^2}{\sigma} - v - \frac{w}{\omega}, \quad (11)$$

где  $v = w'$ ,  $d\xi = wdz$ . У системы (11) есть три особых точки:  $(0, 0)$ ,  $(0, -\sigma)$ ,  $(-1/(\alpha\omega), 0)$ , имеющие тип седло-узел, седло, устойчивые фокус (при  $\alpha\omega^2 < 4$ ) или узел (при  $\alpha\omega^2 > 4$ ) соответственно. Более тонкий анализ фазового портрета показывает, что на нем имеются две сепаратрисы, не совпадающие с координатными осями. Первая соединяет точки  $(0, 0)$  и  $(-1/(\alpha\omega), 0)$ . Вторая состоит из двух частей, смыкающихся в особой точке  $(0, -\sigma)$ , каждая из которых пересекает ось  $Ow$  (первая при  $w > 0$ , вторая при  $w < 0$ ), при  $v \rightarrow +\infty$  обе части асимптотически приближаются к оси  $Ov$ , не пересекая ее. Сепаратриса охватывает особые точки  $(0, 0)$  и  $(-1/(\alpha\omega), 0)$  («вытянутая разорванная петля, колба»).

Первой сепаратрисе соответствует нетривиальное решение (9), удовлетворяющее условию  $w'(0) = 0$ , которое на интервале  $(-z_\alpha, 0)$  изменяется, а вне его – равно константам:  $-1/(\alpha\omega)$  слева и  $0$  справа. Однако к содержательным решениям задачи (1), (2) оно не приводит. Правая часть ( $w > 0$ ) второй сепаратрисы дает тепловую волну с логарифмическим фронтом и ненулевым потоком на фронте, имеющую вид уединенной волны с постоянной шириной основания, амплитуда которой с течением времени уменьшается, стремясь к нулю на бесконечности. Аналогичный результат был ранее получен для случая  $\alpha = 0$  [2]. Левая часть ( $w < 0$ ) второй сепаратрисы также дает уединенную волну, амплитуда которой неограниченно возрастает, имеет место режим с обострением. Здесь налицо существенное отличие от случая  $\alpha = 0$ : там режим с обострением не сопровождается локализацией тепла.

1. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения. М.: Изд-во Юрайт, 2017. 256 с.
2. Казаков А.Л., Орлов С.С., Орлов С.С. Построение и исследование некоторых точных решений нелинейного уравнения теплопроводности // Сибирский математический журнал. 2018. Т. 59, № 3. С. 544-560.
3. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 490 с.

## ДИНАМИКА ПОТОКОВ ТЕПЛА В ПОДЛЕДНОЙ ВОДЕ ОЗЕРА БАЙКАЛ.\*

В.В. Козлов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[boba50@mail.ru](mailto:boba50@mail.ru).

В 2003 году на космических снимках ледового покрова озера Байкал обнаружены кольцевые структуры. В дальнейшем подобные структуры наблюдались в разных районах южного и среднего Байкала около 20 раз. Гидрофизические исследования и математическое моделирование ледовых кольцевых структур на Байкале показало, что их существование на стадии деградации ледового покрова обусловлено антициклоническими течениями. Кольцевые структуры возникают за счет более быстрого разрушения ледового покрова, обусловленного усилением вертикального обмена и тепловых потоков, при генерации кольцевого течения. Анализ космических снимков показал, что линейные размеры радиусов ледовых колец составляют 1300-2400 м, что близко к бароклинному радиусу деформации Россби [1,2].

В работе представлен всесторонний анализ формирования и динамики теплового потока в озере Байкал на основе детальных натуральных измерений [3,4]. Коэффициент эффективного турбулентного обмена в работе оценивается путем решения модифицированной обратной задачи Стефана с использованием данных о толщине ледяного покрова и распределения температуры во льду и подледной воде. В расчетах использованы экспериментально полученные данные о характеристиках структуры подледного пограничного слоя. Детальные характеристики турбулентного перемешивания в подледном пограничном слое были получены в 2017 году с помощью высокоразрешающего доплеровского измерителя скорости течения HR Aquadopp [4]. В пределах пограничного слоя была установлена прямая зависимость между средней скоростью течения и интенсивностью турбулентности подо льдом.

1. Гранин Н.Г., Мизандронцев И.Б., Козлов В.В., Цветова Е.А., Гнатовский Р.Ю., Блинов В.В., Асламов И.А., Кучер К.М., Иванов В.Г., Жданов А.А. Кольцевые структуры на ледовом покрове озера Байкал: анализ экспериментальных данных и математическое моделирование. // Геология и геофизика. 2018. Т. 59, №11. С. 1890-1902.
2. Гранин Н.Г., Гнатовский Р.Ю., Козлов В.В., Макаров М.М., Блинов В.В. Влияние газовых гидратов и метана на гидрофизические характеристики озера Байкал // Международный конф. «Пресноводные экосистемы – современные вызовы». Тез. докл. и стендовых сообщений / Иркутск: ООО «Мегапринт», 2018. С. 53-54.
3. Aslamov I. A., Kirillin G., Kozlov V. V., Zdrovennov R. E., Granin N. G. The results of the heat flux studies at the water-ice boundary layer of lake baikal // Intern. Conf. «Freshwater Ecosystems – Key Problems». Abstracts. Irkutsk: LLC «Megaprint», 2018. P.94-95.
4. Kirillin G., Aslamov I., Kozlov V., Granin N. Dissipation Rates of the Turbulent Kinetic Energy under Ice Cover of Lake Baikal // Proc. of the 24th IAHR Intern. Symp. on Ice. Vladivostok, Russia, June 4–9, 2018. / Scientific Editor T. Uvarova; School of Engineering FEFU. [Electronic resource]. Vladivostok, Far Eastern Federal University, 2018. P. 289-295.

\* Работа выполнена при поддержке НИР № 0348-2017-012 и РФФИ №15-55-12378 ННИО\_а.

# ПРИМЕНЕНИЕ ПОВТОРНО ПОРОЖДАЕМЫХ КОНФЛИКТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ В CDCL-ВЫВОДЕ К ОБРАЩЕНИЮ НЕКОТОРЫХ КРИПТОГРАФИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Кондратьев В.С.

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
Иркутский национальный исследовательский технический университет  
vikseko@gmail.com

Проблема булевой выполнимости (Boolean Satisfiability Problem), сокращенно обозначаемая SAT, является одной из центральных комбинаторных проблем ввиду своей тесной связи со многими областями современной теории алгоритмов и теории вычислительной сложности. Разработка алгоритмов, эффективных на подклассах SAT, активно ведется более 20 лет. В докладе будет представлена новая техника работы с конфликтными ограничениями, которые синтезируются в процессе работы алгоритма CDCL [1], использующегося для решения задачи о булевой выполнимости (SAT). Для целого ряда случаев было отмечено, что CDCL может в процессе работы многократно стирать и порождать одни и те же конфликтные дизъюнкты. Было экспериментально установлено, что запрет на удаление таких дизъюнктов может приводить к весьма существенному увеличению эффективности работы CDCL.

Основной результат работы состоит в новых техниках использования повторно порождаемых конфликтных ограничений. Применение этих техник позволило существенно ускорить решение задач, связанных с обращением криптографических хеш-функций.

Алгоритм, использующий новые техники работы с конфликтными ограничениями, был программно реализован в виде параллельного SAT-решателя, получившего название RADAR (Repeatable cLAuses Driven strAtegy solveR). Разработанный решатель использовался для решения некоторых частных случаев задачи обращения криптографических хеш-функций, а именно ослабленной задачи обращения хеш-функции MD4 [2] с несколькими старшими нулевыми битами, а также задачи поиска коллизий MD5 [3]. В большинстве тестов удалось добиться ускорения в несколько раз в сравнении с Sat-решателем Painless-MapleCOMSPS [4-5], победившим на SAT Competition 2017 (не использующим повторно порождаемые дизъюнкты).

1. Marques-Silva, J. P.; Lynce, I.; and Malik, S. 2009. Conflict-Driven Clause Learning SAT solvers. In Biere A., Heule V., van Maaren H., Walsh T. (eds.) Handbook of Satisfiability. IOS Press. 2009. P. 131–153.
2. R. L Rivest, The MD4 Message Digest Algorithm, Request for Comments (RFC)1320, Internet Activities Board, Internet Privacy Task Force, April 1992.
3. R. L Rivest, The MD5 Message Digest Algorithm, Request for Comments (RFC)1321, Internet Activities Board, Internet Privacy Task Force, April 1992.3 RIPEMD-1281
4. Le Frioux, L., Baarir, S., Sopena, J., Kordon, F.: PaInleSS: a framework for parallel SAT solving. In: Gaspers, S., Walsh, T. (eds.) SAT 2017. LNCS, vol. 10491, pp. 233–250. Springer, Cham (2017).
5. Nejati S., Liang J.H., Gebotys C., Czarnecki K., Ganesh V. Adaptive Restart and CEGAR-Based Solver for Inverting Cryptographic Hash Functions // LNCS. 2017. Vol. 10712 (VSTTE-2017). P. 120-131.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Д. Кононов.

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН.  
my\_official@rambler.ru

Рассматривается вопрос об асимптотической устойчивости интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений

$$(A_0 + \gamma \Delta_A)x'(t) + (B_0 + \gamma \Delta_B)x(t) = 0, \quad t \in T, \quad (1)$$

где  $A_0, B_0$  - заданные вещественные  $(n \times n)$ -матрицы;  $\Delta_A = (\alpha_{i,j})$  и  $\Delta_B = (\beta_{i,j})$  - матрицы неопределенностей,  $|\alpha_{i,j}| < g_{i,j}$ ,  $|\beta_{i,j}| < h_{i,j}$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ;  $x(t)$  - искомая  $n$ -мерная вектор-функция. Матрицы  $G = (g_{i,j})$  и  $H = (h_{i,j})$  задают масштабы изменения элементов матриц  $A_0$  и  $B_0$  соответственно, величина  $\gamma > 0$  определяет размах неопределенностей. Предполагается, что  $\det A = 0$  и матричный пучок  $\lambda A + B$  регулярен. Такого рода системы называют дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Важнейшей характеристикой ДАУ является индекс неразрешенности, отражающий сложность внутренней структуры системы. Допускается произвольно высокий индекс неразрешенности.

Исследуется вопрос об устойчивости системы вида (1) в предположении, что номинальная система

$$A_0x'(t) + B_0x(t) = 0, \quad t \in T, \quad (2)$$

асимптотически устойчива.

На основании результатов статьи [1] показано, что для ДАУ (1) существует обратимый оператор  $\mathfrak{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} + \dots + R_r\left(\frac{d}{dt}\right)^r$ , действие которого преобразует систему (1) к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1 & E_d \\ J_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

где  $E_d$  - единичная матрица указанного порядка;  $J_1$  и  $J_2$  - некоторые матрицы соответствующих размеров;  $colon(x_1(t), x_2(t)) = Qx(t)$ ,  $Q$  - матрица перестановки строк;  $r$  - индекс неразрешенности. При этом множества решений систем (2) и (3) совпадают.

Получены достаточные условия, гарантирующие сохранение внутренней структуры рассматриваемой системы (1). В предположениях, обеспечивающих сохранение структуры, получены условия робастной устойчивости ДАУ (2).

В дополнение получены условия робастной устойчивости ДАУ (1) с использованием свойства сверхустойчивости системы (2).

1. Щеглова А.А. Существование решения начальной задачи для вырожденной линейной гибридной системы с переменными коэффициентами / Известия вузов. Математика. 2010. № 9. С. 57–70.

## ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.А. Косов, Э.И. Семенов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[aakosov@yandex.ru](mailto:aakosov@yandex.ru), [edwseiz@gmail.com](mailto:edwseiz@gmail.com)

Исследован ряд объектов: система типа реакции-диффузии, многомерное уравнение нелинейной диффузии, уравнения диффузии со степенным коэффициентом и нелинейным источником, уравнение типа нелинейной теплопроводности. Были построены новые точные решения указанных уравнений, выражаемых через элементарные функции, функцию Ламберта, функции Бесселя, эллиптические функции Якоби и интегральную показательную функцию. Доказан ряд утверждений, определяющих условия на функцию источника, гарантирующие существование точных решений определенного вида. Приводятся примеры точных решений нелинейных уравнений диффузии (в том числе с полиномиальными и дробно-рациональными функциями источника), иллюстрирующие полученные результаты. Найдены новые автомодельные решения одномерного по пространственной переменной параболического уравнения типа нелинейной теплопроводности. Для системы типа реакции-диффузии, в которой коэффициенты диффузии зависят произвольным образом от пространственных переменных и концентраций, а реакции описываются однородными функциями с коэффициентами, зависящими специальным образом от пространственных переменных показано, что она имеет семейство точных решений, выражаемых через решения системы ОДУ с однородными функциями в правых частях. Для частного случая системы ОДУ построено общее решение, представимое специальными функциями Якоби. Установлено, что решения являются периодическими функциями и удовлетворяют нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздыванием (опережением), величина которого определяется выбором начальных условий. Показано, что эти периодические решения являются аналитическими функциями, представимыми в окрестности каждой точки на периоде сходящимися степенными рядами. Исследована система трех параболических уравнений в частных производных специального вида, относящаяся к типу уравнений реакции-диффузии. В этой системе слагаемые, описывающие диффузию, являются одинаковыми и линейными с постоянными коэффициентами, а реакции описываются однородными полиномами третьей степени, зависящими от трех параметров. Искомые функции считаются зависящими от времени и произвольного количества пространственных переменных (многомерный случай). Показано, что рассматриваемая система реакции-диффузии имеет целое семейство точных решений, выражаемых через произведение решения уравнения Гельмгольца и решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с однородными полиномами в правых частях, взятыми из исходной системы. Приведены два первых интеграла и построено общее решение упомянутой системы трех ОДУ, представимое эллиптическими функциями Якоби. Установлено, что все частные решения, получаемые из общего решения системы ОДУ являются периодическими функциями времени с периодами, зависящими от выбора начальных условий. Кроме того, показано также наличие у данной системы обыкновенных дифференциальных уравнений "взрывающихся" по времени решений, существующих лишь на конечном интервале времени. Соответствующие им значения первых интегралов и начальные данные выделяются

условиями типа равенства. Отдельно рассмотрен класс радиально симметричных по пространственным переменным решений. В этом случае уравнение Гельмгольца вырождается в неавтономное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, общее решение которого выражается через комбинацию степенных функций и функций Бесселя. В частном случае трех пространственных переменных общее решение выражается через тригонометрические либо гиперболические функции. Отметим, что полученные точные решения можно использовать для верификации разностных схем и численных расчетов, применяемых при математическом моделировании процессов и явлений, описываемых указанными уравнениями.

## РАЗРАБОТКА СЕРВЕРНОЙ ЧАСТИ ДЛЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРУЮЩЕГО КОМПЛЕКСА НА БАЗЕ LEGO EV3

Д.А. Костылев

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
mail@kostydenis.me

Отладка программного обеспечения является одним из важнейших этапов разработки, в особенности в процессе реализации алгоритмов, используемых на подвижных роботах. Примером подобного вида роботов могут быть автономные необитаемые подводные аппараты. Значимость отладки программного обеспечения обусловлена целым рядом факторов, однако первостепенной задачей данной деятельности является поддержание функционирования аппарата - некорректная работа программы может привести к выходу его из строя.

Для реализации вышеуказанных целей был создан имитационный моделирующий комплекс, который позволяет протестировать и отладить разрабатываемые алгоритмы. Агентами в данном комплексе являются роботы на базе контроллера Lego Mindstorm EV3 с установленной средой LeJOS, которая представляет собой операционную систему, основанную на ядре линукс с установленной виртуальной машиной Java [1]. Каждый аппарат оснащен разного рода датчиками, такими как ультразвуковой сенсор расстояния, инфракрасный приемник и передатчик-маяк, датчик цвета и освещенности.

В целях контроля и управления ходом миссии была разработана серверная часть комплекса, отвечающая за мониторинг текущего состояния роботов, отправку некоторых команд управления (например, запуск миссии), возможность пользователя изменять параметры в ходе программы, обеспечение обмена сообщениями между роботами.

Помимо этого была разработана структура миссии, состоящая из трех уровней[2]. В объекте верхнего уровня содержатся глобальные параметры, используемые всеми роботами, хранится информация о внешней среде, реализуется планирование миссии и задач, входящих в ее состав. На среднем уровне - уровне робота - происходит принятие решений, возникающих в ходе миссии или ее части. Нижний уровень отвечает за базовые функции робота: включение моторов для движения, получение информации с датчика, ответ на запрос информации от другого участника миссии (робота или сервера).

Особенностью данной системы является возможность подключения различных модулей через программный интерфейс[3], которые расширяют функциональность приложения без необходимости внесения изменений во все пакеты приложения.

Таким образом, указанный стенд позволяет облегчить отладку алгоритмов управления, исключая необходимость использования реальных дорогостоящих аппаратов.

1. leJOS EV3 Documentation. — URL: <http://www.lejos.org/ev3/docs/> (online; accessed: 2018-11-10).
2. Агеев М. Д. Автономные подводные роботы: системы и технологии. М. : Наука, 2005. С. 59.
3. Adamczyk Paul, Smith Patrick H, Johnson Ralph E, Hafiz Munawar. Rest and web services: In theory and in practice // REST: from research to practice. Springer, 2011. P. 35–57.

# ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БУЛЕВОЙ ВЫПОЛНИМОСТИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ\*

С.Е. Кочемазов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
veinamond@gmail.com

Многие процессы реального мира удобно моделировать как коллективное поведение агентов, взаимосвязь между которыми задается некоторым графом. Таким образом, вершины графа интерпретируют членов коллектива (агентов). Каждой вершине приписывается целый вес (или набор весов), а также специальная дискретная весовая функция, которая вычисляет значение веса в следующий момент времени в зависимости от весов вершин из некоторой её окрестности. Подобного рода системы можно использовать для описания самых разных систем: от функционирования регуляторных контуров генных сетей до голосований, спортивных турниров, распространения информации в сети и др.

В контексте исследования соответствующих моделей коллективного поведения часто возникают различного рода комбинаторные задачи. Например, если рассматривается дискретное время, вершины сети имеют целые веса и заданы функции пересчета весов вершин, то можно рассматривать задачи поиска неподвижных точек и циклов соответствующих дискретных отображений [1]. Для моделей распространения информации или влияния по сети часто рассматриваются т.н. задачи максимизации влияния [2]: необходимо найти подмножество множества агентов фиксированной мощности, чтобы распространение информации, будучи запущенным только из данных агентов, оказалось максимально возможным.

Один из возможных подходов к решению задач исследования дискретных моделей коллективного поведения из описанного класса является сведение их к задаче о булевой выполнимости. Несмотря на то, что SAT является классической NP-полной задачей, современные алгоритмы для её решения демонстрируют высокую эффективность на практических задачах из широкого спектра областей. Важным преимуществом SAT-подхода является возможность находить (в некоторых задачах) множества наименьшей мощности, обладающие требуемым свойством и доказывать, что никакое множество меньшей мощности им обладать не может. В работах [3]-[5] SAT-подход был применен к исследованию комбинаторных задач, возникающих при изучении дискретных моделей генных сетей, моделей конформного поведения и при построении графов атак на компьютерные сети.

1. Системная компьютерная биология / под ред. Колчанова Н.А. Новосибирск, Изд-во СО РАН. 2008.
2. Kempe D., Kleinberg J., Tardos E. Maximizing the Spread of Influence Through a Social Network // Proceedings of KDD'03. 2003. Pp. 137-146.
3. Evdokimov A.A., Kochemazov S.E., Otpuschchennikov I.V., Semenov A.A. Study of discrete automaton models of gene networks of nonregular structure using symbolic calculations // Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2014, Vol. 8, Iss. 3, Pp. 307-316.
4. Kochemazov S., Semenov A. Using Synchronous Boolean Networks to Model Several Phenomena of Collective Behavior // PLoS ONE. 2014. 9(12): e115156.
5. Semenov A., Gorbatenko D., Kochemazov S. Computational Study of Activation Dynamics on Networks of Arbitrary Structure // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2018. Vol. 247. Pp. 205-220.

---

\* Работа выполнена при поддержке проекта РФФИ № 16-11-10046, а также стипендии Совета по грантам Президента РФ №.СП-1829.2016.5

# О ТРЕХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДАННЫМИ НА ЗАМКНУТОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ\*

П.А. Кузнецов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
pav\_ku@mail.ru

В работе исследуется специальная краевая задача для нелинейного параболического уравнения теплопроводности (фильтрации)

$$T_t = \operatorname{div}(K(T)\nabla T) \quad (1)$$

при степенной зависимости коэффициента теплопроводности  $K(T)$  от температуры  $T = T(t, x, y, z)$ , т. е. при  $K(T) = \lambda T^\sigma$ , где  $\lambda, \sigma > 0$  — константы. Уравнение (1) используется для описания высокотемпературных процессов [1], процессов фильтрации политропного газа в пористых средах [2] и др.

С помощью замен  $u = T^\sigma$ ,  $t_1 = \lambda t$  уравнение (1) обычно приводят к виду

$$u_{t_1} = u(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{1}{\sigma}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2). \quad (2)$$

Уравнение (2) будем рассматривать вкуче с краевым условием

$$u(t_1, x, y, z)|_\Gamma = \delta(t_1, x, y, z), \quad \delta(0, x, y, z) = 0, \quad \delta_{t_1}(0, x, y, z) > 0. \quad (3)$$

Краевой режим  $\delta(t_1, x, y, z)$  задан на замкнутой достаточно гладкой поверхности  $\Gamma = \Gamma(t_1, x, y, z)$ , которая при каждом фиксированном  $t_1$  из некоторой окрестности  $t_1 = 0$  ограничивает в  $\mathbb{R}^3$  область, звездную относительно точки  $(0, 0, 0)$ . При описании подобной границы удобнее всего перейти в сферическую систему координат. В настоящей работе исследуется разрешимость задачи (2), (3) в классе аналитических функций. Ниже для большего удобства будем писать  $t$  вместо  $t_1$ .

Отметим также, что содержательный класс решений уравнения (1) составляют тепловые волны [1] (волны фильтрации [2]), распространяющиеся с конечной скоростью по нулевому фону температуры (давления). Геометрически тепловая волна представляет собой два решения уравнения (2) (возмущенное  $u \geq 0$  и тривиальное  $u \equiv 0$ ), непрерывно состыкованные вдоль некоторой поверхности — фронта волны. Можно показать, что решение задачи (2), (3), если оно существует, представляет собой возмущенную часть тепловой волны.

Задача (2), (3) ранее исследовалась в классе аналитических функций при  $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  (сфера постоянного радиуса) [3] и  $\Gamma = \Gamma(x, y, z)$  (замкнутая стационарная поверхность) [4]. В настоящей работе полученные ранее результаты обобщаются на случай нестационарной поверхности  $\Gamma = \Gamma(t, x, y, z)$ . Схема исследования включает в себя переход в сферические координаты, построение решения в виде степенного ряда и доказательство его сходимости. Отметим, что задача с данными на замкнутой нестационарной  $\Gamma$  ранее исследовалась лишь в двумерном случае [5].

Переходя в равенствах (2), (3) к сферическим координатам  $\rho > 0$ ,  $\varphi \in [-\pi; \pi)$ ,

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-01-00608.

$\theta \in [-\pi/2 + \theta_1; \pi/2 - \theta_1]$  ( $\theta_1 > 0$  – малая константа), получим краевую задачу

$$u_t = u \left( \frac{2}{\rho} u_\rho - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\rho^2} u_\theta + u_{\rho\rho} + \frac{\sec^2 \theta}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} \right) + \frac{1}{\sigma} \left( u_\rho^2 + \frac{\sec^2 \theta}{\rho^2} u_\varphi^2 + \frac{1}{\rho^2} u_\theta^2 \right), \quad (4)$$

$$u(t, \rho, \varphi, \theta)|_{\rho=R(t, \varphi, \theta)} = f(t, \varphi, \theta). \quad (5)$$

Поверхность  $\Gamma$  теперь задается уравнением  $\rho = R(t, \varphi, \theta)$ , где функция  $R(t, \varphi, \theta) > 0$  определена при  $\varphi \in [-\pi; \pi]$ ,  $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$ , а краевой режим запишется в виде  $f(t, \varphi, \theta) = \delta(t, \rho = R(t, \varphi, \theta), \varphi, \theta)$ . Для функций  $f$  и  $R$  также справедливы соотношения  $f(0, \varphi, \theta) = 0$ ,  $f_t(0, \varphi, \theta) > 0$  и  $R(t, -\pi, \theta) = R(t, \pi, \theta)$ .

Решение (4), (5) построим в виде двойного степенного ряда

$$u(t, r, \varphi, \theta) = \sum_{n,m=0}^{\infty} u_{n,m}(\varphi, \theta) \frac{t^n r^m}{n! m!}, \quad r = \rho - R(t, \varphi, \theta). \quad (6)$$

Коэффициенты  $u_{n,0}$  определяются из краевого условия (5). Полагая в (4)  $t = 0$ ,  $\rho = R$ , несложно найти коэффициент  $u_{0,1}$ . Остальные находим рекуррентно: зная все коэффициенты  $u_{n-k,k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , дифференцируем уравнение (4)  $n - k$  раз по  $t$  и  $k$  раз по  $\rho$  при  $t = 0$  и  $\rho = R$ , получаем равенство

$$u_{n-k+1,k} + a_k u_{n-k,k+1} + b_{n-k} u_{n-k-1,k+2} = L_{n-k,k}, \quad (7)$$

где  $a_k \neq 0$ ,  $b_0 = 0$  и  $b_{n-k} < 0$  при  $k \neq n$ . Функции  $L_{n-k,k}$  зависят только от уже известных коэффициентов. Полагая в (7)  $k = 0, 1, \dots, n$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей в левой части. Индукцией по порядку матрицы можно показать ее невырожденность (см. [5]). Коэффициенты определяются однозначно. Сходимость ряда (6) обеспечивает следующая теорема.

**Теорема.** Пусть функции  $R$  и  $f$  аналитичны в некоторой окрестности  $t = 0$  и при всех допустимых  $\varphi$  и  $\theta$ . Тогда задача (4), (5) имеет единственное (при выборе направления движения фронта тепловой волны) ненулевое аналитическое решение.

Доказательство проводится в несколько этапов. Сначала с помощью невырожденных замен задача (4), (5) сводится к одному уравнению. Для полученного уравнения строится мажорантная задача. Последняя с помощью несложных преобразований приводится к типу Коши–Ковалевской. Из теоремы Коши–Ковалевской следует существование и единственность аналитического решения.

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит, 1966.
2. Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
3. Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.
4. Кузнецов П.А. О краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой поверхности // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2014. Т. 9. С. 61–74.
5. Казаков А.Л., Кузнецов П.А. Об аналитических решениях одной специальной краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности в полярных координатах // Сибирский журнал индустриальной математики. 2018. Т. 21, № 2(74). С. 56–65.

## О НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА РЕЛЕЯ-РИТЦА\*

А.В. Лакеев

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[lakeyev@icc.ru](mailto:lakeyev@icc.ru)

Ю.Э. Линке

Иркутский национальный исследовательский технический университет  
[linkeyurij@gmail.com](mailto:linkeyurij@gmail.com)

В.А. Русанов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[v.rusanov@mail.ru](mailto:v.rusanov@mail.ru)

Пусть  $(X, \Sigma, \mu)$  — измеримое пространство с полной,  $\sigma$ -аддитивной и конечной мерой  $\mu$ . Обозначим через  $S = S(X, \Sigma, \mu)$  — множество всех вещественных измеримых функций, заданных на  $X$  и почти всюду конечных.

На пространстве  $S$  будем рассматривать топологию, порождаемую сходимостью по мере. Хорошо известно [1, стр. 64, теорема 14], что (при  $\mu(X) < \infty$ ) эта топология порождается также следующей метрикой на  $S$ :

$$\rho(f, g) = \int_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx \quad \text{при } f, g \in S.$$

Определим оператор  $\Psi: S \times S \rightarrow S$ , который будем называть оператором Релея–Ритца, следующим образом:

$$\Psi(f, g)(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}, & \text{если } g(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } g(x) = 0, \end{cases} \quad \text{для всех } f, g \in S, x \in X. \quad (1)$$

Этот оператор находит применение в качественной теории дифференциальной реализации различных систем [2].

Основная задача, которая исследуется в данной работе, состоит в следующем.

Пусть заданы две последовательности  $f_1, \dots, f_n, \dots$ ,  $g_1, \dots, g_n, \dots$  и функции  $f, g$  из  $S$  такие, что  $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ ,  $\rho(g_n, g) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Верно ли, что  $\rho(\Psi(f_n, g_n), \Psi(f, g)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и если нет, то при каких условиях это верно?

Оператор  $\Psi$  представим в виде  $\Psi(f, g)(x) = f(x) \cdot \psi(g)(x)$ , где  $\psi: S \rightarrow S$  следующий оператор:

$$\psi(g)(x) = \begin{cases} \frac{1}{|g(x)|}, & \text{если } g(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } g(x) = 0, \end{cases} \quad \text{всех } g \in S, x \in X. \quad (2)$$

В [3] показано (стр. 54, следствие 12.1), что если функции  $g, g_n$  при  $n = 1, 2, \dots$  не обращаются в нуль на  $X$  и  $\rho(g_n, g) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\rho(\psi(g_n), \psi(g)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Таким образом получаем, что для оператора  $\psi$  указанная задача решается положительно, но при дополнительном условии  $\text{supp } g = X$ ,  $\text{supp } g_n = X$ , при  $n = 1, 2, \dots$ , где, для любой функции  $g \in S$ , будем обозначать через

---

\* Работа частично поддержана РФФИ проект 16-07-00201.

$\text{supp } g = \{x \in X \mid g(x) \neq 0\}$  ее носитель.

Оказалось, что в общем случае это не верно, как будет видно из приводимой ниже теоремы.

Для того, чтобы сформулировать эту теорему, введем на  $\Sigma$  следующую метрику ([1], стр. 66)  $\rho_\mu(A, B) = \rho(\chi_A, \chi_B)$ ;  $A, B \in \Sigma$ , где  $\chi_A$  и  $\chi_B$  — характеристические функции множеств  $A$  и  $B$ , соответственно. Используя определение метрики  $\rho$ , нетрудно показать, что  $\rho_\mu(A, B) = \frac{1}{2} \mu(A \Delta B)$ , где  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  — симметричная разность множеств  $A$  и  $B$ .

**Теорема 1.** Пусть  $g, g_n \in S$ ,  $n = 1, 2, \dots$  такие, что  $\rho(g_n, g) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для того, чтобы  $\rho(\psi(g_n), \psi(g)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\rho_\mu(\text{supp } g_n, \text{supp } g) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

**Следствие 1.** Если  $\mu(X \setminus \text{supp } g) > 0$ , то существует последовательность  $g_n \rightarrow g(\mu)$  такая, что  $\psi(g_n)$  не сходится к  $\psi(g)$  по мере  $\mu$ .

**Доказательство.** Достаточно взять

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } g(x) \neq 0, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } g(x) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \text{supp } g_n = X \text{ и } \rho_\mu(\text{supp } g_n, \text{supp } g) = \frac{1}{2} \mu(X \setminus \text{supp } g) = \text{const} > 0.$$

Поэтому условие (3) не выполняется и, следовательно,  $\psi(g_n)$  не сходится к  $\psi(g)$  по мере  $\mu$ . Но при этом  $\mu(\{x \in X \mid |g_n(x) - g(x)| > \varepsilon\}) = 0$  при  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  и, следовательно,  $g_n \rightarrow g(\mu)$  при  $n \rightarrow \infty$ . *Следствие доказано.*

**Следствие 2.** Оператор  $\psi: S \rightarrow S$  будет непрерывен относительно метрики  $\rho_0(f, g) = \rho(f, g) + \rho_\mu(\text{supp } f, \text{supp } g)$ .

Рассмотрим теперь оператор Релея–Ритца  $\Psi: S \times S \rightarrow S$ , определяемый формулой (1). Для него верно следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть  $f, f_n, g, g_n \in S$ ,  $n = 1, 2, \dots$  такие, что  $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$  и  $\rho(g_n, g) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если, кроме того, выполняется условие (3), то  $\rho(\Psi(f_n, g_n), \Psi(f, g)) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Замечание.** Очевидно, что условие (3) в общем случае уже не будет необходимым. Однако можно доказать его необходимость, например, если  $|f_n(x)| \geq \text{const} > 0$  для всех  $x \in \text{supp } g$ .

**Следствие 3.** Оператор  $\Psi: S \times S \rightarrow S$  будет непрерывен относительно метрики на  $S \times S$ , определяемой равенством

$$\rho_0((f, g), (f_1, g_1)) = \rho(f, f_1) + \rho(g, g_1) + \rho_\mu(\text{supp } g, \text{supp } g_1).$$

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
2. Лакеев А.В., Линке Ю.Э., Русанов В.А. К реализации полилинейного регулятора дифференциальной системы второго порядка в гильбертовом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 8. С. 1098–1109.
3. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЕКТОРНЫМ ПАРАМЕТРОМ  
В СЕКТОРИАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

Р.Ю. Леонтьев  
ФГБОУ ВО «ИГУ»  
romanisu@yandex.ru

Пусть  $X, Y$  — банаховы пространства,  $\Lambda$  — линейное нормированное пространство. Будем рассматривать нелинейное операторное уравнение

$$B(\lambda)x = R(x, \lambda), \quad (1)$$

где  $B(\lambda)$  — замкнутый линейный оператор с плотной в  $X$  областью определения, не зависящей от параметра  $\lambda \in \Lambda$ . Нелинейный оператор  $R(x, \lambda)$  непрерывен по  $x$  и  $\lambda$  в окрестности нуля и  $R(0, 0) = 0$ .

Требуется построить непрерывное решение  $x(\lambda)$  наибольшего порядка малости в нерегулярном случае

$$x(\lambda) \rightarrow 0 \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0, \quad S \subset \Lambda,$$

где  $S$  — открытое множество, границе которого принадлежит точка  $\lambda = 0$ . Область  $S$  будем называть секториальной окрестностью нуля.

Будем предполагать, что оператор  $B(\lambda)$  имеет обратный для  $\lambda \in S$  и

$$\|B^{-1}(\lambda)\| = O\left(\frac{1}{a(\lambda)}\right) \text{ при } S \ni \lambda \rightarrow 0, \quad (2)$$

где  $a(\lambda)$  — непрерывный функционал с неотрицательными значениями,  $a(0) = 0$ .

Были получены достаточные условия существования непрерывного решения  $x(\lambda)$  в открытом множестве  $S$ . Решения строятся методом последовательных приближений.

Введем множество

$$\Omega = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r, \lambda \in S\}, \quad r > 0.$$

**Теорема.** Пусть в области  $\Omega$  имеет место условие (2) и при этом:

1) справедливо неравенство

$$\|R(x_1, \lambda) - R(x_2, \lambda)\| \leq L(\lambda)r\|x_1 - x_2\|,$$

где  $L(\lambda) = O(a(\lambda))$  при  $\lambda \rightarrow 0$ ;

2) имеет место оценка  $\|R(0, \lambda)\| = o(a^2(\lambda))$  при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Тогда найдется область  $\Omega_0 = \{(x, \lambda) \in X \times \Lambda, \|x\| \leq a(\lambda)r_0, \lambda \in S_0\}$ ,  $0 < r_0 \leq r$ ,  $S_0 \subseteq S$ , в которой существует единственное решение уравнения (1)  $x(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$ . Последовательность  $\{x_n\}$ :

$$x_n = -B^{-1}(\lambda)R(x_{n-1}, \lambda), \quad x_0 = 0$$

сходится при  $\forall \lambda \in S_0$  к этому решению.

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
2. Сидоров, Н. А. Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы // Нелинейные граничные задачи. — Донецк: Институт прикладной математики и механики, 2004. Вып. 14. С. 161–164.
3. Леонтьев, Р. Ю. Теорема о неявном операторе в секториальных областях // Известия ИГУ. 2009. Т. 2, № 1. С. 320–323.
4. Сидоров Н. А., Леонтьев Р. Ю. О решении максимального порядка малости нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, N. 2. С. 226–237.

## ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ СИСТЕМЫ ПУБЛИКАЦИИ ДАННЫХ SKAN ДЛЯ ПОДДЕРЖКИ ИССЛЕДОВАНИЯ МИКРОБИОМА ОЗЕРА БАЙКАЛ\*

Малков Ф.С.

Иркутский научный центр СО РАН

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН,

Иркутск, Россия [malkov@icc.ru](mailto:malkov@icc.ru)

При исследовании микробиома озера Байкал методами высокопроизводительного секвенирования порождаются большие массивы метагеномных данных. В свою очередь мировая практика показывает, что открытие таких наборов данных является хорошим тоном в исследованиях. Для публикации и открытия данных научным сообществом используется множество разных систем [1].

В докладе рассматриваются перспективы применения системы управления данными SKAN [1] в задачах предоставления инструментов оптимизации публикации данных, поиска, совместного использования данных на примере исследования микробиома озера Байкал. Обсуждаются вопросы интеграции SKAN комплексами обработки последовательностей, статистическими пакетами и средствами визуализации. Для других предметных областей возможна интеграция со специально разработанными ИТ-решениями, будь то алгоритмы компьютерного зрения, искусственного интеллекта и прочее. Предполагается, что система обеспечит возможность управления жизненным циклом данных, начиная с планирования сбора данных и заканчивая их долгосрочным хранением и публикацией. Это позволит исследователям более качественно подойти к планированию сбора данных, их обработки и представления, обеспечит надёжность хранения и гарантированный доступ к данным. В настоящее время развёртывается тестовая версия SKAN на базе ЦКП ИНЦ СО РАН для публикации данных по метагеномике в рамках проекта исследования микробиома озера Байкал.

В дальнейшем предполагается, что развёрнутые ресурсы будут использоваться научными сотрудниками ИНЦ СО РАН и другими исследователями для работы с данными и их публикации, а при подаче на гранты или начале инициативных работ будут учитываться вопросы управления жизненным циклом данных.

1. Муромцев Д.И., Леманн Й., Семерханов И.А., Навроцкий М.А., Ермилов И.С. Исследование актуальных способов публикации открытых научных данных в сети // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. №6. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-aktualnyh-sposobov-publikatsii-otkrytyh-nauchnyh-dannyh-v-seti> (дата обращения: 18.11.2018).
2. SKAN. Официальный сайт. URL: <https://ckan.org/> (дата обращения: 13.11.2017).

\* Работа выполнена при поддержке проекта Иркутского научного центра СО РАН № 4.1.2.

## О ПОДБОРЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫБОРА НА ОСНОВЕ ИХ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ОПИСАНИЙ

Г.С. Малтугуева, А.Ю. Юрин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
gama@icc.ru

Задача выбора заключается в формировании перечня вариантов, обеспечивающих разрешение проблемной ситуации в существующих ограничениях, и выделении среди них одного лучшего или нескольких наиболее предпочтительных, удовлетворяющих предъявляемым требованиям. На основе набора классификационных признаков можно выделить несколько основных типов задач принятия решений, обуславливающих применение определенных методов. Многообразие типов задач и методов вызывает затруднения у лица, принимающего решение, с подбором метода адекватного рассматриваемой задаче.

Поскольку для каждого метода накоплен определенный опыт его применения [1], то для решения задачи подбора методов предлагается применить прецедентный [3] и экспертный подходы. В качестве основы совместного применения данных подходов использованы структурированные описания задач и методов (СОЗ и СОМ соответственно):

$СОЗ = \{Количество\_вариантов, Число\_экспертов, Вид\_информации, Вид\_показателя\_эффективности, Вид\_результата, Множество\_вариантов, Множество\_критериев, Множество\_индивидуальных\_предпочтений, Результат\}$

$СОМ = \{Количество\_вариантов, Число\_экспертов, Вид\_информации, Вид\_показателя\_эффективности, Структурированность, Информированность, Структура\_множества\_вариантов, Вид\_результата, Зависимость\_от\_Времени, Определенность\_Информации\}$

На основе СОЗ произведена специализация стандартной модели прецедента [3] для задачи подбора метода:  $Прецедент^{ПМ} = \langle Описание^{ПМ}, Решение^{ПМ} \rangle$ , где в части  $Описание^{ПМ} = \{Количество\_вариантов, Число\_экспертов, Вид\_информации, Вид\_показателя\_эффективности, Вид\_результата\}$ , а в блоке  $Решение^{ПМ} = \{Метод\_решения\}$ . Данная модель позволяет оценивать степень близости описания рассматриваемой задачи с описанием задач из библиотеки прецедентов. Множество адекватных методов строится путём извлечения названия метода из блока  $Решение^{ПМ}$  прецедентов-аналогов.

К недостаткам прецедентного подхода можно отнести пустое множество и избыточное число прецедентов-аналогов. В первом случае предлагается подобрать метод решения с помощью структурированного описания методов (СОМ), в котором содержится информация о характеристиках задач, к решению которых применялся данный метод. В случае избыточного числа прецедентов-аналогов и/или большого числа методов, полученных по СОМ, предлагается обработать весь перечень методов с помощью многометодной процедуры с привлечением экспертов для оценивания не скольким критериям [3].

1. Петровский А.Б. Теория принятия решений – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 400 с.
2. Aamodt A., Plaza E. Case-Based reasoning: Foundational issues, methodological variations, and system approaches // AI Communications. 1994. №7(1).
3. Малтугуева Г.С., Петровский А.Б. Многометодное групповое многокритериальное оценивание экологически мероприятий // Шестая международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ – 2015 (15-20 июня 2015 г., г. Светлогорск, Россия): Труды конференции. В 2-х т. М.: ИСА РАН. Т.2. С. 72-80.

# ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ<sup>1</sup>

Малтугуева Н.С.

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО  
РАН malt@icc.ru

Работа посвящена дискретно-непрерывной задаче размещения [1,2] следующего вида. Пусть  $\Omega$  – ограниченная область на плоскости,  $\rho$  – распределение потребителей в этой области. В общем случае  $\rho$  является вероятностной мерой, которая может иметь как непрерывную так и дискретную составляющую. Для обслуживания потребителей нам необходимо разместить  $N$  предприятий заданной мощности  $a_i \geq 0$ ,  $i=1, \dots, N$ , причем суммарная мощность предприятий предполагается равной 1. Пусть  $i$ -е предприятие расположено в точке  $x_i = (x_i^1, x_i^2) \in \Omega$ . Тогда цена обслуживания этим предприятием области  $A \subset \Omega$ ,  $\rho(A) \leq a_i$ , предполагается равной числу

$$\int |x_i - x|^p d\rho(x), p > 1.$$

Другими словами, цена обслуживания пропорциональна  $p$ -й степени расстояния.

Для случая  $N$  предприятий задача размещения может быть записана следующим образом:

$$\min_{\{x_i\}_{i=1}^N \subset \Omega} W_p^p(\rho, a_i \sum_i \delta_{x_i}), \quad (1)$$

где  $W_p$  – метрика Канторовича порядка  $p$  [3], которая определяется следующим образом:

$$W_p(\rho_1, \rho_2) = \min_{\Pi} \left( \int |x - y|^p d\Pi(x, y) \right)^{1/p}.$$

Здесь минимум берется среди всех вероятностных мер  $\Pi$  на  $\Omega \times \Omega$  таких, что  $\Pi \circ \pi_1^{-1} = \rho_1$ ,  $\Pi \circ \pi_2^{-1} = \rho_2$  ( $\pi_1$  и  $\pi_2$  обозначают проекции на первую и вторую компоненту прямого произведения  $\Omega \times \Omega$ , соответственно).

В докладе рассматривается вариант алгоритма градиентного спуска для задачи (1), основанный на формуле дифференцирования метрики Канторовича порядка  $p$  [4]. Подчеркнем, что алгоритм заведомо не может быть применен для случая  $p=1$ , поскольку указанная формула дифференцирования оказывается неверна.

1. Wolsey L.A., Nemhauser G.L. Integer and Combinatorial Optimization. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, 1988.
2. Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С. К вопросу о сегментации логистических зон для обслуживания непрерывно распределенных потребителей // Автомат. и телемех. 2013. № 6. С. 87–100.
3. Богачев В.И. Слабая сходимость мер. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016.
4. Santambrogio F. Optimal transport for applied mathematicians. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 87. Birkhäuser/Springer, 2015.

<sup>1</sup>Работа поддержана РФФИ, проекты № 18-07-00604, 18-31-00425

# ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1 И 3/2 И ИХ СВЯЗЬ С УНИТАРНЫМ КВАНТОВАНИЕМ

Ю.А. Марков, М.А. Маркова

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[markov@icc.ru](mailto:markov@icc.ru), [markova@icc.ru](mailto:markova@icc.ru)

В предлагаемой работе разработан формализм, необходимый для построения представления в виде континуального интеграла по траекториям в парасуперпространстве для функций Грина массивных заряженных частиц со спинами 1/2, 1 и 3/2 во внешнем калибровочном поле. Показана связь данного представления со схемой унитарного квантования, основанного на унимодулярной группе  $SU(2N+1)$ . В рамках данного подхода решены следующие задачи:

1. На основе формализма Дэффина-Кеммера-Петье (ДКР) для частиц со спином 1 разработана процедура построения кубического корня волнового оператора третьего порядка по производным. Для этой цели введены в рассмотрение дополнительные алгебраические объекты: так называемый  $q$ -коммутиатор ( $q$  – примитивный кубический корень единицы) и новый набор матриц  $\eta_\mu$  вместо исходных  $\beta_\mu$  - матриц ДКР-алгебры, обладающих рядом весьма специфических свойств. Показано, что на основе данных алгебраических объектов процедуру построения кубического корня волнового оператора третьего порядка удастся свести к нескольким простым алгебраическим операциям и некоторой специальной операции предельного перехода  $z \rightarrow q$ , где  $z$  – некоторый комплексный параметр деформации, входящий в определение  $\eta_\mu$  - матриц. Рассмотрено приложение предложенного подхода к задаче построения представления пропагатора массивной векторной частицы во внешнем калибровочном поле в виде континуального интеграла по траекториям в парасуперпространстве в рамках теории Дэффина-Кеммера-Петье [1-2].

2. Представлен общий анализ отображения между парой майорановских спиноров  $(\psi_\alpha, \theta_\alpha)$  и вещественной антикоммутирующей тензорной системой  $(S, V_\mu, {}^*T_{\mu\nu}, A_\mu, P)$ . Получена полная система билинейных тождеств, которым должны удовлетворять эти тензорные переменные. Данный анализ был использован в задаче соответствия между двумя различными способами описания спиновой степени свободы релятивистской частицы. Получено точное решение системы билинейных тождеств для случая реального грассманово-нечетного тензорного агрегата  $(S, V_\mu, {}^*T_{\mu\nu}, A_\mu, P)$ . Рассмотрена согласованность этого решения с соответствующей системой билинейных тождеств, включающих как данные тензорные переменные, так и их производные. Предложен путь обобщения полученных результатов для случая дираковских спиноров и внешнего дираковского поля. Показано, что для построения взаимно-однозначного соответствия наиболее общих спиноров и тензорных переменных необходимо четырехкратное увеличение числа тензорных переменных [3-5].

3. В рамках формализма Баба-Мадхаварао предложен самосогласованный подход вывода системы волновых уравнений четвертого порядка для описания частицы со спином 3/2. Для этой цели были введены в рассмотрение дополнительный алгебраический объект, так называемый  $q$ -коммутиатор ( $q$  – примитивный корень четвертой степени из единицы) и новый набор матриц  $\eta_\mu$  вместо исходных  $\beta_\mu$ -матриц. Были детально исследованы различные коммутационные соотношения  $\eta$ -матриц и на их основе рассмотрено построение корня четвертой степени волнового оператора

четвертого порядка для частицы со спином  $3/2$ . Был также рассмотрен вопрос о возможном приложении данного формализма к задаче построения представления в виде континуального интеграла по траекториям в парасуперпространстве для пропагатора массивной заряженной частицы со спином  $3/2$  во внешнем электромагнитном поле [6].

4. Рассмотрена связь между схемой унитарного квантования и параферми-статистикой порядка 2. Предложено соответствующее обобщение анзаца Грина, которое позволило обратить в тождество билинейные и трилинейные соотношения для операторов рождения и уничтожения двух различных параферми-полей  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$ . Предложен способ включения параграссмановых чисел  $\xi_k$  в общую схему унитарного квантования. Для парастатистики порядка 2 обнаружен интересный факт, что трилинейные соотношения, содержащие как параграссмановы переменные  $\xi_k$ , так и операторы поля  $a_k, b_m$  при некотором обратимом отображении переходят в унитарно эквивалентные соотношения, в которых коммутаторы заменяются на антикоммутаторы и наоборот. В явном виде построено преобразование Клейна для гриновских компонент операторов  $a_k$  и  $b_m$ , что позволило привести исходные коммутационные правила для компонент к нормальным коммутационным соотношениям для обычных ферми-полей [7-8].

1. Markov Yu.A., Markova M.A., and Bondarenko A.I. Third order wave equation in Duffin-Kemmer-Petiau theory: Massive case // *Physical Review D*. 2015. V. 92. P. 105017(24).
2. Марков Ю.А., Маркова М.А., Бондаренко А.И. Волновое уравнение высшего порядка в рамках формализма Дэффина-Кеммера-Петье // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2016. Т. 59, № 11. С. 187-192.  
Markov Yu.A., Markova M.A., Bondarenko A.I. Higher-order wave equation within the Duffin-Kemmer-Petiau formalism // *Russian Physics Journal*. 2017. Vol. 59, No. 11. P. 1948-1955.
3. Markov Yu.A., Markova M.A. Mapping between the classical and pseudoclassical models of a relativistic spinning particle in external bosonic and fermionic fields. I // *Nuclear Physics A*. 2015. V. 938. P. 59-91.
4. Markov Yu.A., Markova M.A. Mapping between the classical and pseudoclassical models of a relativistic spinning particle in external bosonic and fermionic fields. II // *Nuclear Physics A*. 2016. V. 950. P. 163-188.
5. Марков Ю.А., Маркова М.А. ВКБ-приближение уравнения Дирака с суперсимметричным расширением // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2015. Т. 58, № 8. С. 105-111.  
Markov Yu.A. and Markova M.A. WKB Approximation of the Dirac equation with a supersymmetric extension // *Russian Physics Journal*. 2015. V. 58, No. 8. P. 1151-1159.
6. Markov Yu.A., Markova M.A., Bondarenko A.I. Fourth-order wave equation in Bhabha-Madhava Rao spin  $3/2$  theory // *International Journal of Modern Physics A*. 2017. V. 32, No 25. P. 1750144.
7. Марков Ю.А., Маркова М.А., Гитман Д.М. Унитарное квантование и параферми-статистика порядка 2 // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2018. Т. 154, Вып. 3(9). С. 469-495.  
Markov Yu.A., Markova M.A., Gitman D.M. Unitary Quantization and Para-Fermi Statistics of Order 2 // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2018. V. 127, No 3. P. 398-421.
8. Марков Ю.А., Маркова М.А., Гитман Д.М., Бондаренко А.И., Парастатистика и униквантование // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2018. Т. 61, № 10. С. 57-66.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАНКАРЕ, УРАВНЕНИЯ АППЕЛЯ И  
НЕУДЕРЖИВАЮЩИЕ СВЯЗИ В СЛУЧАЕ САНЕЙ ЧАПЛЫГИНА НА НАКЛОННОЙ  
ВОГНУТО-ВЫПУКЛОЙ НЕГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ  
(ВТОРАЯ ЧАСТЬ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ)

Р.П. Мошкин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: [rmoshkin@yandex.ru](mailto:rmoshkin@yandex.ru)

Во второй части работы рассмотрен пример – сани Чаплыгина на наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности. Используются уравнения Аппеля на сфере и эллипсоиде вращения. Выписываются уравнения движения и энергия ускорений, находится стационарное движение. Используются элементы теории поверхностей.

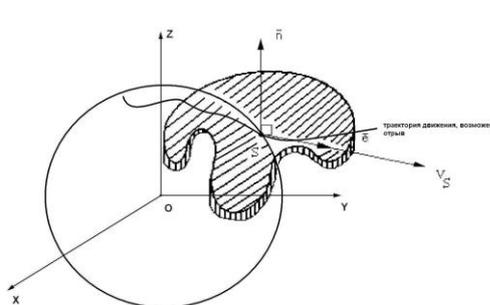


Рис. 1. Сани Чаплыгина на сфере.  
Уравнения Аппеля. Энергия ускорений

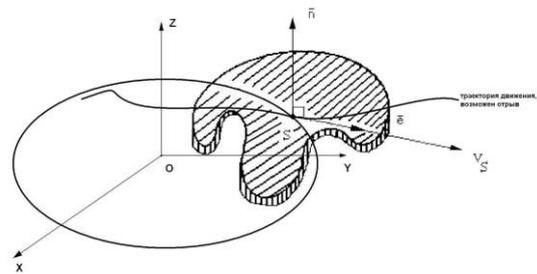


Рис. 2. Сани Чаплыгина на эллипсоиде вращения.  
Уравнения Аппеля. Энергия ускорений

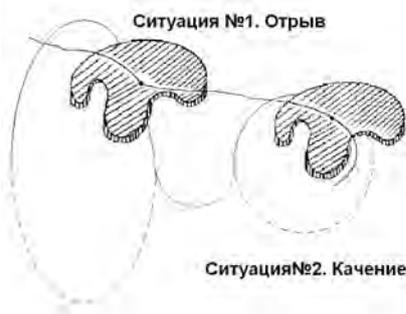


Рис. 3. Реальная траектория

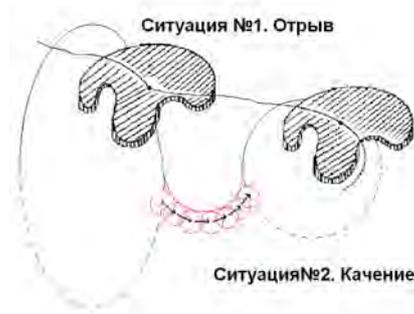


Рис. 4. Решение реальной траектории

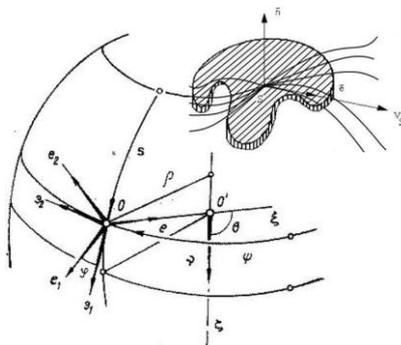


Рис. 5. Постановка задачи в случае уравнений Аппеля на сфере и эллипсоиде вращения

# О РЕДУКЦИЯХ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ\*

Св.С. Орлов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
s.orlov@icc.ru

Рассматривается квазилинейное параболическое уравнение

$$\partial_t u = \nabla_x \cdot [k(u) \nabla_x u] + l(u), \quad (1)$$

в котором искомая функция  $u = u(t, x) : \Omega \rightarrow [0; +\infty)$ , множество  $\Omega \subset [0; +\infty) \times \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . В работе изучается случай, когда  $k(u) \in C^2_{(0; +\infty)} \cap C_{[0; +\infty)}$  и  $l(u) \in C^1_{[0; +\infty)}$ . Кроме того, предполагается, что  $k(u)|_{u=0} = l(u)|_{u=0} = 0$  и  $k = k(u)$  – монотонная неотрицательная функция. Таким образом, введенные на выбор функции  $k$  ограничения позволяют отнести уравнение (1) к классу вырождающихся. Следует отметить, что (1) применяется при моделировании процессов диффузии, теплопроводности и фильтрации, протекающих в сплошных нелинейных диссипативных средах [1].

Использование замены  $u = \varphi(v)$ , где  $\varphi = k^{-1}$  (обратная функция  $k^{-1}$  существует в силу монотонности  $k$ ), приводит (1) к более удобному для исследования эквивалентному уравнению

$$\partial_t v = v \Delta_x v + f(v)(\nabla_x v)^2 + g(v), \quad (2)$$

в котором

$$f(v) = \frac{v \varphi''(v)}{\varphi'(v)} + 1, \quad g(v) = \frac{l(\varphi(v))}{\varphi'(v)}.$$

Доклад посвящен вопросам нахождения редукций уравнения (2) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В качестве основного метода поиска редукций используется так называемый *прямой метод Кларксона–Крускала (the Clarkson–Kruskal direct method)*. При этом в представляемой работе, наряду с классическим вариантом [2], применяется модификация этого метода [3]. Также в докладе планируется уделить внимание результатам качественного анализа решений обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым может быть приведено (2).

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
2. Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. 1989. Vol. 30, № 10. P. 2201-2213.
3. Hood S. On direct, implicit reductions of a nonlinear diffusion equation with an arbitrary function – generalizations of Clarkson’s and Kruskal’s method // IMA J. App. Math. 2000. Vol. 64, № 3. P. 223-244.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-01-00608.

## О ПРИНЦИПАХ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ИНТЕРФЕЙСОВ ДЛЯ КОМПОНЕНТОВ СИСТЕМЫ АГЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ\*

А.И. Павлов<sup>1</sup>, А.Б. Столбов<sup>1</sup>, А.С. Дорофеев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

<sup>2</sup>Иркутский национальный исследовательский технический университет  
[asd@icc.ru](mailto:asd@icc.ru), [stolboff@icc.ru](mailto:stolboff@icc.ru)

В последние года использование мультиагентного подхода при проведении имитационного моделирования приобрело большую популярность, и на данный момент агентные имитационные модели (АИМ) являются одним из основных инструментов исследователя наряду с дискретно-событийным и дискретно-непрерывным моделями. Накопленный к настоящему времени богатый научный и практический опыт создания и применения АИМ позволяет перейти к решению задач классификации и унификации существующих методов и программных средств разработки АИМ.

Для решения поставленных задач авторами предлагается в качестве методологического базиса использовать модельно-управляемый подход – MDD (Model Driven Development) [1]: вся информация, необходимая для разработки АИМ, формализуется в форме иерархического множества моделей, а спецификации конкретной прикладной АИМ получаются как результат последовательной трансформации элементов этого множества [2].

В развитие этих идей в данной работе особое внимание уделяется элементам иерархического множества моделей, связанным с программным обеспечением реализации исполняемой модели и называемыми в подходе моделями базовых компонентов. Методы базовых компонентов могут быть скомбинированы в форме потока работ (workflow). На данный момент разработан прототип метамодели, позволяющей описать поведение элементов АИМ (агент, ресурс, среда и т.п.) в терминах последовательных, разветвляющихся и циклических процессов с использованием методов базовых компонентов. Интерпретатор потока работ разработан с использованием платформы Java, так как для неё имеется большое количество программ и библиотек, которые можно применять при непосредственной реализации базовых компонентов. К настоящему времени реализованы следующие прототипы базовых компонентов: средство агентного моделирования на основе библиотеки Madkit; система логического вывода на основе оболочек экспертных систем JESS и DROOLS; механизм выполнения подпрограмм на основе модулей инструментального комплекса [3].

1. France R., Rumpe B. Model-Driven Development of Complex Software: A Research Roadmap // Proc. of the Intern. Conf. "Future of Software Engineering". Minneapolis, 2007. P. 37–54. DOI:10.1109/FOSE.2007.14.
2. Nikolaychuk O.A., Pavlov A.I., Stolbov A.B. Web-Oriented Software System for Agent-Based Modeling Driven by Declarative Specification of Implementation Process // Proc. of the 3rd Russian-Pacific Conference on Computer Technology and Applications (RPC). Vladivostok, 2018. P. 1–5. DOI:10.1109/RPC.2018.8482149.
3. Nikolaychuk O.A., Pavlov A.I., Stolbov A.B. The software platform architecture for the component-oriented development of knowledge-based systems // Proc. of the Intern. Conf. "MIPRO 2018". Croatia, 2018. P. 1234–1239. DOI: 10.23919/MIPRO.2018.8400194.

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке №18-07-01164.

## ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СОПОСТАВЛЕНИЯ И ОЦЕНКИ ОПАСНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ПРИМЕРЕ БАЙКАЛО-МОНГОЛЬСКОГО РЕГИОНА \*

В.В. Парамонов<sup>1,2</sup>, Г.М. Ружников<sup>1,2</sup>, А.А. Михайлов<sup>1,2</sup>, Р.К. Фёдоров<sup>1,2</sup>,  
А.В. Ключевский<sup>3</sup>, В.М. Демьянович<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН

<sup>2</sup>Иркутский научный центр СО РАН

<sup>3</sup>Институт земной коры СО РАН

{slv, rugnikov, mikhailov, fedorov}@icc.ru, akluchev@crust.irk.ru, vmdem@mail.ru

Байкало-монгольский регион является территорией высокой сейсмической активности. В [1] отмечается, что для Сибирской платформы вопросы динамического взаимодействия подвижных областей с платформенным блоком на неотектоническом этапе и закономерности позднекайнозойского разломообразования изучены недостаточно. В связи с этим представляет актуальность исследование и разработка методов зонирования сейсмической опасности территорий, основанных на привлечении современных геоинформационных и Web- технологий. Для сопоставления и оценки опасных геологических процессов разрабатывается информационно-аналитическая система, использующая геопортальное [2] решение. Такой подход позволяет объединить разнородные базы данных и применить сервисы для решения ряда задач сопоставления и оценки опасных геологических процессов, происходящих в регионе. При этом могут использоваться как локальные сервисы, так и распределённые в сети Internet, что позволит применять модели, методы и тематические базы данных, разрабатываемые другими учёными.

Предлагаемый подход обеспечивает возможность загрузки гетерогенных данных, в том числе, содержащиеся в каталогах и бюллетенях землетрясений Байкало-монгольского региона. Наличие пространственных характеристик позволяет осуществлять построение разнообразных тематических карт, что позволяет наглядно представить результаты моделирования геологических процессов

Основные функции геопортала реализуются в виде сервисов. Так, реализованы сервисы ввода данных, представленных в виде электронных таблиц CSV-формата. Данный сервис обеспечивает создание таблиц в базе данных геопортала, очистку и реконсильацию (если это необходимо) загружаемой информации. Аналитические сервисы, создаваемые на данном этапе исследования, основаны на применении математических моделей среды распространения сейсмических сигналов на определение динамических параметров очагов землетрясений [3] и оценки рекуррентных интервалов и вероятности сильных землетрясений в регионе [4]. Разрабатываемые сервисы базируются на использовании OpenSource библиотек [5], что дает возможность их адаптации, для решения сложных тематических задач заинтересованными пользователями, в том числе и на других данных.

1. Саньков В.А., Парфеевец А.В., Мирошниченко А.И., Бызов Л.М., Лебедева М.А., Саньков А.В., Добрынина А.А., Коваленко С.Н. Позднекайнозойское разломообразование и напряженное состояние юго-восточной части Сибирской платформы // Геодинамика и тектонофизика. 2017. Т. 8. № 1. С. 81-105.
2. Granell C., etc. Conceptual Architecture and Service-Oriented Implementation of a Regional Geoportal for Rice Monitoring. // ISPRS International Journal of Geo-Information. 2017. Vol. 6. Issue 7. 191.
3. Ключевский А.В., Демьянович В.М. Оценка влияния модели среды распространения сейсмических сигналов на определение динамических параметров очагов

землетрясений байкальского региона // Вулканология и сейсмология. 2003. № 2. С. 58-71.

4. Ключевский А.В., Демьянович В.М., Баяр Г. Оценка рекуррентных интервалов и вероятности сильных землетрясений в байкальском регионе и Монголии // Геология и геофизика. 2005. Т. 46. № 7. С. 746-762.
5. Бычков И.В., Ружников Г.М., Хмельнов А.Е. и др. Инфраструктура информационных ресурсов и технологии создания информационно-аналитических систем территориального управления // Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016, 242 с.

---

\* Работа выполнена при частной финансовой поддержке Интеграционной программы ИНЦ СО РАН «Фундаментальные исследования и прорывные технологии как основа опережающего развития Байкальского региона и его межрегиональных связей» (2018-2021 гг.), РФФИ, грант № 17-57-44006.

# РАЗРАБОТКА АРХИТЕКТУРЫ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ СОЗДАНИЯ ПРОГРАММНЫХ СЕРВИСОВ ДЛЯ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ДВОИЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ\*

А.А. Пашинин, В.Г. Богданова

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[apcrol@gmail.com](mailto:apcrol@gmail.com)

Рассматриваются архитектура и функциональные возможности предметно-ориентированных инструментальных средств автоматизации создания программных сервисов для качественного исследования поведения траекторий автономных синхронных двоичных динамических систем (ДДС) на основе метода булевых ограничений [1].

Пусть  $X = B^n$  ( $B = \{0,1\}$ ) – множество двоичных векторов размерности  $n$  (пространство состояний ДДС). Для каждого начального состояния  $x^0 \in X$  траекторию  $x(t, x^0)$  определим как конечную последовательность состояний  $x^0, x^1, \dots, x^k$  из множества  $X$ . Рассматриваются ДДС, в которых каждая пара смежных состояний  $x^t, x^{t-1}$  траектории связана отношением

$$x^t = F(x^{t-1}),$$

где  $t \in T = \{1, \dots, k\}$  – дискретное время (номер такта),  $F: X \rightarrow X$  – векторная функция алгебры логики, называемая функцией переходов.

На основе метода булевых ограничений, обоснование использования которого приведено в [1], спецификация динамического свойства рассматриваемых ДДС задается на языке формальной логики. Проверка выполнимости динамического свойства сводится к решению SAT и TQBF задач, относящихся соответственно к классам сложности NP и PSPACE. Для автоматизации разработки сервис-ориентированных программных средств (распределенных решателей) качественного анализа ДДС в облачной среде в состав авторского инструментария HPC SOMAS [2] включена специализированная предметно-ориентированная подсистема QASB (Qualitative Analysis Services Building). QASB предоставляет web-интерфейс для создания сервисов построения булевой модели динамического свойства и проверки его выполнимости, а также для заполнения локальных баз знаний агентов, которым делегируются права на выполнение сервисов на выделенных вычислительных ресурсах облачной среды. Организация децентрализованного управления этими сервисами на основе прямых взаимодействий агентов описана в [3]. В докладе приводится пример применения подсистемы QASB при создании сервисов для решения ряда задач качественного исследования ДДС, в частности, поиска равновесных состояний, циклов заданной длины, проверки из изолированности, а также ряда других свойств.

1. Опарин Г.А., Богданова В.Г., Пашинин А.А. Метод булевых ограничений в качественном анализе двоичных динамических систем // Международный журнал фундаментальных и прикладных исследований, 2018. № 9. С. 19-29.
2. Bychkov I.V., Oparin G.A., Bogdanova V.G., Pashinin A.A., Gorsky S.A. (2017) Automation Development Framework of Scalable Scientific Web Applications Based on Subject Domain Knowledge. In: Malyshkin V. (eds) Parallel Computing Technologies. PaCT 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol. 10421. pp. 278-288. Springer, Cham
3. G. A. Oparin, V. G. Bogdanova, A. A. Pashinin and S. A. Gorsky. Distributed solvers of applied problems based on microservices and agent networks // Proceedings of 41st International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO), Opatija, 2018, pp. 1415-1420

\* Работа поддержана РФФИ, проект 18-07-00596/18.

## К ВОПРОСУ ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ВЫРОЖДЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГИБРИДНОЙ СИСТЕМОЙ

П.С. Петренко

Институт динамики систем и теории управления СО РАН имени В.М. Матросова  
[petrenko\\_p@mail.ru](mailto:petrenko_p@mail.ru)

Рассматривается система уравнений, содержащая в своей динамике подсистемы как с непрерывным, так и с дискретным временем

$$Ax'(t) = Bx(t) + C_k y_k + U_k u_k(t), \quad t \in T_k = [t_k, t_{k+1}), \quad k = \overline{0, m}; \quad (1)$$

$$y_k = D_{k-1} x(t_{k-1}) + \sum_{i=0}^{k-1} G_{k-1,i} y_i + V_{k-1} v_{k-1}, \quad k = \overline{1, m+1}, \quad (2)$$

где  $A, B, C_k, D_k, G_{k,i}, U_k, V_k$  – заданные матрицы соответствующих размеров,  $x(t) \in C^1(T_k)$  –  $n$ -мерная непрерывная, а  $y_k$  –  $s$ -мерная дискретная компонента, описывающие состояние системы;  $u_k(t) \in R^l$  и  $v_k \in R^\lambda$  – непрерывное и дискретное управляющее воздействие соответственно ( $k = \overline{0, m}$ ). Предполагается, что  $\det(\lambda A - B) \neq 0 \forall \lambda \in R$  и  $\det A = 0$ . Систему (1), (2) будем называть вырожденной линейной гибридной.

**Определение 1.** Решением системы (1), (2) будем называть набор векторов  $y_1, \dots, y_{m+1}$  и вектор-функцию  $x(t) \in C^1(T_k)$  ( $k = \overline{0, m}$ ), которые обращают уравнения (1), (2) в тождества при подстановке на  $T = [t_0, t_{m+1}]$ .

Пусть для системы (1), (2) определены начальные данные в виде

$$x(t_k + 0) = a_k \quad (k = \overline{0, m}), \quad y_0 = b. \quad (3)$$

Получены условия существования решения задачи (1) - (3) на отрезке  $T$ . Эти условия будем называть условиями согласования, а соответствующие векторы – согласованными состояниями.

Из уравнений (1), (2) определим векторы  $y_1, \dots, y_{m+1}$ :

$$y_k = S_k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} P_{k,i} x(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} L_{k,i} v_i, \quad k = \overline{1, m+1}, \quad (4)$$

где коэффициенты  $S_k, P_{k,i}, L_{k,i}$  определяются через соответствующие рекуррентные соотношения. Пусть  $x_k = x(t)$ ,  $t \in T_k$  ( $k = \overline{0, m}$ ). Тогда, подставляя выражения для  $y_k$  из (4) в уравнение (1), получим семейство дифференциально-алгебраических уравнений [1, 2]:

$$Ax_k'(t) = Bx_k(t) + C_k (S_k y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} P_{k,i} x_i(t_i) + \sum_{i=0}^{k-1} L_{k,i} v_i) + U_k u_k(t), \quad t \in T_k, \quad k = \overline{0, m}. \quad (5)$$

Векторы  $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in R^n, \beta \in R^s$  будем называть *достижимыми* из согласованных состояний  $a_0, \dots, a_m \in R^n, b \in R^s$  соответственно, если существует управление в виде векторов  $v_k$  и достаточно гладких на  $T_k$  функций  $u_k(t)$  ( $k = \overline{0, m}$ ) таких, что соответствующее решение системы (5) удовлетворяет условиям:

$$x(t_k + 0) = a_k, \quad x(t_{k+1} - 0) = \alpha_k \quad (k = \overline{0, m}), \quad y_{m+1} = \beta. \quad (6)$$

Множество  $M$  назовем *множеством достижимости* из согласованных состояний  $a_0, \dots, a_m, b$ , если оно состоит из векторов  $\alpha_0, \dots, \alpha_m, \beta$ , которые достижимы

из состояний  $a_0, \dots, a_m, b$ . Множество достижимости  $M$  определим как объединение всех множеств достижимости из всех возможных согласованных состояний.

**Определение 2.** Систему (5) назовем  $R$ -управляемой на отрезке  $T$ , если для любых согласованных состояний  $a_0, \dots, a_m \in R^n, b \in R^s$  и любых векторов  $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in R^n, \beta \in R^s$  из множества достижимости  $M$  найдутся векторы  $v_k$  и достаточно гладкие на  $T_k$  функции  $u_k(t)$  ( $k = \overline{0, m}$ ) такие, что соответствующее этому управлению решение системы (5) удовлетворяет условиям (6).

Для вырожденной гибридной системы (1), (2) получены достаточные, а также необходимые и достаточные условия  $R$ -управляемости.

1. Щеглова А.А. Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. 2008. № 10. С. 57–80.
2. Щеглова А.А., Петренко П.С.  $R$ -наблюдаемость и  $R$ -управляемость линейных алгебро-дифференциальных систем // Известия вузов. Математика. 2012. № 3. С. 73-91.

# ОБ ОДНОЙ ВЫРОЖДЕННОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЕМ НЕРАЗРЫВНОСТИ\*

Н.И. Погодаев, М.В. Старицын

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[nickpogo@gmail.com](mailto:nickpogo@gmail.com), [starmaxmath@gmail.com](mailto:starmaxmath@gmail.com)

В докладе обсуждается вопрос конструктивного описания замыкания множества решений уравнения неразрывности, управляемого «неограниченным» векторным полем, а также существование решения и необходимое условие оптимальности в соответствующей задаче оптимального управления с терминальным критерием качества.

Рассматривается распределенная динамическая система вида

$$\mu_0 = \mathcal{G}; \quad \partial_t \mu_t + \nabla \cdot (\mu_t f_t) = 0, \quad t \in \mathcal{T} \doteq [0, T], \quad (1)$$

где  $\mathcal{G}$  – заданная вероятностная мера на  $\mathbb{R}^n$ ,

$$t \mapsto f_t(x) \doteq f(x, u(t)), \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad f(x, u) = g(x) + H(x)u;$$

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  – заданные векторная и матричная функции, а управления

$u(\cdot): \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}^m$  – измеримые по Борелю вектор-функции, удовлетворяющие ограничению:

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}(M) \doteq \left\{ u \in L_\infty(\mathcal{T}, \mathbb{R}^m) : \|u\|_{L_1(\mathcal{T}, \mathbb{R}^m)} = M \right\}. \quad (2)$$

Здесь  $M > 0$  – заданный «ресурс» управления.

Ввиду аффинной зависимости поля скоростей от управления и неограниченности последнего в поточечном смысле решения характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, отвечающих (1), могут оказаться сколь угодно близкими к разрывным, и, как следствие, решения распределенной системы стремятся к разрывным мерозначным функциям. Этот факт относит рассматриваемую модель к классу вырожденных.

Получены следующие результаты:

1. Построено конструктивное представление замыкания множества решений системы (1), (2) в некоторой подходящей (достаточно грубой) топологии пространства мерозначных функций ограниченной вариации, основанное на преобразовании времени и известном представлении решений уравнения (1) в терминах сдвига по траекториям характеристической системы.
2. Доказано существование решения соответствующей экстремальной задачи.
3. Для последней получено необходимое условие оптимальности – принцип максимума.

Настоящее исследование продолжает некоторые результаты [1, 2] и опирается, в частности, на [3, 4].

1. Pogodaev N. Optimal control of continuity equations // Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2016, DOI 10.1007/s00030-016-0357-2.
2. Staritsyn M. On “discontinuous” continuity equation and impulsive ensemble control // Systems & Control Letters. 2018. V. 118. Pp. 77-83.
3. Ambrosio L. Metric space valued functions of bounded variation // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Serie 4. 1990. V. 17, N. 3, Pp. 439--478 .
4. Ambrosio L., Fusco N., Pallara D. Functions of bounded variation and free discontinuity problems. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

---

\* Работа поддержана РФФИ, проекты 18-31-00425, 18-31-20030.

# СОЗДАНИЕ ВЕБ-СЕРВИСА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ЛЕСНЫХ РЕСУРСОВ

А.К. Попова

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО  
РАН [chudnenko@icc.ru](mailto:chudnenko@icc.ru)

Полезным инструментом в исследовании лесных ресурсов являются математические модели их динамики, позволяющие прогнозировать изменения состояния леса во времени. Для полноценного описания состояния ресурса модель должна включать в себя параметры естественной динамики и антропогенного воздействия. Изменяя входные параметры, мы формируем сценарий развития леса, показывающий последствия реализации управленческого решения. Набор разнообразных сценариев призван помочь выбрать стратегию управления ресурсом, сочетающую нужную степень экономической эффективности при сохранении экологической среды [1].

В работе используется математическая модель лесных ресурсов субрегионального уровня, основанная на описании динамики распределения площадей леса по породам и классам возраста во времени и пространстве [2]. В качестве антропогенного воздействия учитывается проведение сплошных рубок и использование лесных площадей для хозяйственных нужд: ведения сельского хозяйства, разработки месторождений полезных ископаемых, строительства линейных объектов, обустройства рекреационных зон и др. Также на естественную динамику влияет ряд неблагоприятных факторов – пожары, повреждение насекомыми, болезни леса, погодные условия [3].

Моделирование проведено для территории Иркутской области по отдельным лесничествам, исходные данные по распределению лесных площадей по породам и классам возраста, объемам рубок, пожаров, хозяйственного воздействия и неблагоприятных факторов взяты из «Лесного плана Иркутской области» за 2017 год. Веб-сервис написан на языке JavaScript и доступен на геопортале ИДСТУ СО РАН.

Для начала расчетов на геопортал загружается таблица с исходными данными, задаются объемы антропогенного воздействия и неблагоприятных факторов, формирующие сценарий использования ресурса. Сервис проводит расчеты по модели, получая для каждого лесничества прогноз количества лесных площадей каждого класса возраста на каждый год периода моделирования. В конце для каждого объекта находится относительная величина – отношение разницы общей лесной площади в последний и первый год периода к итоговой лесной площади. Такая характеристика позволяет сравнить динамику лесничеств между собой.

На основе полученных величин строится карта: лесничества делятся на четыре категории, каждой из которых соответствует определенный цвет окраски. Более темные цвета объектов на карте характеризуют увеличение лесных площадей за период, более светлые – уменьшение. Для отрисовки раскрашенной карты сервис формирует файл формата GeoJSON, в котором каждому лесничеству сопоставлено нужное значение цвета.

1. Черкашин Е.А., Попова А.К. Decision support system for management of the forest resources. // Proc. ICAIT 2013 (2013). P. 288-294.
2. Владимиров И.Н., Попова А.К. Multilevel Modeling of the Forest Resource Dynamics // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. 2009. Vol. 4, №5. P. 72-88.

3. Popova A.K., Cherkashin E.A., Vladimirov I.N. Modeling the contribution of natural and anthropogenic factors on the forests in Irkutsk region, Russia // 1st Scientific-Practical Workshop on Information Technologies: Algorithms, Models, Systems, ITAMS 2018. 2018. Vol. 2221. P. 53-60.

## ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ $f_oF2$ ПО ИНДЕКСАМ СОЛНЕЧНОЙ И ГЕОМАГНИТНОЙ АКТИВНОСТИ И ДАННЫМ ИРКУТСКОГО ДИГИЗОНДА

Б.Г. Салимов

Институт солнечно-земной физики СО РАН

[salimov@iszf.irk.ru](mailto:salimov@iszf.irk.ru)

А.Е. Хмельнов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[hmelnov@icc.ru](mailto:hmelnov@icc.ru)

О.И. Бернгардт

Институт солнечно-земной физики СО РАН

[berng@iszf.irk.ru](mailto:berng@iszf.irk.ru)

Характеристики ионосферы имеют важное прикладное значение для радиосвязи. Предсказание данных величин позволяет с большей надежностью оперировать аппаратными средствами радиосвязи и навигации. В свою очередь, накопленные данные измерений и возросшие в последние десятилетия вычислительные возможности, позволяют использовать различные эмпирические модели предсказания, например такие как искусственные нейронные сети. Одной из ключевых характеристик ионосферы является частота  $f_oF2$ . Критическая частота  $f_oF2$  — максимальная частота отраженной от ионосферы радиоволны при вертикальном падении. Если частота радиоволны превышает критическую, то волна будет пронизывать ионосферу [2]. Следовательно знание этой частоты имеет важное практическое значение для радиосвязи. Целью данной работы является построение искусственной нейронной сети для предсказания критической частоты  $f_oF2$ .

Имеет место зависимость критической частоты  $f_oF2$  от индексов солнечной и геомагнитной активности [1]. Особенно значима зависимость частоты  $f_oF2$  от потока радиоизлучения солнца на длине волны 10.7 см., однако существует и её зависимость от индексов геомагнитной активности ( $K_p$ ,  $ap$ ,  $Dst$  - индексы).

Несмотря на то, что наибольшее влияние на частоту  $f_oF2$  оказывает индекс солнечной активности  $f_{10.7}$ , для более высокой точности её предсказания в данной работе предложено использовать дополнительно индексы геомагнитной активности:  $Dst$ ,  $ap$  и  $K_p$ . Было испытано четыре варианта обучения — первые два со случайным разделением исходной выборки, в ходе которого выборка перемешивалась, вторые два с разделением выборки по дате. В каждом из этих вариантов были испытаны два подварианта — в первом в качестве одного из признаков использовался зенитный угол Солнца, во втором время в сутках.

Было показано, что обучение в случае, когда временные интервалы обучающей и тестовой выборок совпадают, дает лучшие результаты прогноза, чем когда они не пересекаются. Это говорит о том, что либо входные параметры модели неполны (и не были учтены какие-то физические параметры, либо процессы), либо объем выборки нестационарного процесса недостаточен для построения адекватной модели (несмотря на большой объем данных, все точки относятся к относительно малому фрагменту области определения функции, в частности не затрагивая весь 12-летний цикл солнечной активности).

1. М.Г. Деминов, Г. С. Иванов-Холодный, Е.В. Непомнящая. Зависимость квазидвухлетних вариаций критической частоты F2-слоя от индексов солнечной и геомагнитной активности. //Геомагнетизм и аэрономия. 2002. Т. 42, №1, с. 112-115
2. Дж. К. Харгривс. Верхняя атмосфера и солнечно-земные связи. Введение в физику околоземной космической среды. Л.: Гидрометеиздат, 1982.

АЛГОРИТМ ПОЗИЦИОННЫХ ВАРИАЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ  
ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ  
ТРАЕКТОРИЙ\*

С.П. Сорокин, М.В. Старицын,  
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[sorsp@mail.ru](mailto:sorsp@mail.ru), [starmaxmath@gmail.com](mailto:starmaxmath@gmail.com)

Доклад посвящен развитию методов численного решения задач оптимального импульсного управления с траекториями ограниченной вариации на основе позиционного принципа минимума (ППМ) [1, 2]. Применение численных методов предваряется сингулярным преобразованием исходной модели к следующей задаче дискретного оптимального управления (P):

$$\begin{aligned} I(\sigma) &= l(x(N)) := \langle c, x(N) \rangle \rightarrow \min; \\ x(t+1) &= x(t) + h[(1 - |u(t)|)f(x(t)) + g(x(t))u(t)], \\ y(t+1) &= y(t) + h[1 - |u(t)|], \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t = 0, 1, \dots, N-1, \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = 0, \quad y(N) = y_N. \end{aligned}$$

Здесь  $N$  – число точек разбиения интервала времени,  $h$  – шаг дискретизации,  $x(t) \in R^n$ ,  $y(t) \in R_+ := [0, +\infty]$ ,  $y_N > 0$ . Функции  $f, g: R^n \rightarrow R^n$  предполагаются дифференцируемыми. Управлением и траекторией назовем конечные последовательности

$$u = \{u(t) | t = 0, 1, \dots, N-1\} \text{ и } z = \{z(t) = (x(t), y(t)) | t = 0, 1, \dots, N\}$$

Набор  $\sigma = (z, u) = (x, y, u)$  будем называть процессом системы.

Развиваемый подход основан на итеративном применении к задаче (P) дискретного ППМ. Введем функцию Понтрягина

$$H(x, y, \psi, \xi, u) = h(1 - |u|)[\langle \psi, f(x) \rangle + \xi] + hu[\langle \psi, g(x) \rangle] + \langle \psi, x \rangle + \xi y,$$

и сопряженную систему:  $\psi(t) = \nabla_x H(x(t), y(t), \psi(t+1), \xi, u(t))$ ,  $\psi(N) = -c$ .

Определим экстремальное мультиотображение:  $U_\xi(x, \psi) := \operatorname{Argmax}_{u \in [-1, 1]} H(x, y, \psi, \xi, u)$ .

Зафиксируем допустимый в задаче (P) процесс  $\bar{\sigma} = (\bar{z}, \bar{u})$ , и пусть  $\bar{\psi} = \psi(\bar{\sigma})$  – соответствующее решение сопряженной системы. Для каждого  $\xi \in R$  определим  $\mathcal{V}_\xi(\bar{\psi})$  как множество селекторов многозначного отображения  $U_\xi(x, \psi)$ , суженного на функцию  $\bar{\psi}$ , – позиционных управлений  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, z) \in U_\xi(x, \bar{\psi}(t+1))$ . Через  $z^\mathbf{v} = (x^\mathbf{v}, u^\mathbf{v})$  обозначим решение управляемой системы, замкнутой позиционным управлением  $\mathbf{v}$ .

**Теорема.** Пусть процесс  $\bar{\sigma} = (\bar{z}, \bar{u}) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$  глобально оптимален в задаче (P). Тогда выполнено неравенство:

$$l(\bar{x}(N)) \leq \min \{l(x^\mathbf{v}(N)) | z^\mathbf{v} = (x^\mathbf{v}, u^\mathbf{v}), y^\mathbf{v}(N) = y_N, \mathbf{v} \in \mathcal{V}_\xi(\bar{\psi}), \xi \in R\}.$$

1. Дыхта В.А. Позиционные усиления принципа максимума и достаточные условия оптимальности // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21. № 2. С. 73–86.
2. Sorokin S.P., Staritsyn M.V. Numeric algorithm for optimal impulsive control based on feedback maximum principle // Optim. Lett. 2018. <https://doi.org/10.1007/s11590-018-1344-9>

\* Работа частично поддержана РФФИ (проекты №№ 17-01-00733, 18-31-20030, 18-31-00425).

# ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ОДНОУРОВНЕВЫЙ ДИНАМИЧЕСКИЙ ПЛАНИРОВЩИК РАСЧЕТОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА\*

П.С. Сороковиков

Институт динамики систем и теории управления им В.М. Матросова СО РАН

[pavel2301s@gmail.com](mailto:pavel2301s@gmail.com)

Для эффективного решения сложных задач глобальной оптимизации применения одного метода в ряде случаев бывает недостаточно. В основе любой успешной поисковой стратегии лежит баланс между глобальным сканированием допустимого множества и локальным уточнением полученных приближений. В работе предлагается один из вариантов динамического планировщика, реализованного на «вероятностной основе».

В состав библиотеки базовых алгоритмов планировщика входят следующие «глобальные» (пункты 1-3) и «локальные» (пункт 4) методы оптимизации:

1. Алгоритмы поиска глобального минимума, основанные на нелокальных методах одномерной оптимизации (покоординатного поиска, туннельный, Розенброка, партан, Пауэлла, криволинейного поиска, сферического поиска) [1].
2. Поисковые алгоритмы без использования методов одномерной оптимизации (Растргина, Лууса-Яколы, табу-поиска, случайных покрытий, экспертный).
3. Биоинспирированные алгоритмы (дифференциальной эволюции, генетического поиска, роя частиц, гармонического поиска, биогеографии и другие).
4. Алгоритмы локальной оптимизации (квазиньютоновские BFGS, L-BFGS, методы сопряженных градиентов и другие).

Алгоритм работы «вероятностного» планировщика имеет следующий вид:

1. Поочередно производится запуск всех алгоритмов из одних и тех же стартовых точек на определенное время.
2. Для каждого «глобального» алгоритма вычисляется оценка  $\Phi^k = \Delta f_{\max}^k - \Delta f^k$ , где  $\Delta f^k = f_{rec}^k - f^*$ ,  $f_{rec}^k$  – рекордное значение функции, найденное  $k$ -м алгоритмом,  $f^*$  – значение глобального минимума,  $\Delta f_{\max}^k = \max_{1 \leq i \leq M} (\Delta f^i)$ ,  $M$  – количество «глобальных» алгоритмов.
3. Для каждого «локального» алгоритма вычисляется оценка  $\varphi^k$  по формуле, аналогичной указанной в шаге 2.
4. На основе полученных оценок  $\Phi^k$  вероятностным путем выбирается и запускается один из «глобальных» алгоритмов до выполнения критерия останова.
5. На основе полученных оценок  $\varphi^k$  вероятностным путем выбирается и запускается один из «локальных» алгоритмов до выполнения критерия останова с целью уточнения решения, найденного на шаге 4.
6. Если выполняется критерий останова планировщика, прекращается его работа, в противном случае – переход к шагу 4.

Планировщик и оптимизационные алгоритмы реализованы на языке C с применением единых программных стандартов. Работа планировщика протестирована на модельных и содержательных задачах невыпуклой оптимизации. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Sorokovikov P. Software implementation of algorithms for global minimum search based on non-local methods for one-dimensional optimization // Book of Abstracts of the IX Intern. Conf. “Optimization and Applications” (OPTIMA-2018). Moscow: DCC RAS, 2018. P. 158.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 17-07-00627.

# ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА БРЕНТА ДЛЯ МОНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С АВТОМАТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКОЙ КОНСТАНТЫ ЛИПШИЦА\*

П.С. Сороковиков

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН  
[pavel2301s@gmail.com](mailto:pavel2301s@gmail.com)

Задача поиска глобального минимума невыпуклой функции одной переменной часто возникает в качестве вспомогательной при решении многомерных задач оптимизации. Алгоритмы мономерной (одномерной) глобальной оптимизации в течение множества лет разрабатывались рядом специалистов из России и зарубежных стран. Одним из таких алгоритмов является метод нулевого порядка, предложенный Р. Brentом (см., напр., [1], [2]), в котором строится последовательность точек  $x_1, x_2, \dots$  функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  следующим образом:

$$x_1 = a, \quad x_k = x_{k-1} + \sqrt{\frac{|2f(x_{k-1}) - f_k^* + \varepsilon|}{M}},$$

где  $f_k^* = \min\{f(x_1), \dots, f(x_k)\}$  – рекордное значение функции,  $\varepsilon$  – точность по функции,  $M$  – константа Липшица производной первого порядка. Минимизация прекращается, когда  $x_k \geq b$ .

Особенностью данного алгоритма является то, что для его работы необходимо знать хорошую оценку константы Липшица. Указанная проблема критична в случае применения алгоритма в качестве вспомогательного при решении многомерных задач, так как в многоуровневой иерархии алгоритмов он будет функционировать на самом низком уровне и выполняться многократно в процессе расчетов. Следовательно, необходим встроенный в алгоритм механизм оценки константы роста производной.

В работе рассматривается предложенная модификация алгоритма мономерного поиска Р. Brentа с автоматической оценкой максимума производной. На каждой итерации алгоритма оценка вычисляется по следующей формуле:

$$M_j = K_c \cdot \max \frac{2|f(x_{k+2}) - (x_{k+2}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) + x_{k+1}f(x_k) - x_k f(x_{k+1})))/(x_{k+1} - x_k)|}{|x_{k+2}(x_{k+2} - x_k - x_{k+1}) + x_k x_{k+1}|},$$

где  $K_c$  – страховочный коэффициент (параметр алгоритма). При этом цикл просмотра отрезка повторяется несколько раз по мере уточнения оценки и выполненных проб. Критерием останова алгоритма является выполнение условия  $M_{j+1} = M_j$ , где  $j$  – номер цикла просмотра отрезка.

Предложенный алгоритм запрограммирован на языке С. При реализации метода применялись единые программные стандарты с целью упрощения его использования для решения многомерных задач. Для численного исследования свойств реализованного алгоритма сформирована коллекция тестовых задач, представляющих собой невыпуклые функции одной переменной с различными скоростями роста. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Brent R.P. Algorithms for minimization without derivatives. New Jersey: Prentice Hall, 1973. 195 p.
2. Жиглявский А.А., Жилинскас А.Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991. 248 с.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-07-00587.

# НИЗКОПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КЛАСТЕРЫ МОРСА РАЗМЕРНОСТЕЙ ОТ 261 ДО 280 АТОМОВ\*

П.С. Сороковиков

Институт динамики систем и теории управления им В.М. Матросова СО РАН  
[pavel2301s@gmail.com](mailto:pavel2301s@gmail.com)

Задача поиска низкопотенциальных атомно-молекулярных кластеров является одной из классических проблем вычислительной химии. С математической точки зрения, задача сводится к поиску глобального минимума невыпуклых потенциальных функций – специальных моделей (см., напр., [1]). Основной сложностью данного класса задач является астрономический рост числа локальных экстремумов с увеличением размерности. Несмотря на это, современные алгоритмы оптимизации, запущенные на высокопроизводительной вычислительной технике, способны находить «наилучшие из известных» решения, которые, возможно, являются глобальными минимумами.

В работе рассматривается задача поиска низкопотенциальных кластеров Морса сверхбольших размерностей. Целевая функция имеет следующий вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N e^{\rho(1-r_{ij})} (e^{\rho(1-r_{ij})} - 2) \rightarrow \min,$$
$$r_{ij} = \sqrt{(x_{3i}^2 - x_{3j}^2)^2 + (x_{3i+1}^2 - x_{3j+1}^2)^2 + (x_{3i+2}^2 - x_{3j+2}^2)^2}.$$

С помощью алгоритмов и вычислительных технологий, представленных в [2], были проведены расчеты для кластеров Морса из 261 – 280 атомов при  $\rho = 3$  (см. табл. 1). В качестве метода глобальной оптимизации использовалась модификация известного алгоритма MSBH («Monotonic Sequence Basin-Hopping»), методов локального поиска – квазиньютоновский алгоритм L-BFGS, рейдер-метод, модификация многомерного метода дихотомии.

Таблица 1. Наилучшие найденные значения

N	Значение	N	Значение
261	-3149.428217410	271	-3297.274728541
262	-3164.568535515	272	-3311.874596828
263	-3179.804297785	273	-3325.968085027
264	-3195.212791692	274	-3340.319691418
265	-3210.598946046	275	-3355.125754764
266	-3226.262062877	276	-3368.675534069
267	-3236.084445157	277	-3383.508322481
268	-3256.769024951	278	-3398.079039920
269	-3269.425643893	279	-3413.024459855
270	-3283.366175230	280	-3427.879851949

Автору неизвестно о других работах, в которых приводятся результаты расчетов для кластеров Морса указанных размерностей.

1. The Cambridge Cluster Database (CCD). URL: <http://www-wales.ch.cam.ac.uk/CCD.html>.
2. Anikin A., Gornov A., Sorokovikov P. Algorithms for global minimum search of atomic–molecular clusters of extremely large dimensions // Системный анализ: моделирование и управление: Материалы Междунар. конф., посвященной памяти академика А.В. Кряжмского. М.: МАКС Пресс, 2018. С. 9–10.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-07-00587.

## НИЗКОПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КЛАСТЕРЫ ГУПТА РАЗМЕРНОСТЕЙ ОТ 126 ДО 156 АТОМОВ\*

П.С. Сороковиков

Институт динамики систем и теории управления им В.М. Матросова СО РАН  
[pavel2301s@gmail.com](mailto:pavel2301s@gmail.com)

Возрастающая с каждым днем производительность вычислительных систем предоставляет возможность численного исследования различных содержательных задач глобальной оптимизации больших размерностей. Одной из таких проблем является поиск низкоэнергетических металлических кластеров, который сводится к минимизации потенциальных функций – специальных моделей (см., напр., [1]). Типичный представитель указанного класса задач – потенциал Гупта [2], часто использующийся в расчетах свойств нанокластеров таких металлов, как цинк, кадмий, свинец, натрий и др.

В работе рассматривается задача поиска цинковых кластеров Гупта размерностей от 126 до 156 атомов, поскольку в настоящее время опубликованы расчеты только для кластеров из 3 – 125 атомов [1]. Потенциальная функция является невыпуклой, имеет огромное количество локальных минимумов, которое чрезвычайно быстро растет в зависимости от числа переменных. Однако, современные методы и вычислительные технологии глобальной оптимизации могут успешно находить «наилучшие из известных» («best of known») решения, которые, возможно, являются абсолютными экстремумами.

С помощью алгоритмического и программного обеспечения, представленного в [3], были проведены расчеты для цинковых кластеров Гупта из 126 – 156 атомов (см. табл. 1). В качестве метода глобального поиска использовалась модификация известного алгоритма MSBH («Monotonic Sequence Basin-Hopping»), методов локальной оптимизации – квазиньютоновский алгоритм L-BFGS, рейдер-метод, модификация многомерного дихотомического метода.

Таблица 1. Наилучшие найденные значения

N	Значение	N	Значение
126	-168.8758040477	142	-190.4157272551
128	-171.5821078823	144	-193.1142359317
130	-174.2539299691	146	-195.8236660528
132	-176.9870755985	148	-198.4914310785
134	-179.6825456752	150	-201.2787305527
136	-182.3723327456	152	-203.8983896360
138	-185.0976794276	154	-206.6030139183
140	-187.7640497248	156	-209.2856372769

Автору неизвестно о других попытках проведения расчетов для кластеров Гупта указанных размерностей.

1. The Cambridge Cluster Database (CCD). URL: <http://www-wales.ch.cam.ac.uk/CCD.html>.
2. Gupta R.P. Lattice relaxation at a metal surface // Physical Review B. 1981. Vol. 23, № 12. P. 6265–6270.
3. Anikin A., Gornov A., Sorokovikov P. Algorithms for global minimum search of atomic–molecular clusters of extremely large dimensions // Системный анализ: моделирование и управление: Материалы Междунар. конф., посвященной памяти академика А.В. Кряжмского. М.: МАКС Пресс, 2018. С. 9–10.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-07-00587.

## О ПРИНЦИПАХ СОЗДАНИЯ КОНЦЕПТУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ИНФРАСТРУКТУРНОЙ ЛОГИСТИКИ\*

А.Б. Столбов<sup>1</sup>, А.А. Лемперт<sup>1</sup>, О.В. Курганская<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

<sup>2</sup>Иркутский государственный университет  
stolboff@icc.ru, lempert@icc.ru, olgakurg@gmail.com

В настоящее время при участии авторов разрабатывается интеллектуальная информационно-вычислительная технология поддержки принятия решений в задачах инфраструктурной логистики [1]. Одним из ключевых элементов этой технологии является концептуальная модель инфраструктурной логистики (КМИЛ), для создания которой применяется онтологический подход [2]. При формировании оригинальной КМИЛ, соответствующей требованиям разрабатываемой технологии, были проанализированы существующие информационные модели, описывающие различные аспекты транспортно-логистических систем (ТЛС). В результате в качестве основы для создания КМИЛ были выбраны онтологии LogiCo [3] и GenCLOn [4].

Использование LogiCo обосновано следующими соображениями: большим количеством базовых понятий ТЛС (описание более 50 физических объектов и операций с этими объектами); структурной особенностью этой онтологии, допускающей использования расширений на основе онтологических паттернов [2]; успешным опытом её применения при решении практических задач (общеевропейский проект «iCargo» для создания информационно-коммуникационной платформы организации цифровой бизнес-экосистемы в логистике [3]).

Применение онтологии GenCLOn при создании КМИЛ позволяет описать список мероприятий, которые могут выполнять субъекты в различных ситуациях для достижения своих целей на основе ресурсов и поддерживаемых операций. Для составления этого списка авторы GenCLOn проанализировали большое количество научной литературы и сформировали более 100 вариантов мероприятий [4].

Непосредственная разработка КМИЛ осуществлялась с использованием инструментального средства создания систем, основанных на знаниях [5], которое обеспечивает хранение необходимой информации и предоставляет веб-ориентированный графический пользовательский интерфейс для ввода и редактирования элементов КМИЛ в онтологической форме вида <понятие, свойство, отношение>.

1. Bychkov I.V., Kazakov A.L., Lempert A.A., Bukharov D.S., Stolbov A.B. An intelligent management system for the development of a regional transport logistics infrastructure // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77. №3. P. 332–343.
2. Gangemi A., Presutti V. Ontology Design Patterns // Handbook on Ontologies / edited by S. Staab, R. Studer. 2nd Edition. Springer Verlag, 2009. P. 221–244.
3. Hofman W., Punter M., Bastiaansen H., et. al. An interorganizational IT infrastructure for selforganization in logistics: situation awareness and real-time chain composition // International Journal of Advanced Logistics. 2016. №2. P. 101–115.
4. Anand N., Yang M., van Duijn J.H.R., Tavasszy L. GenCLOn: An ontology for city logistics // Expert Systems with Applications. 2012. №39. P. 11944–11960.
5. Nikolaychuk O.A., Pavlov A.I., Stolbov A.B. The software platform architecture for the component-oriented development of knowledge-based systems // Proc. of the Intern. Conf. "MIPRO 2018". Croatia, 2018. P. 1234–1239.

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке №18-07-00604.

## ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ С НЕВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ\*

В.И. Суслов<sup>1</sup>, А.Ю. Горнов<sup>2</sup>, А.А. Лемперт<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН

<sup>2</sup>Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[suslov@ieie.nsc.ru](mailto:suslov@ieie.nsc.ru), [gornov@icc.ru](mailto:gornov@icc.ru)

В настоящее время формируется теория вне-равновесной или «около» равновесной экономики, частным случаем которой может быть или не быть «обычное» равновесие, в котором спрос и предложение на разных товарных, финансовых, региональных рынках уравниваются под действием стихийных рыночных механизмов ([1]). Для нее характерен радикальный (с точностью «до наоборот») пересмотр классических аксиом в сторону все более полного учета того, что конкуренция может быть несовершенной, информация – неполной и искаженной, отдача на масштаб и обратные связи – положительными, поведение и ожидания – не рациональными ([2]). Выстраиваемые на базе этих новых аксиом концепции, в частности, «новой экономической географии» позволяют объяснить возникновение территориальных агломераций, кластеров и межрегионального неравенства ([3]). Задачей моделирования на нашем этапе является учет этих новых тенденций экономической науки в рамках использования как традиционных, так и новых технических инструментов анализа ([4]).

В докладе обсуждается разработанный программный комплекс (ПК) – специализированный инструментарий, ориентированный на анализ многомерных экономических моделей динамического типа. Методической основой реализованного ПК послужили вычислительные технологии, развиваемые в рамках проекта ОРТСОН (см., напр., [5]). Входной язык ПК позволяет рассматривать системы как дифференциальных, так и разностных уравнений. Качество моделируемых процессов оценивается с помощью функционалов, возможно невыпуклых. На траектории системы могут быть наложены дополнительные ограничения, как терминальные – в конечный момент времени, так и траекторные, действующие постоянно. Задачи оптимизации, которые возможно исследовать с применением ПК, включают задачи параметрической идентификации – оценка внутренних параметров модели на основе экспериментальных данных и экспертных оценок, задачи оптимального управления – поиск возможностей активного воздействия на систему при наличии в модели управляемых компонент. Алгоритмическое наполнение комплекса реализовано как на основе методов конечномерной оптимизации, так и на основе методов теории оптимального управления. Проводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Суслов В.И. «Модели пространственной экономики: генезис, современное состояние, перспективы» // Регион: экономика и социология. 2013. № 2. С. 3-19.
2. Suslov V.I. «Economic Development Scenarios. Innovation Aspects» // Problems of Economic Transition. 2011. Vol. 53, No. 11. P. 3-14.
3. Vasil'ev V.A., Suslov V.I. «Edgeworth equilibrium in a model of interregional economic relations» // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2011. V. 5, No. 1. P. 130-143.
4. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. «Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование». СО РАН, ИЭОПП, Гос. НИУ «Совет по изучению производительных сил». Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2007. 370 с.
5. Горнов А.Ю. Вычислительные технологии решения задач оптимального управления. Новосибирск: Наука, 2009.

---

\*Работа поддержана интеграционным проектом Комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН, проект № 66.

## ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ ЕГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ЭКВИВАЛЕНТА

В.А. Терлецкий  
Иркутский Государственный Университет  
[vaterletskiy@gmail.com](mailto:vaterletskiy@gmail.com)

Е.С. Чуйко  
Иркутский Научный Центр СО РАН  
[chuzhe@gmail.com](mailto:chuzhe@gmail.com)

В задачах оптимального управления процессами, описываемыми системами и уравнениями с частными производными, важную роль играет выбор понятия обобщенного решения этих систем и уравнений. В отличие от обыкновенных систем, где обобщенное решение, как правило, базируется на интегральном эквиваленте соответствующей дифференциальной задачи, в системах с распределенными параметрами этот вопрос решается самыми разнообразными способами, используя, например, интегральные законы сохранения, метод искусственной вязкости, разностные аппроксимации и т.д. Наибольшее распространение для распределенных систем получило понятие обобщенного решения по Соболеву [1], что объясняется, прежде всего, его простотой и универсальностью. В частности, именно такое понятие используется в подавляющем большинстве работ, посвященных задачам оптимального управления процессами теплопроводности. В то же время, использование обобщенного решения по Соболеву для исследования задач оптимального управления сопряжено с немалыми трудностями, что, в частности, отмечается в [2]. Преодолеть эти проблемы позволяет понятие обобщенного решения управляемой системы, базирующееся на интегральном эквиваленте, аналогично тому, как это было сделано в работе [3] для гиперболических систем.

В докладе предлагается интегральный эквивалент задач теплопроводности с нелинейной по решению и его первой частной производной по пространственной переменной правой частью. При этом интегральный эквивалент формально имеет один и тот же вид для условий первого и второго рода. Показан способ сведения задач с условиями третьего рода к задачам с условиями второго рода. На основе интегрального эквивалента реализован метод последовательных приближений, обосновывающий существование и единственность обобщенного решения. Доказательство использует сжимающее свойство интегрального отображения по обоим фазовым переменным: самому решению и его частной производной по пространственной переменной. Построены оценки роста решения в точках области независимых переменных относительно входных параметров начально-краевой задачи, выявлены его аналитические свойства и обоснована справедливость формулы интегрирования по частям. Перечисленные результаты могут послужить основой для эффективного исследования задач оптимального управления процессами теплопроводности.

1. Соболев С.А. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
2. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
3. Терлецкий В.А. Обобщенное решение одномерных полулинейных гиперболических систем со смешанными условиями // Изв. Вузов. Математика. 2004. №12. С. 82- 90.

## РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ РОБОТОВ ДЛЯ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРУЮЩЕГО КОМПЛЕКСА НА БАЗЕ LEGO EV3

А.А. Толстихин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[madstaylor93@gmail.com](mailto:madstaylor93@gmail.com)

В рамках разработки имитационного моделирующего комплекса (ИМК) исследуется поведение автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) при решении широкого спектра задач по заранее заданным алгоритмам. На данном уровне аппроксимации АНПА представлены в виде роботов LEGO EV3. Тем не менее, как и любая техническая система, роботы подвержены различного рода погрешностям, вызванным как физическими параметрами оборудования (погрешность работы датчиков), так и смоделированными условиями окружающей среды. Таким образом, была поставлена задача точного определения координат роботов на стенде, а также направления их движения для сравнения реальных показаний и расчетных.

Для решения данной задачи в проект ИМК была добавлена внешняя видеокамера. Изображения, получаемые с данной камеры, было предложено обрабатывать с помощью алгоритмов компьютерного зрения, удовлетворяющих следующим требованиям:

1. Стабильная и однозначная идентификация роботов на стенде;
2. Определение координат робота (с погрешностью менее половины его размера) и ориентации в пространстве;
3. Работа в реальном времени с задержкой, не превышающей 500 миллисекунд.

Компьютерное зрение – это развивающаяся область науки, включающая широкий набор средств. Тем не менее, имеющиеся алгоритмы эффективны только для определенных классов задач. Таким образом, отсутствие единого подхода к идентификации произвольных объектов привело к необходимости изучения существующих на данный момент алгоритмов и сравнительного анализа их применимости для решения поставленной задачи.

В рамках исследования рассматривались 2 основных подхода: идентификация по цветовой метке и идентификация метки с помощью ключевых точек изображения.

Первый подход показал самую высокую скорость работы при незначительной погрешности определения координат роботов. Тем не менее, был выявлен ряд значительных недостатков, не позволяющих использовать данный подход, а именно: невозможность определения ориентации робота в пространстве, низкую стойкость к изменению внешних факторов (в частности, освещению) и необходимость ручной настройки перед каждым тестом.

Использование ключевых точек изображения позволило избавиться от критических недостатков предыдущего подхода. Тем не менее, данный метод требует значительно большего количества вычислительных ресурсов, что негативно сказывается на скорости обработки кадров. Частично данная проблема была решена применением каскадного классификатора Виолы-Джонса. Так же на данном этапе была разработана система меток, повышающая стабильность идентификации и определения числовых характеристик.

На данный момент оба подхода интегрированы в серверную часть ИМК в виде модулей. Кроме того, проводится дальнейший поиск возможных решений задачи, например, с использованием QR-кодов.

1. Р. Гонсалес, Р. Вудс. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
2. Л. Шапиро, Дж. Стокман. Компьютерное зрение. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. 725 с.
3. П. Виола, М. Джонс. Robust Real-Time Object Detection // International Journal of Computer Vision. 2001. №57. С. 137–154

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О К-МЕДОИДАХ В ПРИЛОЖЕНИИ К КЛАСТЕРИЗАЦИИ БОЛЬШИХ КОЛЛЕКЦИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ<sup>1</sup>

А.В. Ушаков

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО  
РАН aushakov@icc.ru

Кластеризация является одной из наиболее важных задач в области машинного обучения и интеллектуального анализа данных. В классической постановке она состоит в разделении объектов (элементов данных) на непересекающиеся подмножества (кластеры) таким образом, чтобы каждый кластер состоял из максимально схожих между собой элементов. Наиболее известными задачами кластеризации являются k-means, задача о k-центрах и задача о k-медоидах. С другой стороны задачи кластеризации могут рассматриваться как задачи размещения, в которых необходимо разделить множество клиентов на кластеры для дальнейшего обслуживания из некоторой группы открытых предприятий.

В рамках настоящей работы рассматривается задача о k-медоидах, известная также как задача о k-медиане. Пусть дано множество элементов данных  $P = (p_1, \dots, p_m)$  в метрическом пространстве  $(R^n, d)$ , которые необходимо разделить на k непересекающихся кластеров. Задача состоит в поиске так называемых медоидов  $C = (c_1, \dots, c_k) \subset P$ , таких что сумма расстояний между элементами данных и ближайшими к ним медоидами была минимальна, т.е.

$$\min_{C \subset P} \sum_{j=1}^m \min_{i=1, \dots, k} d(p_j, c_i).$$

Отметим, что задача является NP-трудной. В последнее время алгоритмы кластеризации, основанные на решении задачи о k-медоидах получили широкое распространение в многочисленных приложениях, начиная от биоинформатики [5] (например, при анализе микрофлоры человека) и заканчивая классификацией «умных контрактов» в блокчейн-сетях второго поколения [3]. Среди наиболее популярных стоит выделить одноименный алгоритм k-medoids (алгоритм Маранцаны для задачи о p-медиане), PAM, CLARA, CLARANS, affinity propagation, а также различные варианты локального поиска и основанные на них метаэвристики. Преимуществами таких алгоритмов кластеризации является большая устойчивость к «шуму» и выбросам, например, по сравнению с k-means. Они особенно полезны когда необходимо найти не только кластеры, но и так называемые экземпляры (представители кластеров) [1]. Несмотря на ряд преимуществ, алгоритмы кластеризации на основе задачи о k-медоидах являются эвристиками, которые в общем случае находят только локальные решения. Более того, они сложны с вычислительной точки зрения и требуют большого объема памяти. Так, основной трудностью является необходимость вычислять и хранить матрицу попарных расстояний, что не позволяет применять подобные алгоритмы для задач кластеризации большой размерности. Поскольку размерность матрицы равна квадрату числа элементов данных, то хранение попарных расстояний для одного миллиона объектов требует порядка 8 Тб памяти. Вычисление матрицы расстояний требует  $O(m^2n)$  времени, что является существенным при большом числе объектов и признаков.

Одним из современных приложений, предполагающим кластеризацию больших объемов данных, является анализ социальных сетей, в частности больших коллекций

---

<sup>1</sup> Работа поддержана РНФ, проект 17-71-10176

изображений [4]. Так, пользователи сети Facebook загружают ежедневно в среднем 350 миллионов изображений, большинство из которых фотографии людей. Необходимость анализа и организации больших коллекций изображений возникает также и в области криминалистики. В качестве примера можно привести расследование Взрывов на Бостонском марафоне [2], которое потребовало провести за короткий период времени анализ сотен тысяч видео- и фотоматериалов.

В настоящей работе предлагается гибридный распределенный алгоритм поиска близких к оптимальному решений в задаче о  $k$ -медоидах, представленной в виде задачи целочисленного линейного программирования. Алгоритм основан на поиске верхних и нижних оценок оптимального значения. Для уменьшения размерности матрицы попарных расстояний используется так называемая стратегия  $t$ -ближайших соседей, согласно которой алгоритм хранит в памяти для каждого элемента данных только расстояния до заданного числа ближайших к нему объектов. В докладе приводятся результаты тестирования разработанного алгоритма на прикладных задачах кластеризации большой размерности, полученные на вычислительном кластере «Академик В.М. Матросов» [7]. Отметим, что разработанный алгоритм может быть успешно реализован и для других вариантов задачи о  $k$ -медоидах, например, с нефиксированным числом кластеров.

1. Y. Gong, M. Pawlowski, F. Yang etc. Web scale photo hash clustering on a single machine //Proc. 2015 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). 2015. P. 19- 27.
2. J. C. Klontz, A. K. Jain. A case study of automated face recognition: The Boston Marathon bombings suspects // IEEE Computer. 2013. V. 46, № 11. P. 91-94.
3. R. Norvill, B. B. Fiz Pontiveros, R. State, I. Awan, A. Cullen. Automated Labeling of Unknown Contracts in Ethereum // Proc. 26th International Conference on Computer Communication and Networks (ICCCN). New York: IEEE, 2017. PP. 1-6.
4. C. Otto, D. Wang, A. K. Jain. Clustering Millions of Faces by Identity // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. DOI: 10.1109/TPAMI.2017.2679100.
5. A. V. Ushakov, X. Klimentova, I. Vasilyev. Bi-level and Bi-objective  $p$ -Median Type Problems for Integrative Clustering: Application to Analysis of Cancer Gene-Expression and Drug-Response Data // IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics. 2018. V. 15, No. 1. P. 46-59.
6. I. Vasilyev, A. Ushakov. A shared memory parallel heuristic algorithm for the large-scale  $p$ -median problem // Optimization and Decision Science: Methodologies and Applications: ODS, Sorrento, 2017. P. 295-302.
7. Иркутский суперкомпьютерный центр СО РАН [Электронный ресурс]: сайт. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН. – URL: <http://hpc. cc.ru> (дата обращения: 23.11.2018)

# О РАЗРЕШИМОСТИ В КЛАССАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ КОНЕЧНОГО ИНДЕКСА ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М.В. Фалалеев

Институт математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «ИГУ»

[mvfalaleev@gmail.com](mailto:mvfalaleev@gmail.com)

В докладе представлен обзор основных результатов о разрешимости в пространствах распределений с ограниченным слева носителем задачи Коши для абстрактного интегро-дифференциального уравнения вида

$$Bu^{(N)}(t) - Au(t) - \int_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t),$$

где  $B, A, k(t)$  – замкнутые линейные операторы из банахова пространства  $E_1$  в банахово пространство  $E_2$  с плотными областями определения, оператор  $B$  – нетеров [1],  $N \geq 2$ . Оператор  $B$  имеет полный  $A$ –жорданов набор [2].

С помощью теории фундаментальных оператор-функций [3] построены фундаментальные оператор-функции для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения, когда интегральное ядро имеет вид  $k(t) = \alpha(t)A + \beta(t)B$  соответствующий моделям, в которых на физическую систему в течение всего времени наблюдения действуют факторы одной природы. Исследованы случаи, когда индекс оператора  $B$  положителен, отрицателен, нулевой (случай фредгольмова оператора  $B$ ). Для положительного индекса исследована многопараметрическая структура решения, для отрицательного выделено подпространство содержащее в себе решение. Полученные на этом пути результаты согласуются с фредгольмовым случаем.

Исследованы также случаи более общего вида интегрального ядра. В этом случае ограничения накладываются либо на порядок нуля функции  $k(t)$  в точке  $t = 0$ , либо на структуру области определения оператора  $k(0)$  (а именно на  $\ker k(0)$ ), либо на область значений  $k(t)$ . Полученные абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах начально-краевых задач теории колебаний в вязко-упругих средах [4].

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
2. Сидоров Н.А., Романова О.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравн.-ия. 1983. Т. XIX, № 9. С. 1516–1526.
3. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinityn and M. Falaleev. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2002.
4. Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J. Existence and Uniform Decay for a Non-Linear Viscoelastic Equation with Strong Damping // Math. Meth. Appl. Sci. 2001. Vol. 24. P. 1043–1053.

## АЛГОРИТМ ВЫБОРА ЛИДЕРА ВИРТУАЛЬНОГО СООБЩЕСТВА АГЕНТОВ\*

А.Г. Феоктистов, Р.О. Костромин

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[agf65@yandex.ru](mailto:agf65@yandex.ru), [romang70055@gmail.com](mailto:romang70055@gmail.com)

**Введение.** Перспективным подходом к организации адаптивного группового управления распределенными вычислениями в гетерогенной среде является использование мультиагентных технологий. В рамках такого подхода отдельные программно-аппаратные ресурсы среды представляются специализированными приложениями (агентами), образующими в совокупности мультиагентную систему управления. Анализ современных исследований в области мультиагентного управления распределенными вычислительными системами различного назначения позволяет сделать вывод о его актуальности и успешном применении на практике [1-6].

В процессе решения задач управления распределенными вычислениями агенты могут объединяться в виртуальные сообщества. Как правило, они осуществляют скоординированное взаимодействие на основе кооперации или конкуренции. Таким образом, важной задачей для виртуального сообщества агентов является выбор своего лидера, осуществляющего координацию их взаимодействия [7].

В докладе представлен модифицированный древесный алгоритм выбора лидера виртуального сообщества агентов, представляющих ресурсы гетерогенной распределенной вычислительной среды в процессе их назначения для выполнения заданий приложений пользователей. Назначение, структура и особенности функционирования мультиагентной системы в целом детально представлены в [8-10].

**Топология.** При формировании виртуального сообщества агентов автоматически строится топология его коммуникационной сети. Топология строится в виде ориентированного дерева  $G = \langle V, U \rangle$ , где  $V$  – множество вершин графа, представляющих вычислительные узлы ГРВС, на которых размещены агенты,  $U$  – множество ребер графа, представляющих коммуникационные каналы связи между этими узлами. Дерево  $G$  описывается булевой матрицей смежности  $A$  размерности  $n \times n$ , элемент которой  $a_{ij} = 1$  означает, что существует дуга  $(v_i, v_j)$ ,  $n$  – число агентов виртуального сообщества.

Процесс построения дерева  $G$  включает три основных этапа:

- в связном неориентированном графе, представляющем модель коммуникационной среды агентов виртуального сообщества, выбирается начальная вершина, соответствующая одному из агентов и являющаяся наилучшей по заданному критерию качества (показателю надежности, производительности или другой характеристики вычислительного узла агента);
- в соответствии с этим выбором формируется подграф исходного графа в виде дерева, вершины которого взаимно-однозначно соответствуют агентам виртуального сообщества;
- ребра полученного подграфа ориентируются по направлению от начальной вершины по направлению к дочерним вершинам.

\* Исследование выполнено в рамках научного проекта IV.38.1.1 программы фундаментальных исследований СО РАН, а также при поддержке РФФИ, проект № 16-07-00931-а.

**Алгоритм.** В работе предлагается модифицированная версия древесного алгоритма выбора лидера. Функционирование алгоритма характеризуется следующими особенностями:

- алгоритм является модификацией распределенного древесного волнового алгоритма [11];
- любой из агентов, которому соответствует листовая вершина дерева  $G$ , может инициировать работу алгоритма, сообщив об этом другим агентам виртуального сообщества;
- агенты взаимодействуют посредством посылки сообщений через коммуникационные каналы;
- коммуникационные протоколы гарантируют невозможность пропажи сообщений из-за ошибок коммуникаций или отката к контрольной точке;
- агенты используют дополнительные служебные сообщения (например, подтверждения о доставке сообщений);
- алгоритм выполняется в фоновом режиме – агенты продолжают решение своих текущих задач при взаимодействии между собой путем обмена сообщениями.

Основные этапы алгоритма.

1. *Процедура проведения прямой волны.* Формирование агентами  $a_1, a_2, \dots, a_n$  своих критериев качества  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Отправка сформированной информации агентами, представленными вершинами дерева более низкого уровня, агентам, связанными с ними и представленными вершинами дерева следующего, более высокого уровня.

2. *Действия агента, представленного корневой вершиной.* Выбор лидера виртуального сообщества агентов:

$$k_l = \arg \max_{i=1, n} \{c_i\},$$

где  $k_l$  – это индекс агента-лидера.

3. *Процедура обратной волны.* Рассылка результатов выбора лидера в соответствии с топологией коммуникационной среды агентам виртуального сообщества.

**Выводы.** Выбор одного из волновых алгоритмов для реализации выбора лидера виртуального сообщества агентов обусловлен рядом важных свойств, присущих алгоритмам данного класса [11]: завершение работы за конечное число шагов, обеспечение принятия определенного решения, причинно-следственная обусловленность принятого решения всеми участниками процесса. Результаты сравнения оценок сложности различных распределенных волновых алгоритмов по числу сообщений приведены в таблице 1, где  $m$  – это число обменов сообщениями алгоритма обхода, на котором базируется волновой алгоритм угасания.

Таблица 1. Оценка сложности распределенных волновых алгоритмов

Алгоритм	Топология коммуникационной среды агентов	Оценка сложности алгоритма по числу сообщений
Древесный	Дерево	$2 \times n - 2$
Ченя – Робертса	Кольцо	$O(n \times \log n)$
Петерсона/Долева – Клейва – Роде		$1,5 \times n \times \log n$
Угасания	Заранее неизвестная топология	$n \times m$
«Задиры»		$O(n^2)$

На основе приведенных в таблице 1 данных можно сделать вывод о преимуществе древесного алгоритма по числу обменов сообщениями в сравнении с другими волновыми алгоритмами. Разработка модифицированной версии древесного алгоритма, приведенного в работе [11], обусловлена тем, что исходный алгоритм не обеспечивает отсутствие коллизий при передаче сообщений между агентами.

В рамках мультиагентного управления распределенными вычислениями данный алгоритм совмещается с алгоритмом проведения тендера вычислительных работ [12]. При проведении прямой волны агенты передают свои ставки вместе с критериями качества. Агент, представленный корневой вершиной выбирает лидера и определяет победителей тендера. Обратной волной передается информация о лидере и победителях торгов. В результате существенно снижаются накладные расходы на взаимодействие агентов.

1. Каляев А.И., Каляев И.А. Метод мультиагентного диспетчирования ресурсов в облачных вычислительных средах // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 2. С. 51–51.
2. Oleinikova S.A., Kravets O.Ya., Zolotukhina E.B., Shkurkin D.V., Kobersy I.S., Shadrina V.V. Mathematical and Software of the Distributed Computing System Work Planning on the Multi-agent Approach Basis // International Journal of Applied Engineering Research. Vol. 11, № 4. P. 2872–2878.
3. Singh A., Juneja D., Malhotra M. A novel agent based autonomous and service composition framework for cost optimization of resource provisioning in cloud computing // Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences. 2017. Vol. 29, № 1. P. 19–28.
4. Феоктистов А.Г., Костромин Р.О., Дядькин Ю.А. Управление заданиями в гетерогенной распределенной вычислительной среде на основе знаний // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2018. № 2. С. 10–17.
5. Feoktistov A., Kostromin R., Tchernykh A. Agent Behavior Model for Distributed Computing Management in the Environment with Virtualized Resources // Proceedings of the 41st International Convention on information and communication technology, electronics and microelectronics (MIPRO-2018). Riejska: IEEE, 2018. P. 1153–1158.
6. Darius P.S.H., Kanaga E.G.M. Bag-of-Tasks Intelligent Scheduling Agent (BISA) in Cloud Computing // Advanced Computational and Communication Paradigms. 2018. Vol. 706. P. 239–246.
7. Городецкий В.И. Самоорганизация и многоагентные системы I. Модели многоагентной самоорганизации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 92–120.
8. Bychkov I., Feoktistov A., Sidorov I., Kostromin R. Job Flow Management for Virtualized Resources of Heterogeneous Distributed Computing Environment // Procedia Engineering. 2017. Vol. 201. P. 534–542.
9. Феоктистов А.Г., Костромин Р.О. Разработка и применение проблемно-ориентированных мультиагентных систем управления распределенными вычислениями // Известия ЮФУ. Технические науки. 2016. № 11. С. 65–74.
10. Bychkov I., Feoktistov A., Kostromin R., Sidorov I., Edelev A., Gorsky S. Machine Learning in a Multi-Agent System for Distributed Computing Management // Data Science. Information Technology and Nanotechnology 2018. CEUR-WS Proceedings. 2018. Vol. 2212. P. 89–97.
11. Tel G. Introduction to Distributed Algorithms: Solutions and Suggestions. Cambridge University Press, 2000.
12. Бычков И.В., Опарин Г.А., Феоктистов А.Г., Кантер А.Н. Мультиагентный алгоритм распределения вычислительных ресурсов на основе экономического механизма регулирования их спроса и предложения // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2014. № 1. С. 39–45.

# РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ АРХЕОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ<sup>1</sup>

Е.С. Фереферов, А.А. Ветров

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН

[fereferov@icc.ru](mailto:fereferov@icc.ru)

Проведение археологических исследований связано с получением, накоплением и обработкой большого объема разнородной информации. Как правило, археологические исследования состоят из двух основных этапов: полевые работы, включающие определение места, проведение раскопок, извлечение образцов, и лабораторные исследования, направленные на очистку, обработку и датирование образцов. Для обработки получаемых при исследованиях данных задействуются такие дисциплины, как география, геохимия, геофизика, математическое моделирование. Также в силу своей специфики археологические исследования всегда связаны с пространственными данными. Применение современных информационных технологий, в том числе геоинформационных, позволяет значительно автоматизировать процессы археологических исследований, а также повысить качество результатов и их доступность. Однако одной из проблем внедрения информационных технологий в археологические исследования является отсутствие единых стандартов организации исследований и описания получаемых на каждом этапе результатов.

В работе предложена архитектура информационной системы поддержки археологических исследований (ИС ПАИ), обеспечивающая регистрацию, учет и анализ археологических данных на всех этапах исследований. Система состоит из двух блоков: подсистемы поддержки полевых работ (ПППР) и информационной системы интеграции и публикации результатов исследований (ИС ИПРИ). Основой разрабатываемой ИС ПАИ являются технология и инструментальное средство ГеоАРМ, обеспечивающие создание прикладных систем на основе декларативных спецификаций[1]. Использование данной технологии позволяет решить задачу гибкой модернизации по атрибутам – обеспечивает расширение перечня показателей без перекомпиляции всей системы, что актуально в условиях формирующихся стандартов археологических исследований.

ПППР реализована при помощи инструментального средства ГеоАРМ и предназначена для локальной работы в условиях отсутствия доступа к Интернет. ПППР устанавливается на переносные компьютеры и обеспечивает сбор атрибутивных и пространственных данных непосредственно на местах проведения археологических раскопок. ИС ИПРИ является web-ориентированной системой, реализованной на основе CMS October[2], обеспечивающей пользователям доступ к тематическим и картографическим базам данных, а также к сервисам анализа данных и геообработки.

1. Фереферов Е.С., Бычков И.В., Хмельнов А.Е. Технология разработки приложений баз данных на основе декларативных спецификаций // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 5. С. 85–100.
2. CMS October [Электронный ресурс]. – <https://octobercms.com>

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках гранта Правительства РФ, проект № 074-02-2018-334 "Байкальская Сибирь в каменном веке: на перекрестке миров".

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЙОНА ПО ОПИСАНИЮ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ОБРАЗЦОВ ГЕРБАРИЯ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

К.Р. Фёдоров  
Лицей ИГУ, 9 А класс  
[Konstantin\\_fedorov\\_03@mail.ru](mailto:Konstantin_fedorov_03@mail.ru)

В настоящее время накоплено много данных о собранных образцах различных растений. Среди этих данных имеются описания местоположения сбора растения, но не всегда указаны координаты. Сейчас определяются координаты по описанию местоположения вручную. Учитывая большой объем данных, определение координат является трудоемким процессом. Поэтому является актуальной автоматизация определения координат по местоположению. Разработана программа, определяющая по описанию местоположения административный район. Сложность задачи заключается в использовании огромного количества различных слов, в том числе устаревших, в данных. Наиболее практичным подходом является применение нейронных сетей [1,2], позволяющих автоматически обучаться.

Описание местоположения – это текст, состоящий из нескольких предложений. Предложения включают в себя названия: мест, населенных пунктов, рек и др. объектов. Предварительно создан словарь слов, встречающихся в текстах местоположений. Слова приведены в начальную форму, убраны наречия, местоимения, глаголы и т.п. Для приведения слов в начальную форму используется библиотека Az.js [3], которая также производит разделение текста на слова. Сейчас этот словарь насчитывает около одной тысячи слов.

Для нейронной сети на основе текста необходимо сформировать вектор. Компоненты вектора соответствуют элементам словаря. Если слово словаря имеется в описании местоположения, то компонент вектора равен 1, иначе равен 0. Нейронная сеть в программе однослойная. Количество нейронов соответствует количеству административных районов. Каждый нейрон имеет количество входов равное количеству слов в словаре и один выход, принимающих значений 1 или 0, где 1 значит, что текст описывает местоположение административного района, соответствующего нейрону. Каждому входу соответствует свой вес. Для каждого нейрона подсчитывается сумма элементов вектора, умноженная на их веса, и если она больше порога, то выводится 1, иначе 0. Обучение производилось на базе 1000 местоположений с указанными районами. Тестирование осуществлялось на базе 100 местоположений. Программа определяет административный район с точностью 76%.

Программа написана на языке JavaScript. Может использоваться в браузере и на сервере. Достоинством программы является учет огромного количества названий и имеется возможность дообучения нейронной сети.

1. Тарик Рашид Создай свою нейросеть. [Электронный ресурс] — Режим доступа: <https://neuralnet.info/>, свободный. — Загл. с экрана.
2. Нейронки за 5 минут [Электронный ресурс] — Режим доступа: <https://habr.com/post/416211/>, свободный. — Загл. с экрана.
3. Библиотека Az.js [Электронный ресурс] — Режим доступа: <https://github.com/deNULL/Az.js>, свободный. — Загл. с экрана.

# РАЗВИТИЕ ПОДСИСТЕМЫ ВВОДА И РЕДАКТИРОВАНИЯ ДАННЫХ ГЕОПОРТАЛА<sup>1</sup>

Р.К. Фёдоров, А.А. Ветров

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[fedorov@icc.ru](mailto:fedorov@icc.ru), [vetrov@icc.ru](mailto:vetrov@icc.ru)

Проведение многомерного анализа данных является актуальной задачей и требует создания хранилища данных [1]. В техническом аспекте применяются три способа хранения данных: многомерный, реляционный и гибридный. В любом случае, есть необходимость подготовки таблиц измерений, извлечения, преобразования и загрузки данных для построения иерархий в таблицах измерений, что продиктовано требованиями дальнейшего многомерного анализа, на основе этих данных.

Практически все данные имеют привязку ко времени, поэтому в подавляющем большинстве систем анализа данных присутствует измерение времени. Также широкое распространение имеет пространственное измерение, то есть географическая принадлежность, например, в рамках административного деления. Существует немало примеров подобных измерений в схожих предметных областях. Каждый раз, при разработке новой системы анализа многомерных данных, во время создания хранилища данных дублируется работа по созданию таблиц измерений такого рода.

Авторами предлагается сервис многомерного анализа данных в составе геопортала ИДСТУ СО РАН с использованием готовых востребованных таблиц измерений. Пользователям предлагается возможность автоматизированного многомерного анализа данных, если в таблицах имеются определенные информационные поля. Рассмотрим пример: допустим у пользователя есть информация о собранных образцах в определенной предметной области, с указанием даты сбора и местоположения (координаты точки сбора). Можно автоматически посчитать средние, максимальные, минимальные значения на данных, сгруппированных по неделям/месяцам/кварталам/годам или по районам/областям/округам/странам. На основе полученных данных можно построить диаграммы и графики.

Другой интересной особенностью геопортала является функция вычислений выражений, применяемая к табличным данным. В выражении можно использовать данные атрибутов строки, арифметические операции, значения, получаемые из других таблиц и т.д. Вычисление выражений производится в асинхронном режиме из-за необходимости получать значения из других таблиц. Выражения можно применять для вычисления значений атрибутов по умолчанию или для динамически вычисляемых полей. Например, это функция может быть востребована в таких областях как медицинская статистика, где показатели заболеваемости часто приводятся на 1000 человек. Имея в таблице данные о количестве заболевших в районе, можем предоставить показатель заболеваемости на 1000 человек, получив численность населения района.

1. Rodrigo Costa Mateus Spatial data warehouses and spatial OLAP come towards the cloud: design and performance / Rodrigo Costa Mateus, Thiago Luís Lopes Siqueira, Valéria Cesário Times, Ricardo Rodrigues Ciferri, Cristina Dutra de Aguiar Ciferri // Distrib Parallel Databases. 2016. Т. 34. С. 425–461.

---

<sup>1</sup>

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 17-47-380007.

# РАЗВИТИЕ МЕТОДА ПРЕДЕЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

И.А. Финогенко

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
fin@icc.ru

Метод предельных дифференциальных уравнений в сочетании с прямым методом функций Ляпунова восходит к работам G.R. Sell (1967) и Z. Artstein (1977, 1978) по топологической динамике неавтономных систем. В настоящее время он получил развитие в работах многих авторов (см. обзорную статью А.С. Андреева, *АиТ*, 2009, № 9) при исследовании асимптотических свойств решений неавтономных систем. Тем не менее метод предельных уравнений до сих пор не получил развития применительно к неавтономным дифференциальным включениям и разрывным системам. Это обусловлено тем, что возникает вопрос принципиального характера о способах построения предельных уравнений, так как становится невозможным использование каких-либо теорем математического анализа (в том числе - многозначного анализа) о сходимости последовательностей многозначных функций и способы построения предельных уравнений далеко не очевидны. Здесь такие способы предложены в форме предельных дифференциальных включений. Они являются новыми и обобщают известные подходы для рассмотренных ранее классов обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты имеют форму принципа инвариантности Ла-Салля (см. Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*. М.: Мир. 1980. С. 190).

В работах автора систематически и последовательно изучены неавтономные дифференциальные включения [1], неавтономные разрывные системы с решениями в смысле Филиппова [2,3], дифференциальные включения с запаздывающим аргументом и разрывные системы с запаздыванием [4,5]. Для этих классов систем исследована асимптотическая динамика и доказаны теоремы о притяжении и локализации правых предельных множеств ограниченных решений. Здесь следует отметить также, что разрывные системы с запаздыванием практически не изучались даже на уровне вопросов общей теории. Полученные результаты позволяют проводить изучение ряда вопросов качественной теории упомянутых выше классов неавтономных систем.

1. Финогенко И.А. Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности для неавтономных систем // *Сиб. Мат. журнал*. 2014. Т. 55. № 2. С. 454-471.
2. Финогенко И.А. Метод предельных дифференциальных уравнений для неавтономных разрывных систем // *Доклады АН*. 2016. Т. 466. № 1. С. 16-19.
3. Финогенко И.А. Принцип инвариантности для неавтономных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // *Сиб. Мат. журнал*. 2016. Т. 57. № 4. С. 913-927.
4. Финогенко И.А. Принцип инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // *Доклады АН*. 2017. Т. 477. № 5. С. 529-532.
5. Финогенко И.А. Метод предельных дифференциальных включений для неавтономных разрывных систем с последействием // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2018. Т. 24. № 1. С. 236-246.

## ЭМПИРИЧЕСКИЙ ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

Ф.В. Хандаров, А.В. Баталов, Д.Ж. Бадагаров

Бурятский государственный университет  
[fedor.khandarov@gmail.com](mailto:fedor.khandarov@gmail.com), [crashmaster8497@gmail.com](mailto:crashmaster8497@gmail.com),  
[dugarbadagarovs@gmail.com](mailto:dugarbadagarovs@gmail.com)

Основным рабочим объектом при решении задач прогнозирования, классификации или восстановления регрессии часто является таблица признаков (feature table). Как правило, нет никакой информации о наличии или отсутствии линейной или нелинейной зависимости признаков. Для предварительной обработки часто используется процедура факторного анализа, основанного на предположении, что неизвестные признаки на самом деле зависят от меньшего количества известных переменных, чем поступает в распоряжение аналитика. Вместе с тем сокращение размерности может существенно повысить точность моделирования в силу снижения размерности соответствующих задач оптимизации (идентификации моделей).

В настоящей работе описывается подход эмпирического снижения размерности путем организации поиска в пространстве наборов учитываемых признаков. В качестве моделей, без потери общности, рассматриваются нейронные сети.

Оптимизационная задача настройки весов связей нейронной сети путем минимизации среднеквадратичной ошибки записывается в виде (1):

$$\arg \min_{w \in W} e(w), \quad (1)$$

где  $e = \frac{1}{T} \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n (y_i^{(t)} - f(w, x_i^{(t)}))^2}$  – среднеквадратическая ошибка,  $f(w, x_i^{(t)})$  – отклик

нейросетевой модели, зависящий от матрицы весовых коэффициентов  $w$ ,

$\left\{ \left( x^{(t)} = \left( x_j^{(t)} \right)_{j=1, \overline{m}}, y^{(t)} = \left( y_i^{(t)} \right)_{i=1, \overline{n}} \right) \right\}_{t=1, \overline{T}}$  – обучающее множество,  $m, n$  – размерности про-

странств признаков и откликов.

В случае постановки задачи поиска в пространстве наборов учитываемых признаков, (1) может быть переписано, как (2):

$$\arg \min_{b \in B, w \in W} e(b, w) \quad (2)$$

В данном случае  $B = \{b(b_1, b_2, \dots, b_m), b_i \in \{0, 1\}\}$  – множество булевых векторов, описывающих всевозможные маски вектора учитываемых признаков, а обучающее

множество принимает вид  $\left\{ \left( x^{(t)} = \left( x_j^{(t)} \right)_{j(b)}, y^{(t)} = \left( y_i^{(t)} \right)_{i=1, \overline{n}} \right) \right\}_{t=1, \overline{T}}$ , ошибка должна быть

переписана в виде:  $e = \frac{1}{T} \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n (y_i^{(t)} - f(b, w, x_i^{(t)}))^2}$ , поскольку структура нейронной

сети изменится в связи с изменением размерности входного вектора.

В качестве методов оптимизации для настройки весов связей нейронной сети (идентификации модели) и для поиска в пространстве векторов, описывающих учитываемые признаки, могут быть использованы, вообще говоря, в различных комбинациях любые методы оптимизации, как универсальные (градиентные и эвристические), так и специализированные (обратное распространение ошибки).

Разработано программное обеспечение, реализующее описываемый подход. Проведен ряд вычислительных экспериментов.

# ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ПОСТРОЕНИЯ И АНАЛИЗА ПЕРСОНАЖНЫХ СИСТЕМ ЛИТЕРАТУРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ<sup>1</sup>

Ф.В. Хандаров, Д.А. Митыпов, А.В. Саргаева

Бурятский государственный университет

[fedor.khandarov@gmail.com](mailto:fedor.khandarov@gmail.com), [dugar.mitypov@gmail.com](mailto:dugar.mitypov@gmail.com), [anastasia.sarg@gmail.com](mailto:anastasia.sarg@gmail.com)

О.В. Хандарова

Институт монголоведения, буддологии и тибетологии СО РАН

[olga.khandarova@gmail.com](mailto:olga.khandarova@gmail.com)

Формализованная персонажная система литературного произведения представляет собой граф, в качестве вершин которого выступают персонажи этого произведения, а в качестве ребер — различные бинарные отношения между персонажами.

Рассматриваемый программный комплекс позволяет полуавтоматизированное построение графовых моделей персонажных систем по текстам литературных произведений на основе различных метрик «близости» между вершинами.

Наибольший интерес представляет автоматизация построения подобных графов, последующий же процесс анализа при этом может быть выполнен и в сторонних пакетах.

На текущий момент в качестве ребер в строящихся графах далее принимаются бинарные связи между персонажами согласно одной из выбранных метрик  $m$ .

Выявление персонажей (и, соответственно, связей между ними) может производиться на трех «уровнях» погружения, детализации исходного текста.

1. Выделение словаря собственных имен и псевдонимов персонажей — верификация словаря экспертом — построение графа  $G_{1m}$  (в качестве вершин выступают имена и псевдонимы персонажей).

2. Выделение местоимений и вероятностный подбор вариантов их соответствия по ранее выделенному и верифицированному словарю имен собственных — верификация экспертом — построение графа  $G_{2m}$  (в качестве вершин выступают имена персонажей и заменяющие их местоимения)

3. Ручное экспертное выявление метафорических обозначений персонажей — построение графа  $G_{3m}$  (в качестве вершин выступают имена персонажей, заменяющие их местоимения и метафорические описания)

В качестве метрик на текущий момент реализованы следующие:

1. Простое упоминание персонажей в рамках одной единицы композиционного членения (с возможностью различного масштабирования единиц).

2. Косинусное сходство между векторами в векторном пространстве, построенном на основе подходов дистрибутивной семантики, а именно на модели TF-IDF.

На различных этапах работы программного комплекса получают графы, к которым можно применять различные методы анализа. В частности, производить расчет мер центральностей вершин и кластеризацию множества вершин на основе связей между ними. На текущий момент реализованы процедура кластеризации на основе максимизации функционала модулярности [1], а также расчет Google PageRank в качестве меры центральности вершин.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-412-030013

Пробное применение разработанного программного комплекса на примере бурятского героического эпоса «Гэсэр» позволило выявить важные для предметной области закономерности.

1. Мартынов Н.Н., Хандарова О.В., Хандаров Ф.В. Кластеризация графов на основе оценок изменения модулярности // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2018. Т. 25. С. 63-78.

## ПОДДЕРЖКА РАЗРАБОТКИ ФОРМ DELPHI/LAZARUS С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЩЕЙ КОДОВОЙ БАЗЫ ДЛЯ РАЗНЫХ БИБЛИОТЕК КОМПОНЕНТОВ

А.Е. Хмельнов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
hmelnov@icc.ru

С использованием возможностей последних версий Delphi и её свободно-распространяемого аналога Lazarus ранее разработанный код программ для ОС Windows можно использовать для создания приложений под различные платформы, включая мобильные. При этом модули, реализующие алгоритмы, структуры данных и бизнес-логику, можно использовать практически без изменений. При необходимости в ряде мест кода можно воспользоваться условной компиляцией для сохранения общей кодовой базы. Однако, пользовательский интерфейс придётся переписать, иногда очень сильно. Большинство подходов к реализации интерфейса ориентировано на одностороннюю миграцию. Так, с использованием инструмента Mida Converter можно решить часть задач по переходу с библиотеки VCL на библиотеку FMX в Delphi. Аналогично, Lazarus предлагает инструмент, для импорта форм Delphi. В данной работе предлагается подход к максимальному совмещению кодовой базы при продолжении разработки под несколько версий Delphi и несколько платформ, включая Lazarus.

Визуальный редактор является одной из важнейших подсистем интегрированных сред разработки (IDE) Delphi и Lazarus. Он позволяет максимально быстро создавать и редактировать пользовательский интерфейс и связывать его компоненты с программным кодом. В IDE для разных языков программирования используются различные подходы к представлению результатов редактирования пользовательского интерфейса: может формироваться, как программный код (который, как правило, не рекомендуется редактировать вручную), так и данные, описывающие размещение и свойства элементов управления. В Delphi/Lazarus используется второй вариант: формируются данные, описывающие заданные в редакторе значения свойств компонентов, включая имена методов-обработчиков событий, а также иерархию размещения компонентов. Для каждого окна (формы) создаётся отдельный модуль, в котором определяется описывающий форму класс, его поля, ссылающиеся на размещённые на форме компоненты, и методы, используемые для обработки событий. Описывающие форму данные выносятся в отдельный файл, который связывается с исходным текстом при помощи директивы компилятора \$R, используемой для включения в исполняемый файл ресурсов. При компиляции под Windows из данных формы создаётся бинарный ресурс в секции RCDATA, для других платформ механизм ресурсов Windows эмулируется системными модулями.

Визуальный интерфейс разрабатывается с использованием библиотеки компонентов. В Delphi долгое время безальтернативно использовалась библиотека VCL, предназначенная для работы под Windows и во многом основанная на использовании готовых классов окон Windows. В первых версиях Delphi ресурсы формы хранились только в бинарном виде и имели расширение dfm, далее появилась возможность хранения их также и в текстовом виде. В настоящее время помимо VCL для разработки кроссплатформенных приложений используется библиотека FMX, основанная на компонентах, нарисованных с нуля. В библиотеке FMX используется расширение fmx для ресурсов форм; названия классов компонентов в основном совпадают с VCL, но имена некоторых свойств и методов изменены, например, для большей унификации свойство, задающее отображаемый текст, всегда называется Text (а в VCL у ряда компонентов для него используется имя Caption).

Библиотеки компонентов развиваются, и в более новых версиях добавляются новые возможности, при этом классы компонентов получают новые свойства. К сожалению

нию, при этом сами разработчики библиотек не всегда владеют всеми возможностями языка Pascal: язык позволяет задать значения по умолчанию для добавленных свойств, так, чтобы эти свойства записывались в ресурс формы только в случае задания нестандартного значения вручную, однако, часто эта возможность не используется. Поэтому после любого редактирования формы в более новой версии Delphi у многих компонентов в ресурсе этой формы появляются свойства, о которых ничего не знают более старые версии. К счастью, более старые версии умеют пропускать неизвестные свойства при открытии формы для визуального редактирования, но их наличие может создать проблемы при работе приложений, перекомпилированных без визуального редактирования (правда, существует приём, позволяющий заблокировать выдачу таких ошибок).

В системе Lazarus используется библиотека компонентов LCL, ресурсы формы сохраняются в файлы с расширением LFM только в текстовом виде. Сам формат LFM не отличается от формата текстовых DFM. Компоненты библиотеки LCL в основном достаточно точно копируют программный интерфейс VCL, но при этом являются кроссплатформенными. На самом деле, при этом добавляется ещё один уровень абстракции – набор виджетов (widgetset), который связывает платформенно-независимый код с платформенно-зависимой реализацией интерфейса. Некоторые компоненты, тем не менее, могут иметь небольшие отличия от их аналогов в VCL. Также LCL добавляет компонентам ряд новых свойств.

Таким образом, для разных библиотек компонентов необходимо, как минимум, создавать и поддерживать разные ресурсы форм. Так, старые версии требуют, чтобы эти ресурсы были бинарными, а Lazarus работает только с текстовыми. К сожалению, все версии IDE ожидают, что имя файла с ресурсом формы будет отличаться от имени модуля формы только расширением, т.е. нельзя просто поместить ресурсы для разных версий в разные каталоги. В некоторых случаях можно ограничиться условной компиляцией для включения соответствующего используемой библиотеке компонентов ресурса формы. Для компиляторов Delphi и Free Pascal такой приём не создаёт никаких проблем. Также IDE Lazarus хорошо работает с условной компиляцией, там даже реализовано выделение актуальных вариантов подсветкой синтаксиса, так что система визуального программирования будет редактировать ресурс из своего файла LFM.

Этого нельзя сказать про Delphi: там система визуального программирования разбирает код, не учитывая наличия директив условной компиляции. В результате возникают неприятные эффекты, например, повторное добавление имён в список используемых модулей при применении в нём условной компиляции. Таким образом, после редактирования формы в Delphi XE 10.2 её становится невозможно использовать в других версиях Delphi и Lazarus без ручного исправления сделанных изменений. Поэтому более правильно было бы создавать отдельные программные модули для каждой из библиотек компонентов с вынесением общей логики в отдельный файл.

Традиционно в Delphi для представления бизнес-логики используются модули данных (невизуальные формы, содержащие только невизуальные компоненты и не зависящие от конкретной библиотеки визуальных компонентов). Таким образом, связанный с формой код можно по максимуму перенести в модуль данных, а затем для каждой из используемых библиотек компонентов создать свою версию формы. Недостатком этого подхода является то, что при этом придётся связывать визуальные компоненты с обработчиками событий в коде, а не средствами визуального программирования. В результате процесс разработки существенно замедляется.

После ряда попыток работы с использованием переноса всей логики формы в модуль данных был предложен альтернативный подход, основанный на использовании наследования форм. Рассмотрим основные принципы этого подхода:

1. Для каждой из версий библиотеки создаём собственный базовый каталог с модулем `uBaseFm.pas`, содержащим свою версию класса `TBaseForm`, которая наследуется от `TForm`. Все формы проекта теперь будут наследоваться от `TBaseForm`. Это позволяет не упоминать в списках использованных модулей имена модулей из конкретной библиотеки компонентов – это делается только в модуле `uBaseFm`.
  2. В общей для всех проектов папке для каждой исходной формы создаём потомка `TBaseForm`, **не добавляющего к `TBaseForm` никаких визуальных компонентов**. Это требование позволяет унифицировать представление ресурса формы и не менять список используемых модулей. Визуальным редактором такой формы не пользуемся. В этот класс переносим всю логику работы формы, не зависящую от библиотеки компонентов (также здесь можно использовать условную компиляцию при наличии некоторых таких зависимостей). Имена модуля и класса формы совпадает с соответствующим именем исходного модуля до рефакторинга.
  3. Дополнительно для каждой версии библиотеки компонентов создаём модуль пользовательского интерфейса, содержащий потомок класса, описывающего логику работы формы, в папке проекта для этой библиотеки. К имени класса и имени модуля при этом добавляем суффикс `UI`. Эту форму редактируем визуально.
  4. Модуль класса с логикой использует `UI`-модуль из части **implementation**, а код тех методов, которые работают с визуальными компонентами, помещается внутрь оператора вида `with TMainFormUI(Self) do`, что позволяет по-прежнему продолжать работать с этими компонентами, при условии, что имена используемых свойств и методов совпадают.
  5. При различиях в именах и типах соответствующих свойств и методов необходимо использовать вспомогательные функции-адаптеры или условную компиляцию.
- Таким образом, каждый проект включает в себя файлы из общей папки, а также базового каталога и каталога проекта для конкретной платформы.

Для поддержки предложенного подхода реализован инструмент `VCLtoMUI`, позволяющий выполнить рефакторинг модуля формы, разработанной с использованием библиотеки `VCL`, сформировав из неё файл логики и заготовки для файлов пользовательского интерфейса. Создаются формы для: `VCL` и старых версий `Delphi` (с бинарным ресурсом формы), `VCL` и новых версий `Delphi` (с текстовым ресурсом формы), `FMX` и `LCL`. Для реализации этого инструмента был использован парсер `Castalia`, при помощи которого выполняется разбор кода модуля. В ходе разбора: выделяются и удаляются из исходного текста соответствующие компонентам поля класса формы; формируется список типов этих компонентов; предок класса формы заменяется на `TBaseForm`; при обнаружении в телах подпрограмм использования имён компонентов добавляется оператор вида `with TMainFormUI(Self) do`; директива включения ресурса формы заменяется на директивы подключения разных видов ресурсов (`LFM`, `DFM` или `fmX`), выбираемых условной компиляцией. После изменения основного файла для него создаются все эти три вида ресурсов формы. Далее разбирается файл ресурса исходной формы и из него создаются заготовки для ресурсов форм с интерфейсом для каждой из целевых библиотек. Также создаются исходные тексты для форм с интерфейсом, при этом список используемых модулей определяется по списку типов компонентов. Пока не реализована замена имён свойств и имён модулей для других (не `VCL`) библиотек (поэтому был использован термин «заготовки»).

Для повышения удобства использования предложенной технологии ещё требуется разработать инструмент для автоматического переноса результатов редактирования формы пользовательского интерфейса для одной из библиотек компонентов в остальные. Также желательно реализовать эксперт для `IDE`, автоматизирующий перенос обработчиков событий в модуль логики.

Е.А. Черкашин

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН

Иркутский научный центр СО РАН

Иркутский национальный исследовательский технический университет

Институт математики, экономики и информатики ИГУ

eugeneai@icc.ru

Структурирование исходного кода программ позволяет развивать ее в различных направлениях (делить на подзадачи), обеспечивая относительную независимость между ними. В популярных системах программирования структурирование проявляется в возможности задания структур данных (классов), процедур, функций в языке программирования, модулей, а также пакетов (packages), сервисов регистрации и загрузки пакетов, позволяющих по запросу или согласно конфигурации установить необходимые пакеты и их зависимости (dependencies).

В системах программирования Prolog, ввиду их небольшой популярности, структурирование развито не так сильно, в частности, в стандарте ISO Prolog существует возможность разбивать программу на модули, а также общая схема организации сервисов пакетов. В [1] предложен подход к программированию в ISO Prolog в объектной парадигме: язык программирования LogTalk. LogTalk – это макропакет, транслирующий исходный код в Prolog.

В [2] развит предложенный ранее подход применения логического программирования в качестве языка реализации процедур трансформации моделей (знаний о трансформации) в рамках «Модельно-управляемой архитектуры» (MDA). Рассмотрена реализация трансформации в виде программы на языке LogTalk. Трансформация представляется как сценарий синтеза платформозависимой модели (PSM) программного обеспечения (ПО). Сценарий представляет собой объект – инкапсуляцию процедур трансформации, посылающий запросы объектам, инкапсулирующим данные о платформонезависимой модели (PIM), и управляющий объектами, синтезирующими структуру PSM. PIM представлена в виде RDF-графа, а PIM – древовидная система блоков кода (объектов и литералов).

При реализации процедур трансформации использованы большинство предоставляемых LogTalk синтаксических структур и вариантов объектных иерархий. Особенно оказались полезными параметризованные объекты и их иерархии прототипов. Такие объекты позволяют задавать контекст выполнения метода без создания экземпляра класса. Второй необычной но полезной структурой являются категории – инкапсуляция реализаций логически связанных друг с другом методов – и композиционное программирование. Все статические объекты компилятор LogTalk (например, параметризованные объекты) преобразует непосредственно в Prolog, при этом накладные расходы на производительность кода не больше 1%.

Вышеизложенная методика программирования успешно использована в реализации процедуры синтеза исходного кода Java-модулей визуального представления структуры методориентированного прикладного пакета Mothur. Основные преимущества использования логического программирования в MDA в сравнении с языками ATL – это большая распространенность языка, его простая и регулярная структура, возможность использовать любые структуры для представления исходной PIM, а также внешние библиотеки.

1. Moura, P. A Portable and Efficient Implementation of Coinductive Logic Programming // Proceedings of the Fifteenth International Symposium on Practical Aspects of Declarative Languages (PADL 2013), 2013. Springer LNCS 7752.
2. Cherkashin, E., Paramonov, V. et al. Model driven architecture implementation using linked data // Procs. of 24th Internal Conference, ICIST 2018, Vilnius, Lithuania, October 4-6, 2018. P. 412–423.

\* Работы выполнены при поддержке Интеграционной программы ИНИЦ СО РАН № АААА-А17-117041250054-8 «Фундаментальные исследования и прорывные технологии как основа опережающего развития Байкальского региона и его межрегиональных связей», проект № 4.2 «Применение методов NGS-BD (NextGenerationSequencing – BigData) для решения вопросов экологии».

**Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В.**

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Россия, 664033, Иркутск,  
ул. Лермонтова, 134, e-mail: chist@icc.ru, chistyak@gmail.com*

## **ОБ ОДНОСТОРОННЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ К ВОЗМУЩЕНИЯМ ВХОДНЫХ ДАННЫХ**

Рассматриваются системы уравнений обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\Lambda_k u := \sum_{j=0}^k A_j(x) D_t^j u = f(x, t), \quad \tilde{\Lambda}_k u := \sum_{j=0}^k \tilde{A}_j(x) D_t^j u = f(x, t), \quad (1)$$

где  $(x, t) \in \mathbf{U} = \mathbf{X} \times T$ ,  $T = [\alpha, \beta]$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{X} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ ,  $X_i = [x_{0,i}, x_{1,i}]$ ,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $A_j(x)$ ,  $\tilde{A}_j(x)$  –  $(n \times n)$ -матрицы,  $D_t \equiv \partial/\partial t$ , нулевая степень оператора дифференцирования является единичным оператором,  $f(x, t)$ ,  $u \equiv u(x, t)$  – соответственно заданная и искомая вектор-функции. Для систем (1) выполнены условия:

$$\det A_k(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{X}, \quad (2)$$

$$d = d(x) = \deg \det \left[ \sum_{j=0}^k \lambda^j A_j(x) \right] = \text{const}; \quad \|A_j(x) - \tilde{A}_j(x)\|_{\mathbf{C}(\mathbf{X})} \leq \varepsilon, \quad j = \overline{0, k}, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  малое неотрицательное число, матрицы  $A_j(x)$ ,  $\tilde{A}_j(x)$  и вектор-функция  $f(x, t)$  достаточно гладкие в некоторых открытых областях  $\tilde{\mathbf{X}} \supset \mathbf{X}$ ,  $\tilde{\mathbf{U}} \supset \mathbf{U}$ .

Системы вида (1), удовлетворяющие условиям (2), принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Важнейшими характеристиками, определяющими сложность структуры ДАУ и произвол в выборе начальных данных являются размерность пространства решений и ее индекс. Для систем (1), в частности, размерность пространства решений для любого фиксированного  $\bar{x} \in \mathbf{X}$  совпадает со значением функции  $d(\bar{x})$ . В докладе обсуждаются подходы к исследованию характера влияния изменений параметров, включая случай малых возмущений, на ее основные характеристики и смежные вопросы. При выполнении условий (3) и достаточно малом  $\varepsilon$  справедливы неравенства

$$nk \geq \tilde{d}(x) \geq d, \quad nk - d \geq \tilde{l}(x) \geq 1, \quad (4)$$

где  $\tilde{d}(x)$  – размерность пространства решений возмущенной ДАУ (1),  $\tilde{l}(x) \geq 1$  – индексы возмущенной и невозмущенных ДАУ (1).

## **Список литературы**

V. F. Chistyakov, M. R. Pjescic On the continuous dependence of solutions of linear systems of differential-algebraic equations on a parameter // Differential Equations, 2009, Vol. 45, No. 3, pp. 374–384.

## ГЕОМЕТРИЯ В ЖИВОПИСИ

В.О. Юринова  
МБОУ лицей №3, 10 «А» класс  
[yurinova2002@gmail.com](mailto:yurinova2002@gmail.com)

Моя исследовательская работа посвящена изучению геометрии в живописи и композиции в разных временных отрезках. Целью работы является создание наглядного материала по законам геометрии в живописи и композиции. Основой для данного исследования послужило то, что не всегда ученики художественных школ понимают важность и практическую значимость геометрии в живописи. Их интересует вопрос, как могут быть связаны два абсолютно противоположных предмета. В своей работе я хочу показать на наглядных примерах ошибочность этого мнения и представить геометрию, как неразрывную нить, которая проходит через всю историю живописи.

В самом деле, существуют три принципиальных геометрических метода отображения трехмерного пространства на двумерную плоскость картины: метод ортогональных проекций, аксонометрия и перспектива. Все эти принципиальные возможности изображения пространства на плоскости были реализованы в искусстве живописи, причем в разных пластах художественной культуры каждый из этих методов находил свое наиболее полное и чистое выражение. Так, система ортогональных проекций составила геометрическую основу живописи Древнего Египта; аксонометрия (параллельная перспектива) характерна для живописи средневекового Китая и Японии; прямая перспектива – это геометрический язык ренессансной живописи. Но не стоит забывать об ещё одном приеме – симметрия и асимметрия. Термин «симметрия» впервые сформулирован философами Древней Греции как пропорциональность, подобие, согласованность частей целостной структуры, гармония. Для древних греков симметрия была неотъемлемым атрибутом совершенства: утративши симметрию, предмет неизбежно лишается своей красоты. Асимметрия в свою очередь задаёт движение, «живость» в композиции, используется для передачи динамичности.

На основе моего опыта, знаний, полученных за время обучения в художественной школе, а также на основе моего исследования я обобщаю изученное и представляю основные законы геометрии в живописи. Это Перспектива, Симметрия, Асимметрия, Контраст, Линии, Объём.

Продуктом моего проекта является памятка, которая содержит основные законы геометрии в живописи. Я уже развешала в художественной школе в каждом классе по одной такой памятке, за что огромное спасибо мне сказали преподаватели, так как это оказалось очень востребовано.

В завершении исследования могу сказать, что в геометрии и живописи пути науки и искусства переплетались на протяжении столетий. Геометрия дарила живописи новые изобразительные возможности, обогащала язык живописи, а живопись эпохи Возрождения стимулировала исследования в геометрии. Геометрия, будучи могучей ветвью древа математики, является в то же время и тем связующим стержнем, который проходит через всю историю живописи.

О МЕТОДЕ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА В НЕВЫПУКЛОЙ ЗАДАЧЕ  
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЦЕЛЕВЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ ЛАГРАНЖА \*

М.В. Янулевич, М.В. Баркова

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[max@irk.ru](mailto:max@irk.ru), [mbarkova@icc.ru](mailto:mbarkova@icc.ru)

Пусть задана линейная управляемая система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in T \triangleq [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u \in L_\infty^r(T) \mid u(t) \in U \text{ п.в. на } T\}, \quad (2)$$

где множество  $U \subset \mathbb{R}^r$  является компактным. Рассматривается задача оптимального управления, заключающаяся в минимизации функционала Лагранжа

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_T F(x(t), u(t), t) dt \downarrow \min_{x, u}, \quad (3)$$

при условии (1)-(2). В дополнение к обычным предположениям в задаче оптимального управления [1] в работе предполагается, что подынтегральная функция  $(x, u, t) \mapsto F(x, u, t)$  представима в виде разности двух выпуклых функций (по совокупности переменных состояния  $x$  и управления  $u$ ):

$$F(x, u, t) = g(x, u, t) - h(x, u, t) \quad \forall (x, u, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times T, \quad (4)$$

где функции  $(x, u) \mapsto g(x, u, t)$  и  $(x, u) \mapsto h(x, u, t)$ ,  $t \in T$ , являются выпуклыми и гладкими [1]. Вообще говоря, задача (1)-(3) является невыпуклой, т.е. могут существовать управления, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина и не являющиеся при этом глобально оптимальными [1-3].

Отметим, что в работе [2] А.С. Стрекаловским были предложены и доказаны условия глобальной оптимальности, являющиеся необходимыми и достаточными для исследуемой задачи (1)-(3) в случае, когда функция  $h(x, u, t)$  из д.с. разложения целевого функционала не зависит от переменной управления  $u$ , т.е.  $h(x, u, t) = h(x, t)$ .

В настоящей работе предлагается итерационный метод локального поиска для исследуемой задачи (1)-(3), заключающийся в последовательном ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ) решении вспомогательных задач оптимального управления с выпуклым целевым функционалом

$$(PL_s): \quad I_s[u] = \int_T [g(x(t; u), u(t), t) - \langle \nabla_x h(x^s(t), u^s(t), t), x(t; u) \rangle - \langle \nabla_u h(x^s(t), u^s(t), t), u(t) \rangle] dt \downarrow \min_u, \quad u \in \mathcal{U}, \quad (5)$$

где  $x(\cdot; u)$  – решение системы ОДУ (1), соответствующее управлению  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ ,  $x^s(t) = x(t; u^s)$ ,  $t \in T$ . Следующее управление  $u^{s+1}(\cdot)$  строится как приближенное решение задачи  $(PL_s)$ :  $I_s(u^{s+1}) \leq \inf_u \{I_s[u] \mid u \in \mathcal{U}\} + \delta_s$ . При предположении, что точность  $\delta_s$  решения вспомогательной задачи  $(PL_s)$  удовлетворяет следующим условиям:  $\delta_s > 0$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\sum_{s=0}^{\infty} \delta_s < +\infty$ , доказана сходимость метода.

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
2. Стрекаловский А.С. Современные методы решения невыпуклых задач оптимального управления // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2014. Т. 8. С. 141-163.
3. Strekalovsky A.S., Yanulevich M.V. On global search in nonconvex optimal control problems // Journal of Global Optimization. 2016. V. 65, No. 1. P. 119-135.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-31-00465.

## АВТОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ АТАК В АЛГЕБРАИЧЕСКОМ КРИПТОАНАЛИЗЕ

А.А. Семенов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[biclop.rambler@yandex.ru](mailto:biclop.rambler@yandex.ru)

В докладе предполагается представить краткий обзор атак на некоторые блочные и поточные алгоритмы шифрования, выполняемые в рамках алгебраического криптоанализа. Алгебраический криптоанализ [1] подразумевает решение задач криптоанализа в форме алгебраических уравнений над конечным полем. Можно использовать различные алгоритмы для решения таких уравнений. Весьма хорошие результаты в этом направлении показывают алгоритмы решения задачи о булевой выполнимости (SAT). Одной из первых в этом направлении была статья [2]. В дальнейшем Н. Куртуа (N.Courtois) в статьях [3], [4] сформулировал понятия SAT-иммунитетности и UNSAT-иммунитетности в контексте задачи оценивания трудоемкости криптографических атак, относящихся к классу «угадай и определяй» (guess-and-determine, G&D-атака).

Понятия, данные Н. Куртуа, неконкретны и допускают множество различных интерпретаций. В контексте подхода, который будет представлен в докладе, SAT/UNSAT иммунитет оценивается в виде значений псевдобулевых функций специального вида. Значения таких функций вычисляются стохастически. Как итог, проблема построения G&D-атаки с наилучшей оценкой трудоемкости ставится в форме задачи псевдобулевой оптимизации. Для решения последней можно использовать обширный класс метаэвристических алгоритмов. Соответствующие псевдобулевы функции были определены в [5], [6]. Более точно, на основе результатов [5] можно описать псевдобулеву функцию, оценивающую UNSAT-иммунитетность, а на основе результатов [6] можно ввести псевдобулеву функцию, оценивающую SAT-иммунитетность.

Используя подход из [5], удается строить нетривиальные G&D-атаки для поточных шифров (см., например [7]). С использованием методов из [6] удалось построить рекордные по трудоемкости G&D-атаки для ряда неполнораундовых блочных шифров. В некоторых случаях получаемые оценки трудоемкости меньше известных в тысячи раз (см., например, сравнение с результатами из [8]).

1. Bard G. Algebraic cryptanalysis. Springer. 2009.
2. Courtois N., Bard G. Algebraic Cryptanalysis of the Data Encryption Standard // Lecture Notes in Computer Sciences. 2007. Vol. 4887 (CHES). Pp. 152–169.
3. Courtois N.T. Algebraic complexity reduction and cryptanalysis of GOST. Cryptology ePrint archive, Report 2011/626 (2011–2015), <http://eprint.iacr.org/2011/626>
4. Courtois N.T., Gawinecki J.A., Song, G. Contradiction immunity and guess-then-determine attacks on GOST // Tatra Mountains Mathematical Publications. 2012. Vol. 53. Pp. 65–79.
5. Semenov A., Zaikin O. Algorithm for finding partitionings of hard variants of Boolean satisfiability problem with application to inversion of some cryptographic functions // SpringerPlus. 2016. Vol. 5. N1. Pp. 1–16.
6. Semenov A., Zaikin O., Otpuschennikov I., Kochemazov S., Ignatiev A. On cryptographic attacks using backdoors for SAT // In The Thirty-Second AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI'2018), 2018, pp. 6641–6648.
7. Zaikin, O., Kochemazov, S.: An Improved SAT-based Guess-and-Determine Attack on the Alternating Step Generator // ISC 2017. LNCS, vol. 10599, pp. 21–38.
8. Yeo S.L., Li Z., Khoo K., Low Y.B. An Enhanced Binary Characteristic Set Algorithm and Its Applications to Algebraic Cryptanalysis // Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol. 10355 (ACNS). Pp. 518–536.

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ КОДИРОВОК ДЛЯ ЗАДАЧ КРИПТОАНАЛИЗА НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ПОТОЧНОГО ШИФРОВАНИЯ

О.С. Заикин, С.Е. Кочемазов

Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН  
[zaikin.icc@gmail.com](mailto:zaikin.icc@gmail.com), [veinamond@gmail.com](mailto:veinamond@gmail.com)

Задача булевой выполнимости (SAT) является исторически первой NP-трудной задачей [1]. Это означает что к ней можно эффективно сводить задачи из весьма широкого класса [2]. Эквивалентное представление исходной задачи в SAT-форме также называют пропозициональной кодировкой задачи. Неочевидный момент состоит в том, что, вообще говоря, для многих задач можно построить их пропозициональную кодировку совершенно различными способами. Более того, в силу эвристической природы современных алгоритмов решения SAT, вполне возможна ситуация, когда на некоторых кодировках некоторые решатели показывают существенно большую эффективность чем их конкуренты.

В докладе будут представлены результаты по вычислительному анализу пропозициональных кодировок задач криптоанализа нескольких алгоритмов поточного шифрования. Более конкретно, рассмотрены генераторы ключевого потока *Bivium*, *Grain v1* и усиленный генератор Геффе. Для каждого из них была рассмотрена задача восстановления исходного заполнения ячеек регистров генератора по известному ключевому потоку без стадии инициализации. Для построения пропозициональных кодировок была использована программная система *Transalg* [3]. Некоторые из полученных SAT-задач оказались слишком сложными, соответственно, они были ослаблены путем подстановки известных значений ячеек регистров до уровня, позволяющего решать каждый из SAT-примеров в течение часа.

Для решения полученного набора тестов были использованы современные решатели – победители ежегодных соревнований SAT-решателей [4] в последние три года. Эксперименты проводились с использованием вычислительного кластера «Академик В.М. Матросов» [5]. Проведенные эксперименты наглядно демонстрируют целесообразность рассмотрения различных способов построения пропозициональных кодировок и подбора решателей для работы с ними.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации, грант МК-4155.2018.9.

[1] S. A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. //Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing (STOC '71). 1971. Pp. 151-158.

[2] Handbook of Satisfiability. Eds.: Biere, A., Heule, M., Van Maaren, H., Walsh, T. Vol. 185 of Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. IOS Press. 2009.

[3] Otpuschennikov I., Semenov A., Griбанова I., Zaikin O., Kochemazov S. Encoding cryptographic functions to SAT using TRANSALG system // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. 2016. Vol. 285. Pp.1594-1595.

[4] <https://www.satcompetition.org/>

[5] <https://hpc.icc.ru/>

## СОДЕРЖАНИЕ

Авраменко Ю.В., Фёдоров Р.К. Технология подготовки данных для обучения нейронной сети	3
Аникин А.С. Вычислительные эксперименты по оптимизации потенциала Китинга с размерностями до 50000000 переменных	4
Аникин А.С., Андрианов А.Н. Методики распараллеливания алгоритмов оптимизации для гибридных суперкомпьютеров	5
Аникин А.С., Гасников А.В. Параллельная программная реализация метода условного градиента для поиска равновесия в модели Бэкмана	7
Аникин А.С., Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Сороковиков П.С. Алгоритм аппроксимации множества достижимости управляемой алгебро-дифференциальной системы	8
Асламов А.П. Применение подобия треугольников в решении арифметических задач	9
Balandin A.L. Tomography of the Beltrami fields	10
Баркова М.В., Стрекаловский А.С. Численное тестирование алгоритма локального поиска с обновлением штрафного параметра	17
Беденко К.В. Моделирование подводного рельефа и течений в составе имитационного моделирующего комплекса	18
Воскобойников М.Л. Автоматизация вызова сервисов на основе данных, получаемых с датчиков мобильного устройства	20
Галушко Е.А., Кривель С.М. Особенности формирования полнофакторной математической модели аэродинамики летательного аппарата вблизи подстилающей поверхности	21
Горбатенко Д.Е., Семенов А.А. Моделирование атак в компьютерных сетях с использованием распространения булевых ограничений	23
Горнов А.Ю. Память-экономичные эвристические варианты метода неравномерных покрытий Ю.Г.Евтушенко	24
Горнов А.Ю., Гладкочуб Д.П., Скляр Е.В., Донская Т.В. Методика параметрической идентификации моделей взаимодействия мантийных и коровых магм на различных гипсометрических уровнях земной коры	25
Горнов А.Ю., Нурминский Е.А., Аникин А.С. Многометодная технология обучения нейронных сетей со знаковой функцией активации	26
Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., Зиновьева А.Ф., Ненашев А.В. Численное исследование модели процесса релаксации фотопроводимости массива квантовых точек в магнитном поле	27
Горнов А.Ю. Рейдер-метод для квазисепарабельных задач безусловной оптимизации	28
Горский С.А., Богданова В.Г. Разработка сервиса для проверки выполнимости динамических свойств типа достижимости в булевых сетях	29
Гражданцева Е.Ю. Существование решения задачи Коши о продольных колебаниях упругого стержня с учетом инерции и при внешней нагрузке	30

Грибанова И.А., Семенов А.А. О функциях, порождаемых ослабляющими ограничениями в задачах поиска прообразов хеш-функций семейства MD4- $k$	32
Груздева Т.В. Поиск глобальных решений в прикладных задачах промышленности и электроэнергетики Монголии	33
Дородных Н.О. Метод и программное средство разработки баз знаний на основе трансформации концептуальных моделей	35
Грищенко М.А., Дородных Н.О. Модуль синтеза CRUD-интерфейса для продукционных баз знаний	35
Жарков М.Л. О моделировании работы микрологистических-транспортных систем на основе теории массового обслуживания	36
Зароднюк Т.С. Численное исследование одной невыпуклой траекторной задачи молекулярной динамики	37
Зароднюк Т.С., Амелина Е.В. Оптимизация веса композитных конструкций с использованием методов машинного обучения с подкреплением	38
Зароднюк Т.С., Гусева И.С. Исследование унимодальности функционалов на основе технологии аппроксимации интегральной воронки управляемой системы	40
Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. О задаче Гесса-Аппельрота	41
Казаков А.Л. Некоторые точные решения со свободной границей нелинейного уравнения теплопроводности с источником	43
Козлов В.В. Динамика потоков тепла в подледной воде озера Байкал	45
Кондратьев В.С. Применение повторно порождаемых конфликтных ограничений в CDCCL-выводе к обращению некоторых криптографических функций	47
Кононов А.Д. Устойчивость интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений	48
Косов А.А., Семенов Э.И. Функция Ламберта и точные решения нелинейных параболических уравнений	49
Костылев Д.А. Разработка серверной части для имитационного моделирующего комплекса на базе Lego EV3	50
Кочемазов С.Е. Применение алгоритмов решения задачи булевой выполнимости к исследованию дискретных моделей коллективного поведения	52
Кузнецов П.А. О трехмерной краевой задаче для нелинейного уравнения теплопроводности с данными на замкнутой нестационарной поверхности	53
Лакеев А.В., Линке Ю.Э., Русанов В.А. О непрерывности оператора Релея-Ритца	54
Леонтьев Р.Ю. Итерационные методы построения решений нелинейных операторных уравнений с векторным параметром в секториальных областях	56
Малков Ф.С. Перспективы применения системы публикации данных SKAN для поддержки исследования микробиома озера Байкал	58
Малтугуева Г.С., Юрин А.Ю. О подборе методов решения задач выбора на основе их структурированных описаний	59
Малтугуева Н.С. Об одной дискретно-непрерывной задаче размещения	60

Марков Ю.А., Маркова М.А. Волновые уравнения высшего порядка для частиц со спином 1 и 3/2 и их связь с унитарным квантованием	61
Мошкин Р.П. Алгебраические уравнения Пуанкаре, уравнения Аппеля и неудерживающие связи в случае саней Чаплыгина на наклонной вогнуто-выпуклой негладкой поверхности (вторая часть исследовательской работы)	62
Орлов Св.С. О редукциях одного класса квазилинейных вырождающихся параболических уравнений	64
Павлов А.И., Столбов А.Б., Дорофеев А.С. О принципах реализации программных интерфейсов для компонентов системы агентного моделирования	65
Парамонов В.В., Ружников Г.М., Михайлов А.А., Фёдоров Р.К., Ключевский А.В., Демьянович В.М. Информационно-аналитическая система сопоставления и оценки опасных геологических процессов на примере Байкало-монгольского региона	66
Пашинин А.А., Богданова В.Г. Разработка архитектуры специализированной системы автоматизации создания программных сервисов для качественного анализа двоичных динамических систем	67
Петренко П.С. К вопросу об управляемости вырожденной линейной гибридной системой	69
Погодаев Н.И., Старицын М.В. Об одной вырожденной задаче управления уравнением неразрывности	70
Попова А.К. Создание веб-сервиса моделирования динамики лесных ресурсов	72
Салимов Б.Г., Хмельнов А.Е., Бернгардт О.И. Построение модели $f_0F_2$ по индексам солнечной и геомагнитной активности и данным иркутского дигизонда	74
Сорокин С.П., Старицын М.В. Алгоритм позиционных вариаций управления для задач динамической оптимизации в классе разрывных траекторий	75
Сороковиков П.С. Вероятностный одноуровневый динамический планировщик расчетов для задачи глобального поиска	76
Сороковиков П.С. Программная реализация метода Брента для мономерной задачи оптимизации с автоматической оценкой константы Липшица	77
Сороковиков П.С. Низкопотенциальные кластеры Морса размерностей от 261 до 280 атомов*	78
Сороковиков П.С. Низкопотенциальные кластеры Гупта размерностей от 126 до 156 атомов	79
Столбов А.Б., Лемперт А.А., Курганская О.В. О принципах создания концептуальной модели инфраструктурной логистики	80
Суслов В.И., Горнов А.Ю., Лемперт А.А. Программный комплекс для задач оптимизации в линейных экономических моделях с невыпуклыми функционалами	81
Терлецкий В.А., Чуйко Е.С. Обобщенное решение уравнения теплопроводности на основе его интегрального эквивалента	82
Толстихин А.А. Разработка системы идентификации роботов для имитационного моделирующего комплекса на базе LEGO EV3	83
Ушаков А.В. Параллельный алгоритм решения задачи о k-медоидах в приложении к кластеризации больших коллекций изображений	85

Фалалеев М.В. О разрешимости в классах распределений интегро-дифференциальных уравнений с оператором конечного индекса при старшей производной в банаховых пространствах	87
Феоктистов А.Г., Костромин Р.О. Алгоритм выбора лидера виртуального сообщества агентов	88
Фереферов Е.С., Ветров А.А. Разработка информационной системы поддержки археологических исследований	91
Фёдоров К.Р. Определение района по описанию местоположения образцов гербария с помощью нейронной сети	92
Фёдоров Р.К., Ветров А.А. Развитие подсистемы ввода и редактирования данных геопортала	93
Финогенко И.А. Развитие метода предельных дифференциальных уравнений для исследования асимптотического поведения решений неавтономных систем	94
Хандаров Ф.В., Баталов А.В., Бадагаров Д.Ж. Эмпирический факторный анализ на основе нейросетевых моделей	95
Хандаров Ф.В., Митьшов Д.А., Саргаева А.В. Программный комплекс построения и анализа персонажных систем литературных произведений	96
Хмельнов А.Е. Поддержка разработки форм DELPHI/LAZARUS с использованием общей кодовой базы для разных библиотек компонентов	98
Черкашин Е.А. Структурирование знаний процедуры трансформации моделей в МДА	101
Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В. Об односторонней устойчивости свойств линейных дифференциально-алгебраических уравнений к возмущениям входных данных	102
Юринова В.О. Геометрия в живописи	103
Янулевич М.В., Баркова М.В. О методе локального поиска в невыпуклой задаче оптимального управления с целевым функционалом Лагранжа	104
Семенов А.А. Автоматическое построение некоторых атак в алгебраическом криптоанализе	105
Заикин О.С., Кочемазов С.Е. Сравнительный анализ различных пропозициональных кодировок для задач криптоанализа некоторых алгоритмов поточного шифрования	106

Научно-организационный отдел  
Федерального государственного бюджетного учреждения науки  
Института динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова  
Сибирского отделения Российской академии наук  
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134  
E-mail: rio@icc.ru

Подписано к печати 26.11.2018 г. Формат  
бумаги 60×84 1/16, объем 6,25 п.л. Заказ 6.  
Тираж 100 экз.

---

Отпечатано в ИДСТУ СО РАН